# OBMEP – Banco de Questões 2017

Régis Barbosa e Samuel Feitosa

Banco de Questões 2017

Estrada Dona Castorina, 110 – Rio de Janeiro – 22460-320

Impresso no Brasil/Printed in Brazil
Primeira edição e impressão

Texto e diagramação: Régis Barbosa e Samuel Feitosa

Revisão: Cléber Francisco Assis

Este livro foi escrito usando o sistema LaTeX.

Capa: Ampersand Comunicações Gráfica – EPP

IMPA/OBMEP
Banco de Questões 2017
Rio de Janeiro, IMPA, 2017
176 páginas
ISBN 978-85-244-0427-6

Distribuição
IMPA/OBMEP
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: contato@obmep.org.br
www.obmep.org.br

# CONTEÚDO

# APRESENTAÇÃO

Desde a sua primeira edição em 2005, a OBMEP envia a todas as escolas públicas do país um Banco de Questões com problemas e desafios de Matemática para alunos e professores. O Banco pretende despertar o prazer pela Matemática, estimular o aluno interessado com perguntas instigantes e proporcionar um treinamento para as provas da OBMEP.

Os problemas deste ano, concebidos pelos professores Régis Barbosa e Samuel Feitosa, estão ordenados em grau crescente de dificuldade e exigem mais imaginação do que uma boa educação em Matemática.

A edição deste ano do Banco de Questões e todas as edições anteriores estão disponíveis na página www.obmep.org.br, assim como as apostilas e o material didático utilizado no Programa de Iniciação Científica Junior.

Caso encontre alguma solução diferente daquela apresentada ao final do Banco de Questões, não deixe de mandá-la para

bancodequestoes@obmep.org.br.

As mais originais serão publicadas na página da OBMEP.

Boa diversão!
Claudio Landim
Coordenador Geral da OBMEP

# PREFÁCIO

Querido leitor/leitora,

O Banco de Questões deste ano da OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – segue o mesmo padrão do banco do ano passado. Para facilitar a busca de questões em meio ao livro, há um Sumário no início e um Índice Remissivo no final com os nomes dos problemas e respectivas páginas onde aparecem seus enunciados e soluções. Além disto, as questões do Nível 1 são numeradas como $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$ etc. As questões do Nível 2 são numeradas como $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$ etc. E as questões do Nível 3 são numeradas como **1**, **2**, **3** etc.

Muitos dos problemas podem resistir às primeiras investidas do leitor e isto não deve ser motivo de desânimo. Um bom conselho é discuti-los com outras pessoas. Isto certamente tornará a experiência de resolvê-los ainda mais prazerosa. Além disto, durante a leitura das soluções, o uso do papel e da caneta podem ser bons instrumentos para a compreensão de todos os detalhes envolvidos.

Alguns dos problemas deste banco foram inspirados em clássicos problemas de olimpíadas ao redor do mundo e hoje constituem um tipo de conhecimento folclórico que todo estudante e professor interessado em competições deve ter contato. Não podemos deixar de manifestar um enorme agradecimento a todos os professores, geralmente anônimos, que dedicam um enorme tempo de suas vidas elaborando belos problemas de olimpíadas e que tanto nos estimulam a aprender mais Matemática.

Bom proveito!

Régis Barbosa e Samuel Feitosa

# NÍVEL 1

## 1 *O cachorro e o gato*

Um cachorro avista um gato que está a 30 m de distância e começa a persegui-lo. Ambos começam a correr em linha reta, no mesmo sentido e com passadas sincronizadas. O cachorro se desloca 50 cm a cada passada enquanto o gato se desloca apenas 30 cm. Depois de quantas passadas o cachorro alcançará o gato? Justifique sua resposta.

## 2 *Buracos de zeros*

É possível multiplicar o número 101001000100001 por outro inteiro de modo que o resultado não tenha algarismos iguais a zero?

## 3 *Caixas e mentiras*

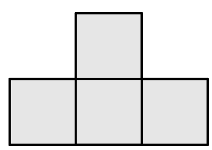
Existem 100 caixas idênticas, todas tampadas, dispostas em uma linha. Em uma das caixas, existe um diamante. Cada caixa possui a seguinte mensagem escrita em sua tampa: “ o diamante está na caixa da esquerda ou da direita”. Sabemos que exatamente uma das mensagens é verdadeira e todas as demais são falsas. Abrindo apenas a tampa de uma delas, é possível descobrirmos onde está o diamante?

## 4 *Os três alunos*

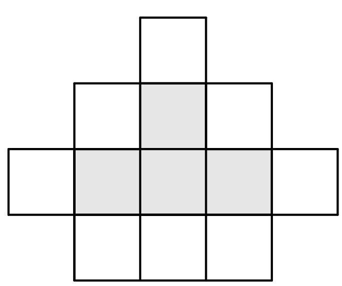
Três alunos chamados João, Maria e José resolveram uma prova com 100 questões e cada um deles acertou exatamente 60 delas. Uma questão é classificada como *difícil* se apenas um aluno a acertou e é classificada como *fácil* se os três a acertaram. Sabemos que cada uma das 100 foi resolvida por pelo menos um aluno. Existem mais questões difíceis ou fáceis. Além disso, determine a diferença entre a quantidade de questões difíceis e fáceis.

## 5 *Construindo figuras com quadradinhos*

João possui um brinquedo com peças planas e quadradas de lado 1 m. Ele pode unir duas peças através de um lado. A figura abaixo mostra um exemplo de configuração que João construiu com 4 quadrados.



Perceba que o perímetro da figura é formado por 10 segmentos unitários. Depois de construir uma configuração, ele gosta de construir uma nova apenas acrescentando um quadrado a todos os encaixes da figura inicial formando assim uma nova camada de quadrados. Por exemplo, a partir da figura anterior, ele poderia acrescentar uma camada obtendo a próxima figura.



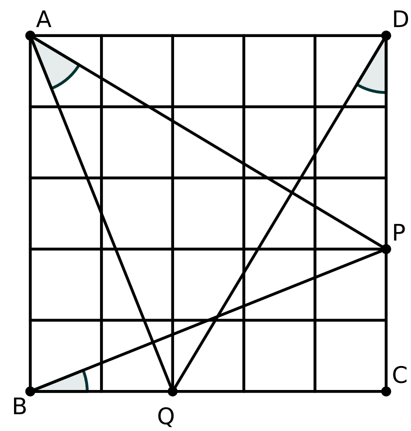
Note que os 8 quadrados acrescentados usam em suas conexões todos os 10 segmentos do perímetro anterior e não é possível acrescentar um novo quadrado encaixando apenas na figura original.

a) Começando com um quadrado $1 \times 1$, calcule o perímetro da configuração que João irá obter ao acrescentar duas camadas consecutivas.

b) Começando com um quadrado $1 \times 1$, calcule o perímetro da configuração que João irá obter após o décimo acréscimo sucessivo de camadas.

## 6 *Ângulos no reticulado*

No desenho abaixo, cada quadradinho da figura possui lado de comprimento 1 m. Determine a soma dos ângulos $\angle PBC + \angle QAP + \angle QDC$.




## 7 *Cubos e cola*

a) Um cubo $3 \times 3 \times 3$ foi construído com 27 cubos menores $1 \times 1 \times 1$. Para cada par de faces em contato de dois cubos é usado uma gota de cola. Quantas gotas de cola foram usadas ao todo?

b) Um cubo $10 \times 10 \times 10$ foi construído com 1000 cubos menores $1 \times 1 \times 1$. Para cada par de faces em contato de dois cubos é usado uma gota de cola. Quantas gotas de cola foram usadas ao todo?

## 8 *Afirmações verdadeiras e falsas*

Considere as seguintes afirmações:

1) O número $N$ é divisível por 2.

2) O número $N$ é divisível por 4.

3) O número $N$ é divisível por 12.

4) O número $N$ é divisível por 24.

Três dessas sentenças são verdadeiras e uma é falsa. Qual delas é a falsa?

## 9 *A sequência de Conway*

a) Na sucessão de 9 linhas com algarismos apresentada abaixo, cada sequência de dígitos em uma linha é obtida da linha anterior através de uma regra.

1,
11,
21,
1211,
111221,
312211,
13112221,
1113213211,
31131211131221
...

Determine os algarismos da décima linha.

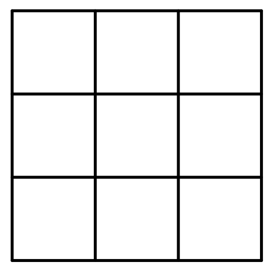
b) Na sucessão de linhas abaixo, foi aplicada a mesma regra do item anterior, entretanto, o primeiro algarismo $d \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ é diferente de 1.

$d$,
$1d$,
$111d$
...

Qual a sequência de algarismos escritos na sétima linha?

## 10 *Pintura de quadradinhos*

Os 9 quadradinhos de um tabuleiro $3 \times 3$, como mostrado na figura abaixo, devem ser pintados de modo que em cada linha, cada coluna e cada uma de suas duas diagonais não existam quadradinhos de uma mesma cor. Qual a menor quantidade de cores necessárias para essa pintura?

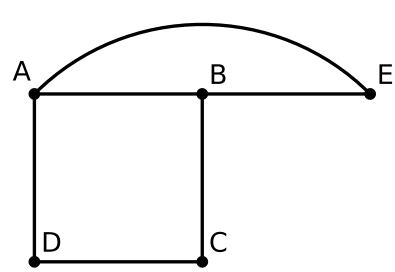


## 11 *O parque de diversões*

No final de um dia de atividades, um parque de diversões arrecadou 100 reais com os ingressos de 100 pessoas. Sabemos que cada adulto precisava pagar 3 reais para entrar, jovem 2 reais e cada criança 30 centavos. Qual é o menor número de adultos que entraram nesse dia no parque?

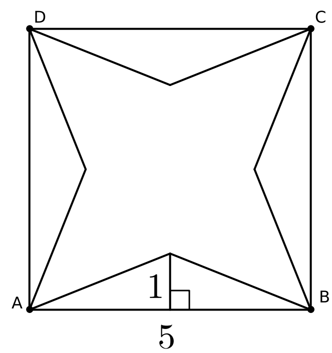
## 12 *Corte a figura*

Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado e o arco $AE$ faz parte de uma circunferência de centro $C$ e raio $AC$. Determine como cortar a figura em outras duas iguais.



## 13 *Estrela no quadrado*

Dentro do quadrado abaixo, de lado medindo 5 cm, uma estrela foi criada desenhando-se quatro triângulos isósceles idênticos medindo 1 cm de altura. Encontre uma fração irredutível que representa a razão entre a área da estrela e a área do quadrado.




**Observação:** Um triângulo é *isósceles* se dois de seus lados são iguais.

## 14 *Estrela no tabuleiro*

No tabuleiro abaixo, em cada linha e em cada coluna está escrito exatamente um número do conjunto $\{1,2,3,4\}$. Qual número está no quadradinho com o símbolo de $\star$?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | |
| | 1 | 2 | |
| 2 | | $\star$ | 1 |
| 3 | | 1 | |

## 15 *Pontuando no Pebola*

No jogo Pebola, duas equipes disputam para ver quem faz mais pontos. Existem duas formas de pontuar: o gol que vale 3 pontos e o toque-baixo que vale 7 pontos.

(a) Mostre que não é possível obter exatamente 11 pontos numa partida de Pebola.

(b) Supondo que não há limite para a quantidade de pontos, explique por que é possível obter qualquer pontuação maior que ou igual a 12 pontos.

## 16 *A divisão do tabuleiro*

É possível dividirmos um tabuleiro $39 \times 55$ em tabuleiros $5 \times 11$?

## 17 *A operação* $\star$

Dados dois números reais $a$ e $b$, defina a operação $a \star b$ por $a \star b = a \cdot b + a + b + 6$. Por exemplo, $3 \star 7 = 3 \cdot 7 + 3 + 7 + 6 = 23$ e $3 \star 3 = 3 \cdot 3 + 3 + 3 + 6 = 21$.

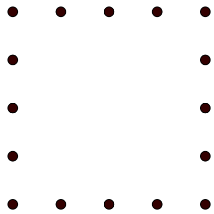
a) Encontre o valor de $9 \star 99$.

b) Encontre o número real $b$ tal que $2 \star b = b$.

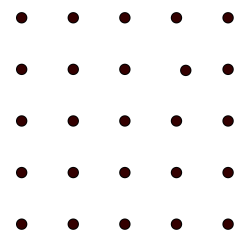
c) Determine todos os números inteiros positivos $a$ e $b$, com $a < b$, tais que $a \star b = 20$.

## 18 *Contando os quadrados*

(a) Determine o número de quadrados com os 4 vértices nos pontinhos da figura, sabendo que eles formam um quadrado e que a distância entre dois pontos consecutivos é a mesma.



(b) Determine o número de quadrados com os 4 vértices nos pontinhos da figura, sabendo que eles formam um quadrado e que a distância entre dois pontos consecutivos é a mesma.



## 19 *Provando um truque de multiplicação*

O professor Piraldo conhece muitos truques de multiplicação. Certo dia, Juquinha perguntou quanto dá $62 \cdot 68$ e rapidamente o professor respondeu 4216. Após alguns minutos de euforia da turma ele decidiu explicar esse truque. O truque funciona ao multiplicar dois números de dois dígitos que possuem o mesmo dígito nas dezenas e a soma das unidades é 10. No exemplo, os dois têm 6 nas dezenas e $2+8=10$. Ele explicou que o resultado possui até 4 dígitos, o produto das unidades define os 2 últimos dígitos e os 2 primeiros, quando existirem dois já que o resultado pode ter três dígitos no total, são o resultado do dígito das dezenas multiplicado por seu sucessor.

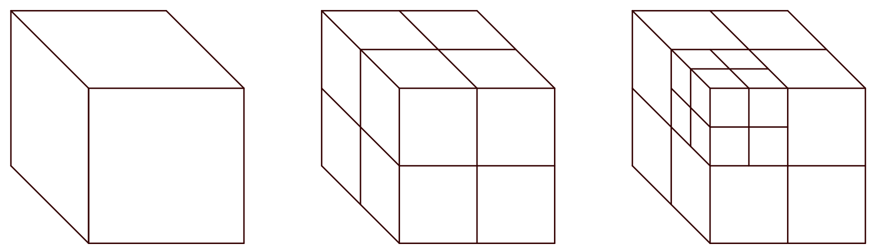
(a) Usando o truque, calcule $45 \cdot 45$.

(b) Usando o truque, calcule $71 \cdot 79$.

(c) Agora vamos provar que o truque funciona. Considere dois números de dois dígitos $\overline{ab} = 10a + b$ e $\overline{ac} = 10a + c$, com $b + c = 10$. Mostre que o produto $b \cdot c$ determina os 2 dígitos finais e $a(a+1)$ determina os 2 dígitos iniciais do produto $\overline{ab} \cdot \overline{ac}$.

## 20 *Cortando um cubo em 8 cubinhos*

As figuras a seguir mostram uma maneira de recortar um cubo em cubinhos menores.



Veja que começamos com um único cubo e após os cortes passamos a ter 8 cubos menores. Se escolhermos um desses cubos e o cortarmos em 8 cubinhos, vamos obter exatamente 15 cubos menores. Veja ainda que esses cubinhos não são todos iguais. Suponha que esse processo foi repetido algumas vezes. Pergunta-se:

(a) Quantas vezes devemos realizar esse processo para obtermos exatamente 99 cubinhos?

(b) Repetindo esse processo, é possível obter exatamente 2016 cubinhos?

## 21 *Soma de sete inversos*

(a) Calcule a soma:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}.$$

(b) Calcule a soma:

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}.$$

(c) Determine sete inteiros positivos, todos distintos, tais que a soma dos seus inversos seja igual a 1.

## 22 *Números três estrelas*

Dizemos que um número inteiro positivo de três dígitos é *três estrelas* se ele for o resultado do produto de três números primos distintos. Por exemplo, $286 = 2 \cdot 11 \cdot 13$ é um número *três estrelas*, mas $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ e $275 = 5 \cdot 5 \cdot 11$ não são números *três estrelas*, pois o primeiro só possui dois dígitos e o segundo não é o produto de três primos distintos.

(a) Qual o menor número *três estrelas*?

(b) Mostre que todo número *três estrelas* é divisível por 2, por 3 ou por 5.

## 23 *Jogando com um rei em um tabuleiro* $5 \times 5$

Antônio e Beto decidem jogar em um tabuleiro $5 \times 5$ com um único rei de um jogo de xadrez. Antônio começa colocando o rei em uma das casinhas do tabuleiro. Em seguida, Beto deve mover o rei para uma das casinhas vizinhas da casinha em que ele está. Nesse problema, duas casinhas são vizinhas se compartilham um lado ou um vértice. Após a jogada de Beto, Antônio deve mover o rei para uma das casinhas vizinhas, mas não pode mover para uma casinha que já foi visitada. Os dois jogadores seguem movendo alternadamente o rei para casinhas que ainda não foram visitadas pelo rei. O jogador que em sua jogada não puder mover o rei seguindo essas regras perde o jogo.

(a) Mostre uma maneira de cobrir completamente um tabuleiro $5 \times 5$ com 1 pecinha $1 \times 1$ e 12 pecinhas $1 \times 2$, que são conhecidas popularmente como dominós, sendo que 1 pecinha $1 \times 1$ cobre exatamente uma casinha e 1 pecinha $1 \times 2$ cobre exatamente 2 casinhas do tabuleiro.

(b) A partir da tarefa realizada no item anterior, explique uma maneira de Antônio jogar de modo que ele sempre vença o jogo, não importando como Beto faça suas jogadas.

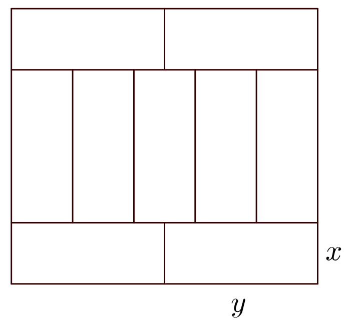
**Observação:** O rei é uma peça do jogo de xadrez que, na sua vez, pode andar apenas uma casa em qualquer direção movendo-se para um quadradinho vizinho.

## 24 *Quantas meninas responderam sim?*

Ao redor de uma mesa circular, estão sentadas 18 meninas, 11 vestidas de azul e 7 vestidas de vermelho. Para cada uma delas, é perguntado se a menina à sua direita está vestida de azul e cada uma responde sim ou não. Sabe-se que uma menina fala a verdade apenas quando as suas duas vizinhas, a da direita e a da esquerda, estão vestidas com roupas da mesma cor. Quantas meninas irão responder sim? Se houver mais de uma possibilidade diga todas.

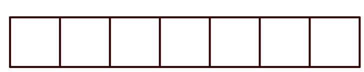
## 25 *Tirando conclusões com vários retângulos iguais*

A figura a seguir representa um retângulo grande de área 90 $\text{cm}^2$ formado por retângulos menores de dimensões $x$ e $y$. Determine $x$ e $y$ em $cm$.

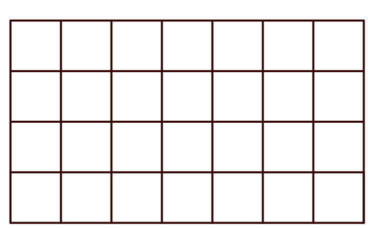



## 26 *Quantos retângulos?*

(a) Determine quantos retângulos podem ser formados usando os quadradinhos da figura a seguir?

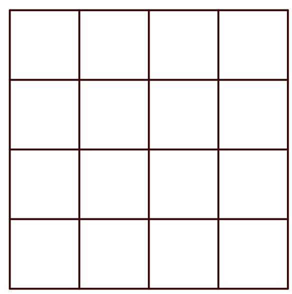


(b) Determine quantos retângulos podem ser formados usando os quadradinhos da figura a seguir?



## 27 *Colocando* $-1, 0$ *e* $1$ *para obter somas distintas*

Na figura a seguir, temos um tabuleiro $4 \times 4$.



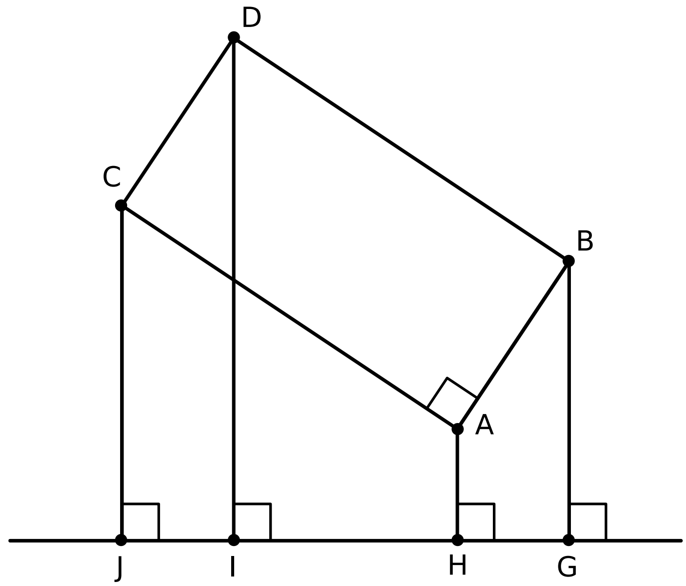
Em cada quadradinho $1 \times 1$, vamos colocar exatamente um número do conjunto $\{-1, 0, 1\}$. Uma colocação desses números é dita *fofinha* se ao somarmos os números em cada uma das 4 linhas e os números em cada uma das 4 colunas obtivermos 8 números diferentes.

(a) Explique por que não existe colocação *fofinha* no tabuleiro $4 \times 4$ em que não apareça soma 4 nem soma $-4$.

(b) Exiba uma colocação *fofinha* para o tabuleiro $4 \times 4$.

## 28 *Distâncias para uma reta*

Na figura abaixo, $ABCD$ é um retângulo e as distâncias dos vértices $A$, $B$ e $C$ ao segmento $JG$ valem 2, 4 e 5 metros, respectivamente. Encontre a distância do vértice $D$ ao segmento $JG$.




## 29 *Anos legais*

Dizemos que um ano é *legal* se sua representação decimal não contém dígitos repetidos. Por exemplo, todos os anos de 2013 a 2019 são *legais*. Entretanto, 2020 e 2344 não são *legais*.

a) Encontre a próxima sequência de 7 anos consecutivos *legais* depois de 2019.

b) É possível existir no futuro, a contar do ano de 2016, uma sequência com mais de 7 anos consecutivos *legais*?

## 30 *Pilhas de livros*

Determine como distribuir 100 livros em 10 pilhas com quantidades de livros todas distintas de modo que a divisão de qualquer uma dessas pilhas em outras duas faça com que a nova distribuição de 11 pilhas tenha pelo menos duas com o mesmo número de livros.

**Observação:** Uma pilha só pode ser dividida em outras duas se as pilhas possuírem inteiros positivos como quantidades de elementos.

# NÍVEL 2

## 1 *Sistema com potências*

Sabemos que

$$\frac{8^x}{2^{x+y}} = 64 \text{ e } \frac{9^{x+y}}{3^{4y}} = 243.$$

Determine o valor de $2xy$.

## 2 *Jogo dos sinais*

João e Maria disputam um jogo. Eles jogam alternadamente e, na sua vez, cada jogador pode colocar um sinal de + ou um sinal de − em um dos espaços vazios assinalados na figura abaixo. Maria ganha se a soma no final resultante é $-4$, $-2$, $0$, $2$ ou $4$ e João nos outros casos. Exiba uma estratégia de modo que Maria sempre ganhe independentemente de como João jogue. João é o primeiro a jogar.

$$\_\_\ 1\ \_\_\ 2\ \_\_\ 3\ \_\_\ 4\ \_\_\ 5\ \_\_\ 6\ \_\_\ 7\ \_\_\ 8$$

## 3 *Produtos de potências*

João escreveu todas as potências de 2, 3 e 5 maiores que 1 e menores que 2017 em uma folha de papel. Em seguida, ele realizou todos os produtos possíveis de dois números distintos dessa folha e os escreveu em outra folha de papel. Qual a quantidade de inteiros que João registrou na segunda folha?

## 4 *Quadrados pintados*

Um quadrado $9 \times 9$ foi dividido em 81 quadrados $1 \times 1$ e 8 deles foram pintados de preto e o restante de branco.

a) Mostre que independente de onde eles tenham sido pintados, sempre é possível encontrar um quadrado $3 \times 3$, formado pela justaposição de quadradinhos e com lados paralelos aos lados do tabuleiro, de modo que todos os seus quadrados sejam brancos.

b) Exiba um exemplo de pintura do tabuleiro na qual não seja possível encontrar qualquer retângulo com mais de 9 quadradinhos, também formado pela justaposição de quadradinhos e com lados paralelos aos lados do tabuleiro, sem conter um quadradinho pintado de preto.

## 5 *Quantos números estão escritos na lousa?*

João escreveu alguns números reais não nulos, todos distintos, na lousa de modo que se tomarmos qualquer um deles e o elevarmos ao quadrado o resultado é maior que o produto de quaisquer outros dois números escritos na lousa.

(a) Explique por que não pode haver três reais positivos escritos na lousa.

(b) Explique por que não pode haver três reais negativos escritos na lousa.

(c) Explique por que não pode haver dois números positivos e dois números negativos escritos na lousa.

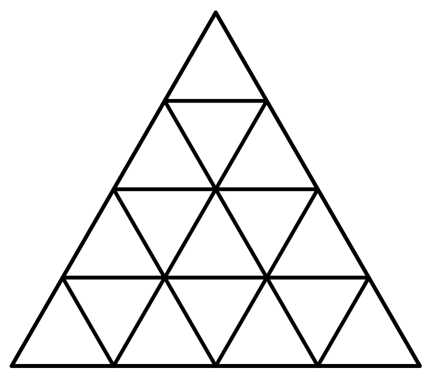
(d) Determine a maior quantidade possível de números escritos na lousa com um exemplo de um conjunto de números que satisfaça a condição requerida.

## 6 *Primo ou composto?*

Determine se o número $\underbrace{11\ldots1}_{2016}2\underbrace{11\ldots1}_{2016}$ é um número primo ou um número composto.

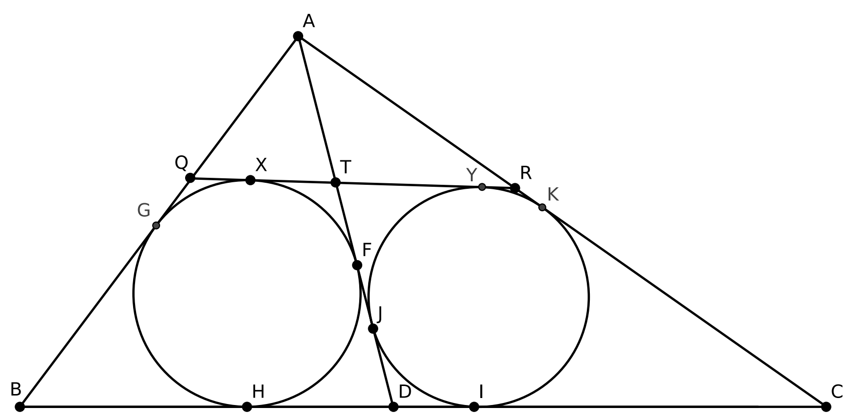
## $\boxed{7}$ *Números nos triângulos*

Na figura abaixo, estão desenhados 16 triângulos equiláteros de lado 1. Dizemos que dois deles são vizinhos se possuem um lado em comum. Determine se é possível escrevermos os números de 1 até 16 dentro desses triângulos de modo que todas as diferença entre os números colocados em dois triângulos vizinhos sejam 1 ou 2.



## $\boxed{8}$ *Segmento tangente aos incírculos*

Um ponto $D$ é escolhido no lado $BC$ do triângulo $ABC$. A reta tangente aos incírculos dos triângulos $ABD$ e $ADC$ e diferente de $BC$ e $AD$ intersecta o segmento $AD$ em $T$. Se $AB = 40$ cm, $AC = 50$ cm e $BC = 60$ cm, determine o valor do comprimento de $AT$.



## $\boxed{9}$ *Contando a quantidade de dígitos*

Podemos determinar a quantidade de algarismos da representação decimal de um número inteiro positivo determinando a maior potência de 10 que não é maior que ele. Mais precisamente, um número inteiro $N$ possui $k$ algarismos em sua representação decimal quando $10^{k-1} \leq N < 10^k$. Por exemplo, 2016 possui 4 algarismos. Em alguns problemas, é importante achar a quantidade de algarismos envolvidos no resultado de operações aritméticas.

a) Determine a quantidade de algarismos do produto $111111 \cdot 1111111111$, em que o primeiro fator possui 6 algarismos e o segundo possui 10 algarismos.

b) Os números $2^{2016}$ e $5^{2016}$ são escritos um ao lado do outro para formar um único número $N$ que possui uma quantidade de algarismos que é a soma das quantidades de algarismos dos dois números. Por exemplo, se fizéssemos isso com $2^3$ e $5^3$ iríamos obter o número 8125, que possui 4 algarismos. Determine a quantidade de algarismos de $N$.

## $\boxed{10}$ *Equação com soma dos inversos de inteiros positivos*

João estava estudando para as Olimpíadas de Matemática e se deparou com a seguinte equação

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{z},$$

onde $x$, $y$ e $z$ são inteiros positivos. Após tentar encontrar todas as soluções sem sucesso, ele pediu ajuda para o professor Piraldo, que decidiu dar algumas dicas de como ele deveria proceder. Vamos ajudar João a interpretar as dicas.

(a) Se $x = 1$, determine todos os pares $(y, z)$ de inteiros positivos que satisfazem a equação.

(b) Se $x = 2$ e $y \geq 2$, determine todos os pares $(y, z)$ de inteiros positivos que satisfazem a equação.

(c) Se $x = 3$ e $y \geq 3$, determine todos os pares $(y, z)$ de inteiros positivos que satisfazem a equação.

(d) Se $x$ e $y$ são maiores que ou iguais a 4, verifique que a equação não possui solução.

## 11 *Frações irredutíveis*

Uma fração é dita irredutível quando seu numerador e seu denominador não possuem fatores comuns, ou seja, quando o máximo divisor comum entre os dois números é 1. Por exemplo, a fração $\frac{3}{7}$ é irredutível, mas a fração $\frac{10}{14}$ não é, uma vez que 2 é um fator comum de 10 e 14. Para que valores de $n$ a fração $\frac{5n+6}{6n+5}$ é irredutível? Vamos estudar esse problema em partes:

a) Seja $d = mdc(5n+6, 6n+5)$ o máximo divisor comum de $5n+6$ e $6n+5$. Verifique que $d$ é um divisor de $n-1$.

b) Sabendo que $d$ é um divisor de $n-1$, conclua que $d$ também é um divisor 11.

c) Verifique que se 11 divide $5n+6$, então 11 divide $6n+5$.

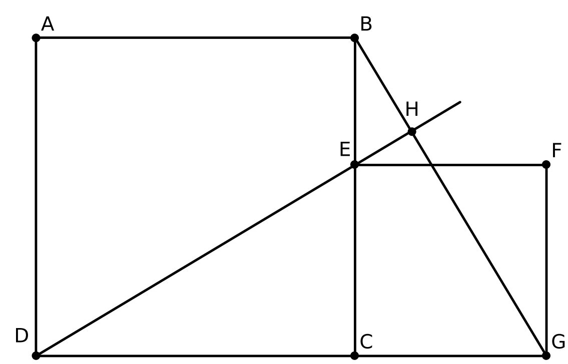
d) Para quantos inteiros positivos $n$, menores que 50, a fração $\frac{5n+6}{6n+5}$ é irredutível?

## 12 *Quadrados adjacentes*

No desenho abaixo, $ABCD$ e $EFGC$ são quadrados. As retas $BG$ e $DE$ se encontram no ponto $H$.

a) Verifique que $\angle BHD = 90°$ e conclua que o ponto $H$ está simultaneamente nas circunferências de diâmetros $BD$ e $EG$.

b) Encontre o valor de $\angle AHD + \angle DHG + \angle GHF$.



## $\boxed{13}$ *Cevianas no triângulo*

Um triângulo ABC tem lados de comprimentos $AB = 50$ cm, $BC = 20$ cm e $AC = 40$ cm. Sejam $M$ e $N$ pontos no lado $AB$ tais que $CM$ é a bissetriz relativa ao ângulo $\angle ACB$ e $CN$ é a altura relativa ao lado $AB$. Qual a medida, em centímetros, de $MN$?

## $\boxed{14}$ *Usando os fatores comuns*

Suponha que desejamos encontrar todos os inteiros não negativos $x$ e $y$ que satisfazem a equação

$$7x+11y = 154.$$

Se usarmos apenas que $7x \leq 154$ implica $x \leq 22$ e testarmos as possibilidades, faremos 23 testes de casos! Por outro lado, podemos reescrever a equação como

$$11y = 154-7x = 7(22-x).$$

Veja que 11 divide $7(22-x)$, mas não possui fatores em comum com o 7. Consequentemente 11 é um divisor de $22-x$. Como $22-x \leq 22$, basta testar $x = 0$, $x = 11$ ou $x = 22$ para encontrarmos as três soluções $(x, y) = (0,14)$, $(11,7)$ ou $(22,0)$ com apenas três testes de casos.

(a) Encontre todos os pares $(m, n)$ de inteiros não negativos que satisfazem a equação

$$5m+8n = 120.$$

(b) Sejam $a$, $b$ e $c$ números inteiros positivos com $c > 1$ tais que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

Prove que pelo menos um dos números $a+c$ ou $b+c$ é um número composto, ou seja, possui algum divisor maior que 1 e menor do que ele mesmo.

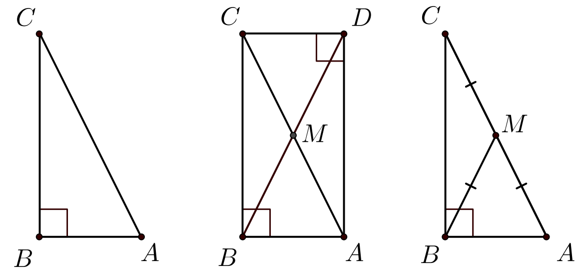
## $\boxed{15}$ *Papel quadriculado*

João possui uma folha de papel quadriculado com 10 quadrados de comprimento e 7 quadrados de largura. Ele escolheu 30 triângulos com vértices nas interseções das linhas desse papel quadriculado. Explique por que obrigatoriamente existem pelo menos dois triângulos escolhidos com vértices em comum.

## $\boxed{16}$ *Seis pontos em uma mesma circunferência*

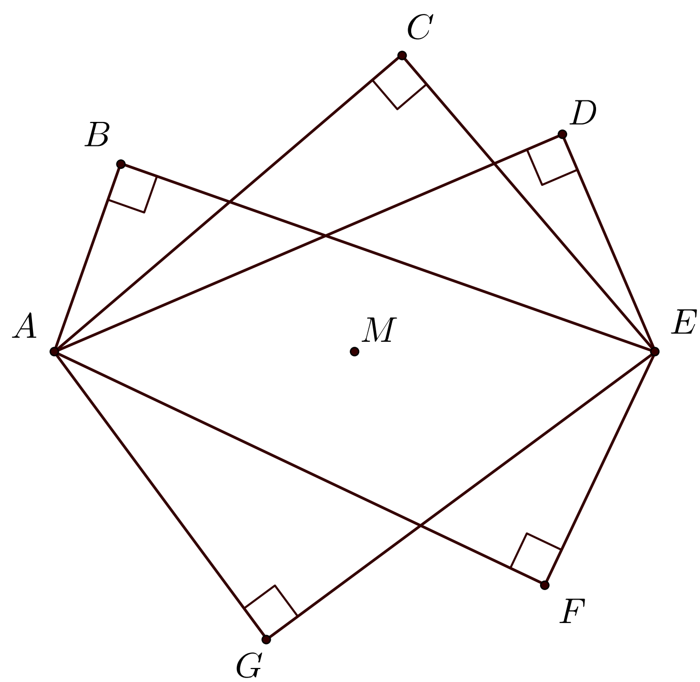
Uma propriedade muito interessante dos triângulos retângulos é o segmento que une o vértice com o ângulo reto ao ponto médio do lado oposto ter comprimento igual à metade do comprimento desse lado oposto.

(a) A primeira figura a seguir representa um triângulo $ABC$ retângulo no vértice $B$. Na segunda figura, adicionamos o triângulo $ADC$, que é congruente ao triângulo $ABC$, formando assim o retângulo $ABCD$. Além disso, traçamos as diagonais que se encontram no ponto $M$. Da segunda para a terceira figura, apenas apagamos o triângulo $ADC$.



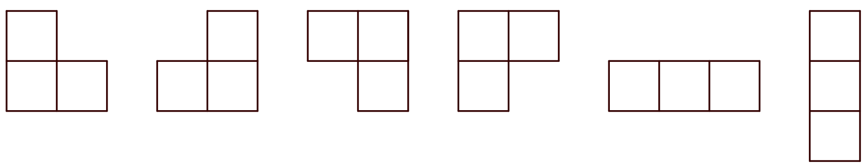

Usando a figura anterior, explique por que $AM = BM = CM$.

(b) Considere a figura a seguir em que $M$ é o ponto médio do segmento $AE$ e os ângulos nos pontos $B$, $C$, $D$, $F$ e $G$ são retos. Explique por que existe uma circunferência que passa pelos pontos $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ e $G$.

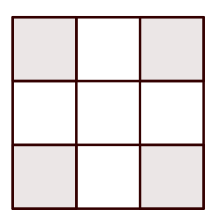


## $\boxed{17}$ *Cobrindo tabuleiros com L-triminós e I-triminós*

Queremos cobrir um tabuleiro quadriculado com certas pecinhas sem sobreposição e de modo que nenhuma parte delas fique fora do tabuleiro. Usaremos pecinhas, formadas por quadradinhos, chamadas L-triminós e I-triminós e que podem ser rotacionadas nas posições descritas na figura a seguir.



Para provar que é possível realizar uma cobertura, basta mostrar uma maneira de posicionar as pecinhas. Por outro lado, para provar que não é possível realizar alguma cobertura, nem sempre é conveniente testar todas as configurações possíveis de peças e muitas vezes precisamos esboçar argumentos engenhosos. Por exemplo, provaremos que não é possível cobrir um tabuleiro $3 \times 3$ usando apenas L-triminós.



Observe os quadradinhos pintados da figura. São 4 quadradinhos e não é possível cobrir dois deles usando um mesmo L-triminó. Assim, para cobrir os 4 quadradinhos teríamos que usar pelo menos 4 L-triminós, mas isso resultaria em $4 \cdot 3 = 12$ quadradinhos cobertos, que claramente excede o total de 9 quadradinhos do tabuleiro inteiro. Portanto, não é possível cobrir o tabuleiro $3 \times 3$ com L-triminós.

a) Mostre uma maneira de cobrir um tabuleiro $3 \times 4$ usando apenas L-triminós.

b) Prove que não é possível cobrir um tabuleiro $3 \times 5$ usando apenas L-triminós.

c) É possível cobrir o $3 \times 5$ usando exatamente um I-triminó e alguns L-triminós. Determine as posições que o I-triminó pode ocupar de modo que o resto do tabuleiro possa ser coberto com L-triminós.

## $\boxed{18}$ *Contando os divisores de $n^2$ maiores que $n$*

Para determinar a quantidade de divisores positivos de um número, basta fatorá-lo como potências de primos distintos e multiplicar os sucessores dos expoentes. Por exemplo, $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ possui $(5+1)(2+1)(1+1) = 36$ divisores positivos. Considere o número $n = 2^7 \cdot 3^4$.

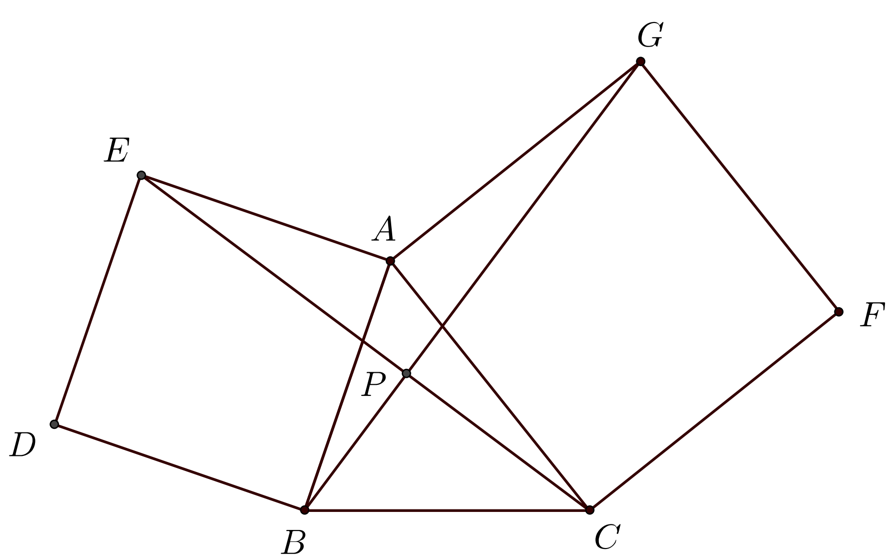
a) Determine o número de divisores positivos de $n^2$.

b) Quantos divisores de $n^2$ são maiores que $n$?

c) Quantos divisores de $n^2$ são maiores que $n$ e não são múltiplos de $n$?

## $\boxed{19}$ *Triângulos rotacionados*

Considere um triângulo $ABC$ e quadrados $ABDE$ e $ACFG$ construídos exteriormente sobre seus lados. Os segmentos $BG$ e $EC$ se intersectam em $P$.

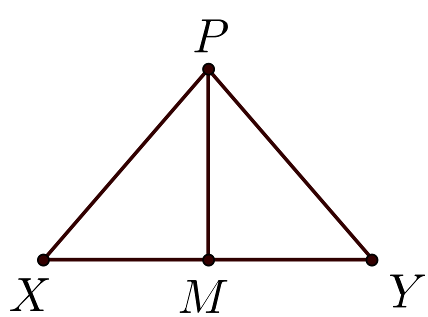



a) Prove que os triângulos $BAG$ e $EAC$ são congruentes.

b) Como esses dois triângulos são congruentes e possuem o ponto $A$ em comum, podemos rotacionar um deles em torno do ponto $A$ para obter o outro. Determine o ângulo de rotação e calcule o ângulo $\angle BPC$.

## 20 *A mediatriz*

A mediatriz de um segmento $XY$ é a reta perpendicular ao segmento passando por seu ponto médio. A principal propriedade da mediatriz é que um ponto está sobre ela se, e somente se, a distância desse ponto até $X$ é igual à distância desse ponto até $Y$. Uma afirmação formada usando "se, e somente se" é equivalente a duas implicações. No presente caso, para verificar a afirmação feita, precisamos por um lado mostrar que se a distância até $X$ é igual à distância até $Y$, então o ponto está na mediatriz. Por outro lado, precisamos mostrar que se um ponto está sobre a mediatriz, então as distâncias aos pontos $X$ e $Y$ são iguais. Para provar a primeira parte, considere um ponto $P$ tal que $PX = PY$ e seja $M$ o ponto médio de $XY$.




Os triângulos $PMX$ e $PMY$ são congruentes, pois possuem os três lados correspondentes de mesmo comprimento. Portanto, $\angle PMX = \angle PMY$. Como $X$, $M$ e $Y$ são colineares, temos $\angle PMX + \angle PMY = 180°$. Consequentemente, $\angle PMX = 90°$ e $P$ está na reta perpendicular ao segmento que passa pelo seu ponto médio.

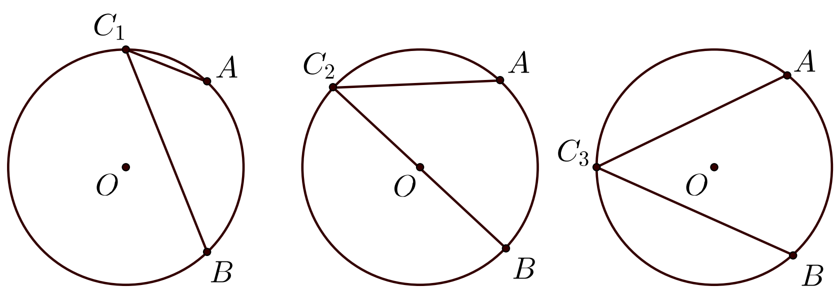
a) Prove a segunda parte da proposição, ou seja, prove que se $P$ é um ponto sobre a reta mediatriz de $XY$, então $PX = PY$.

b) Prove que todo triângulo $ABC$ possui um ponto $O$ no mesmo plano tal que $OA = OB = OC$. Esse ponto é denominado circuncentro do triângulo, pois uma circunferência de centro $O$ e raio $AO$ passa pelos três vértices do triângulo $ABC$.

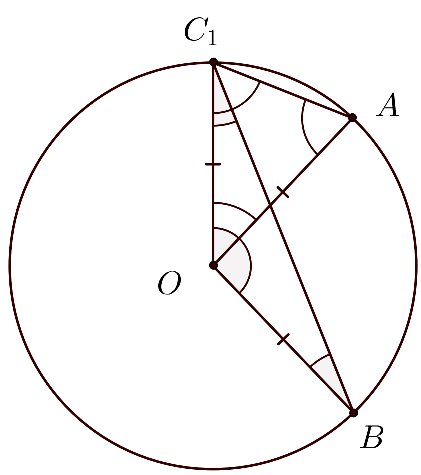
c) Considere um quadrilátero $ABCD$. Suponha que as mediatrizes de $AB$, $AC$ e $AD$ são concorrentes, ou seja, as três passam por um mesmo ponto. Prove que existe uma circunferência que passa pelos 4 vértices do quadrilátero $ABCD$.

## 21 *Ângulos em uma circunferência*

Considere dois pontos $A$ e $B$ em uma circunferência de centro $O$. A medida do menor arco $AB$ é dada pelo ângulo $\angle AOB$. Para qualquer ponto $C$ no maior arco $AB$, a medida do ângulo $\angle ACB$ será exatamente metade da medida do ângulo $\angle AOB$. O ângulo $\angle AOB$ é chamado de ângulo central e o ângulo $\angle ACB$ é chamado ângulo inscrito no arco $AB$. Para provar essa relação entre o ângulo central e o ângulo inscrito, vamos considerar as três possibilidades: o ponto $O$ é externo ao triângulo $ACB$, $O$ está sobre um dos lados do triângulo $ACB$ ou $O$ é interno ao triângulo $ACB$. Essas possibilidades estão ilustradas na próxima figura.




Unindo o centro $O$ aos três pontos na primeira figura, como $OA = OB = OC$, temos os triângulos isósceles $AOC_1$ e $BOC_1$.



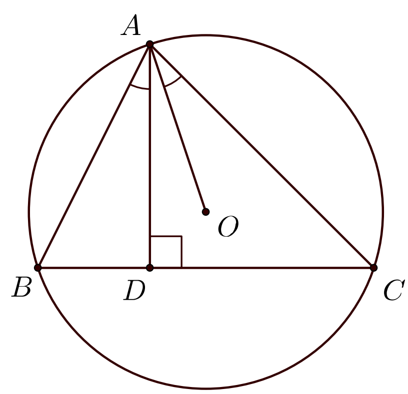

Lembrando que triângulos isósceles possuem ângulos iguais aos lados opostos que são iguais, vale que $\angle AC_1O = \angle C_1AO = x$ e $\angle BC_1O = \angle C_1BO = y$. Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180^\circ$, temos $\angle AOC_1 = 180^\circ - 2x$ e $\angle BOC_1 = 180^\circ - 2y$. Daí,

$$\begin{aligned}
\angle AOB &= \angle BOC_1 - \angle AOC_1 \\
&= (180^\circ - 2y) - (180^\circ - 2x) \\
&= 2(x - y) \\
&= 2\angle AC_1B.
\end{aligned}$$

a) Prove que também vale $\angle AOB = 2\angle ACB$ nos outros dois casos exibidos na última figura.

b) Na segunda figura, a corda $C_2B$ passa pelo centro da circunferência e, portanto, trata-se de um diâmetro. Determine o ângulo $\angle C_2AB$ inscrito no diâmetro, ou seja, em um arco que representa metade da circunferência.

c) No triângulo $ABC$ da figura a seguir, $AD$ é a altura relativa ao lado $BC$ e $O$ é o centro da circunferência que passa por $A$, $B$ e $C$. Prove que $\angle CAO = \angle DAB$.




## 22 *Números interessantes*

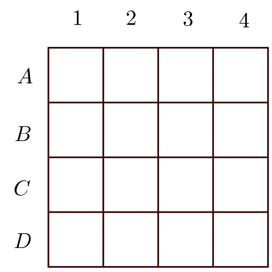
Um número natural $n$ é *interessante* se a soma dos dígitos de $n$ é igual a soma dos dígitos de $3n+11$. Verifique que existem infinitos números interessantes.

## 23 *Fila de cadeiras*

Existem 2017 cadeiras não ocupadas em uma fila. A cada minuto, uma pessoa chega e se senta em uma delas que esteja vazia e, no mesmo instante, caso esteja ocupada, uma pessoa em uma cadeira vizinha se levanta e vai embora. Qual o número máximo de pessoas que podem estar simultaneamente sentadas na fileira de cadeiras?

## 24 *Maneiras de escolher quadradinhos com certas condições*

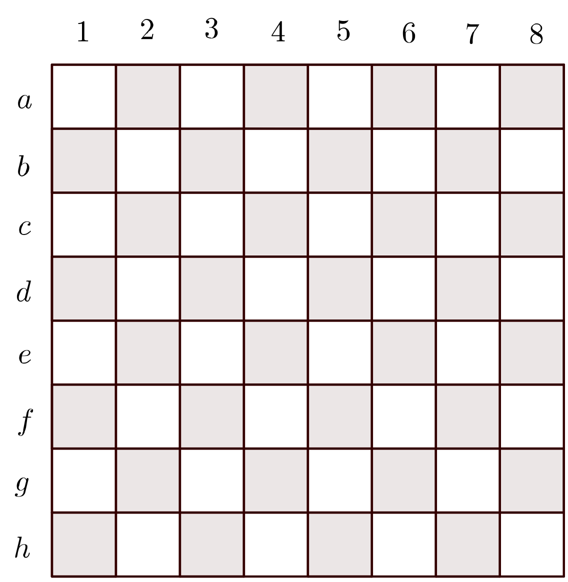
a) Considere o tabuleiro $4 \times 4$ da figura a seguir. As letras e os números foram colocados para ajudar a localizar os quadradinhos. Por exemplo, o quadradinho $A1$ é o do canto superior esquerdo e o $D4$ é o do canto inferior direito.




Mostre uma maneira de escolhermos 12 quadradinhos de modo que em cada linha e em cada coluna sejam escolhidos exatamente 3 quadradinhos.

b) Determine o número de maneiras diferentes de escolhermos 12 quadradinhos no tabuleiro $4 \times 4$ de modo que em cada linha e em cada coluna sejam escolhidos exatamente 3 quadradinhos.

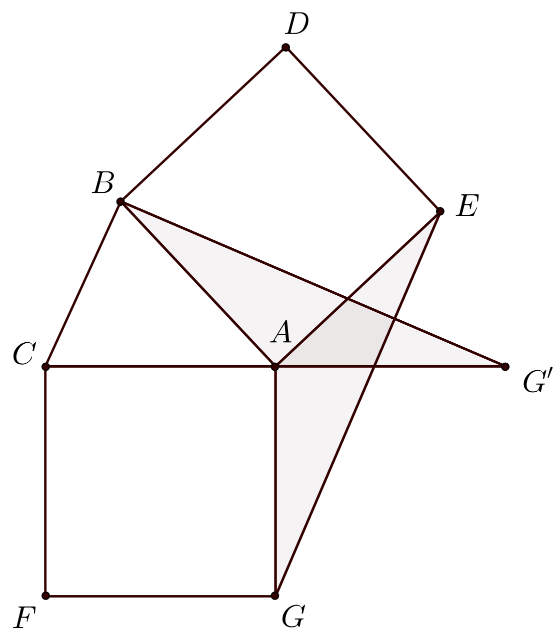
c) Considere um tabuleiro $8 \times 8$ com uma identificação de linhas e colunas similar ao tabuleiro anterior, mas colorido alternadamente de preto e branco.




Determine o número de maneiras de escolhermos 56 quadradinhos do tabuleiro de modo que todos os quadradinhos pretos sejam escolhidos e exatamente 7 quadradinhos sejam escolhidos em cada linha e em cada coluna.

## $\boxed{25}$ *Triângulos irmãos possuem mesma área*

A figura a seguir representa um triângulo $ABC$, dois quadrados $ABDE$ e $ACFG$, ambos construídos sobre os lados do triângulo $ABC$, e outro triângulo $AEG$.



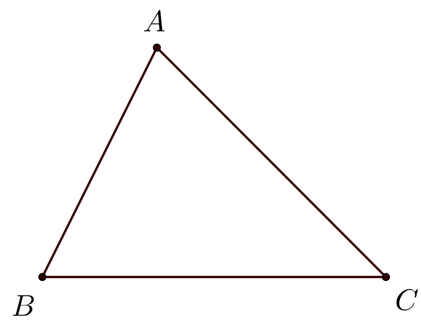

Dizemos que os triângulos $ABC$ e $AEG$, posicionados dessa forma em relação a dois quadrados, são *triângulos irmãos.*

(a) Verifique que $\angle BAC + \angle GAE = 180°$.

(b) Após verificar o item anterior, podemos rotacionar o triângulo $AEG$, por $90°$ no sentido anti-horário e em torno de $A$, para chegar na posição $BAG'$. Vale ressaltar que $BA = AE$, pois são lados do quadrado $ABDE$. A partir disso, prove que os *triângulos irmãos* $ABC$ e $AEG$ possuem mesma área.

## 26 *Possuem mesma área e dois lados iguais, mas não são congruentes*

Considere um triângulo acutângulo $ABC$.




Explique como construir um triângulo $DBC$ com mesma área que $ABC$, satisfazendo $DB = AB$, mas que não seja congruente ao triângulo $ABC$.

## 27 *Quantidade de divisores*

Quantos divisores de $88^{10}$ deixam resto 4 quando divididos por 6?

## 28 *Quadrado Latino*

Um Quadrado Latino é um tabuleiro $n \times n$ preenchido com $n$ símbolos distintos de modo que em cada linha e em cada coluna não existam símbolos repetidos. Por exemplo, a figura abaixo mostra um exemplo de um Quadrado Latino de dimensões $3 \times 3$. O nome foi inspirado em trabalhos do matemático Leonhard Euler, que usou caracteres latinos como símbolos.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 1 |

Sabemos que existem 576 Quadrados Latinos distintos de dimensões $4 \times 4$. De quantos modos podemos completar o quadrado abaixo, que já possui duas casas preenchidas, com os algarismos $1, 2, 3$ e $4$ de modo que em cada linha e coluna figurem os quatro algarismos?

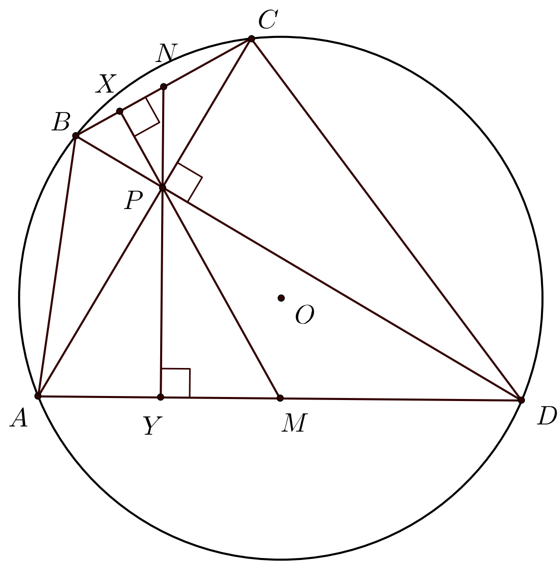
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | 2 | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

## 29 *Existe um número que divide todos os elementos do conjunto*

Seja $A$ um conjunto infinito de inteiros positivos. Sabe-se que se tomarmos qualquer subconjunto finito $B$ do conjunto $A$ existe um inteiro positivo $b$ maior que 1 tal que $b$ divide todos os elementos do conjunto $B$. Prove que existe um inteiro positivo $d$ maior que 1 que divide todos os elementos do conjunto $A$.

## 30 *Um quadrilátero cíclico com diagonais perpendiculares*

Um quadrilátero é dito cíclico quando seus quatro vértices estão sobre uma mesma circunferência. Considere um quadrilátero $ABCD$ cíclico com diagonais $AC$ e $BD$ perpendiculares. Além disso, sejam $O$ o centro da circunferência que passa pelos vértices do quadrilátero e $P$ o ponto de encontro das diagonais.




a) A partir do ponto $P$ traçamos uma reta $r$ perpendicular a $BC$. A reta $r$ corta $BC$ em $X$ e $AD$ em $M$. Verifique que $M$ é o ponto médio do lado $AD$.

b) A partir do ponto $P$ trace a reta $s$ perpendicular a $AD$ cortando $AD$ no ponto $Y$ e $BC$ no ponto $N$. Verifique que o quadrilátero $OMPN$ é um paralelogramo.

# NÍVEL 3

## 1 *Números Naturais escritos no tabuleiro*

Considere o seguinte tabuleiro quadriculado onde todos os números naturais foram escritos em diagonal.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ddots$ | | | | | |
| 10 | $\ddots$ | | | | |
| 6 | 9 | $\ddots$ | | | |
| 3 | 5 | 8 | 12 | $\ddots$ | |
| 1 | 2 | 4 | 7 | 11 | $\ddots$ |

Cada quadradinho possui uma posição denotada por $(x, y)$, em que $x$ representa a coluna, contada da esquerda para a direita, e $y$ representa a linha, contada debaixo para cima. Por exemplo, 12 é o número escrito no quadradinho de posição $(4, 2)$:

a) Determine o número que está no quadradinho de posição $(4, 4)$.

b) Determine o número que está no quadradinho de posição $(1, 2016)$.

c) Determine o número que está no quadradinho de posição $(2013, 2017)$.

## 2 *Pintura de inteiros*

Os números inteiros do conjunto $\{1, 2, \ldots, 20\}$ serão pintados com duas cores, branco e preto, de modo que ambas as cores sejam usadas. Além disso, o produto dos números de uma cor não deve possuir fatores primos em comum com o produto dos números da outra cor. De quantos modos isso pode ser feito?

## 3 *O conteúdo multiplicativo*

O *conteúdo multiplicativo* de um conjunto é o produto de seus elementos. Caso o conjunto possua um único elemento, seu *conteúdo multiplicativo* é este único elemento e, caso o conjunto seja vazio, seu *conteúdo multiplicativo* é 1. Por exemplo, o *conteúdo multiplicativo* de $\{1,2,3\}$ é $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

a) Determine a soma dos *conteúdos multiplicativos* de todos os subconjuntos de $\{1,2,3,4\}$.

b) Determine a soma dos *conteúdos multiplicativos* de todos os subconjuntos de

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2016}\right\}.$$

## 4 *Esse número possui quantos fatores* 2*?*

Neste problema, iremos estudar quantos fatores 2 aparecem na fatoração de números da forma $5^{2^n} - 1$.

(a) Sejam $x$ e $y$ dois números inteiros ímpares. Prove que $x^2 + y^2$ possui exatamente um fator 2 em sua fatoração em primos.

(b) Usando a fatoração $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, determine quantos fatores 2 o número $5^4 - 1$ possui.

(c) O número $N = 5^{2^{2017}} - 1$ possui quantos fatores 2?

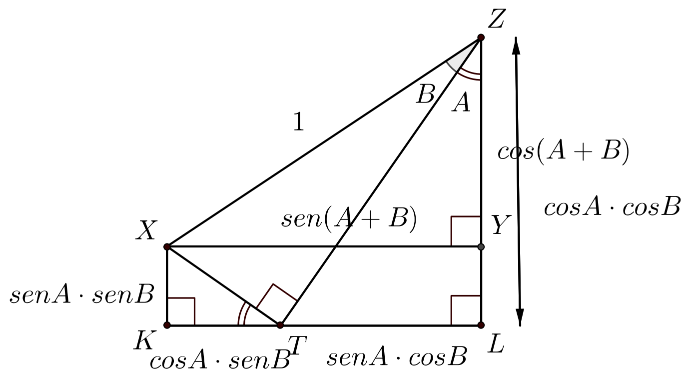
(d) Sabendo que o número $5^{20}$ possui 14 algarismos. Prove que $5^{2^{18}+20}$ possui 6 zeros consecutivos em sua representação decimal.

## 5 *Diferenças que não são números primos*

Qual a maior quantidade de inteiros que podemos escolher no conjunto $\{1,2,3,\ldots,2017\}$ de modo que a diferença entre quaisquer dois deles não seja um número primo?

## 6 *Cosseno e seno da soma e da diferença*

Neste problema, deduziremos fórmulas para o cálculo do cosseno e do seno da soma e da diferença de ângulos cuja soma é menor que 90°.

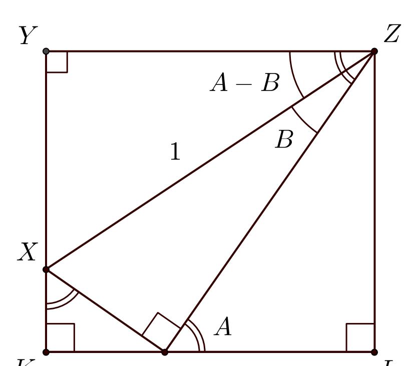



Na figura anterior, o segmento $XZ$ mede 1. Lembrando que o seno de um ângulo em um triângulo retângulo é o quociente entre o cateto oposto e a hipotenusa e que o cosseno é o quociente entre o cateto adjacente e a hipotenusa, podemos escrever: $\cos B = ZT/1$, $\operatorname{sen} B = TX/1$, $\cos A = ZL/ZT$, $\operatorname{sen} A = KX/TX$ e $\cos(A+B) = YZ/1$. Como $YZ = LZ - LY$, temos:

$$\begin{aligned}
YZ &= LZ - LY \\
\cos(A+B) &= \cos A \cdot ZT - XK \\
&= \cos A \cdot \cos B - \operatorname{sen} A \cdot TX \\
&= \cos A \cdot \cos B - \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B.
\end{aligned}$$

a) Use a figura anterior para determinar a fórmula de $\operatorname{sen}(A+B)$ em função de $\operatorname{sen} A$, $\operatorname{sen} B$, $\cos A$ e $\cos B$.

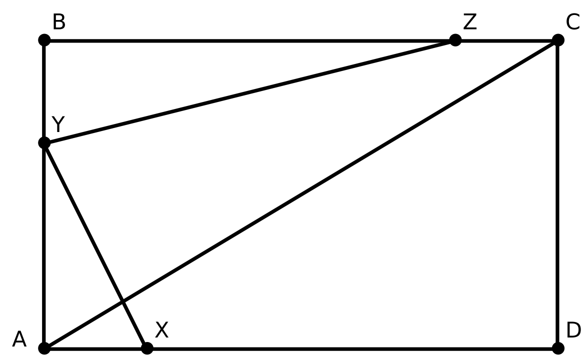
b) Considere o desenho a seguir:




A partir das ideias apresentadas no enunciado, encontre as expressões de $cos(A-B)$ e $sen(A-B)$ usando as funções trigonométricas de $A$ e $B$.

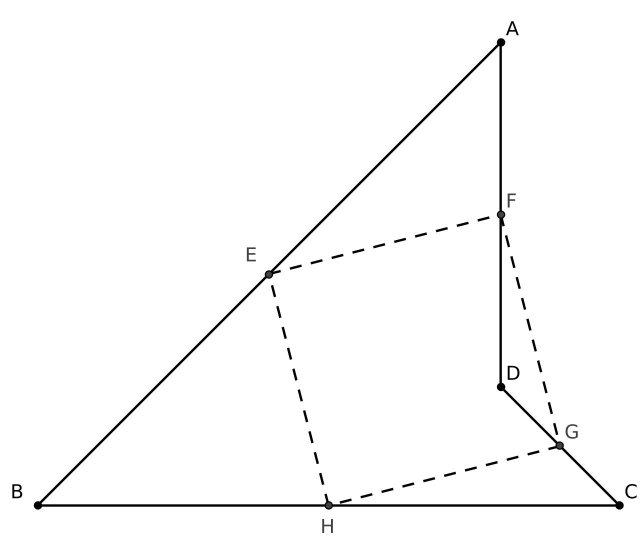
## 7 *Desigualdade triangular*

Os pontos $X$, $Y$ e $Z$ estão marcados nos lados $AD$, $AB$ e $BC$ do retângulo $ABCD$, respectivamente. Dado que $AX = CZ$, mostre que $XY + YZ \geq AC$.




## 8 *Um quadrilátero não convexo*

Os ângulos internos de um quadrilátero não convexo formado por uma linha poligonal que não se auto-intersecta são 45°, 45°, 45° e 225°. Mostre que os pontos médios de seus lados formam um quadrado.



## 9 *Números de* 5 *dígitos*

Considere a coleção de todos os números de 5 dígitos cuja soma dos dígitos é 43. Um desses números é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade dele ser múltiplo de 11?

## 10 *A competição matemática*

Um grupo de 10 estudantes participa de uma competição de matemática formada por equipes de 4 estudantes. Sabemos que quaisquer duas das equipes possuem exatamente um estudante em comum.

a) Qual o número máximo de equipes de que um estudante pode participar? Forneça um exemplo de distribuição de 10 alunos onde este número máximo possa ser verificado.

b) A competição pode possuir 8 equipes?

## 11 *Interseções dos lados do quadrilátero*

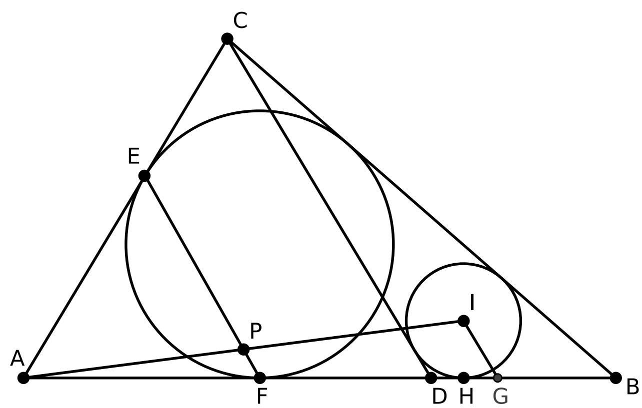
Um quadrilátero convexo $ABCD$ é dado. Sejam $E$ a interseção de $AB$ e $CD$, $F$ a interseção de $AD$ e $BC$ e $G$ a interseção de $AC$ e $EF$. Prove que $BD$ e $EF$ são paralelos se, e somente se, $G$ é o ponto médio de $EF$.

## 12 *Um triângulo externo*

Seja $ABCD$ um quadrilátero com $AD = BC$ e $\angle DAB + \angle ABC = 120^\circ$. Um triângulo equilátero $DEC$ é construído no exterior do quadrilátero. Prove que o triângulo $AEB$ também é equilátero.

## 13 *O incentro e segmentos paralelos*

Seja $D$ um ponto no lado $AB$ do triângulo $ABC$ de modo que $CD = AC$, como indica a figura abaixo. O incírculo do triângulo $ABC$ é tangente aos lados $AC$ e $AB$ nos pontos $E$ e $F$, respectivamente. Sejam $I$ o incentro do triângulo $BCD$ e $P$ o ponto de encontro dos segmentos $AI$ e $EF$. Além disso, seja $G$ um ponto sobre o segmento $AB$ de modo que $IG$ e $EF$ sejam paralelos.




a) Prove que $DI = IG$.

b) Prove que $AP = PI$.

**Observação:** O *incentro* de um triângulo é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo e o *incírculo* é a circunferência centrada no *incentro* e tangente aos três lados do triângulo.

## 14 *Números na circunferência*

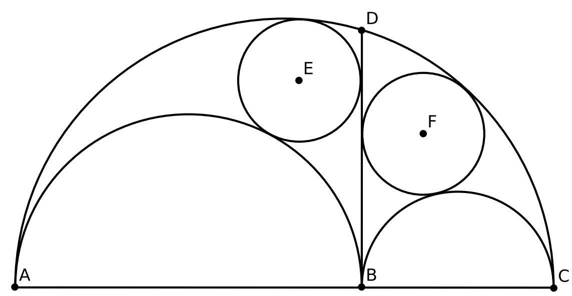
Em uma circunferência são escritos 99 números naturais. Se $a$ e $b$ são dois números vizinhos na circunferência, então $\frac{a}{b} = 2$, $a - b = 1$ ou $a - b = 2$. Prove que existe algum número na circunferência que é divisível por 3.

## 15 *Círculos tangentes ao segmento*

Os círculos de centros $E$ e $F$ são tangentes ao segmento $BD$ e aos semicírculos de diâmetros $AB$, $BC$ e $AC$. Sejam $r_1$, $r_2$ e $r$ os raios dos semicírculos de diâmetros $AB$, $BC$ e $AC$, respectivamente. Os raios dos círculos de centros $E$ e $F$ são $l_1$ e $l_2$, respectivamente.

a) Verifique que a distância de $E$ até o segmento $AC$ é $\sqrt{(r_1+l_1)^2-(r_1-l_1)^2}$.

b) Verifique que $l_1 = \dfrac{r_1 r_2}{r_1+r_2}$.




## 16 *Quadrados de reais são sempre maiores que ou iguais a zero*

Uma desigualdade simples, mas bastante útil é $x^2 \geq 0$, para todo $x$ real. Para prová-la, basta estudar separadamente as seguintes possibilidades: $x > 0$, $x < 0$ ou $x = 0$. De fato, um número real positivo multiplicado por um número real positivo é positivo, um número real negativo multiplicado por outro número real negativo é também positivo e, finalmente, $0 \cdot 0 = 0$. A partir dessa desigualdade, podemos derivar outras não tão elementares. Por exemplo, para quaisquer números reais $x$ e $y$ é verdade que $x^2+xy+y^2 \geq 0$, pois

$$\begin{aligned} x^2+xy+y^2 &= \left(x^2+\frac{2xy}{2}+\frac{y^2}{4}\right)+3\left(\frac{y^2}{4}\right) \\ &= \left(x+\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}\right)^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Na última desigualdade, usamos que $\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 \geq 0$ e $\left(\frac{y}{2}\right)^2 \geq 0$.

Veremos agora uma aplicação dessas desigualdades. Sejam $a$ e $b$ números reais tais que $a^3-b^3=2$ e $a^5-b^5 \geq 4$.

(a) Sabendo que para quaisquer reais $x$ e $y$ vale $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$, verifique que $a > b$.

(b) Verifique que $a^2+b^2 \geq 2$.

## 17 *Quadrados perfeitos que possuem um número quadrado perfeito de divisores*

Seja $n > 1$ um inteiro positivo, chamamos de $d(n)$ a quantidade de divisores positivos de $n$. Para calcular $d(n)$, basta escrever a fatoração de $n$ em potências de primos distintos e multiplicar os sucessores dos expoentes. Por exemplo, para 2016 temos a fatoração $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1$ e $d(2016) = (5+1)(2+1)(1+1) = 36$.

(a) Prove que se $n$ é um quadrado perfeito, então $d(n)$ é ímpar.

(b) Determine todos os $n$ menores que 400 tais que $n$ e $d(n)$ sejam quadrados perfeitos.

## 18 *Pintando pontos*

Seja $n \geq 3$ um inteiro positivo. Sobre uma reta, são marcados os $n$ pontos $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, nessa ordem e igualmente espaçados entre si. Em seguida, cada um dos pontos deve ser pintado de azul ou de vermelho de modo que **não** existam três pontos $P_x$, $P_{\frac{x+y}{2}}$ e $P_y$ pintados da mesma cor, sendo $x+y$ par.

(a) Mostre que para $n = 8$ existe uma maneira de colorir os pontos $P_1, P_2, \ldots, P_8$ satisfazendo a condição dada.

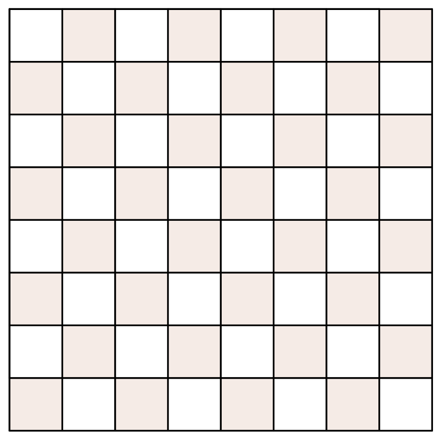
(b) Mostre que qualquer pintura para $n = 9$ não satisfaz a condição dada.

## 19 *Produtos que são quadrados perfeitos*

Sérgio escolhe dois números inteiros positivos $a$ e $b$. Ele escreve 4 números no seu caderno: $a$, $a+2$, $b$ e $b+2$. Em seguida, todos os 6 produtos de dois desses números são escritos na lousa. Seja $Q$ a quantidade de quadrados perfeitos escritos nela, determine o valor máximo de $Q$.

## 20 *Ataques de torres de xadrez*

Um tabuleiro de xadrez é um quadrado $8 \times 8$ em que as casinhas estão distribuídas em 8 linhas e 8 colunas.



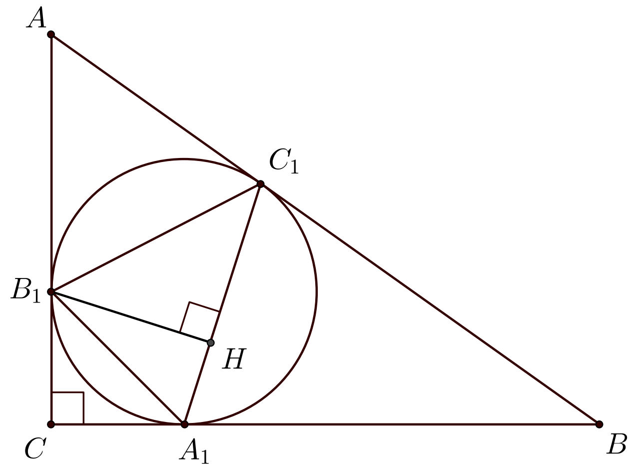
Uma torre em um tabuleiro de xadrez ataca todas as peças que estejam na sua linha ou na sua coluna. Sabendo disso, determine:

a) Qual o número máximo de torres que podemos colocar num tabuleiro de xadrez de modo que não haja duas se atacando?

b) Qual o número máximo de torres que podemos colocar num tabuleiro de xadrez de modo que cada torre seja ameaçada de ataque por no máximo uma das outras torres?

## 21 *O ponto está sobre a bissetriz*

A figura a seguir representa um triângulo $ABC$, retângulo em $C$, com uma circunferência no seu interior tangenciando os três lados $AB$, $BC$ e $CA$ nos pontos $C_1$, $A_1$ e $B_1$, respectivamente. Seja $H$ o pé da altura relativa ao lado $A_1C_1$ do triângulo $A_1B_1C_1$.




a) Calcule a medida do ângulo $\angle A_1C_1B_1$.

b) Mostre que o ponto $H$ está na bissetriz do ângulo $\angle BAC$.

## 22 *Um termo na sequência maior que* 2016

Uma sequência de números reais $x_n$ é uma lista ordenada de reais em que o primeiro número da lista é o termo $x_1$, o segundo é o termo $x_2$ e assim por diante. Por exemplo, a sequência usual dos números inteiros positivos pode ser descrita como $x_n = n$ para todo inteiro positivo $n$. Algumas sequências podem ser definidas por equações de recorrências, em que um termo é definido em função dos seus anteriores.

Por exemplo, a sequência de inteiros positivos poderia ser definida por $x_1 = 1$ e $x_n = x_{n-1} + 1$ para todo inteiro positivo $n \geq 2$. Desse modo, poderíamos calcular $x_2 = 1 + 1 = 2$, $x_3 = 2 + 1 = 3$ e assim por diante.

Considere uma sequência de números reais definida por $x_1 = 1$ e $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}^2}$ para todo inteiro positivo $n \geq 2$.

a) Calcule $x_2$, $x_3$ e $x_4$.

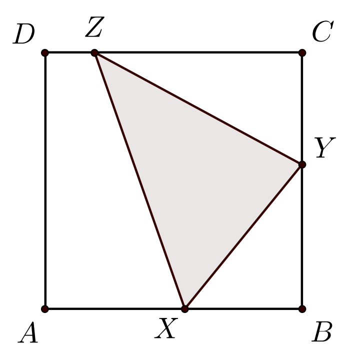
b) Verifique que a sequência é estritamente crescente, ou seja, que $x_n > x_{n-1}$ para todo inteiro positivo $n$.

c) Perceba que a sequência parece crescer muito pouco. Após calcular alguns termos iniciais, poderíamos suspeitar que nenhum termo excede 2016, mas de fato vamos provar que existem termos maiores que 2016. Para isso, vamos usar a sequência auxiliar $y_n = x_n^3$. Prove que $y_n > y_{n-1} + 3$ para todo $n \geq 2$.

d) Prove que existe um número $N$ tal que $x_N > 2016$.

## 23 *Triângulos no interior de um quadrado*

a) Considere um quadrado $ABCD$ de lado 1. Os pontos $X$, $Y$ e $Z$ são marcados no interior ou nas arestas desse quadrado de modo que formem um triângulo. Considere uma possível configuração dos pontos na figura a seguir. Em que $X$, $Y$ e $Z$ estão sobre os lados $AB$, $BC$ e $CD$, respectivamente. Prove que existe um ponto $Y'$ sobre o lado $CD$ de modo que os triângulos $XYZ$ e $XY'Z$ possuam a mesma área.

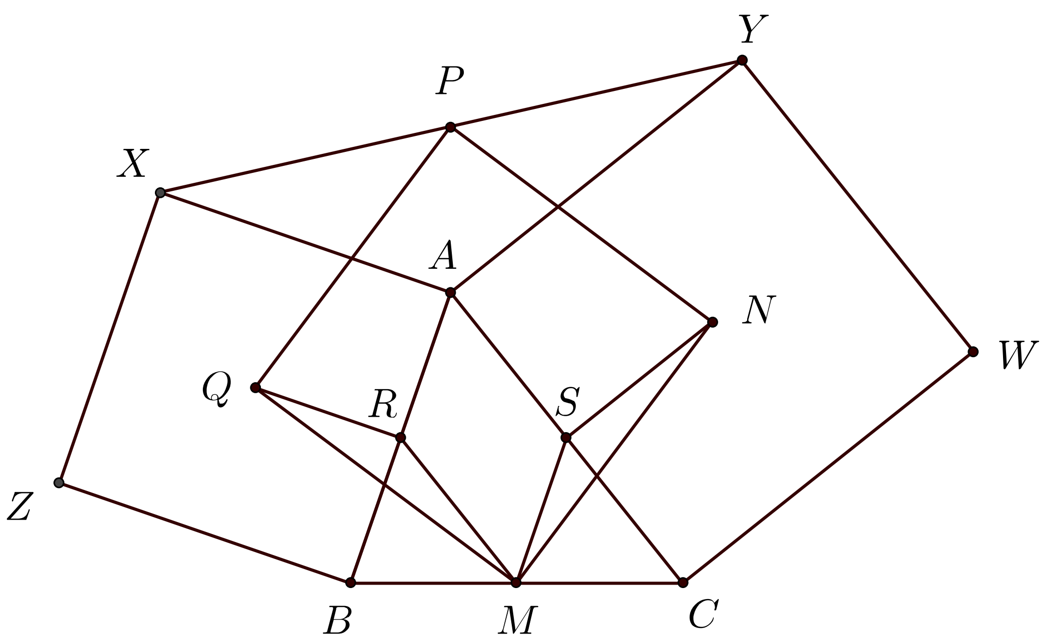



b) Considerando ainda a figura anterior, qual a maior área que um triângulo com dois vértices sobre o lado $CD$ e um sobre o lado $AB$ pode ter? Em seguida, estime a maior área possível de um triângulo com todos os seus vértices no interior do quadrado, não necessariamente sobre os seus lados.

c) No interior ou nos lados de um quadrado de lado 2 são marcados 9 pontos, sem que existam 3 deles colineares. Prove que podemos escolher 3 pontos de modo que o triângulo que tem esses três pontos como vértices possui a área menor que ou igual a $\frac{1}{2}$.

## 24 *Os pontos médios formam um quadrado*

Considere um triângulo acutângulo $ABC$ e quadrados $ABZX$ e $ACWY$, construídos externamente sobre os seus lados. Os pontos $M$ e $P$ são os pontos médios dos segmentos $BC$ e $XY$, respectivamente; os pontos $Q$ e $N$ são os centros dos quadrados $ABZX$ e $ACWY$, respectivamente; e os pontos $R$ e $S$ são pontos médios dos lados $AB$ e $AC$, respectivamente.




Vamos provar que $MNPQ$ é um quadrado em alguns passos.

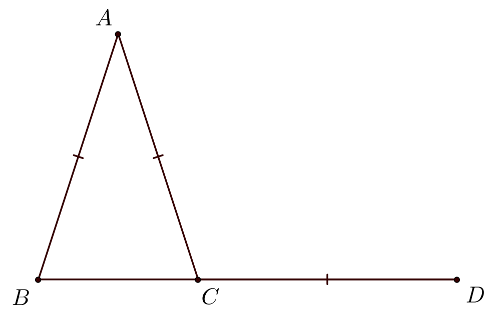
a) Verifique que os triângulos $QRM$ e $MSN$ são congruentes.

b) Verifique que $\angle QMN = 90°$.

c) Sabendo dos resultados anteriores, mostre que $MNPQ$ é um quadrado.

## 25 *Uma construção geométrica*

Considere três pontos colineares $B$, $C$ e $D$ de modo que $C$ está entre $B$ e $D$. Seja $A$ um ponto que não pertence a reta $BD$ de modo que $AB = AC = CD$.




(a) Se $\angle BAC = 36°$, então verifique que

$$\frac{1}{CD} - \frac{1}{BD} = \frac{1}{CD + BD}.$$

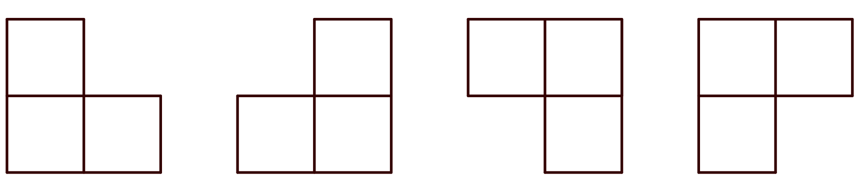
(b) Suponha agora que vale

$$\frac{1}{CD} - \frac{1}{BD} = \frac{1}{CD + BD}.$$

Verifique que $\angle BAC = 36°$.

## 26 *Cortando a mesma quantidade de $L$-triminós*

As peças a seguir são chamadas de $L$-triminós.



Essas peças são usadas para cobrir completamente um tabuleiro $6 \times 6$. Nessa cobertura, cada $L$-triminó cobre exatamente 3 quadradinhos do tabuleiro $6 \times 6$ e nenhum quadradinho é coberto por mais de um $L$-triminó.

a) Quantos $L$-triminós são usados para cobrir um tabuleiro $6 \times 6$?

b) Em uma cobertura de todo o tabuleiro, dizemos que uma fileira (linha ou coluna) corta um $L$-triminó quando a fileira possui pelo menos um dos quadradinhos cobertos por esse $L$-triminó. Caso fosse possível obter uma cobertura do tabuleiro $6 \times 6$ na qual cada fileira cortasse exatamente a mesma quantidade de L-triminós, quanto seria essa quantidade?

c) Prove que não existe uma cobertura do tabuleiro $6 \times 6$ com $L$-triminós na qual cada fileira corte a mesma quantidade de $L$-triminós.

## 27 *Troca de presentes*

Existem 2017 pessoas em uma festa. Em um determinado momento, cada uma delas dá um presente para um outro convidado (é possível que um convidado receba mais de um presente). Mostre que podemos encontrar um grupo de 673 pessoas na festa de modo que quaisquer duas delas não trocaram presentes entre si.

## 28 *Somas no tabuleiro*

Cada um dos números $1, 2, 3 \ldots, 25$ é arranjado em uma das casas de um tabuleiro $5 \times 5$. Em cada linha, eles aparecem em ordem crescente, da esquerda para a direita. Encontre os valores máximo e mínimo possíveis para as somas dos números da terceira coluna.

## 29 *O vovô e a vovó*

Em uma festa, existem 25 crianças. Sabemos que quaisquer duas delas possuem pelo menos um de seus avós em comum (avô ou avó). Explique por que pelo menos 17 crianças possuem ou um mesmo avô ou uma mesma avó nessa família.

## 30 *Uma dízima periódica*

Determine os números primos $p$ tais que a representação decimal da fração $\dfrac{1}{p}$ tenha período de tamanho 5.

**Observação:** Se a representação decimal de um número possui uma sequência de dígitos que se repete de forma periódica, o tamanho da menor sequência de dígitos que se repete é o tamanho da representação decimal. Por exemplo, $61/495 = 0,1232323\ldots$, apesar de 23, 2323 serem sequências de dígitos que se repetem na representação decimal, o tamanho da menor sequência é 2 e este é o tamanho do período.

## 31 *Colares com miçangas coloridas*

Existem $2m$ miçangas de $m$ cores distintas, sendo duas de cada cor. Essas miçangas são distribuidas em $m$ caixas, com duas em cada caixa, de modo que é possível escolher uma miçanga em cada uma delas e obter um conjunto de $m$ miçangas de cores distintas. Prove que o número de maneiras de fazermos esse tipo de escolha é necessariamente uma potência de 2.

## 32 *Particionando os naturais*

Uma partição do Conjunto dos Números Naturais é uma coleção de conjuntos $A_1$, $A_2$, ..., $A_k$ de modo que cada número natural pertença a exatamente um deles. Veja que em qualquer partição do Conjunto dos Números Naturais pelo menos um desses conjuntos é infinito, pois caso contrário o Conjunto dos Números Naturais seria a união de uma quantidade finita de conjunos finitos e seria, portanto, finito. Um exemplo de partição do Conjunto dos Números Naturais é considerar como $A_1$ o conjunto de todos os números naturais pares e como $A_2$ o conjunto de todos os números naturais ímpares. Existem várias partições possíveis e os próximos dois itens são fatos gerais que podem ser verificados em qualquer uma dessas partições.

a) Explique por que, para cada inteiro positivo $x$ fixado, existe sempre algum dos conjuntos $A_i$ com infinitos múltiplos de $x$.

b) Pelo item anterior, dados dois inteiros positivos $p$ e $q$, existe um dos conjuntos da partição com infinitos múltiplos de $p$ e outro conjunto que contém infinitos múltiplos de $q$. Entretanto, esses dois conjuntos não precisam ser necessariamente iguais. Mostre agora que sempre algum desses conjuntos $A_i$ possui infinitos múltiplos de qualquer inteiro positivo.

## 33 *Equação com o mdc*

Quantos são os pares ordenados $(a, b)$, com $a$ e $b$ inteiros positivos, tais que

$$a + b + mdc(a, b) = 33?$$

## 34 *Soluções inteiras do sistema*

Encontre todas as soluções inteiras do sistema $\begin{cases} xz - 2yt = 3 \\ xt + yz = 1. \end{cases}$

## 35 *A equação com* 28 *soluções*

Seja $n$ um inteiro positivo. Se a equação $2x + 2y + z = n$ tem 28 soluções em inteiros positivos $x$, $y$ e $z$, determine os possíveis valores de $n$.

# ENUNCIADOS E SOLUÇÕES DO NÍVEL 1

## 1 *O cachorro e o gato*

Um cachorro avista um gato que está a 30 m de distância e começa a persegui-lo. Ambos começam a correr em linha reta, no mesmo sentido e com passadas sincronizadas. O cachorro se desloca 50 cm a cada passada enquanto o gato se desloca apenas 30 cm. Depois de quantas passadas o cachorro alcançará o gato? Justifique sua resposta.

## 1 *O cachorro e o gato – Solução*

A cada passada, a distância entre o cachorro e o gato é reduzida em $50-30=20$ cm. Assim, como $30\text{ m} = 30\cdot 10^2$ cm, após $\dfrac{30\cdot 10^2}{20}=150$ passadas, o cachorro alcançará o gato.

## 2 *Buracos de zeros*

É possível multiplicar o número 101001000100001 por outro inteiro de modo que o resultado não tenha algarismos iguais a zero?

## 2 *Buracos de zeros – Solução*

Considere inicialmente o número 101, que possui um "buraco" com apenas um zero. A multiplicação por 11 elimina o "buraco", como mostra o diagrama abaixo do algoritmo de multiplicação:

$$\begin{array}{cccc}
 & 1 & 0 & 1 \\
 & & \times 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1.
\end{array}$$

Considerando agora o número 1001, caso quiséssemos fazer o mesmo, ou seja, multiplicá-lo por um outro número para obter um resultado sem algarismos iguais a zero, bastaria escolhermos o número 111. Novamente, para constatar isto, basta considerar o diagrama abaixo como o do algoritmo da multiplicação:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & & \times & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
1 & 0 & 0 & 1 & & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1.
\end{array}$$

Multiplicar um inteiro por uma sequência de 1's usando o algoritmo da multiplicação, é o mesmo que escrever este inteiro em várias linhas, dando um pequeno deslocamento para a esquerda de uma linha para a outra, e depois somar todas elas. Analisando o número inicialmente dado, caso quiséssemos repetir o procedimento anterior apenas para o número 100001, bastaria multiplicá-lo por 11111. De fato, a multiplicação por 11111 também serve para "tapar" todos os buracos de zeros entre os dígitos iguais a 1 como mostra o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & \times & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1.
\end{array}$$

## 3 *Caixas e mentiras*

Existem 100 caixas idênticas, todas tampadas, dispostas em uma linha. Em uma das caixas, existe um diamante. Cada caixa possui a seguinte mensagem escrita em sua tampa: " o diamante está na caixa da esquerda ou da direita". Sabemos que exatamente uma das mensagens é verdadeira e todas as demais são falsas. Abrindo apenas a tampa de uma delas, é possível descobrirmos onde está o diamante?

## 3 *Caixas e mentiras – Solução*

Se o diamante não estiver em uma das caixas que ficam nos extremos, as duas caixas vizinhas, da caixa com o diamente, terão uma mensagem verdadeira e isso contradiz a informação dada. Portanto, basta abrir uma das caixas dos extremos. Se o dimante estiver nela, teremos descoberto a sua posição. Caso contrário, certamente ele estará na caixa do outro extremo.

## 4 *Os três alunos*

Três alunos chamados João, Maria e José resolveram uma prova com 100 questões e cada um deles acertou exatamente 60 delas. Uma questão é classificada como *difícil* se apenas um aluno a acertou e é classificada como *fácil* se os três a acertaram. Sabemos que cada uma das 100 foi resolvida por pelo menos um aluno. Existem mais questões difíceis ou fáceis. Além disso, determine a diferença entre a quantidade de questões difíceis e fáceis.

## 4 *Os três alunos – Solução*

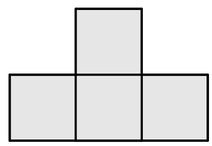
Diremos que uma questão é média se exatamente dois alunos a resolveram corretamente. Sejam $x$, $y$ e $z$ as quantidades de questões fáceis, médias e difíceis, respectivamente. Como existem exatamente 100 questões, temos $x+y+z=100$. Somando as quantidades de questões resolvidas pelos três, que é $3\cdot 60=180$, contaremos as questões fáceis três vezes, pois serão contabilizadas nos três alunos, as questões médias duas vezes, pois serão contabilizadas em dois alunos e as difíceis apenas uma vez, pois deverão ser contabilizadas apenas no aluno que a resolveu. Consequentemente, $3x+2y+z=180$. Daí, se multiplicarmos a primeira equação por 2 e subtrairmos dela esta última, obteremos:

$$\begin{aligned} 2(x+y+z)-(3x+2y+z) &= 200-180 \\ z-x &= 20. \end{aligned}$$

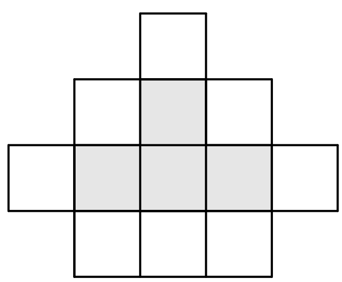
Assim, existem mais questões difíceis do que fáceis e a diferença entre elas é de 20 unidades.

## 5 *Construindo figuras com quadradinhos*

João possui um brinquedo com peças planas e quadradas de lado 1 m. Ele pode unir duas peças através de um lado. A figura abaixo mostra um exemplo de configuração que João construiu com 4 quadrados.



Perceba que o perímetro da figura é formado por 10 segmentos unitários. Depois de construir uma configuração, ele gosta de construir uma nova apenas acrescentando um quadrado a todos os encaixes da figura inicial formando assim uma nova camada de quadrados. Por exemplo, a partir da figura anterior, ele poderia acrescentar uma camada obtendo a próxima figura.



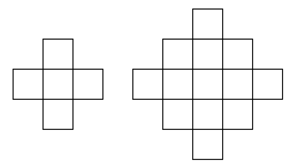
Note que os 8 quadrados acrescentados usam em suas conexões todos os 10 segmentos do perímetro anterior e não é possível acrescentar um novo quadrado encaixando apenas na figura original.

a) Começando com um quadrado $1 \times 1$, calcule o perímetro da configuração que João irá obter ao acrescentar duas camadas consecutivas.

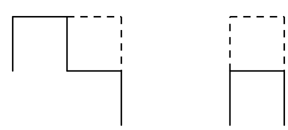
b) Começando com um quadrado $1 \times 1$, calcule o perímetro da configuração que João irá obter após o décimo acréscimo sucessivo de camadas.

## 5 *Construindo figuras com quadradinhos – Solução*

a) As figuras abaixo mostram a configuração que João obtém ao acrescentar duas camadas. Na figura da esquerda, o perímero é $4+4\cdot 2=12$. Na figura da direita, o perímetro é $12+4\cdot 2=20$.

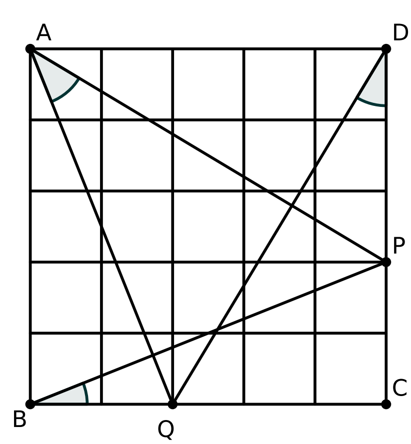


b) Quando um quadrado é adicionado em contato com dois quadrados da configuração antiga, o perímetro não é alterado (veja a figura da esquerda). Entretanto, quando um quadrado é adicionado em contato apenas com um lado, o perímetro aumenta em duas unidades, pois aparecem três novos segmentos e um dos antigos passa a ser desconsiderado. Dessa forma, a cada nova camada, cada um dos quatro quadrados das extremidades irá aumentar o perímetro em duas unidades. Perceba que isso ocorreu no exemplo do item anterior: a primeira camada aumentou o perímetro em $4\cdot 2=8$ unidades e a segunda camada em mais 8 unidades. Assim, após a décima camada, o perímetro será $4+10\cdot 8=84$.



## 6 *Ângulos no reticulado*

No desenho abaixo, cada quadradinho da figura possui lado de comprimento 1 m. Determine a soma dos ângulos $\angle PBC+\angle QAP+\angle QDC$.



## 6 *Ângulos no reticulado – Solução*

Girando o quadrado 90° no sentido anti-horário, podemos concluir que o triângulo $ABQ$ é igual ao triângulo $BPC$ e, consequentemente, $\angle BAQ = \angle PBC$. Além disso, girando o quadrado 90° no sentido horário, também podemos concluir que o triângulo $ADP$ é igual ao triângulo $DQC$ e que $\angle QDC = \angle DAP$. Daí

$$\begin{aligned} \angle PBC + \angle QAP + \angle QDC &= \\ \angle BAQ + \angle QAP + \angle PAD &= 90^\circ. \end{aligned}$$

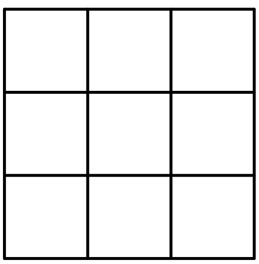
## 7 *Cubos e cola*

a) Um cubo $3 \times 3 \times 3$ foi construído com 27 cubos menores $1 \times 1 \times 1$. Para cada par de faces em contato de dois cubos é usado uma gota de cola. Quantas gotas de cola foram usadas ao todo?

b) Um cubo $10 \times 10 \times 10$ foi construído com 1000 cubos menores $1 \times 1 \times 1$. Para cada par de faces em contato de dois cubos é usado uma gota de cola. Quantas gotas de cola foram usadas ao todo?

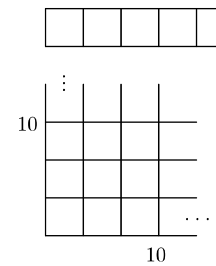
## 7 *Cubos e cola – Solução*

a) Pela figura abaixo, para formar uma face $1 \times 3 \times 3$, são necessárias 12 gotas de cola, correspondendo as 12 faces de contato entre os 9 cubos.



Para colocar uma face na outra, são necessárias 9 gotas de cola, correspondendo uma gota para cada quadradinho. Assim, para colar os três blocos $1 \times 3 \times 3$ são necessárias 18 gotas. Portanto, o total de gotas foi $3 \cdot 12 + 2 \cdot 9 = 54$.

b) Novamente começaremos a contagem considerando um bloco $1 \times 10 \times 10$. Existem 9 linhas e 9 colunas entre os quadrados de um tabuleiro $10 \times 10$ e esses segmentos determinam $9 \times 10 + 9 \times 10 = 180$ segmentos que são lados de quadradinhos $1 \times 1$. Assim, para colar os quadradinhos de um bloco, são necessárias 180 gotas. Para colar dois blocos entre si, são necessárias 100 gotas. Daí, para colocar 10 blocos $1 \times 10 \times 10$ entre si serão necessárias $100 \cdot 9 = 900$ gotas. Portanto, o total de gotas usadas foi $10 \cdot 180 + 900 = 2700$.




## 8 *Afirmações verdadeiras e falsas*

Considere as seguintes afirmações:

1) O número $N$ é divisível por 2.

2) O número $N$ é divisível por 4.

3) O número $N$ é divisível por 12.

4) O número $N$ é divisível por 24.

Três dessas sentenças são verdadeiras e uma é falsa. Qual delas é a falsa?

## 8 *Afirmações verdadeiras e falsas – Solução*

Observe que os números do conjunto $\{2, 4, 12, 24\}$ são todos divisores de 24. Assim, se a última afirmação é verdadeira, todas as outras três também serão. Logo, a afirmação falsa é a última. Um exemplo de número que satisfaz as três primeiras condições do problema, mas não a última é o número 36.

## 9 *A sequência de Conway*

a) Na sucessão de 9 linhas com algarismos apresentada abaixo, cada sequência de dígitos em uma linha é obtida da linha anterior através de uma regra.

$$\begin{array}{l} 1, \\ 11, \\ 21, \\ 1211, \\ 111221, \\ 312211, \\ 13112221, \\ 1113213211, \\ 31131211131221 \\ \dots \end{array}$$

Determine os algarismos da décima linha.

b) Na sucessão de linhas abaixo, foi aplicada a mesma regra do item anterior, entretanto, o primeiro algarismo $d \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ é diferente de 1.

$$\begin{array}{l} d, \\ 1d, \\ 111d \\ \dots \end{array}$$

Qual a sequência de algarismos escritos na sétima linha?

## 9 *A sequência de Conway – Solução*

a) Cada linha é obtida da anterior através do registro ordenado da quantidade de algarismos consecutivos de um mesmo tipo do conjunto $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Por exemplo, se aparecer uma sequência de exatamente 5 algarismos iguais a 3 em uma linha, na linha seguinte deverá aparecer a sequência 53. A tabela dada exibe a nona linha. Faremos a contagem dos dígitos que aparecem nela e usaremos a regra descrita anteriormente para exibir a décima linha. Como inicialmente aparece um único algarismo 3 na nona linha, a décima linha deve começar com:

$$13\dots$$

Em seguida, aparecem 2 algarismos iguais a 1. Portanto, os próximos dois dígitos da décima linha são 2 e 1:

$$1321\ldots$$

Continuando este processo, descobrimos que a décima linha é

$$13211311123113112211.$$

b) Aplicando a regra descrita anteriormente, podemos descrever sucessivamente as 7 primeiras linhas:

$$\begin{aligned}
&d,\\
&1d,\\
&111d\\
&311d\\
&13211d\\
&111312211d\\
&31131122211d.
\end{aligned}$$

Portanto, a sétima linha é:

$$31131122211d.$$

## 10 *Pintura de quadradinhos*

Os 9 quadradinhos de um tabuleiro $3 \times 3$, como mostrado na figura abaixo, devem ser pintados de modo que em cada linha, cada coluna e cada uma de suas duas diagonais não existam quadradinhos de uma mesma cor. Qual a menor quantidade de cores necessárias para essa pintura?

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

## 10 *Pintura de quadradinhos – Solução*

Vamos denotar as cores da diagonal principal pelos números 1, 2 e 3, como mostra a primeira figura.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | | $X$ |
| | 2 | |
| $Y$ | | 3 |

Considere agora as cores dos dois quadrados do canto da diagonal secundária, denotados por $X$ e $Y$ na primeira figura. Como $X$ está em uma linha que contém a cor 1, em uma diagonal com a cor 2 e uma coluna com a cor 3, a cor $X$ não está no conjunto $\{1,2,3\}$. Pelo mesmo argumento, a cor $Y$ também não está nesse conjunto. Além disso, como $X$ e $Y$ estão em uma mesma diagonal, eles devem representar cores distintas. Desse modo, precisamos de pelo menos $3+2=5$ cores. Para garantir que 5 é o número mínimo, basta exibirmos uma configuração com essa quantidade de cores. Isto está feito na próxima figura, onde cada número representa uma cor.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 |
| 3 | 2 | 1 |
| 4 | 1 | 3 |

## 11 *O parque de diversões*

No final de um dia de atividades, um parque de diversões arrecadou 100 reais com os ingressos de 100 pessoas. Sabemos que cada adulto precisava pagar 3 reais para entrar, jovem 2 reais e cada criança 30 centavos. Qual é o menor número de adultos que entraram nesse dia no parque?

## 11 *O parque de diversões – Solução*

Para encontrar o mínimo de adultos, iremos dividir o problema em casos:

a) Suponha que é possível termos 0 adultos. Assim, a soma das quantidades de jovens e crianças é 100. Consequentemente, se cada criança pagar $1,70$ a mais, para equiparar a contribuição dos jovens, teremos $2 \cdot 100 = 200$ reais. Como a contribuição real dessas pessoas foi de 100, a diferença $200 - 100 = 100$ corresponde à contribuição extra das crianças. Daí, o número de crianças é $\frac{100}{1{,}7}$, que não é um número inteiro. Isso mostra que não é possível termos 0 adultos.

b) Suponha que é possível termos 1 adulto. Assim, a soma das quantidades de jovens e crianças é 99. Novamente, se cada criança pagar $1,70$ a mais, para equiparar a contribuição dos jovens, teremos $2 \cdot 99 = 198$ reais. Como a contribuição real dessas pessoas foi de $100 - 3 \cdot 1 = 97$, a diferença $198 - 97 = 101$ corresponde à contribuição extra das crianças. Daí, o número de crianças é $\frac{101}{1{,}7}$, que não é um número inteiro. Isso mostra que não é possível termos apenas 1 adulto.

c) Para mostrarmos que o número mínimo de adultos necessários é 2, basta exibirmos quantidades compatíveis de jovens e crianças com os dados do problema. Repetindo a estratégia dos casos anteriores em simular o pagamento extra de $1,70$ por cada criança, podemos concluir que a quantidade de crianças necessárias com 2 adultos é

$$\frac{2 \cdot (100 - 2) - (100 - 2 \cdot 3)}{1,7} = 60.$$

Assim, com 2 adultos, as quantidades de jovens e crianças são $100 - 2 - 60 = 38$ e 60, respectivamente. Note que $3 \cdot 2 + 2 \cdot 38 + 0,3 \cdot 60 = 100$.

Portanto, são necessários no mínimo 2 adultos.

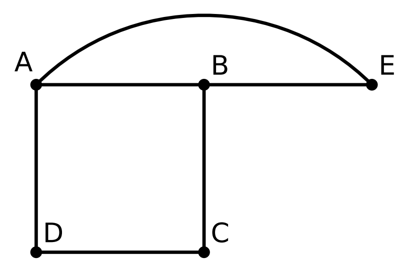
**Observação:** Supondo que $x$, $y$ e $z$ representam as quantidades de adultos, jovens e crianças, respectivamente, podemos obter outra solução escrevendo:

$$x + y + z = 100 \text{ e } 3x + 2y + 0,3z = 100.$$

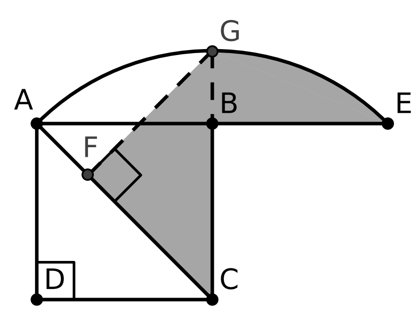
Em seguida, basta multiplicar a primeira equação por 20 e subtraí-la da segunda multiplicada por 10, obtendo $10x - 17z = -1000$. Daí, 17 divide $10(x + 100)$. Como 100 deixa resto 15 na divisão por 17 e $mdc(10, 17) = 1$, $x$ deve deixar resto 2 na divisão por 17. O menor inteiro não negativo que deixa resto 2 na divisão por 17 é o próprio 2. Basta, então, seguir os passos finais da solução anterior para exibir um exemplo com 2 adultos.

## 12 *Corte a figura*

Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado e o arco $AE$ faz parte de uma circunferência de centro $C$ e raio $AC$. Determine como cortar a figura em outras duas iguais.



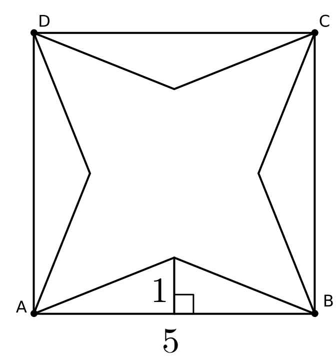

## 12 *Corte a figura – Solução*




Na diagonal $AC$, marque um ponto $F$ de modo que $CF = BC$. Em seguida, prolongue o segmento $BC$ até encontrar o arco $AE$ em $G$. Como $GC = AC$, $CF = DC$ e $\angle ACD = \angle GCF$, podemos concluir que os triângulos $GFC$ e $ACD$ são iguais. Além disso, como $AF = AC - CF = CG - BC = BG$ e $AC = CG$, o triângulo curvilíneo $AFG$ é igual ao triângulo curvilíneo $BEG$. Assim, a parte branca do desenho é igual a parte cinza.

## 13 *Estrela no quadrado*

Dentro do quadrado abaixo, de lado medindo 5 cm, uma estrela foi criada desenhando-se quatro triângulos isósceles idênticos medindo 1 cm de altura. Encontre uma fração irredutível que representa a razão entre a área da estrela e a área do quadrado.




**Observação:** Um triângulo é *isósceles* se dois de seus lados são iguais.

## 13 *Estrela no quadrado – Solução*

A área do quadrado é $5 \cdot 5 = 25$. A área de cada triângulo é $\dfrac{5 \cdot 1}{2}$. Portanto, a área da estrela é $25 - 4 \cdot \dfrac{5}{2} = 15$. Daí, a razão entre a área da estrela e a área do quadrado é $\dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5}$.

## 14 *Estrela no tabuleiro*

No tabuleiro abaixo, em cada linha e em cada coluna está escrito exatamente um número do conjunto $\{1,2,3,4\}$. Qual número está no quadradinho com o símbolo de $\star$?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | |
| | 1 | 2 | |
| 2 | | $\star$ | 1 |
| 3 | | 1 | |

## 14 *Estrela no tabuleiro – Solução*

Considere as posições indicadas com as letras: $A$, $B$, $C$ e $D$. Sempre que uma linha ou coluna já possui três números escritos, o seu quarto elemento está completamente determinado e é igual ao número que ainda não apareceu nela. Assim, $C = 4$. Analisando os números da segunda linha, temos $D = 3$. A casa do canto superior direito não pode ser nenhum número do conjunto $\{1,2,3\}$, pois estes já apareceram na primeira linha e última coluna. Logo, $B = 4$. Analisando os números da primeira linha, podemos concluir que $A = 3$. Finalmente, observando a terceira coluna, podemos concluir que $\star = 4$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | $A$ | $B$ |
| $C$ | 1 | 2 | $D$ |
| 2 | | $\star$ | 1 |
| 3 | | 1 | |

## 15 *Pontuando no Pebola*

No jogo Pebola, duas equipes disputam para ver quem faz mais pontos. Existem duas formas de pontuar: o gol que vale 3 pontos e o toque-baixo que vale 7 pontos.

(a) Mostre que não é possível obter exatamente 11 pontos numa partida de Pebola.

(b) Supondo que não há limite para a quantidade de pontos, explique por que é possível obter qualquer pontuação maior que ou igual a 12 pontos.

## 15 *Pontuando no Pebola – Solução*

(a) Primeiro note que se pontuarmos 7 pontos duas ou mais vezes já passaríamos de 11 pontos. Se pontuarmos apenas uma vez com 7 pontos, teríamos que fazer 4 pontos em jogadas de 3 pontos, mas isto não é possível, pois 4 não é múltiplo de 3. Se não tivermos nenhuma pontuação de 7 pontos, então teríamos que obter 11 pontos exclusivamente com jogadas de 3, mas isto também não é possível uma vez que 11 não é múltiplo de 3.

(b) Primeiro observe que podemos obter $12 = 4 \cdot 3$, $13 = 1 \cdot 7 + 2 \cdot 3$ e $14 = 2 \cdot 7$ pontos. Daí, podemos obter 15, 16 e 17 pontos adicionando 3 pontos para cada possibilidade. Seguindo esse raciocínio, podemos obter cada pontuação maior que ou igual a 12 pontos, se ela for um múltiplo de 3 basta fazer várias jogadas de 3 pontos, se deixar resto 1 por 3 tome uma pontuação de 7 e some um múltiplo de 3 com jogadas de 3 pontos e, finalmente, se deixar resto 2, tome duas pontuações de 7 e some um múltiplo de 3 com jogadas de 3 pontos.

## 16 *A divisão do tabuleiro*

É possível dividirmos um tabuleiro $39 \times 55$ em tabuleiros $5 \times 11$?

## 16 *A divisão do tabuleiro – Solução*

Se for possível fazer tal divisão, um dos lados do tabuleiro de dimensão 39 deve ser totalmente dividido em lados do tabuleiro $5 \times 11$. Isso quer dizer que o número 39 deve ser escrito como $5a + 11b$, com $a$ e $b$ representando a quantidade de vezes em que os lados de dimensões 5 e 11 foram usadas nessa divisão, respectivamente. Claramente $b \leq 3$, pois $11 \cdot 4 = 44 > 39$. Assim, temos apenas 4 valores possíveis para a diferença $39 - 11b$, como indicado na tabela:

| $b$ | $39 - 11b$ |
|---|---|
| 0 | 39 |
| 1 | 28 |
| 2 | 17 |
| 3 | 6. |

Como nenhum dos valores de $39 - 11b$ é divisível por 5, segue que tal divisão é impossível.

## 17 *A operação* $\star$

Dados dois números reais $a$ e $b$, defina a operação $a \star b$ por $a \star b = a \cdot b + a + b + 6$. Por exemplo, $3 \star 7 = 3 \cdot 7 + 3 + 7 + 6 = 23$ e $3 \star 3 = 3 \cdot 3 + 3 + 3 + 6 = 21$.

a) Encontre o valor de $9 \star 99$.

b) Encontre o número inteiro $b$ tal que $2 \star b = b$.

c) Determine todos os números inteiros positivos $a$ e $b$, com $a < b$, tais que $a \star b = 20$.

## 17 *A operação* $\star$ *– Solução*

a) Temos

$$\begin{aligned} 9 \star 99 &= \\ 9 \cdot 99 + 9 + 99 + 6 &= \\ &= 1005. \end{aligned}$$

b) Temos

$$\begin{aligned} b &= 2 \star b \\ &= 2b + 2 + b + 6 \\ &= 3b + 8. \end{aligned}$$

Daí, $2b = -4$ e $b = -2$.

c) Como $(a+1)(b+1) = ab + a + b + 1$, segue que $a \star b = (a+1)(b+1) + 5$. Daí,

$$\begin{aligned} a \star b &= 20 \\ (a+1)(b+1) + 5 &= 20 \\ (a+1)(b+1) &= 15. \end{aligned}$$

Como $a < b$ e ambos são inteiros positivos, basta analisarmos os divisores positivos de 15, que são $\{1, 3, 5, 15\}$, e considerarmos as opções:

$$\begin{cases} a + 1 = 1 \\ b + 1 = 15 \end{cases}$$

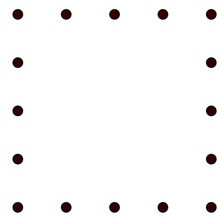
e

$$\begin{cases} a + 1 = 3 \\ b + 1 = 5. \end{cases}$$

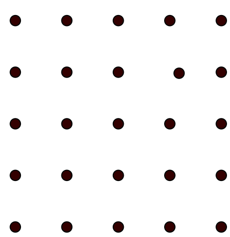
Esses dois sistemas produzem como soluções $(a, b) = (0, 14)$ e $(2, 4)$. Como $a$ e $b$ são positivos, a única solução do problema é $(a, b) = (2, 4)$.

## 18 *Contando os quadrados*

(a) Determine o número de quadrados com os 4 vértices nos pontinhos da figura, sabendo que eles formam um quadrado e que a distância entre dois pontos consecutivos é a mesma.

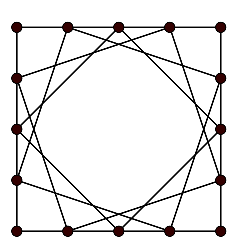


(b) Determine o número de quadrados com os 4 vértices nos pontinhos da figura, sabendo que eles formam um quadrado e que a distância entre dois pontos consecutivos é a mesma.



## 18 *Contando os quadrados – Solução*

(a) Podemos desenhar explicitamente todos os quadrados na figura e encontrar o total de 4 quadrados como mostra o próximo desenho.



(b) Veja que temos alguns quadrados com lados horizontais e verticais e outros com lados inclinados. Para contar todos, podemos observar que cada quadrado com lados inclinados possui seus lados sobre um quadrado com lados horizontais e verticais, como observado no item anterior. Mais precisamente, se o quadrado de lados horizontais e verticais possui 5 pontos no seu lado, ele possui 4 quadrados com vértices sobre seus lados. Nessa figura, contando inicialmente apenas os quadrados com lados horizontais e verticais, temos 1 quadrado com lados de 5 pontos, 4 quadrados com lados de 4 pontos, 9 quadrados com lados de 3 pontos e 16 quadrados com lados de 2 pontos. Somando as quantidades de quadrados para cada caso temos no total

$$1 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 16 \cdot 1 = 50$$

quadrados com os quatro vértices nos pontinhos da figura.

## 19 *Provando um truque de multiplicação*

O professor Piraldo conhece muitos truques de multiplicação. Certo dia, Juquinha perguntou quanto dá $62 \cdot 68$ e rapidamente o professor respondeu 4216. Após alguns minutos de euforia da turma ele decidiu explicar esse truque. O truque funciona ao multiplicar dois números de dois dígitos que possuem o mesmo dígito nas dezenas e a soma das unidades é 10. No exemplo, os dois têm 6 nas dezenas e $2 + 8 = 10$. Ele explicou que o resultado possui até 4 dígitos, o produto das unidades define os 2 últimos dígitos e os 2 primeiros, quando existirem dois já que o resultado pode ter três dígitos no total, são o resultado do dígito das dezenas multiplicado por seu sucessor.

(a) Usando o truque, calcule $45 \cdot 45$.

(b) Usando o truque, calcule $71 \cdot 79$.

(c) Agora vamos provar que o truque funciona. Considere dois números de dois dígitos $\overline{ab} = 10a + b$ e $\overline{ac} = 10a + c$, com $b + c = 10$. Mostre que o produto $b \cdot c$ determina os 2 dígitos finais e $a(a+1)$ determina os 2 dígitos iniciais do produto $\overline{ab} \cdot \overline{ac}$.

## 19 *Provando um truque de multiplicação – Solução*

(a) Usando o truque, os dois últimos dígitos são dados por $5 \cdot 5 = 25$ e os dois primeiros por $4 \cdot (4 + 1) = 20$. Então $45 \cdot 45 = 2025$.

(b) Nesse caso, devemos usar o truque com cuidado, pois os dois últimos dígitos são dados por $1 \cdot 9 = 9$. Portanto, o número termina em 09. Os dois primeiros são $7 \cdot (7 + 1) = 56$. Usando o truque, concluímos que $71 \cdot 79 = 5609$.

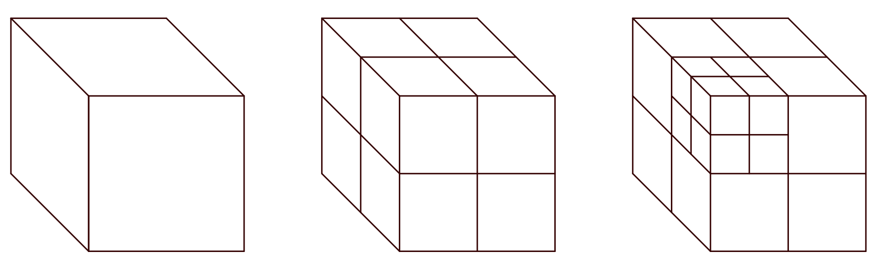
(c) Vamos desenvolver a multiplicação usando a expansão decimal de cada número:

$$\begin{aligned}\overline{ab}\cdot\overline{ac} &= (10a+b)(10a+c)\\ &= 100a^2+10ac+10ab+bc\\ &= 100a^2+10a(b+c)+bc\\ &= 100a^2+100a+bc\\ &= 100a(a+1)+bc.\end{aligned}$$

Como $bc < 9\cdot 9 = 81$, o resultado anterior só possui dois dígitos. Além disso, como $100a(a+1)$ é um número terminado em 00, o número formado pelos dígitos das dezenas e unidades do produto $\overline{ab}\cdot\overline{ac}$ coincide com o resultado de $bc$ e os das centenas e milhares com o resultado de $a(a+1)$.

## 20 *Cortando um cubo em 8 cubinhos*

As figuras a seguir mostram uma maneira de recortar um cubo em cubinhos menores.



Veja que começamos com um único cubo e após os cortes passamos a ter 8 cubos menores. Se escolhermos um desses cubos e o cortarmos em 8 cubinhos, vamos obter exatamente 15 cubos menores. Veja ainda que esses cubinhos não são todos iguais. Suponha que esse processo foi repetido algumas vezes. Pergunta-se:

(a) Quantas vezes devemos realizar esse processo para obtermos exatamente 99 cubinhos?

(b) Repetindo esse processo, é possível obter exatamente 2016 cubinhos?

## 20 *Cortando um cubo em 8 cubinhos – Solução*

(a) Observe que a cada passo temos um saldo de mais 7 na quantidade de cubinhos. Então, após repetirmos o processo $x$ vezes, teremos exatamente $7x+1$ cubinhos. Consequentemente, para descobrirmos a quantidade de passos para obtermos 99 cubinhos, basta resolvermos a equação:

$$\begin{aligned} 7x+1 &= 99 \\ 7x &= 98 \\ x &= 14. \end{aligned}$$

Logo, para obtermos exatamente 99 cubinhos, devemos realizar o processo 14 vezes.

(b) Sabendo que após repetirmos o processo $x$ vezes temos $7x+1$ cubinhos, podemos concluir que as quantidades de cubinhos obtidas têm que deixar resto 1 na divisão por 7. Como 2016 deixa resto 0 na divisão por 7, então essa quantidade de cubinhos não pode ser obtida.

## 21 *Soma de sete inversos*

(a) Calcule a soma:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}.$$

(b) Calcule a soma:

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}.$$

(c) Determine sete inteiros positivos, todos distintos, tais que a soma dos seus inversos seja igual a 1.

## 21 *Soma de sete inversos – Solução*

(a) Reduzindo todas as frações a um mesmo denominador, temos:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3+2+1}{6}=1.$$

(b) Novamente, podemos reduzir todas as frações a um mesmo denominador:

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=\frac{3+2+1}{36}=\frac{1}{6}.$$

(c) Note que usando os dois itens anteriores, já podemos somar 5 inversos para obter soma 1:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=1.$$

Para aumentar para 7 frações, basta trocar $\frac{1}{36}$ pela soma das frações $\frac{1}{2\cdot 36}=\frac{1}{72}$, $\frac{1}{3\cdot 36}=\frac{1}{108}$ e $\frac{1}{6\cdot 36}=\frac{1}{216}$. Podemos fazer essa trocar sem alterar a soma, pois

$$\frac{1}{72}+\frac{1}{108}+\frac{1}{216}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{36}=\frac{1}{36}.$$

Dessa forma, podemos escrever que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{72}+\frac{1}{108}+\frac{1}{216}=1.$$

Portanto, os sete inteiros são 2, 3, 12, 18, 72, 108 e 216.

## 22 *Números três estrelas*

Dizemos que um número inteiro positivo de três dígitos é *três estrelas* se ele for o resultado do produto de três números primos distintos. Por exemplo, $286 = 2 \cdot 11 \cdot 13$ é um número *três estrelas*, mas $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ e $275 = 5 \cdot 5 \cdot 11$ não são números *três estrelas*, pois o primeiro só possui dois dígitos e o segundo não é o produto de três primos distintos.

(a) Qual o menor número *três estrelas*?

(b) Mostre que todo número *três estrelas* é divisível por 2, por 3 ou por 5.

## 22 *Números três estrelas – Solução*

(a) Podemos fatorar os menores números de três dígitos $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$, $101 = 101$ (é primo) e $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$. Como os dois primeiros não são *três estrelas*, podemos concluir que 102 é o menor número *três estrelas*.

(b) Se tomarmos um número que é o produto de três primos distintos e que não possua os fatores 2, 3 e 5, ele então será pelo menos $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$. Logo, possuirá mais que três dígitos e não será um número *três estrelas*.

Concluímos assim que todo número *três estrelas* é divisível por 2, por 3 ou por 5.

## 23 *Jogando com um rei em um tabuleiro* $5 \times 5$

Antônio e Beto decidem jogar em um tabuleiro $5 \times 5$ com um único rei de um jogo de xadrez. Antônio começa colocando o rei em uma das casinhas do tabuleiro. Em seguida, Beto deve mover o rei para uma das casinhas vizinhas da casinha em que ele está. Nesse problema, duas casinhas são vizinhas se compartilham um lado ou um vértice. Após a jogada de Beto, Antônio deve mover o rei para uma das casinhas vizinhas, mas não pode mover para uma casinha que já foi visitada. Os dois jogadores seguem movendo alternadamente o rei para casinhas que ainda não foram visitadas pelo rei. O jogador que em sua jogada não puder mover o rei seguindo essas regras perde o jogo.

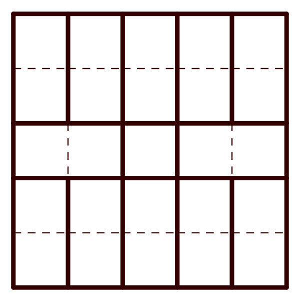
(a) Mostre uma maneira de cobrir completamente um tabuleiro $5 \times 5$ com 1 pecinha $1 \times 1$ e 12 pecinhas $1 \times 2$, que são conhecidas popularmente como dominós, sendo que 1 pecinha $1 \times 1$ cobre exatamente uma casinha e 1 pecinha $1 \times 2$ cobre exatamente 2 casinhas do tabuleiro.

(b) A partir da tarefa realizada no item anterior, explique uma maneira de Antônio jogar de modo que ele sempre vença o jogo, não importando como Beto faça suas jogadas.

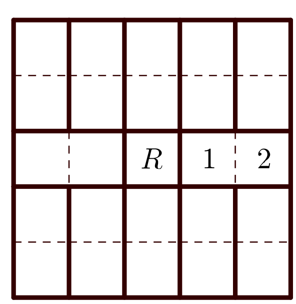
**Observação:** O rei é uma peça do jogo de xadrez que, na sua vez, pode andar apenas uma casa em qualquer direção movendo-se para um quadradinho vizinho.

## 23 *Jogando com um rei em um tabuleiro* $5 \times 5$ *– Solução*

(a) A figura a seguir mostra uma maneira de fazer a cobertura. Vale ressaltar que existem muitas outras e qualquer uma delas servirá para definir a estratégia de Antônio.



(b) Na primeira jogada, Antônio deve colocar o rei na posição da pecinha $1 \times 1$, que no nosso exemplo é a casa central marcada na figura com a letra $R$. Na jogada de Beto, ele deve mover o rei para algum dos dominós e a estratégia de Antônio deve ser sempre mover a pecinha para a outra casinha do mesmo dominó. Por exemplo, se Beto mover para a casinha 1 da figura a seguir, então Antônio deve mover para a casinha 2.




Como esse dominó já foi visitado, Beto deve ir para outro e novamente Antônio usa a estratégia de completar o dominó. Como Beto sempre inicia os dominós, Antônio sempre poderá jogar. Desse modo, Antônio não pode ser vencido. Após algumas jogadas Beto não poderá mais mover o rei e perderá o jogo, pois existe apenas um número finito de casinhas no tabuleiro.

## 24 *Quantas meninas responderam sim?*

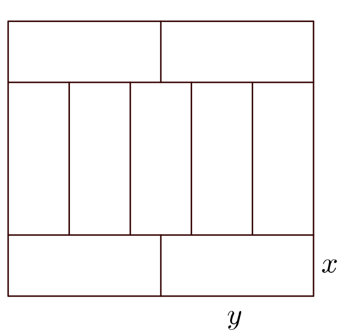
Ao redor de uma mesa circular, estão sentadas 18 meninas, 11 vestidas de azul e 7 vestidas de vermelho. Para cada uma delas, é perguntado se a menina à sua direita está vestida de azul e cada uma responde sim ou não. Sabe-se que uma menina fala a verdade apenas quando as suas duas vizinhas, a da direita e a da esquerda, estão vestidas com roupas da mesma cor. Quantas meninas irão responder sim? Se houver mais de uma possibilidade diga todas.

## 24 *Quantas meninas responderam sim? – Solução*

Vamos analisar as possibilidades. Se as duas vizinhas de certa menina usam azul, então ela responde sim e se as duas usam vermelho ela responde não, pois nesses casos ela fala a verdade. Se a vizinha da direita usa vermelho e a da esquerda usa azul, a resposta é sim e se a da direita usa azul e a da esquerda usa vermelho, a resposta é não, pois nesses casos ela mente. Observando as possibilidades, concluímos que uma menina responde sim quando sua vizinha da esquerda está vestida de azul. Como são 11 meninas vestidas de azul, são 11 meninas que possuem sua vizinha da esquerda vestida de azul e podemos concluir que exatamente 11 meninas responderão sim.

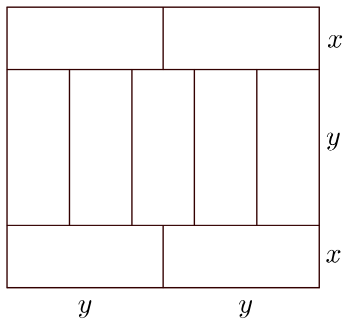
## 25 *Tirando conclusões com vários retângulos iguais*

A figura a seguir representa um retângulo grande de área 90 cm$^2$ formado por retângulos menores de dimensões $x$ e $y$. Determine $x$ e $y$ em $cm$.



## 25 *Tirando conclusões com vários retângulos iguais – Solução*

Marcando os segmentos $x$ e $y$ no bordo, concluímos que a figura toda é um retângulo de dimensões $2x+y$ por $2y$.



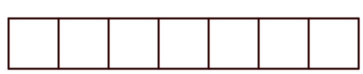

Como a figura é formada por 9 retângulos menores idênticos, podemos afirmar que cada um possui área $\frac{90}{9} = 10$ cm$^2$. Assim, $xy = 10$. Usando agora a área do retângulo maior, temos

$$\begin{aligned}(2x+y)2y &= 90\\ 4xy+2y^2 &= 90\\ 2y^2 &= 50\\ y &= 5 \text{ cm.}\end{aligned}$$

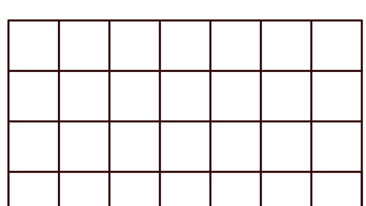
Novamente usando a área do retângulo menor, como $xy = 10$ cm$^2$, temos $x = 2$ cm.

## 26 *Quantos retângulos?*

(a) Determine quantos retângulos podem ser formados usando os quadradinhos da figura a seguir?

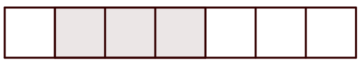


(b) Determine quantos retângulos podem ser formados usando os quadradinhos da figura a seguir?



## 26 *Quantos retângulos? – Solução*

(a) Veja que a figura possui 7 quadradinhos e cada retângulo é formado por um ou mais quadradinhos. Podemos associar a cada retângulo, de modo único, uma sequência de números consecutivos representando quadradinhos escolhidos. Por exemplo, se escolhermos a sequência $(2,3,4)$, vamos observar o seguinte retângulo:

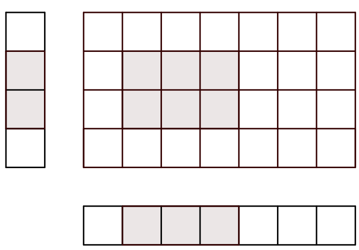


Temos 7 retângulos que usam apenas 1 quadradinho, 6 retângulos que usam 2 quadradinhos e assim por diante. Logo existem

$$7+6+5+4+3+2+1=28$$

retângulos formados usando os quadradinhos da figura.

(b) Façamos uma cópia de uma coluna ao lado do retângulo e de uma linha abaixo do retângulo, conforme a figura. Veja que cada retângulo formado na figura está associado, de modo único, a dois retângulos, um na coluna extra e um na linha extra. Na figura a seguir temos um exemplo.



Pelo item (a), podemos formar 28 retângulos nessa linha extra. Usando o mesmo raciocínio para a coluna, teremos $4+3+2+1=10$ retângulos nela. Logo, existem $28\cdot 10=280$ retângulos formados usando os quadradinhos da figura dada.

## 27 *Colocando* $-1$, $0$ *e* $1$ *para obter somas distintas*

Na figura a seguir, temos um tabuleiro $4 \times 4$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Em cada quadradinho $1 \times 1$, vamos colocar exatamente um número do conjunto $\{-1, 0, 1\}$. Uma colocação desses números é dita *fofinha* se ao somarmos os números em cada uma das 4 linhas e os números em cada uma das 4 colunas obtivermos 8 números diferentes.

(a) Explique por que não existe colocação *fofinha* no tabuleiro $4 \times 4$ em que não apareça soma 4 nem soma $-4$.

(b) Exiba uma colocação *fofinha* para o tabuleiro $4 \times 4$.

## 27 *Colocando* $-1$, $0$ *e* $1$ *para obter somas distintas – Solução*

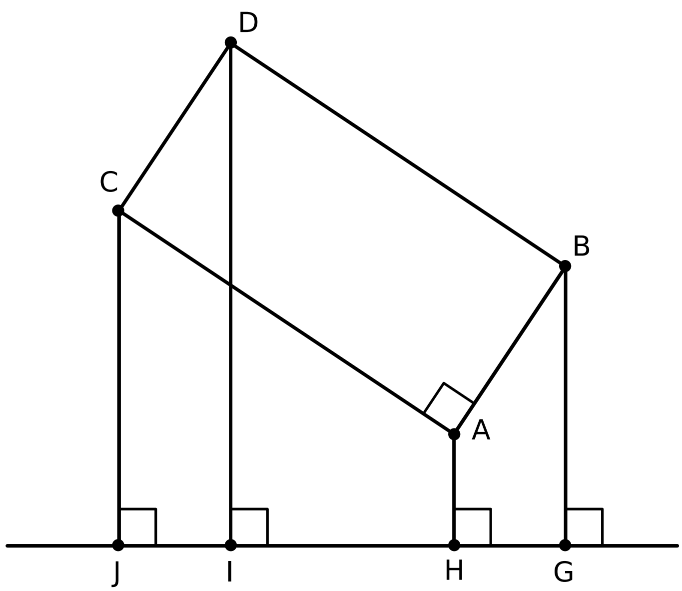
(a) Veja que cada soma dos números escritos nas linhas e colunas variam de $-4$ até 4 e que isso nos dá um total de 9 possibilidades. Se excluirmos 4 e $-4$, restariam apenas 7 possibilidades para as 8 fileiras e assim pelo menos duas delas precisariam ser iguais. Logo, se não aparecer 4 ou $-4$ entre as somas, a colocação dos números não será *fofinha*.

(b) Existem várias colocações *fofinhas* para o tabuleiro $4 \times 4$. A seguir, exibimos um exemplo com os resultados das somas de cada fileira.

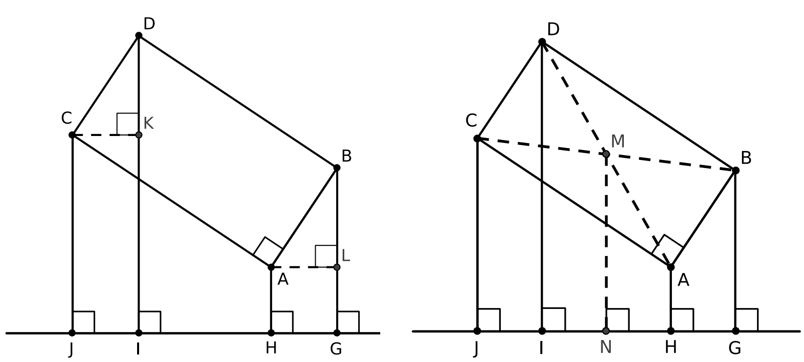
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $1$ | $1$ | $4$ |
| $0$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $-3$ |
| $1$ | $-1$ | $1$ | $1$ | $2$ |
| $1$ | $-1$ | $0$ | $-1$ | $-1$ |
| $3$ | $-2$ | $1$ | $0$ | |

## 28 *Distâncias para uma reta*

Na figura abaixo, $ABCD$ é um retângulo e as distâncias dos vértices $A$, $B$ e $C$ ao segmento $JG$ valem 2, 4 e 5 metros, respectivamente. Encontre a distância do vértice $D$ ao segmento $JG$.



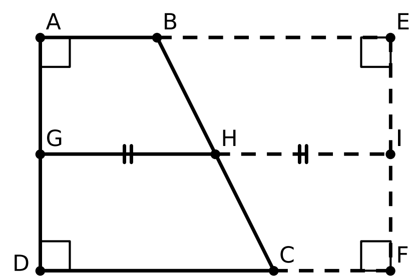

## 28 *Distâncias para uma reta – Solução*




**Primeira Solução:** Nos segmentos $DI$ e $BG$, marque os pontos $K$ e $L$ de modo que $\angle CKD = \angle ALB = 90^\circ$. Como $CD \parallel AB$ e $DI \parallel BG$, segue que os triângulos $CDK$ e $ABL$ são iguais. Assim

$$\begin{aligned} DK &= BL \\ DI - CJ &= BG - AH \\ DI &= 4 - 2 + 5 \\ &= 7. \end{aligned}$$

**Segunda Solução:** Usaremos que o comprimento da base média de um trapézio retângulo, ou seja, o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos, é igual a média aritmética das bases paralelas. Para ver isso, supondo que $ABCD$ seja um trapézio retângulo, construa um trapézio congruente $BEFC$, como indicado na figura a seguir.




Como $AEFD$ é um retângulo, segue que

$$2 \cdot GH = AE = AB + BE = AB + CD.$$

Para aplicar esse resultado no problema, seja $M$ o ponto de encontro das diagonais do retângulo dado. Assim,

$$\begin{aligned} DI + 2 &= DI + AH \\ &= 2 \cdot MN \\ &= CJ + BG \\ &= 5 + 4. \end{aligned}$$

Portanto, $DI = 5 + 4 - 2 = 7$.

## 29 *Anos legais*

Dizemos que um ano é *legal* se sua representação decimal não contém dígitos repetidos. Por exemplo, todos os anos de 2013 a 2019 são *legais*. Entretanto, 2020 e 2344 não são *legais*.

a) Encontre a próxima sequência de 7 anos consecutivos *legais* depois de 2019.

b) É possível existir no futuro, a contar do ano de 2016, uma sequência com mais de 7 anos consecutivos *legais*?

## 29 *Anos legais – Solução*

a) Procuremos inicialmente, dentro do século $XXI$, se existe uma sequência de anos consecutivos *legais* com 7 termos. Como o dígito das centenas é 0 e o das unidades de milhar é 2, o primeiro termo da sequência não pode ter como dígito das unidades os números 0, 1 e 2, pois inevitavelmente algum dos próximos termos teria dígitos repetidos. Se um dos termos intermediários da sequência é menor que 2090, ele também não pode terminar em 9, pois o próximo termo terminaria em 0. Consequentemente, a sequência *legal* deve possuir o seguinte formato:

$$\overline{20\star 3}, \overline{20\star 4}, \overline{20\star 5}, \overline{20\star 6}, \overline{20\star 7}, \overline{20\star 8}, \overline{20\star 9}.$$

Um dos dígitos $\{3,4,5,6,7,8,9\}$ será igual ao dígito das dezenas e isso mostra que não existe outra sequência *legal* antes de 2090. Analisando os 13 anos seguintes, podemos encontrar a sequência: $2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108$ e $2109$.

b) Suponhamos que exista uma sequência no futuro com mais de 7 anos consecutivos *legais*. Os anos posteriores a 2016 possuem pelo menos 4 dígitos e uma sequência de números *legais* não pode conter um número terminado em 99, pois neste caso o número teria dois dígitos iguais. Sendo assim, o dígito das centenas é sempre o mesmo em todos os números da sequência. Devemos considerar agora dois casos:

1) Quando o dígito das dezenas dos números da sequência são iguais: Neste caso, os quatro últimos dígitos dos números da sequência possuem a forma $\overline{abc\star}$, onde os símbolos $a$, $b$ e $c$ indicam os algarismos da representação decimal que não se alteram entre os membros da sequência e o símbolo $\star$ indica o algarismo das unidades. Como existem apenas 10 algarismos possíveis, a saber, os elementos do conjunto $\{0,1,2,\ldots,9\}$, uma vez que tenham sido fixados os algarismos $a$, $b$ e $c$, existem apenas $10-3=7$ opções para o algarismo $\star$. Isso impede uma sequência com mais de 7 anos *legais* neste caso.

2) Quando ocorre mudança do dígito das dezenas dos números da sequência: Suponha que os quatro últimos dígitos do primeiro número da sequência *legal* sejam da forma $\overline{abcd}$. Para que ocorra a mudança do dígito das dezenas dentro da sequência, devemos ter $c \neq 9$, pois neste caso, logo após a mudança, apareceria um número na sequência terminado em 00 e assim ele não seria *legal*. Assim, os 8 primeiros números da sequência seriam da forma:

$$\overline{abcd}, \overline{abc(d+1)}, \ldots, \overline{abc9}, \overline{ab(c+1)0}, \ldots, \overline{ab(c+1)(d-2)}.$$

Novamente, os algarismos que figuram nas duas últimas posições da representação decimal devem estar no conjunto $\{0,1,2,3,\ldots,9\}$ e não podem ser iguais a $a$ e $b$. Isso só nos dá 8 opções. Além disso, os algarismos do conjunto $\{d, d+1, \ldots, 9\}$ também não podem ser iguais a $c$ e os algarismos do conjunto $\{0,1,2,\ldots,d-2\}$ não podem ser iguais a $c+1$. Para que esses 8 anos sejam *legais*, devemos ter $c+1 \in \{d, d+1, \ldots, 9\}$ e $c \in \{0,1,2,\ldots,d-2\}$. Isso acarreta o aparecimento das terminações $abc(c+1)$ e $ab(c+1)c$ entre os elementos da sequência. Como aparecem todos os 10 algarismos possíveis entre os números consecutivos de dois dígitos $\overline{c(c+1)}, \overline{c(c+2)}, \ldots, \overline{(c+1)c}$, podemos concluir que algum elemento dessa sequência não será *legal* por repetir ou o dígito $a$ ou o dígito $b$.

Em ambos os casos anteriores concluímos que não é possível existir uma sequência de anos consecutivos *legais* com mais de 7 termos, portanto, a resposta deste item é "não".

**Observação:** Estamos usando uma barra para distinguir o número de quatro algarismos $\overline{abcd}$ do produto $a \cdot b \cdot c \cdot d$. Por exemplo, de $\overline{abcd} = 1267$, então $a = 1$, $b = 2$, $c = 6$ e $d = 7$.

## 30 *Pilhas de livros*

Determine como distribuir 100 livros em 10 pilhas com quantidades de livros todas distintas de modo que a divisão de qualquer uma dessas pilhas em outras duas faça com que a nova distribuição de 11 pilhas tenha pelo menos duas com o mesmo número de livros. Justifique sua resposta.

**Observação:** Uma pilha só pode ser dividida em outras duas se as pilhas possuírem inteiros positivos como quantidades de elementos.

## 30 *Pilhas de livros – Solução*

Uma distribuição possível é escolher 10 pilhas com as seguintes quantidades de livros: $\{1, 3, 5, \ldots, 19\}$. Inicialmente, note que

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \ldots + 19 &= \\ (1 + 19) + (3 + 17) + \ldots + (9 + 11) &= \\ 5 \cdot 20 &= 100. \end{aligned}$$

Além disso, como cada pilha possui uma quantidade ímpar de livros, a divisão de qualquer uma delas em outras duas produzirá uma pilha com uma quantidade par e outra pilha com uma quantidade ímpar de livros, que necessariamente já estará presente na distribuição original. Isto mostra que o exemplo dado satisfaz as condições do problema. Para motivar a construção do exemplo, suponha que $x$ é a maior quantidade de livros de uma pilha na distribuição desejada. Considere o inteiro $k = 1$. Como a pilha com $x$ livros pode ser dividida em uma com 1 e outra com $x - 1$, pelo menos uma dessas duas quantidades deve estar presente na distribuição original. O mesmo argumento vale para qualquer inteiro positivo $k$, com $1 < k < x$. Assim, para cada um dos seguintes pares: $(1, x-1), (2, x-2), (3, x-3), \ldots$ ; pelo menos um de seus elementos deve representar uma quantidade de livros da distribuição original. Como as dez quantidades de pilhas precisam somar 100, uma maneira natural de realizar isso é construir 5 pares com soma $20 = \dfrac{100}{5}$ e escolher os dois elementos de cada par: $(1, 19)$, $(3, 17)$, $\ldots$, $(9, 11)$.

# ENUNCIADOS E SOLUÇÕES DO NÍVEL 2

## 1 *Sistema com potências*

Sabemos que

$$\frac{8^x}{2^{x+y}} = 64 \text{ e } \frac{9^{x+y}}{3^{4y}} = 243.$$

Determine o valor de $2xy$.

## 1 *Sistema com potências – Solução*

Como $8 = 2^3$ e $9 = 3^2$, temos

$$\begin{aligned} 64 &= \frac{8^x}{2^{x+y}} \\ 2^6 &= 2^{3x-(x+y)} \\ &= 2^{2x-y} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 243 &= \frac{9^{x+y}}{3^{4y}} \\ 3^5 &= 3^{(2x+2y)-4y} \\ &= 3^{2x-2y}. \end{aligned}$$

Assim, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x - 2y = 5. \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, temos $y = 1$. Substituindo este valor na primeira equação, temos $x = 7/2$. Daí, $2xy = 2 \cdot \frac{7}{2} \cdot 1 = 7$.

## $\boxed{2}$ *Jogo dos sinais*

João e Maria disputam um jogo. Eles jogam alternadamente e, na sua vez, cada jogador pode colocar um sinal de + ou um sinal de − em um dos espaços vazios assinalados na figura abaixo. Maria ganha se a soma no final resultante é −4, −2, 0, 2 ou 4 e João nos outros casos. Exiba uma estratégia de modo que Maria sempre ganhe independentemente de como João jogue. João é o primeiro a jogar.

$$\_\_\ 1\ \_\_\ 2\ \_\_\ 3\ \_\_\ 4\ \_\_\ 5\ \_\_\ 6\ \_\_\ 7\ \_\_\ 8$$

## $\boxed{2}$ *Jogo dos sinais – Solução*

Maria deve agrupar os números em pares como indicado na figura a seguir:

$$(\_\_\ 1\ \_\_\ 2)\ \ (\_\_\ 3\ \_\_\ 4)\ \ (\_\_\ 5\ \_\_\ 6)\ \ (\_\_\ 7\ \_\_\ 8).$$

Sempre que João jogar colocando um sinal a esquerda de um número de um desses pares, Maria deve jogar colocando o sinal oposto no outro número do mesmo par. Dessa forma, João sempre é o primeiro a escrever um sinal dentro de algum par e isso garante que Maria sempre pode realizar sua jogada. Além disso, como Maria coloca o sinal oposto, a soma dos números em cada par será +1 ou −1. Consequentemente a soma total final só poderá ser uma das seguintes possibilidades:

$$\begin{array}{ccccccc}
+1 & +1 & +1 & +1 & = & 4 \\
+1 & +1 & +1 & -1 & = & 2 \\
+1 & +1 & -1 & -1 & = & 0 \\
+1 & -1 & -1 & -1 & = & -2 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & = & -4.
\end{array}$$

Dessa forma Maria sempre será a vencedora.

## $\boxed{3}$ *Produtos de potências*

João escreveu todas as potências de 2, 3 e 5 maiores que 1 e menores que 2017 em uma folha de papel. Em seguida, ele realizou todos os produtos possíveis de dois números distintos dessa folha e os escreveu em outra folha de papel. Qual a quantidade de inteiros que João registrou na segunda folha?

## $\boxed{3}$ *Produtos de potências – Solução*

Inicialmente, devemos encontrar as potências de 2, 3 e 5 registradas na primeira folha. Como $2^{10} < 2017 < 2^{11}$, $3^6 < 2017 < 3^7$ e $5^4 < 2017 < 5^5$, as potências escritas na primeira folha podem ser divididas em três conjuntos:

$$P_2 = \{2^1, 2^2, \ldots, 2^{10}\}, P_3 = \{3^1, 3^2, \ldots, 3^6\} \text{ e } P_5 = \{5^1, 5^2, 5^3, 5^4\}.$$

Em virtude da fatoração única em números primos, os produtos obtidos pela multiplicação de potências de conjuntos distintos são também distintas. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, existem $10 \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 6 \cdot 4 = 124$ produtos de potências distintas. Resta agora contarmos quantos produtos existem entre potências de mesma base. Dado um número primo $q$ e o conjunto $P_q = \{q^1, q^2, \ldots, q^k\}$, o menor produto de potências distintas é $q^1 \cdot q^2 = q^3$ e o maior é $q^{k-1} \cdot q^k = q^{2k-1}$. Verificaremos agora que todas as potências $q^t$ com expoente $t$ entre 3 e $2k-1$ podem ser obtidas como produto de dois números desse conjunto. Se $t$ é par, podemos escrever $t = 2m$ e dado que $3 < t < 2k-1$, temos $1 < m < k-1$. Daí, basta multiplicar as potências $q^{m-1}$ e $q^{m+1}$, que fazem parte do conjunto $P_q$, para obtermos $q^{m-1} \cdot q^{m+1} = q^{2m} = q^t$. Se $t$ é ímpar, podemos escrever $t = 2m+1$ e dado que $3 < t < 2k-1$, temos $0 < m < k-1$. Basta então multiplicar $q^m$ e $q^{m+1}$, que também fazem parte de $P_q$, para obtermos $q^m \cdot q^{m+1} = q^{2m+1} = q^t$. Isso mostra que existem extamente $2k-3$ produtos de potências distintas obtidas pela multiplicação de dois elementos de $P_q$. Aplicando essa contagem com $q = 2$, 3 e 5, podemos concluir que existem mais $17+9+5 = 31$ potências distintas de mesma base na segunda folha. Logo, o total de números da segunda folha é $124 + 31 = 155$.

## $\boxed{4}$ *Quadrados pintados*

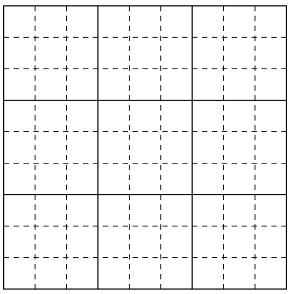
Um quadrado $9 \times 9$ foi dividido em 81 quadrados $1 \times 1$ e 8 deles foram pintados de preto e o restante de branco.

a) Mostre que independente de onde eles tenham sido pintados, sempre é possível encontrar um quadrado $3 \times 3$, formado pela justaposição de quadradinhos e com lados paralelos aos lados do tabuleiro, de modo que todos os seus quadrados sejam brancos.

b) Exiba um exemplo de pintura do tabuleiro na qual não seja possível encontrar qualquer retângulo com mais de 9 quadradinhos, também formado pela justaposição de quadradinhos e com lados paralelos aos lados do tabuleiro, sem conter um quadradinho pintado de preto.

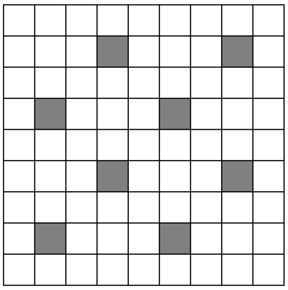
## $\boxed{4}$ *Quadrados Pintados – Solução*

a) Divida o tabuleiro $9 \times 9$ em $3 \times 3 = 9$ subtabuleiros de tamanho $3 \times 3$ como indicado na figura abaixo:



Como foram pintados apenas 8 quadradinhos e $8 < 9$, pelo menos um dos quadrados $3 \times 3$ terá todos os seus quadrados não pintados.

b) A próxima figura exibe um exemplo.



## 5 *Quantos números estão escritos na lousa?*

João escreveu alguns números reais não nulos, todos distintos, na lousa de modo que se tomarmos qualquer um deles e o elevarmos ao quadrado o resultado é maior que o produto de quaisquer outros dois números escritos na lousa.

(a) Explique por que não pode haver três reais positivos escritos na lousa.

(b) Explique por que não pode haver três reais negativos escritos na lousa.

(c) Explique por que não pode haver dois números positivos e dois números negativos escritos na lousa.

(d) Determine a maior quantidade possível de números escritos na lousa com um exemplo de um conjunto de números que satisfaz a condição requerida.

## 5 *Quantos números estão escritos na lousa? – Solução*

(a) Suponha, por absurdo, que há três números positivos escritos na lousa, digamos $0 < a < b < c$. Então $a^2 < bc$ e isso contradiz a condição do enunciado.

(b) Suponha, por absurdo, que há três números negativos escritos na lousa, digamos $a < b < c < 0$. Então $0 < -c < -b < -a$ e, repetindo o argumento do item anterior, temos $c^2 = (-c)^2 < (-b)(-a) = ab$. Isso contradiz a condição do enunciado.

(c) Suponha que temos dois números negativos e dois positivos escritos na lousa, digamos $a < b < 0 < c < d$. Se $|b| \leq |c|$, teremos $b^2 = |b|^2 < |c| \cdot |d| = cd$ e se $|b| > |c|$, então $c^2 = |c|^2 < |b| \cdot |a| = ba$. Nos dois casos, o conjunto de números não pode satisfazer a condição do enunciado.

(d) Não podemos ter mais que 3 elementos, pois caso existam 4 ou mais acontecerá um dos três casos anteriores. Para mostrar que 3 é realmente o máximo, basta exibir um exemplo com essa quantidade. Considere o conjunto $\{-2, 1, 2\}$. A condição do enunciado é satisfeita, pois $(-2)^2 > 1 \cdot 2$, $1^2 > (-2) \cdot 2$ e $2^2 > (-2) \cdot 1$.

## 6 *Primo ou composto?*

Determine se o número $\underbrace{11\ldots1}_{2016}2\underbrace{11\ldots1}_{2016}$ é um número primo ou um número composto.

## $\boxed{6}$ *Primo ou composto? – Solução*

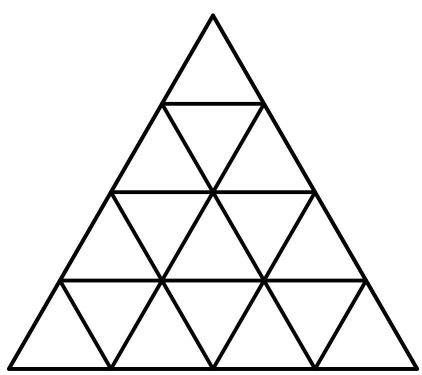
Seja $x = \underbrace{11\ldots\ldots1}_{2017}$. Daí,

$$\begin{aligned}\underbrace{11\ldots1}_{2016}2\underbrace{11\ldots1}_{2016} &= 10^{2016}\cdot x + x\\ &= x(10^{2016}+1).\end{aligned}$$

Como $x$ e $10^{2016}+1$ são divisores maiores que 1 do número dado, podemos concluir que ele é composto.

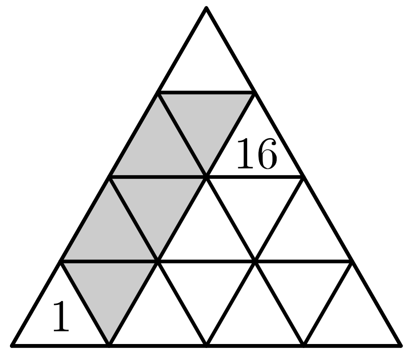
## $\boxed{7}$ *Números nos triângulos*

Na figura abaixo, estão desenhados 16 triângulos equiláteros de lado 1. Dizemos que dois deles são vizinhos se possuem um lado em comum. Determine se é possível escrevermos os números de 1 até 16 dentro desses triângulos de modo que todas as diferença entre os números colocados em dois triângulos vizinhos sejam 1 ou 2.



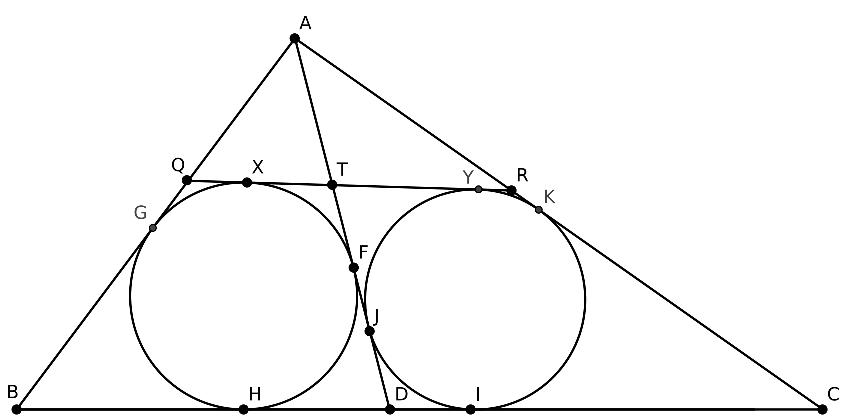
## $\boxed{7}$ *Números nos triângulos – Solução*

Observe que entre quaisquer dois triângulos de lado 1 da figura é possível construirmos um caminho formado por no máximo 5 outros triângulos que são mutuamente vizinhos. Assim, se fosse possível fazer a distribuição dos 16 números como indicado no enunciado, seria possível começar do triângulo com o número 1 e realizar no máximo 6 incrementos de 1 ou 2 unidades, através do caminho de triângulos vizinhos, e chegar no triângulo com o número 16. Entretanto, $1+2+2+2+2+2+2 = 13 < 16$ e isso mostra que tal distribuição é impossível.




## 8 *Segmento tangente aos incírculos*

Um ponto $D$ é escolhido no lado $BC$ do triângulo $ABC$. A reta tangente aos incírculos dos triângulos $ABD$ e $ADC$ e diferente de $BC$ e $AD$ intersecta o segmento $AD$ em $T$. Se $AB = 40$ cm, $AC = 50$ cm e $BC = 60$ cm, determine o valor do comprimento de $AT$.




## 8 *Segmento tangente aos incírculos – Solução*

Sabemos que os comprimentos dos segmentos tangentes traçados de um ponto externo a um círculo são congruentes e que $XY = HI$. Assim,

$$\begin{aligned}
2AT &= (AF - TF) + (AJ - TJ) \\
&= AG + AK - (TX + TY) \\
&= (AB - BG) + (AC - CK) - XY \\
&= AB + AC - (BH + HI + IC) \\
&= AB + AC - BC \\
&= 30.
\end{aligned}$$

Portanto, $AT = 30$ cm.

## $\boxed{9}$ *Contando a quantidade de dígitos*

Podemos determinar a quantidade de algarismos da representação decimal de um número inteiro positivo determinando a maior potência de 10 que não é maior que ele. Mais precisamente, um número inteiro $N$ possui $k$ algarismos em sua representação decimal quando $10^{k-1} \leq N < 10^k$. Por exemplo, 2016 possui 4 algarismos. Em alguns problemas, é importante achar a quantidade de algarismos envolvidos no resultado de operações aritméticas.

a) Determine a quantidade de algarismos do produto $111111 \cdot 1111111111$, em que o primeiro fator possui 6 algarismos e o segundo possui 10 algarismos.

b) Os números $2^{2016}$ e $5^{2016}$ são escritos um ao lado do outro para formar um único número $N$ que possui uma quantidade de algarismos que é a soma das quantidades de algarismos dos dois números. Por exemplo, se fizéssemos isso com $2^3$ e $5^3$ iríamos obter o número 8125, que possui 4 algarismos. Determine a quantidade de algarismos de $N$.

## $\boxed{9}$ *Contando a quantidade de dígitos – Solução*

a) Sejam $A$ e $B$ os números com 6 e 10 algarismos e começados por 1, respectivamente. Temos $10^5 < A < 2 \cdot 10^5$ e $10^9 < B < 2 \cdot 10^9$. Com isso, multiplicando as duas desigualdades anteriores, podemos escrever:

$$10^{14} < A \cdot B < 4 \cdot 10^{14} < 10^{15}.$$

Concluímos assim que o produto $A \cdot B$ possui exatamente 15 algarismos.

b) Chamaremos de $x$ e $y$ as quantidades de algarismos de $2^{2016}$ e $5^{2016}$, respectivamente. Desejamos encontrar $x + y$. Comparando com potências de 10, temos $10^{x-1} < 2^{2016} < 10^x$ e $10^{y-1} < 5^{2016} < 10^y$ (não pode ocorrer igualdade, pois $10^k$ não é uma potência de 2 e nem de 5 para $k \geq 1$). Multiplicando as duas desigualdades anteriores, temos

$$10^{x-1} \cdot 10^{y-1} < 2^{2016} \cdot 5^{2016} < 10^x \cdot 10^y,$$

ou seja,

$$10^{x+y-2} < 10^{2016} < 10^{x+y}.$$

Daí $x + y - 2 < 2016 < x + y$ e, consequentemente, $x + y = 2017$. Então $N$ possui 2017 algarismos.

## $\boxed{10}$ *Equação com soma dos inversos de inteiros positivos*

João estava estudando para as Olimpíadas de Matemática e se deparou com a seguinte equação

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}+\frac{1}{z},$$

onde $x$, $y$ e $z$ são inteiros positivos. Após tentar encontrar todas as soluções sem sucesso, ele pediu ajuda para o professor Piraldo, que decidiu dar algumas dicas de como ele deveria proceder. Vamos ajudar João a interpretar as dicas.

(a) Se $x=1$, determine todos os pares $(y,z)$ de inteiros positivos que satisfazem a equação.

(b) Se $x=2$ e $y\geq 2$, determine todos os pares $(y,z)$ de inteiros positivos que satisfazem a equação.

(c) Se $x=3$ e $y\geq 3$, determine todos os pares $(y,z)$ de inteiros positivos que satisfazem a equação.

(d) Se $x$ e $y$ são maiores que ou iguais a 4, verifique que a equação não possui solução.

## $\boxed{10}$ *Equação com soma dos inversos de inteiros positivos – Solução*

a) Substituindo $x=1$ na equação, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{1}+\frac{1}{y} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{z}\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{y} &= \frac{1}{z}.\end{aligned}$$

Se $z\geq 2$, então $\frac{1}{2}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}\leq\frac{1}{2}$. Daí, $\frac{1}{y}\leq 0$, que é falso. Logo, $z$ tem que ser 1. Desse modo, a única solução é $(y,z)=(2,1)$.

b) Substituindo $x=2$ na equação, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{y} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{z}\\ \frac{1}{y} &= \frac{1}{z}\\ y &= z.\end{aligned}$$

Temos soluções $(y,z)=(n,n)$ para qualquer inteiro positivo $n\geq 2$. Note que se $x=2$ e $y<2$, a única solução possível é $(y,z)=(1,1)$.

c) Substituindo $x = 3$ na equação, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}+\frac{1}{y} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{z} \\ \frac{1}{y} &= \frac{1}{6}+\frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Se $y \geq 6$, então $\frac{1}{6}+\frac{1}{z}=\frac{1}{y}\leq\frac{1}{6}$. Daí, $\frac{1}{z}\leq 0$, que é falso. Logo, $y$ tem que ser 3, 4 ou 5. Testando esses valores encontramos as soluções $(y,z) = (3,6)$, $(4,12)$ ou $(5,30)$. Note que se $x = 3$ e $y < 3$, temos apenas a solução $(y,z) = (2,3)$.

d) Se tivéssemos $x \geq 4$ e $y \geq 4$, então $\frac{1}{x}\leq\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{y}\leq\frac{1}{4}$ e isso implicaria

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leq\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Daí, $\frac{1}{z}\leq 0$. Como $z > 0$, concluímos que nesse caso a equação não possui solução.

Com essas dicas, João pode encontrar todas as soluções. Veja que os papéis desempenhados por $x$ e $y$ na equação são simétricos. Portanto, se $(x,y,z) = (a,b,c)$ é solução, então $(b,a,c)$ também é solução. Então basta encontrarmos as soluções com $x \leq y$. O último item mostra que pelo menos um dentre $x$ e $y$ é menor ou igual a 3 e, aproveitando o estudo dos três itens iniciais, podemos listar todas as soluções.

## $\boxed{11}$ *Frações irredutíveis*

Uma fração é dita irredutível quando seu numerador e seu denominador não possuem fatores comuns, ou seja, quando o máximo divisor comum entre os dois números é 1. Por exemplo, a fração $\frac{3}{7}$ é irredutível, mas a fração $\frac{10}{14}$ não é, uma vez que 2 é um fator comum de 10 e 14. Para que valores de $n$ a fração $\frac{5n+6}{6n+5}$ é irredutível? Vamos estudar esse problema em partes:

a) Seja $d = mdc(5n+6, 6n+5)$ o máximo divisor comum de $5n+6$ e $6n+5$. Verifique que $d$ é um divisor de $n-1$.

b) Sabendo que $d$ é um divisor de $n-1$, conclua que $d$ também é um divisor 11.

c) Verifique que se 11 divide $5n+6$, então 11 divide $6n+5$.

d) Para quantos inteiros positivos $n$, menores que 50, a fração $\frac{5n+6}{6n+5}$ é irredutível?

## $\boxed{11}$ *Frações irredutíveis – Solução*

a) Como $6n+5$ e $5n+6$ são múltiplos de $d$, existem inteiros $x$ e $y$ tais que $6n+5 = dx$ e $5n+6 = dy$. Logo,

$$\begin{aligned} n-1 &= (6n+5)-(5n+6) \\ &= dx-dy \\ &= d(x-y), \end{aligned}$$

implicando assim que $d$ é um divisor de $n-1$.

b) Usando o fato de $6n+5$ e $n-1$ serem múltiplos de $d$, podemos escrever

$$\begin{aligned} 11 &= (6n+5)-6(n-1) \\ &= dx-6d(x-y) \\ &= d(x-6(x-y)) \\ &= d(-5x+6y), \end{aligned}$$

que nos permite concluir que $d$ é um divisor de 11.

c) Se 11 é um divisor de $5n+6$, então podemos escrever $5n+6 = 11k$. Além disso, podemos escrever 11 como

$$\begin{aligned} 11 &= (6n+5)-6(n-1) \\ &= (6n+5)-6((6n+5)-(5n+6)) \\ &= -5(6n+5)+6(5n+6) \\ &= -5(6n+5)+66k. \end{aligned}$$

Reorganizando os termos da equação, temos

$$\begin{aligned} 5(6n+5) &= 66k-11 \\ &= 11(6k-1). \end{aligned}$$

Dado que 11 é um divisor de $5(6n+5)$, que não possui fator em comum com 5, podemos concluir que 11 divide $6n+5$.

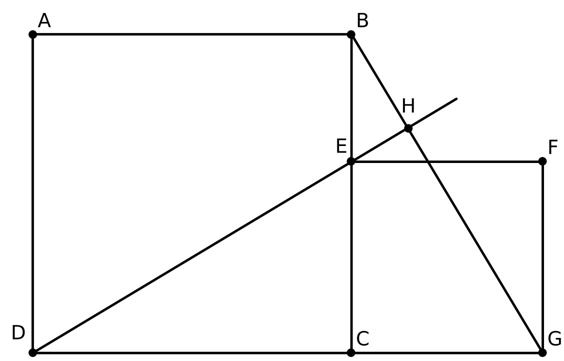
d) Basta organizar as informações obtidas nos itens anteriores. Já sabemos que o $mdc$ dos números dados divide 11, implicando apenas nas possibilidades 1 ou 11. Basta eliminar os casos em que 11 divide os dois números. Pelo item anterior, isso acontece quando $5n+6$ deixa resto 0 na divisão por 11. Testando as possibilidades, vemos que isso acontece quando $n$ deixa resto 1 na divisão por 11. De 1 até 50, existem 5 números que deixam resto 1 na divisão por 11, a saber, 1, 12, 23, 34 e 45. Então a fração $\frac{5n+6}{6n+5}$ é irredutível para $50-5 = 45$ inteiros positivos $n$ menores que 50.

## 12 *Quadrados adjacentes*

No desenho abaixo, $ABCD$ e $EFGC$ são quadrados. As retas $BG$ e $DE$ se encontram no ponto $H$.

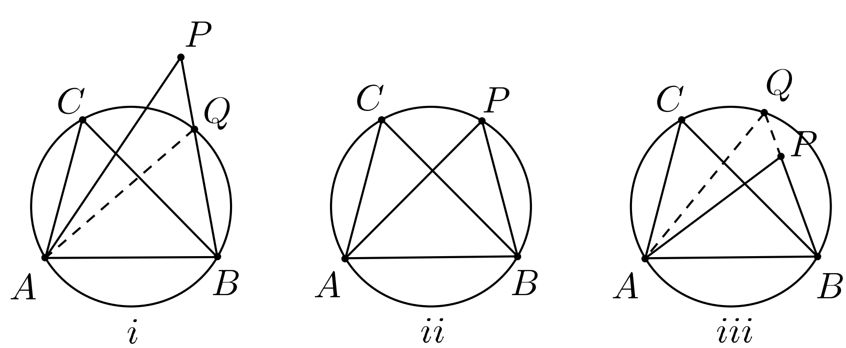
a) Verifique que $\angle BHD = 90°$ e conclua que o ponto $H$ está simultaneamente nas circunferências de diâmetros $BD$ e $EG$.

b) Encontre o valor de $\angle AHD + \angle DHG + \angle GHF$.




## 12 *Quadrados adjacentes – Solução*

Antes de resolvermos o problema, precisaremos fazer um comentário sobre quadriláteros cíclicos. Considere um triângulo $ABC$, seu circuncírculo $\Gamma$ e um ponto $P$ no mesmo semiplano que $C$ determinado pela reta $AB$. Existem três possibilidades para o ponto $P$: ele pode estar no lado de fora de $\Gamma$, sobre ele ou dentro dele. Cada uma dessas situações está representada no desenho abaixo.




Na primeira situação, quando $P$ está fora da circunferência circunscrita, considere o ponto $Q$ de interseção de um dos segmentos $PA$ ou $PB$ com $\Gamma$. Como $\angle ACB$ e $\angle AQB$ são ângulos inscritos no mesmo arco $AB$, temos $\angle ACB = \angle AQB$. Pelo Teorema do Ângulo Externo, podemos escrever

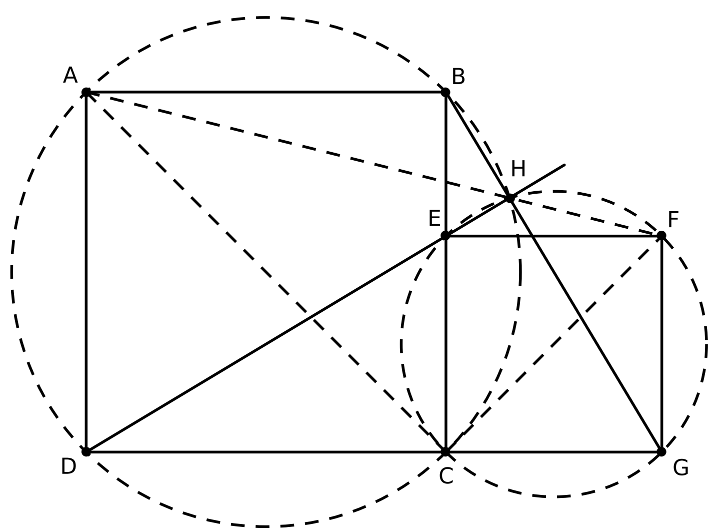
$$\begin{aligned} \angle ACB &= \angle AQB \\ &= \angle APB + \angle PAQ \\ &> \angle APB. \end{aligned}$$

Na segunda situação, como $\angle ACB$ e $\angle APB$ são ângulos inscritos no mesmo arco $AB$, temos $\angle ACB = \angle APB$. Finalmente, na terceira situação, considere o ponto de interseção das retas $PA$ ou $PB$ com $\Gamma$. Novamente pelo Teorema de Ângulo Externo, temos

$$\begin{aligned} \angle ACB &= \angle AQB \\ &< \angle AQB + \angle PAQ \\ &= \angle APB. \end{aligned}$$

Portanto, $\angle ACB = \angle APB$ se, e somente se, o ponto $P$ está no circuncírculo do triângulo $ABC$.

a) Como $EC = CG$, $DC = BC$ e $\angle BCG = \angle DCE = 90°$, segue que os triângulos $BCG$ e $ECD$ são congruentes. Daí, $\angle CBG = \angle CDE$. Pela observação anterior, isso nos garante que o ponto $B$ está no circuncírculo do triângulo $DCH$. Entretanto, sabemos que a circunferência que passa pelos pontos $B$, $C$ e $D$ é a círcunferência de diâmetro $BD$. Consequentemente, $A$, $B$, $C$, $D$ e $H$ estão sobre uma mesma circunferência de diâmetro $BD$ e $\angle BHD = \angle BCD = 90°$. Além disso, de $\angle EHG = 180° - \angle BHE = 90° = \angle EFG$, segue em virtude da observação inicial que $E$, $H$, $F$ e $G$ estão em uma mesma circunferência.




b) Considerando a circunferência circunscrita ao quadrilátero $ABCD$, como $\angle AHD$ e $\angle ACD$ estão inscritos no mesmo arco $AD$, segue que $\angle AHD = \angle ACD$. Analogamente, considerando a circunferência circunscrita ao quadrado $EFGC$, temos $\angle GHF = \angle FCG$. Daí,

$$\begin{aligned} \angle AHD + \angle DHG + \angle GHF &= \\ \angle ACD + \angle DHG + \angle FCG &= \\ 45° + 90° + 45° &= 180°. \end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que os pontos $A$, $H$ e $F$ são colineares.

## 13 *Cevianas no triângulo*

Um triângulo ABC tem lados de comprimentos $AB = 50$ cm, $BC = 20$ cm e $AC = 40$ cm. Sejam $M$ e $N$ pontos no lado $AB$ tais que $CM$ é a bissetriz relativa ao ângulo $\angle ACB$ e $CN$ é a altura relativa ao lado $AB$. Qual a medida, em centímetros, de $MN$?

## 13 *Cevianas no triângulo – Solução*

Pela Lei dos Cossenos aplicado ao triângulo $\triangle ABC$, temos

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC \\ 1600 &= 2500 + 400 - 2 \cdot 50 \cdot 20 \cdot \cos\angle ABC \\ \cos\angle ABC &= \frac{13}{20}. \end{aligned}$$

Além disso, pelo Teorema da Bissetriz Interna, temos

$$\begin{aligned} \frac{BM}{MA} &= \frac{BC}{AC} \\ \frac{BM}{BM + MA} &= \frac{BC}{BC + AC} \\ \frac{BM}{50} &= \frac{20}{60}. \end{aligned}$$

Daí, $BM = 50/3$. Finalmente,

$$\begin{aligned} MN &= BM - BN \\ &= \frac{50}{3} - BC \cdot \cos\angle ABC \\ &= \frac{50}{3} - 20 \cdot \frac{13}{20} \\ &= \frac{11}{3}. \end{aligned}$$

## 14 *Usando os fatores comuns*

Suponha que desejamos encontrar todos os inteiros não negativos $x$ e $y$ que satisfazem a equação

$$7x + 11y = 154.$$

Se usarmos apenas que $7x \le 154$ implica $x \le 22$ e testarmos as possibilidades, faremos 23 testes de casos! Por outro lado, podemos reescrever a equação como

$$11y = 154 - 7x = 7(22 - x).$$

Veja que 11 divide $7(22-x)$, mas não possui fatores em comum com o 7. Consequentemente 11 é um divisor de $22-x$. Como $22-x \leq 22$, basta testar $x=0$, $x=11$ ou $x=22$ para encontrarmos as três soluções $(x, y) = (0, 14)$, $(11, 7)$ ou $(22, 0)$ com apenas três testes de casos.

(a) Encontre todos os pares $(m, n)$ de inteiros não negativos que satisfazem a equação

$$5m + 8n = 120.$$

(b) Sejam $a$, $b$ e $c$ números inteiros positivos com $c > 1$ tais que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

Prove que pelo menos um dos números $a+c$ ou $b+c$ é um número composto, ou seja, possui algum divisor maior que 1 e menor do que ele mesmo.

## $\boxed{14}$ *Usando os fatores comuns – Solução*

a) Podemos reescrever a equação como

$$\begin{aligned} 8n &= 120 - 5m \\ &= 5(24-m). \end{aligned}$$

Temos que 8 divide o lado direito e não possui fator comum com 5. Consequentemente $24-m$ deve ser um múltiplo de 8. Sabendo que 24 é um múltiplo de 8, temos que $m$ é um múltiplo de 8 entre 0 e 24. Logo, as soluções da equação são $(m, n) = (0, 15)$, $(8, 10)$, $(16, 5)$ ou $(24, 0)$.

b) Se $a$ e $c$ possuírem um fator $d > 1$ em comum, então $d$ é um divisor de $a+c$ maior que 1 e menor que $a+c$. Podemos concluir que $a+c$ é composto. Do mesmo modo, se $b$ e $c$ possuírem algum fator em comum, então $b+c$ é um número composto. Suponha, por outro lado, que $c$ não possua fatores em comum nem com $a$ e nem com $b$. Podemos desenvolver a equação dada

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{1}{c} \\ \frac{a+b}{ab} &= \frac{1}{c} \\ c(a+b) &= ab. \end{aligned}$$

Isso nos diz que $c$ é um divisor maior que 1 do produto $ab$ que não possui fatores em comum com o produto $ab$. Isso não é possível. Logo, um dos dois casos acima deve acontecer e concluímos que pelo menos um dos números $a+c$ ou $b+c$ é composto.

## 15 *Papel quadriculado*

João possui uma folha de papel quadriculado com 10 quadrados de comprimento e 7 quadrados de largura. Ele escolheu 30 triângulos com vértices nas interseções das linhas desse papel quadriculado. Explique por que obrigatoriamente existem pelo menos dois triângulos escolhidos com vértices em comum.

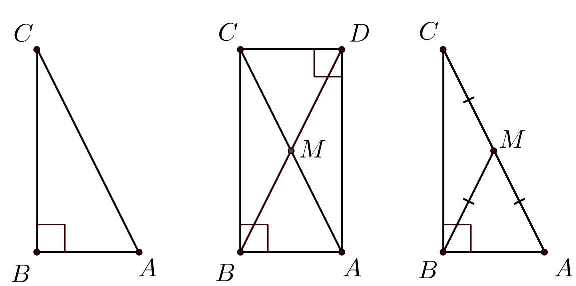
## 15 *Papel quadriculado – Solução*

O papel quadriculado possui 11 linhas horizontais e 8 linhas verticais. Consequentemente, existem $11 \cdot 8 = 88$ pontos de interseções entre elas. Se não existirem dois triângulos com vértices em comum, precisaremos de pelo menos $3 \cdot 30 = 90$ vértices distintos. Como $90 > 88$, esse absurdo mostra que pelo menos dois triângulos devem compartilhar um vértice.

## 16 *Seis pontos em uma mesma circunferência*

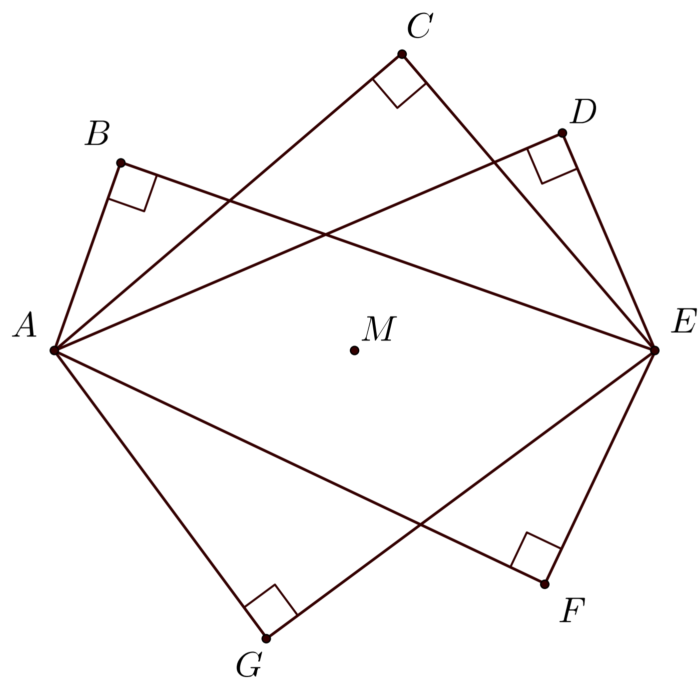
Uma propriedade muito interessante dos triângulos retângulos é o segmento que une o vértice com o ângulo reto ao ponto médio do lado oposto ter comprimento igual à metade do comprimento desse lado oposto.

(a) A primeira figura a seguir representa um triângulo $ABC$ retângulo no vértice $B$. Na segunda figura, adicionamos o triângulo $ADC$, que é congruente ao triângulo $ABC$, formando assim o retângulo $ABCD$. Além disso, traçamos as diagonais que se encontram no ponto $M$. Da segunda para a terceira figura, apenas apagamos o triângulo $ADC$.




Usando a figura anterior, explique por que $AM = BM = CM$.

(b) Considere a figura a seguir em que $M$ é o ponto médio do segmento $AE$ e os ângulos nos pontos $B$, $C$, $D$, $F$ e $G$ são retos. Explique por que existe uma circunferência que passa pelos pontos $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ e $G$.



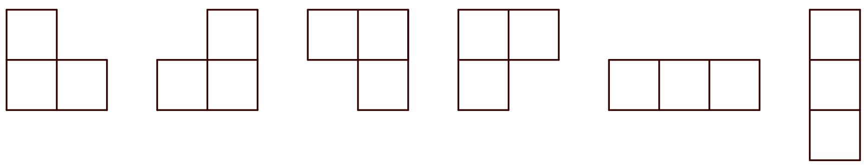

## 16 *Seis pontos em uma mesma circunferência – Solução*

(a) Em todo retângulo, as diagonais são iguais e se cortam em seu ponto médio. Portanto, temos $AM = BM = CM = DM$.

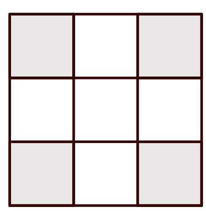
(b) Para cada um dos triângulos retângulos formados com o segmento $AE$, podemos usar a propriedade do item anterior. Isso prova que todos os 7 pontos são equidistantes de $M$, a saber, com distância dada pelo comprimento de $AE$. Traçando a circunferência de centro $M$ e raio $ME$, necessariamente ela passará por todos os pontos dados.

## 17 *Cobrindo tabuleiros com L-triminós e I-triminós*

Queremos cobrir um tabuleiro quadriculado com certas pecinhas sem sobreposição e de modo que nenhuma parte delas fique fora do tabuleiro. Usaremos pecinhas, formadas por quadradinhos, chamadas L-triminós e I-triminós e que podem ser rotacionadas nas posições descritas na figura a seguir.



Para provar que é possível realizar uma cobertura, basta mostrar uma maneira de posicionar as pecinhas. Por outro lado, para provar que não é possível realizar alguma cobertura, nem sempre é conveniente testar todas as configurações possíveis de peças e muitas vezes precisamos esboçar argumentos engenhosos. Por exemplo, provaremos que não é possível cobrir um tabuleiro $3 \times 3$ usando apenas L-triminós.



Observe os quadradinhos pintados da figura. São 4 quadradinhos e não é possível cobrir dois deles usando um mesmo L-triminó. Assim, para cobrir os 4 quadradinhos teríamos que usar pelo menos 4 L-triminós, mas isso resultaria em $4 \cdot 3 = 12$ quadradinhos cobertos, que claramente excede o total de 9 quadradinhos do tabuleiro inteiro. Portanto, não é possível cobrir o tabuleiro $3 \times 3$ com L-triminós.

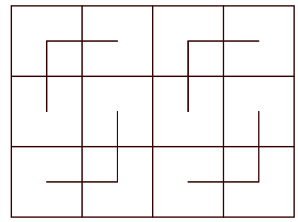
a) Mostre uma maneira de cobrir um tabuleiro $3 \times 4$ usando apenas L-triminós.

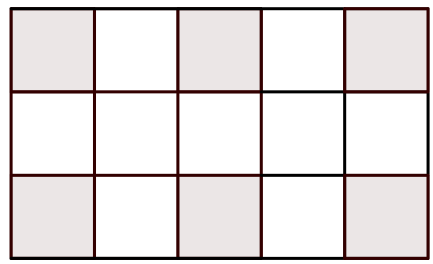
b) Prove que não é possível cobrir um tabuleiro $3 \times 5$ usando apenas L-triminós.

c) É possível cobrir o $3 \times 5$ usando exatamente um I-triminó e alguns L-triminós. Determine as posições que o I-triminó pode ocupar de modo que o resto do tabuleiro possa ser coberto com L-triminós.

## 17 *Cobrindo tabuleiros com L-triminós e I-triminós – Solução*

a) A figura a seguir mostra uma maneira de cobrir o tabuleiro $3 \times 4$ usando apenas L-triminós.

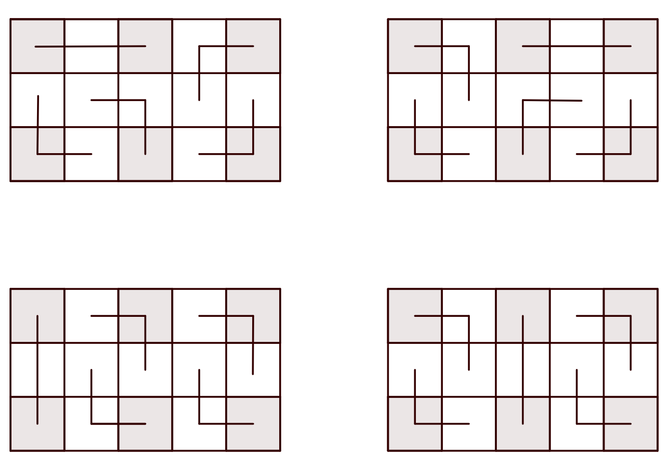




b) Considere o tabuleiro $3 \times 5$ a seguir e os 6 quadradinhos pintados.

Como um L-triminó não pode cobrir duas dessas casinhas pintadas, se fosse possível cobrir o tabuleiro inteiro teríamos que usar pelo menos 6 L-triminós. Porém, esses 6 L-triminós cobririam no total $6 \cdot 3 = 18$ quadradinhos e isso ultrapassa o total de $3 \cdot 5 = 15$ quadradinhos que o tabuleiro possui. Portanto, não é possível fazer essa cobertura.

c) Observe que um I-triminó pode cobrir 0, 1 ou 2 dos quadradinhos pintados na figura anterior. Se cobrir 0 ou 1, podemos usar o argumento do item anterior para mostrar que não será possível concluir a cobertura, pois 5 L-triminós já cobrem 15 quadradinhos. Portanto, a única possibilidade é que o I-triminó cubra 2 quadradinhos. De fato, se o I-triminó cobrir dois quadradinhos marcados é sempre possível concluir a cobertura com os L-triminós como indicado na próxima figura:



São 4 posições horizontais, duas na primeira linha e duas na terceira linha, e 3 verticais, cobrindo primeira, terceira e quinta colunas. No total o I-triminó pode ocupar 7 posições.

## 18 *Contando os divisores de $n^2$ maiores que $n$*

Para determinar a quantidade de divisores positivos de um número, basta fatorá-lo como potências de primos distintos e multiplicar os sucessores dos expoentes. Por exemplo, $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ possui $(5+1)(2+1)(1+1) = 36$ divisores positivos. Considere o número $n = 2^7 \cdot 3^4$.

a) Determine o número de divisores positivos de $n^2$.

b) Quantos divisores de $n^2$ são maiores que $n$?

c) Quantos divisores de $n^2$ são maiores que $n$ e não são múltiplos de $n$?

## 18 *Contando os divisores de $n^2$ maiores que $n$ – Solução*

a) A partir da fatoração de $n$, podemos determinar a fatoração de $n^2$:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2^7 \cdot 3^4)^2 \\ &= 2^{14} \cdot 3^8. \end{aligned}$$

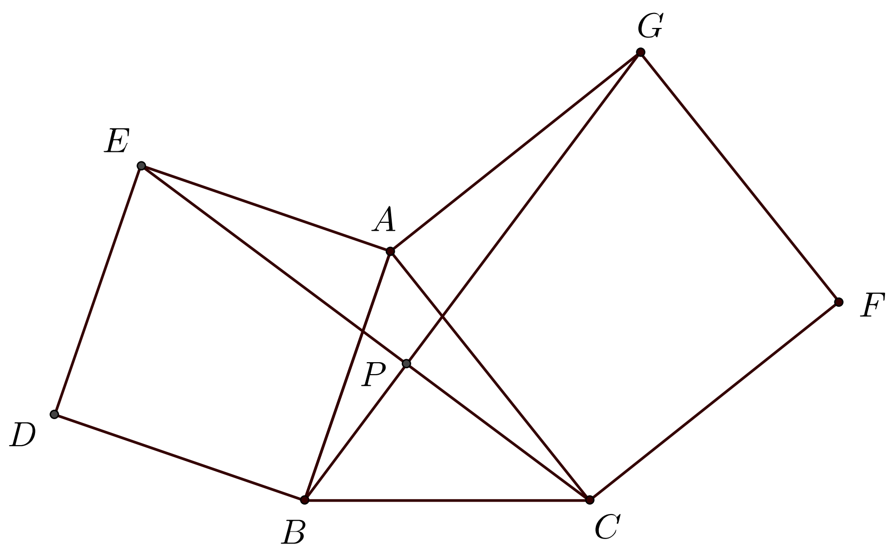
Então o número $n^2$ possui $(14+1)(8+1) = 15 \cdot 9 = 135$ divisores positivos.

b) Note que todos os divisores positivos de $n^2$ podem ser organizados em pares de números distintos da forma $\left(d, \dfrac{n^2}{d}\right)$ cujo produto é $n^2$, com exceção de $n$. Além disso, como os números em cada par são distintos e o produto é $n^2$, um deles é maior que $n$ e o outro é menor que $n$. Por exemplo, se considerarmos $n = 6$, os divisores de $n^2 = 36$ diferentes de 6 podem ser organizados nos seguintes pares: $\{1,36\}$, $\{2,18\}$, $\{3,12\}$ e $\{4,9\}$. Dessa forma, podemos concluir que o número de divisores de $n^2$ maiores que $n$ é igual ao número de pares que podemos formar. Portanto, são $\frac{135-1}{2} = 67$ divisores de $n^2$ maiores que $n$.

c) Vamos continuar o raciocínio do item anterior. Veja que em cada par temos $x \cdot y = n^2$, em que $x < n < y$. Observando os fatores primos de $x$ e de $y$, $y$ é um múltiplo de $n$ nos casos em que $x$ é um divisor de $n$ menor que $n$. Como $n = 2^7 \cdot 3^4$ possui $(7+1)(4+1) = 40$ divisores positivos, existem 39 deles diferentes de $2^7 \cdot 3^4$. Portanto, excluindo-se os pares em que $x$ é um divisor de $n$ menor que $n$, podemos concluir que existem $67 - 39 = 28$ divisores de $n^2$ maiores que $n$ que não são múltiplos de $n$.

## 19 *Triângulos rotacionados*

Considere um triângulo $ABC$ e quadrados $ABDE$ e $ACFG$ construídos exteriormente sobre seus lados. Os segmentos $BG$ e $EC$ se intersectam em $P$.

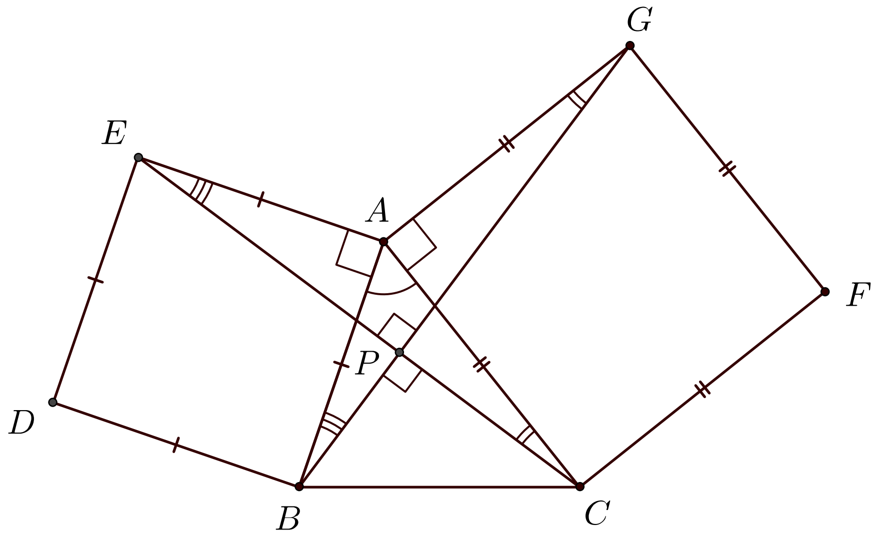



a) Prove que os triângulos $BAG$ e $EAC$ são congruentes.

b) Como esses dois triângulos são congruentes e possuem o ponto $A$ em comum, podemos rotacionar um deles em torno do ponto $A$ para obter o outro. Determine o ângulo de rotação e calcule o ângulo $\angle BPC$.

## 19 *Triângulos rotacionados – Solução*

Considere a figura a seguir em que marcamos os lados iguais dos dois quadrados.




a) Podemos afirmar que os triângulos $BAG$ e $EAC$ são congruentes pelo caso $LAL$, já que $BA = EA$, $\angle BAG = \angle EAC = 90^\circ + \angle BAC$ e $AG = AC$.

b) Como o ângulo formado entre $AG$ e $AC$ é $90^\circ$, podemos concluir que o ângulo de rotação para levar o triângulo $BAG$ no triângulo $EAC$ é $90^\circ$ (podemos usar uma rotação no sentido horário em torno de $A$). Decorre da congruência anterior que $\angle AEC = \angle ABG$ e $\angle AGB = \angle ACE$. Sabendo que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é $360^\circ$, pois podemos dividi-lo em dois triângulos com soma de seus ângulos internos igual a $180^\circ$, podemos escrever para a soma dos ângulos internos do quadrilátero $AEPG$:

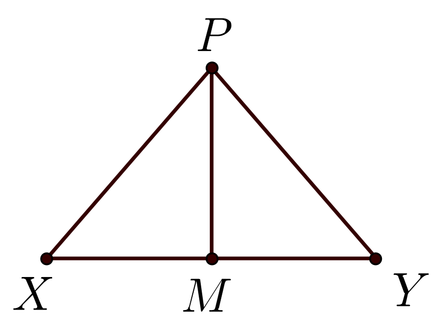
$$\begin{aligned} \angle AEP + \angle EPG + \angle PGA + \angle GAE &= 360^\circ \\ \angle AEP + \angle EPG + \angle ACP + (\angle EAC + 90^\circ) &= 360^\circ \\ (\angle AEC + \angle ECA + \angle EAC) + \angle EPG + 90^\circ &= 360^\circ \\ \angle EPG &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Note que $\angle BPC = \angle EPG$, pois são opostos pelo vértice $P$. Daí, $\angle BPC = 90^\circ$.

**Observação:** Perceba que o ângulo entre os segmentos correspondentes $EC$ e $BG$ coincinde com o ângulo de rotação aplicado aos triângulos $AEC$ e $ABG$.

## $\boxed{20}$ *A mediatriz*

A mediatriz de um segmento $XY$ é a reta perpendicular ao segmento passando por seu ponto médio. A principal propriedade da mediatriz é que um ponto está sobre ela se, e somente se, a distância desse ponto até $X$ é igual à distância desse ponto até $Y$. Uma afirmação formada usando "se, e somente se" é equivalente a duas implicações. No presente caso, para verificar a afirmação feita, precisamos por um lado mostrar que se a distância até $X$ é igual à distância até $Y$, então o ponto está na mediatriz. Por outro lado, precisamos mostrar que se um ponto está sobre a mediatriz, então as distâncias aos pontos $X$ e $Y$ são iguais. Para provar a primeira parte, considere um ponto $P$ tal que $PX = PY$ e seja $M$ o ponto médio de $XY$.




Os triângulos $PMX$ e $PMY$ são congruentes, pois possuem os três lados correspondentes de mesmo comprimento. Portanto, $\angle PMX = \angle PMY$. Como $X$, $M$ e $Y$ são colineares, temos $\angle PMX + \angle PMY = 180^\circ$. Consequentemente, $\angle PMX = 90^\circ$ e $P$ está na reta perpendicular ao segmento que passa pelo seu ponto médio.

a) Prove a segunda parte da proposição, ou seja, prove que se $P$ é um ponto sobre a reta mediatriz de $XY$, então $PX = PY$.

b) Prove que todo triângulo $ABC$ possui um ponto $O$ no mesmo plano tal que $OA = OB = OC$. Esse ponto é denominado circuncentro do triângulo, pois uma circunferência de centro $O$ e raio $AO$ passa pelos três vértices do triângulo $ABC$.

c) Considere um quadrilátero $ABCD$. Suponha que as mediatrizes de $AB$, $AC$ e $AD$ são concorrentes, ou seja, as três passam por um mesmo ponto. Prove que existe uma circunferência que passa pelos 4 vértices do quadrilátero $ABCD$.

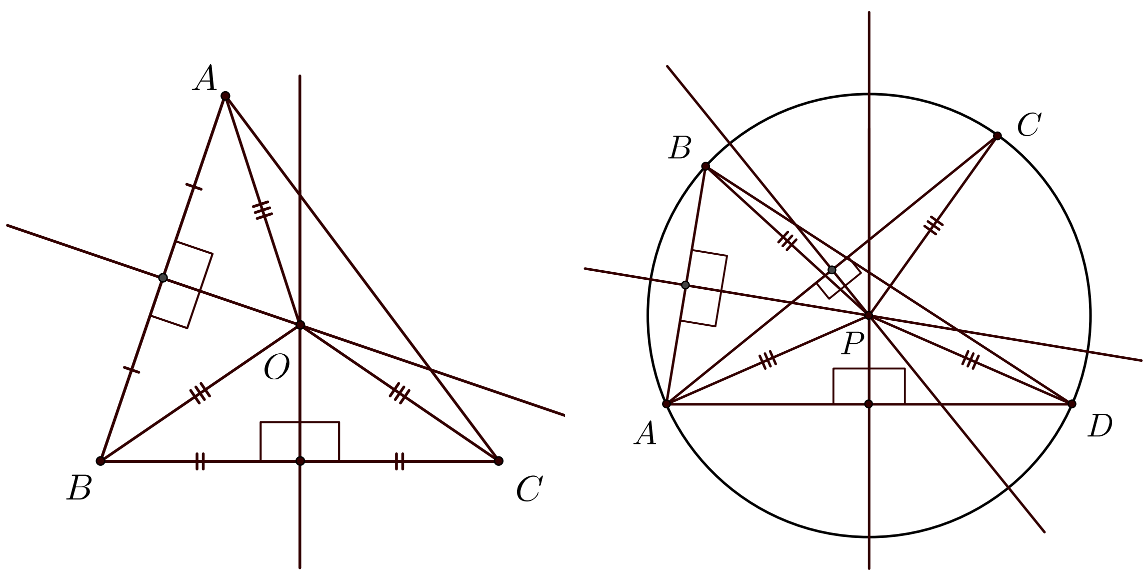
## $\boxed{20}$ *A mediatriz – Solução*

a) Como os triângulos $PMX$ e $PMY$ são retângulos e $MX = MY$, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$PX^2 = PM^2 + MX^2 = PM^2 + MY^2 = PY^2.$$

Portanto, $PX = PY$.

b) Veja que as mediatrizes de $AB$ e $BC$ não são paralelas, pois esses segmentos não são paralelos. Logo elas se encontram em um ponto, que denotaremos por $O$.

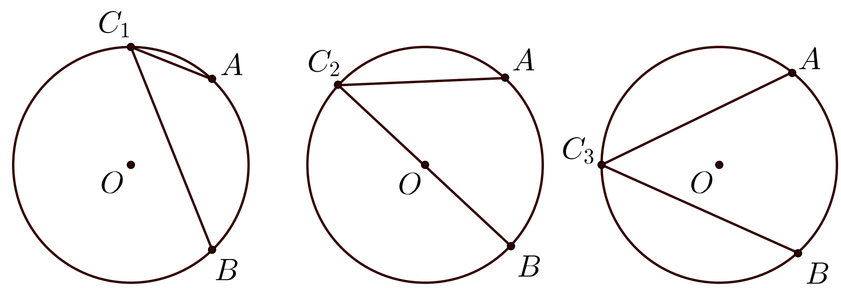



Como $O$ está na mediatriz de $AB$, $OA = OB$. Além disso, como $O$ está na mediatriz de $BC$, $OB = OC$. Logo $OA = OB = OC$.

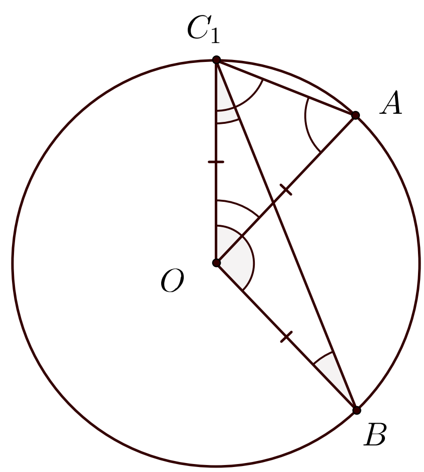
c) Seja $P$ o ponto de encontro das três mediatrizes. Como a mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos que possuem mesma distância em relação aos extremos do segmento, podemos afirmar que $PA = PB = PC = PD$. Dessa forma, se traçarmos a circunferência de centro $P$ e raio $PA$, então ela passará pelos 4 vértices do quadrilátero $ABCD$.

## $\boxed{21}$ *Ângulos em uma circunferência*

Considere dois pontos $A$ e $B$ em uma circunferência de centro $O$. A medida do menor arco $AB$ é dada pelo ângulo $\angle AOB$. Para qualquer ponto $C$ no maior arco $AB$, a medida do ângulo $\angle ACB$ será exatamente metade da medida do ângulo $\angle AOB$. O ângulo $\angle AOB$ é chamado de ângulo central e o ângulo $\angle ACB$ é chamado ângulo inscrito no arco $AB$. Para provar essa relação entre o ângulo central e o ângulo inscrito, vamos considerar as três possibilidades: o ponto $O$ é externo ao triângulo $ACB$, $O$ está sobre um dos lados do




triângulo $ACB$ ou $O$ é interno ao triângulo $ACB$. Essas possibilidades estão ilustradas na próxima figura.
Unindo o centro $O$ aos três pontos na primeira figura, como $OA = OB = OC$, temos os triângulos isósceles $AOC_1$ e $BOC_1$.



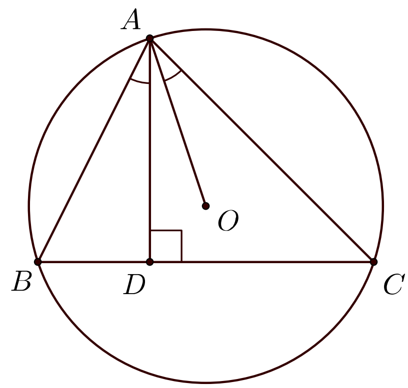

Lembrando que triângulos isósceles possuem ângulos congruentes aos lados opostos que são congruentes, vale que $\angle AC_1O = \angle C_1AO = x$ e $\angle BC_1O = \angle C_1BO = y$. Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180^\circ$, temos $\angle AOC_1 = 180^\circ - 2x$ e $\angle BOC_1 = 180^\circ - 2y$. Daí,

$$\begin{aligned}\angle AOB &= \angle BOC_1 - \angle AOC_1\\ &= (180^\circ - 2y) - (180^\circ - 2x)\\ &= 2(x-y)\\ &= 2\angle AC_1B.\end{aligned}$$

a) Prove que também vale $\angle AOB = 2\angle ACB$ nos outros dois casos exibidos na última figura.

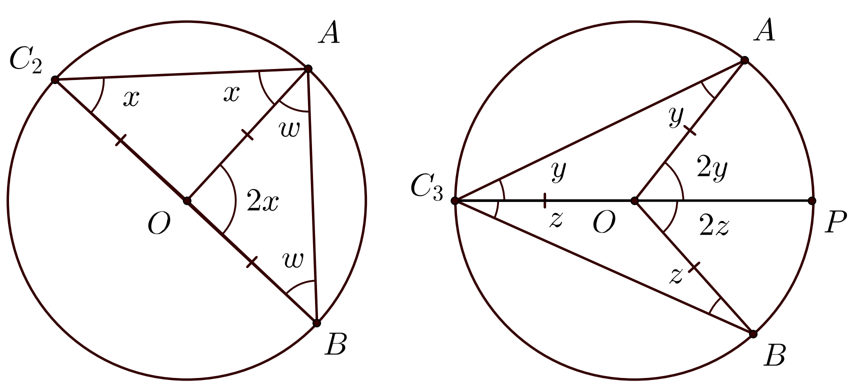
b) Na segunda figura, a corda $C_2B$ passa pelo centro da circunferência e, portanto, trata-se de um diâmetro. Determine o ângulo $\angle C_2AB$ inscrito no diâmetro, ou seja, em um arco que representa metade da circunferência.

c) No triângulo $ABC$ da figura a seguir, $AD$ é a altura relativa ao lado $BC$ e $O$ é o centro da circunferência que passa por $A$, $B$ e $C$. Prove que $\angle CAO = \angle DAB$.




## 21 *Ângulos em uma circunferência – Solução*

(a) Na segunda configuração, trace os segmentos do centro $O$ aos pontos da circunferência formando os triângulos isósceles $AC_2O$ e $AOB$.




Seja $\angle OC_2A = x$. Como o triângulo $OC_2A$ é isósceles, $\angle C_2AO = x$ e $\angle C_2OA = 180^\circ - 2x$. Daí, temos

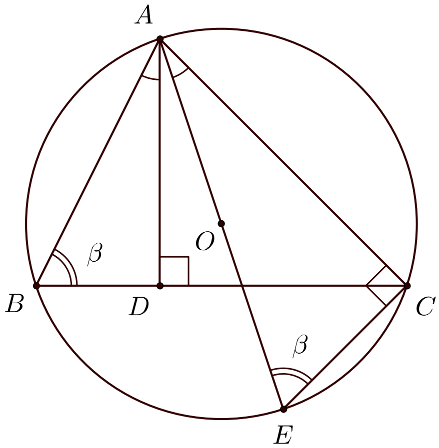
$$\begin{aligned}\angle AOB &= 180^\circ - (180^\circ - 2x)\\ &= 2x\\ &= 2\angle AC_2B.\end{aligned}$$

Na terceira configuração, prolongue $C_3O$ até encontrar a circunferência no ponto $P$. Sejam $\angle OC_3A = y$ e $\angle OC_3B = z$. Como os triângulos $AC_3O$ e $BC_3O$ são isósceles, temos $\angle POA = 2y$ e $\angle POB = 2z$. Logo,

$$\begin{aligned}\angle AOB &= 2y + 2z\\ &= 2(y+z)\\ &= 2\angle AC_3B.\end{aligned}$$

(b) Como $OB = OA$, podemos escrever $\angle OBA = \angle OAB = w$. Somando os ângulos internos do triângulos $C_2AB$, temos $2x + 2w = 180°$. Consequentemente, $x + w = 90°$ e $\angle C_2AB = 90°$.

(c) Seja $E$ o ponto onde $AO$ corta novamente a circunferência.




Veja que $\angle ABC = \angle AEC = \beta$, já que ambos estão inscritos no arco $AC$. Note que $\angle ACE = 90°$, pois $AE$ é diâmetro. Então, pela soma dos ângulos internos dos triângulos $ADB$ e $ACE$, temos $\angle DAB = 90° - \beta = \angle CAE = \angle CAO$.

## 22 *Números interessantes*

Um número natural $n$ é *interessante* se a soma dos dígitos de $n$ é igual a soma dos dígitos de $3n + 11$. Verifique que existem infinitos números interessantes.

## 22 *Números interessantes – Solução*

Dado um número natural $n$, vamos denotar por $s(n)$ a soma dos dígitos de $n$. Podemos fazer uma tabela com os primeiros inteiros positivos para encontrar algum exemplo de número interessante.

| $n$ | $3n+11$ | $s(n)$ | $s(3n+11)$ | $n$ | $3n+11$ | $s(n)$ | $s(3n+11)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 14 | 1 | 5 | 5 | 26 | 5 | 8 |
| 2 | 17 | 2 | 8 | 6 | 29 | 6 | 11 |
| 3 | 20 | 3 | 2 | 7 | 32 | 7 | 5 |
| 4 | 23 | 4 | 5 | 8 | 35 | 8 | 8 |

Podemos concluir que o número 8 é interessante. Nossa extratégia será construir outros números interessantes a partir dele. Considere, por exemplo, um número obtido a partir de 8 com a inserção de vários dígitos nulos à sua esquerda e do algarismo 1, ou seja, da forma $n = 10^k + 8$. Veja que $3n + 11 = 3 \cdot 10^k + 35$ e que $S(n) = 1 + 8 = 9$ e $s(3n + 11) = 3 + 3 + 5 = 11$. Infelizmente ele não é interessante, mas a inserção de muitos dígitos nulos à esquerda do 8 nos permite ainda identificar a soma dos dígitos $3 + 5 = 8$ no número $3n + 11$. Para alcançar a propriedade que buscamos, basta trocarmos o dígito inicial 1 de $n$ por algum outro dígito que ao ser multiplicado por 3 ainda mantenha a mesma soma de seus dígitos. Considere agora $n = 9 \cdot 10^k + 8$. Assim, $3n + 11 = 27 \cdot 10^k + 35$ e $s(n) = 17 = 2 + 7 + 3 + 5 = s(3n + 11)$. Como $k$ pode ser qualquer inteiro positivo, existem infinitos números naturais da forma $10^k + 8$ que são interessantes.

## 23 *Fila de cadeiras*

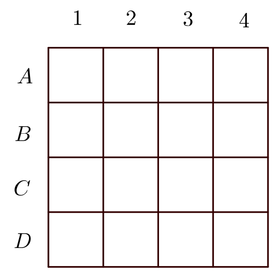
Existem 2017 cadeiras não ocupadas em uma fila. A cada minuto, uma pessoa chega e se senta em uma delas que esteja vazia e, no mesmo instante, caso esteja ocupada, uma pessoa em uma cadeira vizinha se levanta e vai embora. Qual o número máximo de pessoas que podem estar simultaneamente sentadas na fileira de cadeiras?

## 23 *Fila de cadeiras – Solução*

Não é possível todas as cadeiras estarem simultaneamente ocupadas, pois o último a sentar inevitavelmente sentaria ao lado de uma cadeira ocupada e forçaria, de acordo com a regra do enunciado, alguém a ir embora. Nosso objetivo agora é mostrar uma sequência de movimentos onde é possível 2016 pessoas estarem sentadas simultaneamente. Numere as cadeiras com os números de 1 até 2017. Inicialmente uma pessoa sentará na cadeira de número 1. Em seguida, outra pessoa sentará na cadeira de número 3. Nenhuma pessoa irá embora, pois as cadeiras 1 e 3 não são vizinhas. A próxima pessoa deverá sentar na cadeira de número 2 e assim a pessoa na cadeira de número 3 irá embora. Uma nova pessoa sentará na cadeira de número 4 e, em seguida, outra pessoa chegará e sentará na cadeira de número 3. Agora a cadeira de número 4 é desocupada, mas as três primeiras cadeiras estão com pessoas. Suponha que todas as cadeiras de números de 1 até $k$, com $k < 2016$, estão com pessoas e as cadeiras restantes estão vazias. O próximo a sentar escolherá a cadeira $k + 2$. Em seguida, outra pessoa sentará na cadeira $k + 1$ e obrigará a pessoa na cadeira $k + 2$ a ir embora. Assim, as cadeiras de 1 até $k + 1$ estão ocupadas e as cadeiras restantes estão vazias. Podemos repetir esse procedimento enquanto $k < 2016$ e quando ele for executado pela última vez teremos as cadeiras de 1 até 2016 ocupadas.

## 24 *Maneiras de escolher quadradinhos com certas condições*

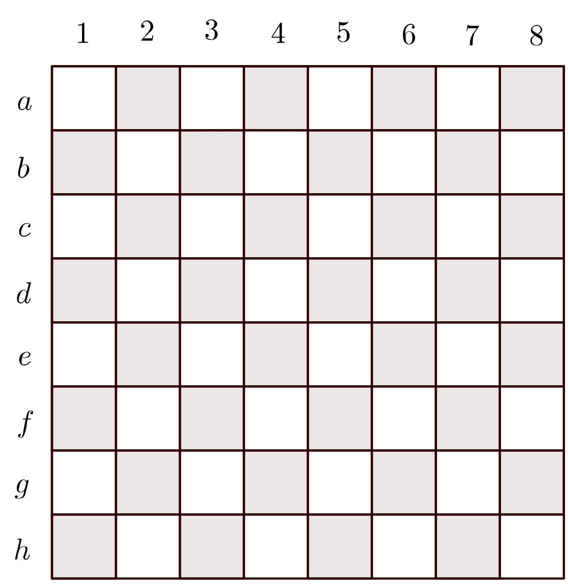
a) Considere o tabuleiro $4 \times 4$ da figura a seguir. As letras e os números foram colocados para ajudar a localizar os quadradinhos. Por exemplo, o quadradinho $A1$ é o do canto superior esquerdo e o $D4$ é o do canto inferior direito.




Mostre uma maneira de escolhermos 12 quadradinhos de modo que em cada linha e em cada coluna sejam escolhidos exatamente 3 quadradinhos.

b) Determine o número de maneiras diferentes de escolhermos 12 quadradinhos no tabuleiro $4 \times 4$ de modo que em cada linha e em cada coluna sejam escolhidos exatamente 3 quadradinhos.

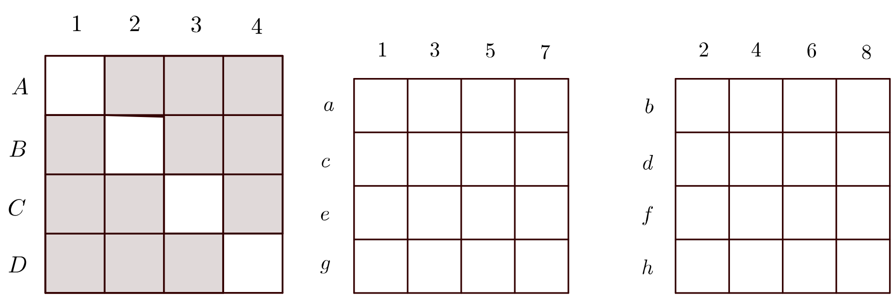
c) Considere um tabuleiro $8 \times 8$ com uma identificação de linhas e colunas similar ao tabuleiro anterior, mas colorido alternadamente de preto e branco.




Determine o número de maneiras de escolhermos 56 quadradinhos do tabuleiro de modo que todos os quadradinhos pretos sejam escolhidos e exatamente 7 quadradinhos sejam escolhidos em cada linha e em cada coluna.

## $\boxed{24}$ *Maneiras de escolher quadradinhos com certas condições – Solução*

a) Existem várias maneiras de fazer isso (veremos exatamente quantas no próximo item). No exemplo da figura da esquerda abaixo, apenas os quadradinhos $A1$, $B2$, $C3$ e $D4$ não são escolhidos.

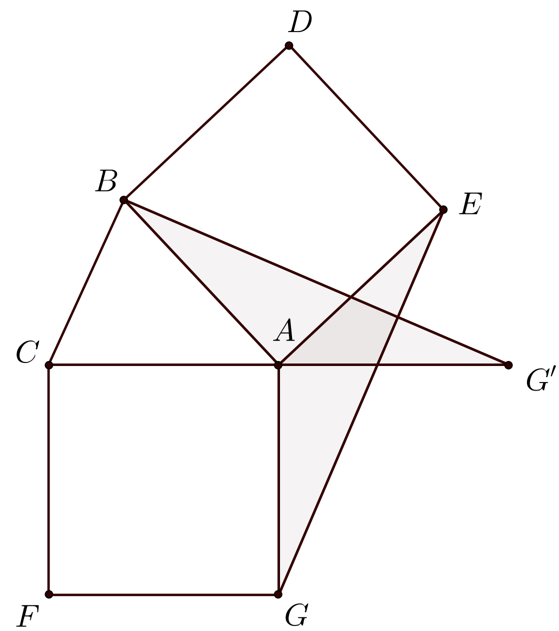



b) Vamos usar o princípio fundamental da contagem. Na primeira linha, temos 4 maneiras de selecionar o quadradinho que não será escolhido. Para cada uma dessas maneiras, teremos 3 maneiras de selecionar o quadradinho na segunda linha. Em seguida, 2 maneiras de selecionar na terceira e apenas uma maneira de selecionar na quarta linha. Com isso, teremos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ maneiras de escolhermos os 12 quadradinhos.

c) Se considerarmos que todos os quadradinhos pretos são escolhidos, resta escolher exatamente 3 quadradinhos brancos em cada fileira (linha ou coluna). Observe que o número de maneiras de fazer isto é igual ao número de maneiras de escolher 3 quadradinhos em cada fileira dos tabuleiros $4 \times 4$, indicados à direita e ao centro na figura anterior, de modo que em cada fileira exatamente 3 quadradinhos sejam escolhidos. Como as escolhas em cada tabuleiro são independentes, para cada escolha de 12 quadradinhos do tabuleiro do centro e cada escolha de 12 quadradinhos do tabuleiro da direita, atendendo todas as condições, temos uma escolha de 24 quadradinhos brancos do tabuleiro $8 \times 8$. Juntamente com os 32 pretos, eles formam os 56 que devem ser escolhidos. Dessa forma, o número de maneiras de escolher os 56 quadradinhos satisfazendo as condições do problema é $24 \cdot 24 = 576$.

## 25 *Triângulos irmãos possuem mesma área*

A figura a seguir representa um triângulo $ABC$, dois quadrados $ABDE$ e $ACFG$, ambos construídos sobre os lados do triângulo $ABC$, e outro triângulo $AEG$.




Dizemos que os triângulos $ABC$ e $AEG$, posicionados dessa forma em relação a dois quadrados, são *triângulos irmãos*.

(a) Verifique que $\angle BAC + \angle GAE = 180^\circ$.

(b) Após verificar o item anterior, podemos rotacionar o triângulo $AEG$, por $90^\circ$ no sentido anti-horário e em torno de $A$, para chegar na posição $BAG'$. Vale ressaltar que $BA = AE$, pois são lados do quadrado $ABDE$. A partir disso, prove que os *triângulos irmãos* $ABC$ e $AEG$ possuem mesma área.

## 25 *Triângulos irmãos possuem mesma área – Solução*

(a) Como a soma de todos os ângulos ao redor de um ponto é $360^\circ$, temos

$$\begin{aligned}\angle BAC + \angle CAG + \angle GAE + \angle EAB &= 360^\circ\\ \angle BAC + 90^\circ + \angle GAE + 90^\circ &= 360^\circ\\ \angle BAC + \angle GAE &= 180^\circ.\end{aligned}$$

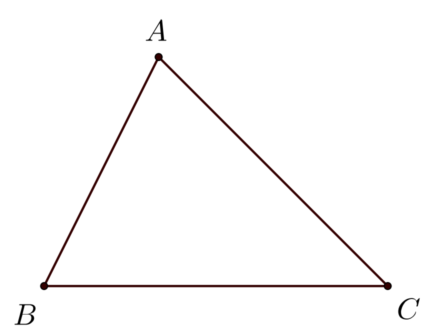
(b) Pelo item anterior, $C$, $A$ e $G'$ estão sobre uma mesma reta, pois $\angle CAG' = 180°$. Seja $h$ a distância do ponto $B$ em relação a essa reta. Então podemos calcular a área do triângulo $ABC$ e do triângulo $BAG'$ usando essa distância como altura:

$$[ABC] = \frac{AC \cdot h}{2} = \frac{AG' \cdot h}{2} = [BAG'].$$

Como o triângulo $BAG'$ é congruente ao triângulo $AEG$, concluímos que os triângulos irmãos $ABC$ e $AEG$ possuem mesma área.

## 26 *Possuem mesma área e dois lados iguais, mas não são congruentes*

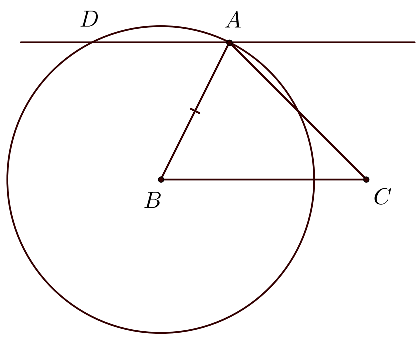
Considere um triângulo acutângulo $ABC$.




Explique como construir um triângulo $DBC$ com mesma área que $ABC$, satisfazendo $DB = AB$, mas que não seja congruente ao triângulo $ABC$.

## 26 *Possuem mesma área e dois lados iguais, mas não são congruentes – Solução*

Primeiro, vamos criar uma construção em que o novo triângulo possua a mesma área. Para isso trace a reta paralela a $BC$ por $A$, pois para qualquer ponto $P$ dessa reta, a altura relativa a $BC$ é a mesma. Calculando a área em relação a essa base $BC$ teremos que a área de $PBC$ igual à área de $ABC$. Agora, devemos garantir que $DB = AB$. Para isso, trace a circunferência de centro $B$ passando por $A$. Os pontos dessa circunferência são exatamente os pontos cuja distância em relação a $B$ é igual à $AB$.




Como o triângulo é acutângulo, essa circunferência encontra a reta paralela a $BC$ por $A$ em um segundo ponto $D$. Veja que os triângulos $DBC$ e $ABC$ não são congruentes, pois $\angle DBC > 90^\circ$ e $ABC$ é acutângulo.

## $\boxed{27}$ *Quantidade de divisores*

Quantos divisores de $88^{10}$ deixam resto 4 quando divididos por 6?

## $\boxed{27}$ *Quantidade de divisores – Solução*

Como $88 = 2^3 \cdot 11$, temos $88^{10} = (2^3 \cdot 11)^{10} = 2^{30} \cdot 11^{10}$. Se um inteiro $x$ deixa resto 4 por 6, então $x+2$ é múltiplo de 6. Consequentemente $x$ é par e deixa resto 1 na divisão por 3. Perceba agora que todos os divisores primos de $88^{10}$ deixam resto 2 na divisão por 3 e que o produto de qualquer quantidade par deles deixa resto 1 por 3 enquanto o produto de qualquer quantidade ímpar deixa resto 2 por 3. Portanto, os divisores que queremos contar são aqueles que possuem pelo menos um fator 2, mas uma quantidade par de fatores primos. Assim, eles podem ser escritos na forma $2^m \cdot 11^n$ com $m \geq 1$ e $m+n$ par. Vamos dividir a contagem deles em duas partes:

1. Quando $m$ é par, podemos escolhê-lo de 15 maneiras, pois ele deve pertencer ao conjunto $\{2, 4, \dots, 30\}$. Uma vez que ele tenha sido escolhido, temos 6 opções de escolha de outro número par para $n$, a saber, os elementos de $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.

2. Quando $m$ é ímpar, podemos escolhê-lo também de 15 maneiras, pois ele deve pertencer ao conjunto $\{1, 3, 5, \dots, 29\}$. Uma vez que ele tenha sido escolhido, temos 5 opções de escolhas, a saber, os elementos de $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Portanto, a quantidade de divisores é $15 \cdot 6 + 15 \cdot 5 = 165$.

## 28 *Quadrado Latino*

Um Quadrado Latino é um tabuleiro $n \times n$ preenchido com $n$ símbolos distintos de modo que em cada linha e em cada coluna não existam símbolos repetidos. Por exemplo, a figura abaixo mostra um exemplo de um Quadrado Latino de dimensões $3 \times 3$. O nome foi inspirado em trabalhos do matemático Leonhard Euler, que usou caracteres latinos como símbolos.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 1 |

Sabemos que existem 576 Quadrados Latinos distintos de dimensões $4 \times 4$. De quantos modos podemos completar o quadrado abaixo, que já possui duas casas preenchidas, com os algarismos $1, 2, 3$ e $4$ de modo que em cada linha e coluna figurem os quatro algarismos?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | 2 | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

## 28 *Quadrado Latino – Solução*

Observe que dado um Quadrado Latino, quando trocamos todas as casas de um símbolo pelas casas de outro, ainda obtemos outro Quadrado Latino. No exemplo dado no enunciado, ao trocarmos as casas de número 1 e 2 de posição, obtemos:

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 |
| 3 | 2 | 1 |
| 1 | 3 | 2 |

Isso nos permite construir uma correspondência biunívoca entre todos os Quadrados Latinos que possuem no canto superior esquerdo um símbolo em $\{1, 2, 3, 4\}$ e todos os outros Quadrados Latinos com outro símbolo no mesmo conjunto. Daí, em $1/4$ do total de Quadrados Latinos $4 \times 4$ deve possuir o algarismo 1 na casa do canto superior esquerdo. Dentre esses quadrados, qualquer permutação entre os símbolos de $\{2, 3, 4\}$ ainda irá gerar um quadrado onde a casa do canto superior esquerdo tem o símbolo 1.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $X$ | $Y$ | $Z$ |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Portanto, em um terço dessas configurações o algarismo 2 se encontra na posição $X$, em outro terço na posição $Y$ e no último terço na posição $Z$ dos quadrados da primeira linha da figura anterior. Logo, o total de Quadrados Latinos procurados é

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 576 = 48.$$

## $\boxed{29}$ *Existe um número que divide todos os elementos do conjunto*

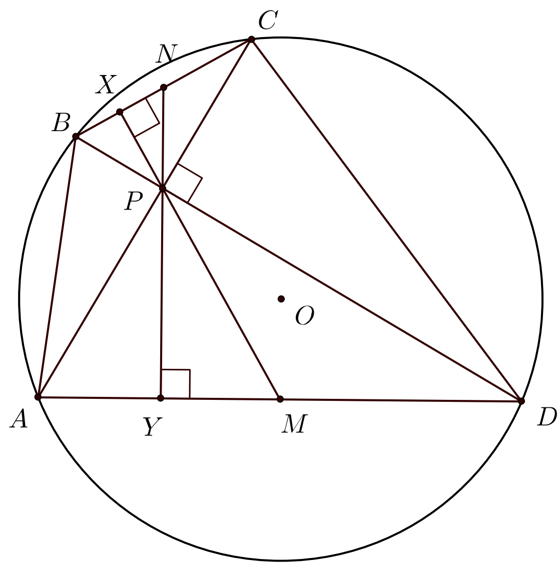
Seja $A$ um conjunto infinito de inteiros positivos. Sabe-se que se tomarmos qualquer subconjunto finito $B$ do conjunto $A$ existe um inteiro positivo $b$ maior que 1 tal que $b$ divide todos os elementos do conjunto $B$. Prove que existe um inteiro positivo $d$ maior que 1 que divide todos os elementos do conjunto $A$.

## $\boxed{29}$ *Existe um número que divide todos os elementos do conjunto – Solução*

Considere um elemento $a$ do conjunto $A$ e sejam $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}, p_k$ os divisores primos de $a$. Se algum primo $p_i$ divide todos os elementos do conjunto $A$, então $d = p_i$ satisfaz o enunciado. Vamos provar que isso obrigatoriamente acontece. Suponha, por absurdo, que para cada primo $p_i$ podemos encontrar um elemento $a_i$ do conjunto $A$ que não é divisível por $p_i$. Veja que não necessariamente todos os elementos $a_i$ são distintos. Considere agora o conjunto $B$ formado por $a$ e pelos inteiros $a_i$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Pela condição do enunciado, existe $b > 1$ que divide todos os elementos de $B$. Como $b$ divide $a$, então ele possui algum dos fatores primos de $a$ em sua fatoração, digamos $p_x$. Dado que $a_x \in B$, então $b$ divide $a_x$ e, consequentemente, $p_x$ deve ser um divisor de $a_x$. Esse absurdo mostra que a afirmação inicial feita sobre os primos $p_i$ é falsa. Logo, pelo menos um deles deve dividir todos os elementos do conjunto $A$.

## 30 *Um quadrilátero cíclico com diagonais perpendiculares*

Um quadrilátero é dito cíclico quando seus quatro vértices estão sobre uma mesma circunferência. Considere um quadrilátero $ABCD$ cíclico com diagonais $AC$ e $BD$ perpendiculares. Além disso, sejam $O$ o centro da circunferência que passa pelos vértices do quadrilátero e $P$ o ponto de encontro das diagonais.



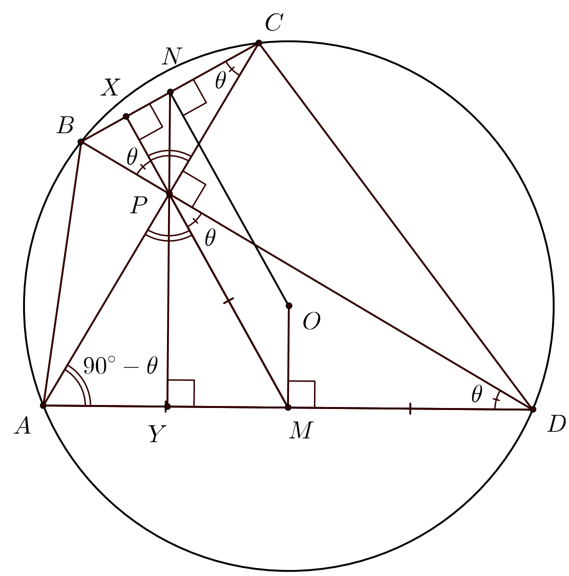

a) A partir do ponto $P$ traçamos uma reta $r$ perpendicular a $BC$. A reta $r$ corta $BC$ em $X$ e $AD$ em $M$. Verifique que $M$ é o ponto médio do lado $AD$.

b) A partir do ponto $P$ trace a reta $s$ perpendicular a $AD$ cortando $AD$ no ponto $Y$ e $BC$ no ponto $N$. Verifique que o quadrilátero $OMPN$ é um paralelogramo.

## 30 *Um quadrilátero cíclico com diagonais perpendiculares – Solução*

a) Seja $\angle BCA = \theta$. Veja que $\angle BCA = \angle BDA = \theta$, pois eles estão inscritos no mesmo arco $AB$. Considerando a soma dos ângulos do triângulo $CXP$, temos $\angle CPX = 90° - \theta$ e, consequentemente, $\angle BPX = \angle BPC - \angle CPX = \theta$. Vale que $\angle APM = \angle XPC = 90° - \theta$, pois eles são ângulos opostos pelo vértice $P$, e $\angle MPD = \angle BPX = \theta$ pelo mesmo motivo. Analisando agora a soma dos ângulos internos do triângulo $PAD$, temos $\angle PAD + \angle APD + \angle PDA = 180°$. Assim, como $\angle APD = 90°$, temos $\angle PAD = 90° - \theta$. Daí, $\angle MAP = \angle APM$ e $\angle MPD = \angle MDP$, ou seja, $APM$ e $MDP$ são triângulos isósceles com $MA = MP = MD$. Concluímos então que $M$ é o ponto médio de $AD$.

b) De modo semelhante ao item anterior, podemos concluir que $N$ é o ponto médio de $BC$. Como $O$ é equidistante dos extremos dos vértices $A$, $D$, $B$ e $C$, $OM$ e $ON$ são mediatrizes de $AD$ e $BC$, respectivamente. Decorre do item anterior que $OM \parallel PN$ e $ON \parallel PM$. Concluímos assim que $OMPN$ é um paralelogramo, pois seus lados opostos são paralelos.



# ENUNCIADOS E SOLUÇÕES DO NÍVEL 3

## 1 *Números Naturais escritos no tabuleiro*

Considere o seguinte tabuleiro quadriculado onde todos os números naturais foram escritos em diagonal.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ddots$ | | | | | |
| 10 | $\ddots$ | | | | |
| 6 | 9 | $\ddots$ | | | |
| 3 | 5 | 8 | 12 | $\ddots$ | |
| 1 | 2 | 4 | 7 | 11 | $\ddots$ |

Cada quadradinho possui uma posição denotada por $(x, y)$, em que $x$ representa a coluna, contada da esquerda para a direita, e $y$ representa a linha, contada debaixo para cima. Por exemplo, 12 é o número escrito no quadradinho de posição $(4,2)$:

a) Determine o número que está no quadradinho de posição $(4,4)$.

b) Determine o número que está no quadradinho de posição $(1,2016)$.

c) Determine o número que está no quadradinho de posição $(2013,2017)$.

## 1 *Números Naturais escritos no tabuleiro – Solução*

a) Podemos preencher mais casas do tabuleiro exibido para encontrar a casa $(4,4)$:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 27 | | | | | |
| 15 | 20 | 26 | | | | |
| 10 | 14 | 19 | 25 | | | |
| 6 | 9 | 13 | 18 | 24 | | |
| 3 | 5 | 8 | 12 | 17 | 23 | |
| 1 | 2 | 4 | 7 | 11 | 16 | 22 |

Portanto, o número no quadradinho $(4,4)$ é o 25.

b) O número da casa $(1,n)$ está em uma diagonal contendo as casas $(x,y)$ tais que $x+y=n+1$. Ou seja, na diagonal que o contém, existem $n$ números, a saber, os números das casas $(1,n),(2,n-1),(3,n-2),\ldots,(n,1)$. Repetindo essa contagem para os números das casas $(1,n-1),(1,n-2),\ldots,(1,1)$, podemos constatar que já foram escritos $1+2+\ldots+(n-1)$ números nas outras diagonais. Portanto, o número escrito na casa $(1,n)$ corresponde ao inteiro

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Assim, o número na casa $(1,2016)$ é $\dfrac{2016\cdot 2017}{2}$.

c) Como o quadradinho $(m,n)$ está na diagonal contendo os quadradinhos $(x,y)$ com $x+y=m+n$, inicialmente iremos descobrir o número escrito em $(m+n-1,1)$. Pelo item anterior, o quadradinho $(1,m+n-2)$ possui o número $\dfrac{(m+n-2)(m+n-1)}{2}$. Portanto, o número escrito no quadradinho $(m+n-1,1)$ é $\dfrac{(m+n-2)(m+n-1)}{2}+1$. Além disso, o quadradinho $(m,n)$ é o $(n-1)$-ésimo sucessor do número escrito no quadradinho $(m+n-1,1)$, ou seja, o número

$$\begin{aligned}
\frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2}+1+(n-1) &= \\
\frac{m^2+mn-m+mn+n^2-n-2m-2n+2+2+2n-2}{2} &= \\
\frac{n(n+1)+m(m-1)+2(m-1)(n-1)}{2} &= \\
\frac{n(n+1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}+(m-1)(n-1). &
\end{aligned}$$

Logo, o número escrito no quadradinho $(2013,2017)$ é

$$\frac{2013\cdot 2012}{2}+\frac{2017\cdot 2018}{2}+2012\cdot 2016.$$

## 2 *Pintura de inteiros*

Os números inteiros do conjunto $\{1,2,\ldots,20\}$ serão pintados com duas cores, branco e preto, de modo que ambas as cores sejam usadas. Além disso, o produto dos números de uma cor não deve possuir fatores primos em comum com o produto dos números da outra cor. De quantos modos isso pode ser feito?

## 2 *Pintura de inteiros – Solução*

Independente das cores escolhidas para os outros números, temos duas opções de escolha para a cor do número 1. Temos também duas opções para a cor do número 2 e, uma vez que ela tenha sido escolhida, todos os números do conjunto $\{4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$ devem possuir a mesma cor do número 2. Como existem números desse conjunto que compartilham fatores primos em comum com os números do conjunto $\{3,7,9,15\}$, estes 4 números ímpares também devem possuir a cor do número 2. Resta escolhermos a cor dos números do conjunto $\{11,13,17,19\}$ e cada uma delas pode ser feita de modo independente, pois não existe outro número no conjunto inicial com esses mesmos fatores primos. Assim, o total de pinturas é $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^6$.

## 3 *O conteúdo multiplicativo*

O *conteúdo multiplicativo* de um conjunto é o produto de seus elementos. Caso o conjunto possua um único elemento, seu *conteúdo multiplicativo* é este único elemento e, caso o conjunto seja vazio, seu *conteúdo multiplicativo* é 1. Por exemplo, o *conteúdo multiplicativo* de $\{1,2,3\}$ é $1\cdot2\cdot3 = 6$.

a) Determine a soma dos *conteúdos multiplicativos* de todos os subconjuntos de $\{1,2,3,4\}$.

b) Determine a soma dos *conteúdos multiplicativos* de todos os subconjuntos de

$$\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{2016}\right\}.$$

## 3 *O conteúdo multiplicativo – Solução*

a) Observe que no produto $(1+a)(1+b)$, ao aplicarmos a propriedade distributiva da multiplicação dos números reais, aparecerão os produtos $1\cdot1$, $1\cdot b$, $a\cdot1$ e $a\cdot b$. Esses produtos coincidem com os conteúdos multiplicativos dos conjuntos $\emptyset$, $\{b\}$, $\{a\}$ e $\{a,b\}$, respectivamente. Esses são exatamente os subconjuntos de $\{a,b\}$. Na multiplicação $(1+a)(1+b)(1+c)$, novamente ao usarmos a propriedade distributiva da multiplicação, aparecerão $2^3 = 8$ termos. Cada um desses termos está associado a elementos dentro de cada parênteses que deverão ser escolhidos para figurar na parcela correspondente. Por exemplo, o termo $1 \cdot b \cdot c = b \cdot c$ corresponde a não escolhermos o $a$ no primeiro parênteses e, em seguida, escolhermos tanto $b$ quanto $c$ nos próximos dois parênteses. Os subconjuntos de $\{a, b, c\}$ estão associados a todas essas 8 parcelas, até mesmo o conjunto vazio, que tem como conteúdo multiplicativo o número 1 e é representado na soma pela parcela $1 \cdot 1 \cdot 1$. O mesmo se passa com qualquer quantidade de termos e assim a soma de todos os conjuntos multiplicativos do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ é o resultado $(1+1)(1+2)(1+3)(1+4) = 120$.

b) O argumento utilizado no item anterior também se aplica aqui e, consequentemente, o conteúdo multiplicativo procurado é

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2016}\right) &= \\ \left(\frac{\cancel{2}}{1}\right)\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\right)\ldots\left(\frac{2017}{\cancel{2016}}\right) &= 2017. \end{aligned}$$

## 4 *Esse número possui quantos fatores* 2*?*

Neste problema, iremos estudar quantos fatores 2 aparecem na fatoração de números da forma $5^{2^n} - 1$.

(a) Sejam $x$ e $y$ dois números inteiros ímpares. Prove que $x^2 + y^2$ possui exatamente um fator 2 em sua fatoração em primos.

(b) Usando a fatoração $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, determine quantos fatores 2 o número $5^4 - 1$ possui.

(c) O número $N = 5^{2^{2017}} - 1$ possui quantos fatores 2?

(d) Sabendo que o número $5^{20}$ possui 14 algarismos. Prove que $5^{2^{18}+20}$ possui 6 zeros consecutivos em sua representação decimal.

## 4 *Esse número possui quantos fatores* 2*? – Solução*

(a) Como $x$ e $y$ são ímpares, então existem inteiros $x_0$ e $y_0$ tais que $x = 2x_0 + 1$ e $y = 2y_0 + 1$. Daí,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (2x_0+1)^2 + (2y_0+1)^2 \\ &= 4x_0^2 + 4x_0 + 1 + 4y_0^2 + 4y_0 + 1 \\ &= 4x_0^2 + 4x_0 + 4y_0^2 + 4y_0 + 2 \\ &= 2(2x_0^2 + 2x_0 + 2y_0^2 + 2y_0 + 1) \\ &= 2(2(x_0^2 + x_0 + y_0^2 + y_0) + 1). \end{aligned}$$

O número $x^2+y^2$ é o produto de 2 por um número ímpar e, portanto, possui apenas um fator 2.

(b) Como $5^4=\left(5^2\right)^2$, podemos usar a fatoração da diferença de quadrados duas vezes:

$$\begin{aligned}
5^4-1 &= \left(5^2\right)^2-1^2\\
&= (5^2+1)(5^2-1)\\
&= (5^2+1^2)(5^2-1^2)\\
&= (5^2+1^2)(5-1)(5+1).
\end{aligned}$$

Agora basta contar os fatores 2 em cada parcela. Pelo item anterior, $5^2+1^2$ possui um fator 2. Além disso, $5-1=4$ possui dois fatores 2 e $5+1$ possui apenas um fator 2. Logo, $5^4-1$ possui $1+2+1=4$ fatores 2.

(c) Com o expoente é $2^{2017}$ poderemos usar a fatoração da diferença de quadrados 2017 vezes:

$$\begin{aligned}
5^{2^{2017}}-1 &= \left(5^{2^{2016}}\right)^2-1^2\\
&= \left(5^{2^{2016}}+1\right)\left(5^{2^{2016}}-1\right)\\
&= \left(5^{2^{2016}}+1\right)\left(5^{2^{2015}}+1\right)\left(5^{2^{2015}}-1\right)\\
&= \dots\\
&= \left(5^{2^{2016}}+1\right)\left(5^{2^{2015}}+1\right)\dots\left(5^2+1\right)(5+1)(5-1).
\end{aligned}$$

Temos 2016 números da forma $x^2+y^2$, com $x$ e $y$ ímpares, e cada um contribui com apenas um fator 2. Além disso, $5+1=6$ tem apenas um fator 2 e $5-1=4$ tem dois fatores 2. Podemos concluir que o número $N=5^{2^{2017}}-1$ possui exatamente $2016\cdot 1+1+2=2019$ fatores 2 em sua fatoração.

**Observação:** Repetindo o argumento anterior, é possível mostrar que $5^{2^n}-1$ possui exatamente $n+2$ fatores primos 2.

(d) Pelo argumento do item anterior, existe um inteiro $k$ tal que $5^{2^{18}}-1=2^{20}k$. Consequentemente, $5^{2^{18}+20}=10^{20}k+5^{20}$. Como $10^{20}$ termina em 20 zeros e $5^{20}$ possui apenas 14 dígitos, segue que existem pelo menos $20-14=6$ dígitos iguais a zero consecutivos dentre os últimos dígitos da representação decimal de $5^{2^{18}+20}$.

## 5 *Diferenças que não são números primos*

Qual a maior quantidade de inteiros que podemos escolher no conjunto $\{1,2,3,\dots,2017\}$ de modo que a diferença entre quaisquer dois deles não seja um número primo?

## 5 *Diferenças que não são números primos – Solução*

A maior quantidade é $\dfrac{2017-1}{4}+1=505$, que pode ser obtida escolhendo-se os elementos que deixam resto 1 na divisão por 4: $\{1,5,9,\ldots,2017\}$. A diferença entre quaisquer dois deles é sempre um múltiplo de 4 e consequentemente não é um número primo. Mostraremos agora que não é possível escolhermos mais que essa quantidade.

Considere os 8 inteiros positivos consecutivos $\{n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5,n+6,n+7\}$. Queremos estudar quantos inteiros podem ser escolhidos desse conjunto de modo que a diferença entre quaisquer dois deles seja um número primo.

i) Se o inteiro $n$ for escolhido, não poderemos escolher $n+2$, $n+3$, $n+5$ e $n+7$, pois a diferença entre eles e $n$ é um número primo. Além disso, $n+1$ e $n+6$ não podem ser simultaneamente escolhidos, pois diferem por 5. Desse modo, caso escolhamos $n$, poderemos escolher apenas dois inteiros do conjunto.

ii) Suponha então que $n$ não é escolhido. Se escolhermos $n+1$, não poderemos escolher $n+3, n+4, n+6$. Além disso, do conjunto restante $\{n+2,n+5,n+7\}$ apenas um deles poderá ser escolhido. Novamente só poderemos escolher dois inteiros do conjunto.

iii) Suponha agora que $n$ e $n+1$ não são escolhidos. Se escolhermos $n+2$, não poderemos escolher $n+4$, $n+5$ e $n+7$. Além disso, do cojunto restante $\{n+3,n+6\}$ apenas um deles pode ser escolhido. Novamente o número máximo é dois.

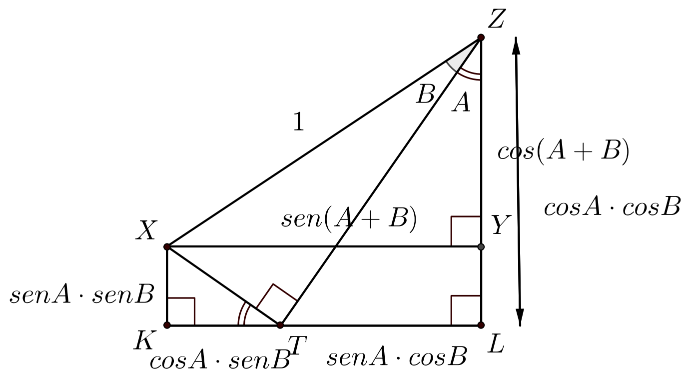
iv) Se $n$, $n+1$ e $n+2$ não são escolhidos, mas $n+3$ é, não poderemos escolher $n+5$ e $n+6$. Do conjunto $\{n+4,n+7\}$ apenas um deles pode ser escolhido. O máximo de inteiros que podem ser escolhidos também é dois neste caso.

v) Considerando os pares $(n+4,n+6)$ e $(n+5,n+7)$, apenas um inteiro de cada par pode ser escolhido. Portanto, se os quatro primeiros da lista não são escolhidos, só poderemos escolher no máximo dois.

Dividindo os números de 1 até 2016 em $2016/8=252$ grupos de 8 inteiros consecutivos, podemos concluir que em cada um deles poderemos escolher no máximo 2 inteiros. Assim, contando com o 2017, teremos no máximo $2\cdot 252+1=505$ inteiros que podem ser escolhidos satisfazendo as condições do enunciado.

## **6** *Cosseno e seno da soma e da diferença*

Neste problema, deduziremos fórmulas para o cálculo do cosseno e do seno da soma e da diferença de ângulos cuja soma é menor que 90°.

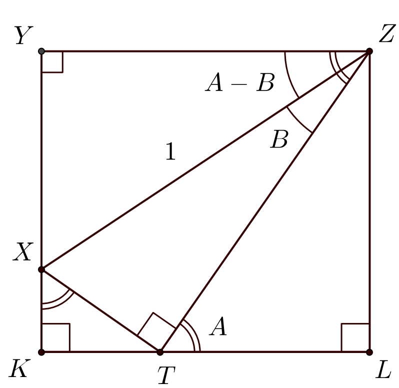



Na figura anterior, o segmento $XZ$ mede 1. Lembrando que o seno de um ângulo em um triângulo retângulo é o quociente entre o cateto oposto e a hipotenusa e que o cosseno é o quociente entre o cateto adjacente e a hipotenusa, podemos escrever: $\cos B = ZT/1$, $\operatorname{sen} B = TX/1$, $\cos A = ZL/ZT$, $\operatorname{sen} A = KX/TX$ e $\cos(A+B) = YZ/1$. Como $YZ = LZ - LY$, temos:

$$\begin{aligned}
YZ &= LZ - LY \\
\cos(A+B) &= \cos A \cdot ZT - XK \\
&= \cos A \cdot \cos B - \operatorname{sen} A \cdot TX \\
&= \cos A \cdot \cos B - \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B.
\end{aligned}$$

a) Use a figura anterior para determinar a fórmula de $\operatorname{sen}(A+B)$ em função de $\operatorname{sen} A$, $\operatorname{sen} B$, $\cos A$ e $\cos B$.

b) Considere o desenho a seguir:

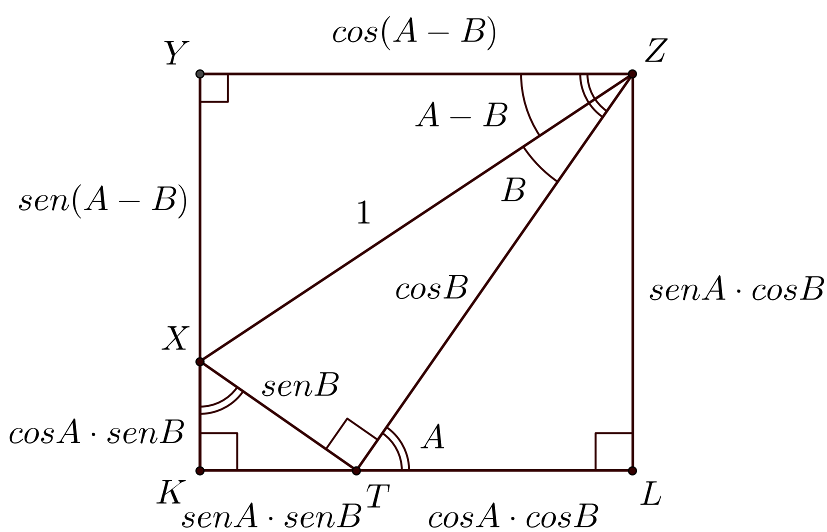



A partir das ideias apresentadas no enunciado, encontre as expressões de $cos(A-B)$ e $sen(A-B)$ usando as funções trigonométricas de $A$ e $B$.

## 6 *Cosseno e seno da soma e da diferença – Solução*

a) Temos
$$sen(A+B) = \frac{XY}{1} = KT + TL = \cos A \cdot \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} A \cdot \cos B.$$

b) Usando as funções trigonométricas nos triângulos retângulos dados, temos as seguintes medidas:



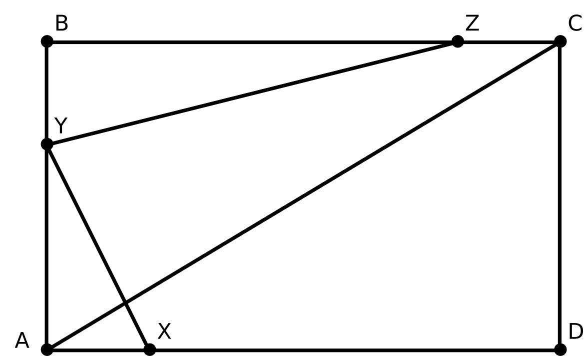

Então temos

$$\begin{aligned} cos(A-B) &= \frac{YZ}{1} \\ &= KT + TL \\ &= \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B + \cos A \cdot \cos B. \end{aligned}$$

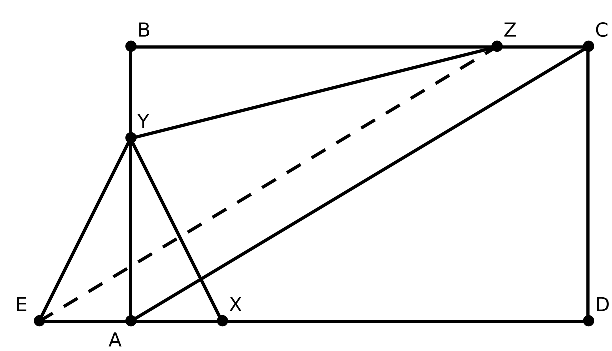
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(A-B) &= \frac{XY}{1} \\ &= LZ - XK \\ &= \operatorname{sen} A \cdot \cos B - \cos A \cdot \operatorname{sen} B. \end{aligned}$$

## 7 *Desigualdade triangular*

Os pontos $X$, $Y$ e $Z$ estão marcados nos lados $AD$, $AB$ e $BC$ do retângulo $ABCD$, respectivamente. Dado que $AX = CZ$, mostre que $XY + YZ \geq AC$.




## 7 *Desigualdade triangular – Solução*



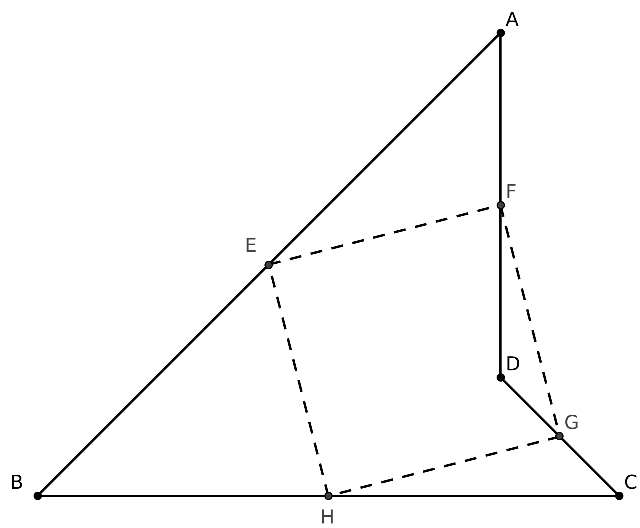

Construa o ponto $E$ sobre a reta $AD$ de modo que $AE = AX$, como indicado na figura acima. Como $AY$ é altura e mediana do triângulo $EYX$, podemos concluir que $YE = YX$. Além disso, como $AE = AX = CZ$ e $AE \parallel CZ$, segue que $EZCA$ é um paralelogramo e, consequentemente, $EZ = AC$. Pela Desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} XY + YZ &= EY + YZ \\ &\geq EZ \\ &= AC. \end{aligned}$$

Veja que a igualdade ocorre apenas quando $E$, $Y$ e $Z$ são colineares.

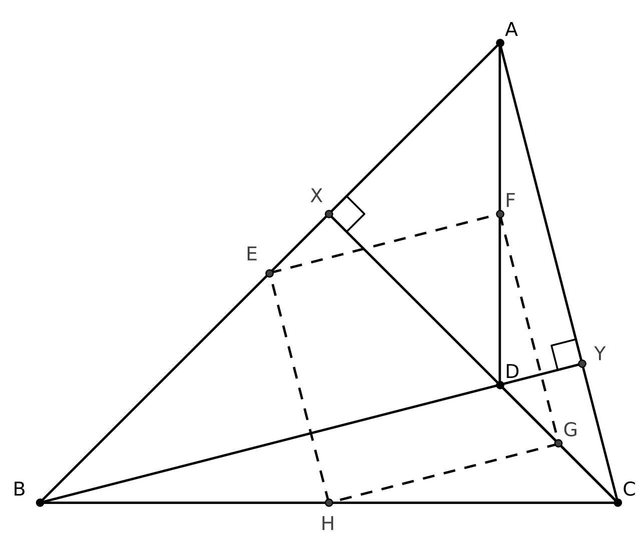
## 8 *Um quadrilátero não convexo*

Os ângulos internos de um quadrilátero não convexo formado por uma linha poligonal que não se auto-intersecta são 45°, 45°, 45° e 225°. Mostre que os pontos médios de seus lados formam um quadrado.




## 8 *Um quadrilátero não convexo – Solução*

Sejam $ABCD$ o quadrilátero não convexo, com $\angle ADC = 225°$ e $E$, $F$, $G$ e $H$ os pontos médios dos lados $AB$, $AD$, $CD$ e $BC$, respectivamente. Além disso, sejam $X$ e $Y$ os pontos de interseção de $CD$ e $BD$ com $AB$ e $AC$, respectivamente.




Como $\angle ABC = \angle BCD = 45°$, segue que $\angle BXC = 90°$. Decorre daí, dado que $\angle BAD = 45°$, que $\angle ADX = 45°$. Assim, $ADX$ e $BCX$ são triângulos retângulos isósceles com $AX = DX$ e

$BX = CX$. Pelo caso de congruência $LAL$, como $\angle BXD = \angle AXC$, podemos concluir que os triângulos $BDX$ e $ACX$ são congruentes. Isso nos produz $BD = AC$ e $\angle ABD = \angle ACD$. Como

$$\begin{aligned} \angle ABD + \angle BAC &= \\ \angle ACD + \angle BAC &= 90^\circ, \end{aligned}$$

podemos concluir que $\angle BYA = 90^\circ$. Veja que $EF$ e $GH$ são bases médias dos triângulos $ABD$ e $BCD$, respectivamente. Daí, $EF = HG = BD/2$ e $EF \parallel HG \parallel BD$. De modo semelhante, $EH = FG = AC/2$ e $EH \parallel FG \parallel AC$. Isso nos permite concluir que todos os lados do quadrilátero $EFGH$ são iguais e, como $BD$ é perpendicular a $AC$, os lados consecutivos são perpendiculares. Logo, $EFGH$ é um quadrado.

## 9 *Números de* 5 *dígitos*

Considere a coleção de todos os números de 5 dígitos cuja soma dos dígitos é 43. Um desses números é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade dele ser múltiplo de 11?

## 9 *Números de* 5 *dígitos – Solução*

A soma máxima dos dígitos de um número de cinco dígitos é 45, que corresponde à soma dos dígitos de 99999. Para que um número possua soma de seus dígitos 43 podem ocorrer dois casos: ou ele terá três dígitos iguais a 9 e dois iguais a 8 ou ele terá quatro dígitos iguais a 9 e um igual a 7. No primeiro caso, podemos escolher a posição do primeiro dígito 8 de 5 maneiras e a posição do segundo de 4 maneiras. Entrentanto, como os dois dígitos são indistinguíveis, cada configuração foi contada duas vezes. Os dígitos 9 devem ser colocados nas posições restantes e isso nos dá $\dfrac{5\cdot 4}{2} = 10$ números. No segundo caso, podemos escolher a posição do dígito 7 de 5 maneiras. Consequentemente, existem $10+5 = 15$ números de 5 dígitos de modo que a soma de seus dígitos é 43. Precisamos agora recordar o critério de divisibilidade por 11:

Um número de $n$ dígitos $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1}$ é divisível por 11 se, e somente se, a soma alternada $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + \dots + (-1)^n a_1$ é divisível por 11.

Pelo critério anterior, o número de 5 dígitos $\overline{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1}$ é divisível por 11, se 11 divide $a_5 - a_4 - a_3 + a_2 - a_1 = (a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1) - 2(a_3 + a_1)$. Supondo que a soma dos seus dígitos é 43 e sabendo que $43 = 11\cdot 3 + 10$, segue que 11 deve dividir $11\cdot 3 + 2(5 - a_3 - a_1)$. Portanto, $a_3 + a_1$ deixa resto 5 na divisão por 11 e as únicas possibilidades são $(a_3, a_1) = (7,9)$, $(9,7)$ ou $(8,8)$. Logo, dos 15 números da coleção, apenas 3 deles são múltiplos de 11 e, consequentemente, a probabilidade procurada é $\dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$.

## **10** *A competição matemática*

Um grupo de 10 estudantes participa de uma competição de matemática formada por equipes de 4 estudantes. Sabemos que quaisquer duas das equipes possuem exatamente um estudante em comum.

a) Qual o número máximo de equipes de que um estudante pode participar? Forneça um exemplo de distribuição de 10 alunos onde este número máximo possa ser verificado.

b) A competição pode possuir 8 equipes?

## **10** *A competição matemática – Solução*

a) Considere um estudante $A$ que participa do maior número de equipes e digamos que ele esteja em uma equipe com os três estudantes $B$, $C$ e $D$. Qualquer outra equipe que também tenha $A$ como um de seus membros, deverá conter outros três estudantes que não estão no conjunto $\{B, C, D\}$. Como existem apenas $10 - 1 = 9$ estudantes diferentes de $A$, o número máximo de equipes que podem conter $A$ é $9/3 = 3$. Um exemplo de distribuição de 10 estudantes, representados pelas letras do conjunto $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$ é

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \mathrm{A} & \mathrm{E} & \mathrm{F} & \mathrm{G} \\ \mathrm{A} & \mathrm{H} & \mathrm{I} & \mathrm{J}. \end{array}$$

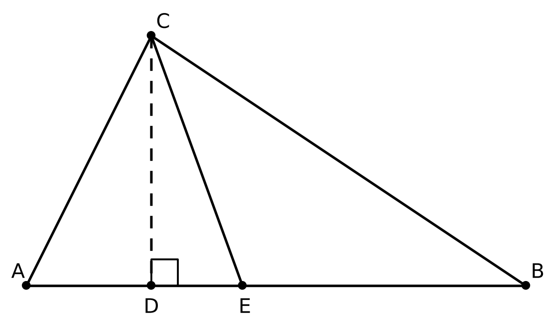
Cada linha indica uma equipe e todas elas possuem apenas o estudante $A$ em comum.

b) Suponhamos, por absurdo, que possam existir 8 equipes. Como cada uma delas possui 4 estudantes, teremos ao todo pelo menos $8 \cdot 4 = 32$ participações de alunos, contadas com repetições. Dado que existem apenas 10 estudantes e $32/10 > 3$, pelo menos um estudante deverá participar de 4 equipes. Isso contradiz o item anterior e esse absurdo mostra que não podemos ter 8 equipes.

## 11 *Interseções dos lados do quadrilátero*

Um quadrilátero convexo $ABCD$ é dado. Sejam $E$ a interseção de $AB$ e $CD$, $F$ a interseção de $AD$ e $BC$ e $G$ a interseção de $AC$ e $EF$. Prove que $BD$ e $EF$ são paralelos se, e somente se, $G$ é o ponto médio de $EF$.

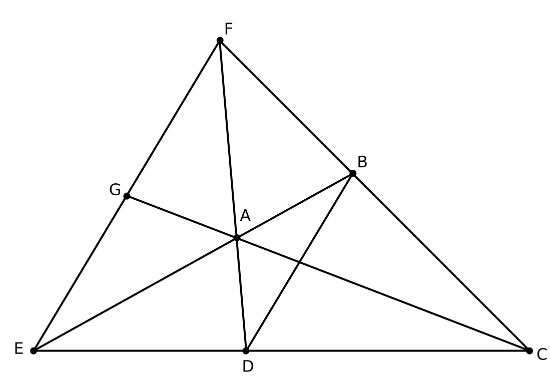
## 11 *Interseções dos lados do quadrilátero – Solução*




Vamos denotar a área do triângulo $XYZ$ por $[XYZ]$. Podemos usar razões de áreas de triângulos para calcular razões de segmentos. No desenho anterior, temos $[ACE] = \dfrac{AE \cdot CD}{2}$ e $[CEB] = \dfrac{EB \cdot CD}{2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{[ACE]}{[CEB]} &= \frac{AE \cdot CD}{2} \cdot \frac{2}{EB \cdot CD} \\ &= \frac{AE}{EB}. \end{aligned}$$

Após essa observação, considere a figura do problema.




Temos que

$$\frac{BC}{BF} = \frac{[BCE]}{[BEF]} = \frac{[ABC]}{[ABF]} = \frac{[BCE]-[ABC]}{[BEF]-[ABF]} = \frac{[ACE]}{[AEF]}.$$

Analogamente, podemos encontrar $\frac{CD}{DE} = \frac{[ACF]}{[AEF]}$ e $\frac{FG}{EG} = \frac{[ACF]}{[ACE]}$. Logo, pelo Teorema de Tales, $BD \parallel EF$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} \frac{BC}{BF} &= \frac{CD}{DE} \\ \frac{[ACE]}{[AEF]} &= \frac{[ACF]}{[AEF]}. \end{aligned}$$

A última igualdade é equivalente a $[ACE] = [ACF]$. Entretanto, $[ACE] = [ACF]$ é equivalente a $\frac{FG}{EG} = 1$. Portanto, $BD \parallel EF$ se, e somente se, $G$ é o ponto médio de $EF$.

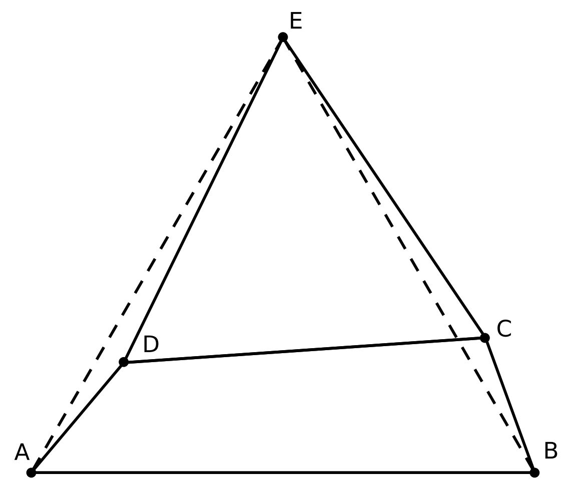
**Observação:** Decorre diretamente do método anterior uma das implicações do Teorema de Ceva: Como as cevianas $CG$, $DF$ e $BE$ do triângulo $CEF$ concorrem no ponto $A$, então

$$\begin{aligned} \frac{BC}{BF} \cdot \frac{FG}{EG} \cdot \frac{DE}{CD} &= \frac{[ACE]}{[AEF]} \cdot \frac{[ACF]}{[ACE]} \cdot \frac{[AEF]}{[ACF]} \\ &= 1. \end{aligned}$$

## 12 *Um triângulo externo*

Seja $ABCD$ um quadrilátero com $AD = BC$ e $\angle DAB + \angle ABC = 120°$. Um triângulo equilátero $DEC$ é construído no exterior do quadrilátero. Prove que o triângulo $AEB$ também é equilátero.

## 12 *Um triângulo externo – Solução*




Sejam $\angle ADC = x$ e $\angle DCB = y$. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, temos

$$\begin{aligned} \angle ADC + \angle DCB + \angle CBA + \angle BAD &= 360^\circ \\ x + y &= 360^\circ - 120^\circ \\ &= 240^\circ. \end{aligned}$$

Analisando agora os triângulos $ADE$ e $CBE$, temos $\angle ECB = 60^\circ + y$ e

$$\begin{aligned} \angle ADE &= 360^\circ - 60^\circ - x \\ &= 60^\circ + y. \end{aligned}$$

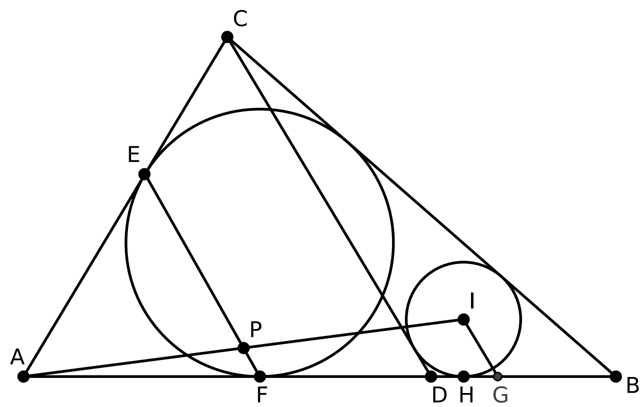
Como $AD = CB$ e $DE = CE$, segue pelo caso de congruência $LAL$, que os triângulos $ADE$ e $CBE$ são congruentes. Daí, $AE = EB$ e

$$\begin{aligned} \angle AEB &= \angle AED + \angle DEB \\ &= \angle BEC + \angle DEB \\ &= 60^\circ. \end{aligned}$$

Assim, $AEB$ é um triângulo isósceles com ângulo do vértice igual a 60° e, consequentemente, é equilátero.

## 13 *O incentro e segmentos paralelos*

Seja $D$ um ponto no lado $AB$ do triângulo $ABC$ de modo que $CD = AC$, como indica a figura abaixo. O incírculo do triângulo $ABC$ é tangente aos lados $AC$ e $AB$ nos pontos $E$ e $F$, respectivamente. Sejam $I$ o incentro do triângulo $BCD$ e $P$ o ponto de encontro dos segmentos $AI$ e $EF$. Além disso, seja $G$ um ponto sobre o segmento $AB$ de modo que $IG$ e $EF$ sejam paralelos.




a) Prove que $DI = IG$.

b) Prove que $AP = PI$.

**Observação:** O *incentro* de um triângulo é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo e o *incírculo* é a circunferência centrada no *incentro* e tangente aos três lados do triângulo.

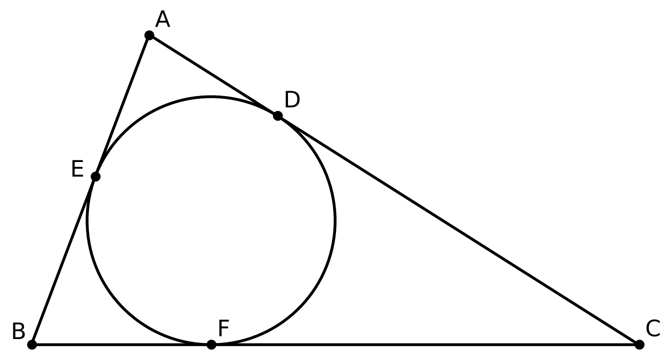
## 13 *O incentro e segmentos paralelos – Solução*

a) Como $AF = AE$, segue que $\angle AFE = \angle AEF = \dfrac{180^\circ - \angle CAB}{2} = 90^\circ - \dfrac{\angle CAB}{2}$. Além disso, dado que $AC = CD$, temos $\angle CAD = \angle CDA$. Sabendo que $DI$ é bissetriz de $\angle CDB$, temos

$$\begin{aligned}
\angle IDB &= \frac{\angle CDB}{2} \\
&= \frac{180^\circ - \angle CDA}{2} \\
&= 90^\circ - \frac{\angle CAB}{2}.
\end{aligned}$$

Como $EF \parallel IG$, segue que $\angle IGD = \angle EFA = \angle IDG$. Portanto, o triângulo $IDG$ é isósceles com $ID = IG$.

b) Para provar que $AP = PI$, dado que $EF \parallel IG$, basta mostrarmos que $AF = FG$. Sejam $w = AF = AE$, $k = EC$, $l = FH$, $x = DH$ e $r = HB$. Para o que segue, precisaremos de um lema simples a respeito do comprimento dos segmentos determinados nos lados de um triângulo pelos pontos de tangência de seu incírculo. Considere a figura abaixo:




$AE = AD$, $BE = BF$ e $CF = CD$, se $2p = AB + BC + AC$, temos $2AE = 2p - 2BC$ e, consequentemente, $AE = p - BC$. Analogamente, $BE = p - AC$ e $CF = p - AB$. Usando o lema anterior, e notando que $CD = w + k$ e $CB = k + l + r$, podemos concluir que

$$\begin{aligned} DH &= \frac{BD + CD - CB}{2} \\ x &= \frac{(x+r) + (w+k) - (k+l+r)}{2} \\ 2x &= w + x - l \\ x + l &= w. \end{aligned}$$

Assim, $FH = x + l = w = AF$ e isso conclui a demonstração.

## **14** *Números na circunferência*

Em uma circunferência são escritos 99 números naturais. Se $a$ e $b$ são dois números vizinhos na circunferência, então $\frac{a}{b} = 2$, $a - b = 1$ ou $a - b = 2$. Prove que existe algum número na circunferência que é divisível por 3.

## 14 *Números na circunferência – Solução*

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$ os números na circunferência, escritos em ordem, e suponha, por absurdo, que nenhum deles é múltiplo de 3. Daí, se dois vizinhos $a$ e $b$ deixarem o mesmo resto na divisão por 3, como 3 não pode dividir as diferenças 1 e 2, segue que $a = 2b$ ou $b = 2a$. Sabendo que 3 divide $a-b$, em ambas as situações anteriores poderíamos concluir que um deles, e portanto os dois, deve ser múltiplo de 3. Isso contradiz nossa suposição inicial. Uma vez que $a$ e $b$ não são multiplos de 3 e os seus restos são distintos, um deles deve deixar resto 1 e o outro deve deixar resto 2 na divisão por 3. Isso nos diz que $a_i + a_{i+1}$ é um múltiplo de 3 para todo $i \leq 98$. Podemos escrever:

$$\begin{aligned} S &= (a_1 + a_2) + \ldots + (a_{97} + a_{98}) + a_{99} \\ S &= a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{98} + a_{99}) \end{aligned}$$

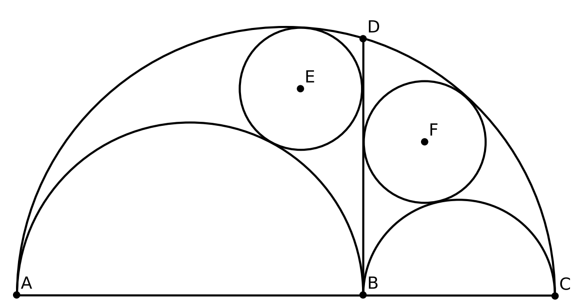
Como as somas em cada parênteses são múltiplas de 3, podemos concluir que $a_1$ e $a_{99}$ deixam o mesmo resto na divisão por 3. Entretanto, isso é uma contradição, pois números vizinhos não deixam o mesmo resto na divisão por 3. Isso nos diz que a suposição inicial é falsa e, consequentemente, pelo menos um deles dever ser múltiplo de 3.

## 15 *Círculos tangentes ao segmento*

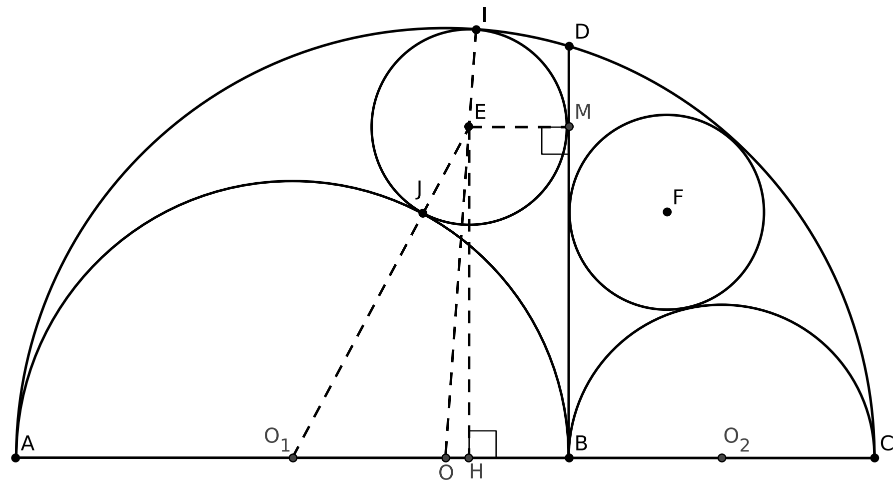
Os círculos de centros $E$ e $F$ são tangentes ao segmento $BD$ e aos semicírculos de diâmetros $AB$, $BC$ e $AC$. Sejam $r_1$, $r_2$ e $r$ os raios dos semicírculos de diâmetros $AB$, $BC$ e $AC$, respectivamente. Os raios dos círculos de centros $E$ e $F$ são $l_1$ e $l_2$, respectivamente.

a) Verifique que a distância de $E$ até o segmento $AC$ é $\sqrt{(r_1 + l_1)^2 - (r_1 - l_1)^2}$.

b) Verifique que $l_1 = \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$.



## 15 *Círculos tangentes ao segmento – Solução*




a) Como $AC = AB + BC$, seque que $r = r_1 + r_2$. Sejam $H$ o pé da perpendicular de $E$ ao segmento $AC$, $O$ o ponto médio de $AC$ e $I$ a interseção de $OE$ com o semicírculo de diâmetro $AC$. Sejam ainda $O_1$ e $O_2$ os centros dos semicírculos de diâmetros $AB$ e $BC$, respectivamente, temos

$$\begin{aligned} O_1E &= O_1J + JE \\ &= r_1 + l_1 \\ EO &= IO - IE \\ &= r - l_1 \\ O_1H &= O_1B - HB \\ &= O_1B - EM \\ &= r_1 - l_1 \\ OH &= OC - HB - BC \\ &= (r_1 + r_2) - l_1 - 2r_2 \\ &= r_1 - r_2 - l_1. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $EO_1H$, obtemos

$$\begin{aligned} EH^2 &= EO_1^2 - O_1H^2 \\ EH^2 &= (r_1 + l_1)^2 - (r_1 - l_1)^2 \\ EH &= \sqrt{(r_1 + l_1)^2 - (r_1 - l_1)^2}. \end{aligned}$$

b) Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $EOH$, temos:

$$\begin{aligned} EH^2 &= EO^2 - OH^2 \\ &= (r - l_1)^2 - (r_1 - r_2 - l_1)^2 \\ &= (r_1 + r_2 - l_1)^2 - (r_1 - r_2 - l_1)^2. \end{aligned}$$

Comparando a última equação com a expressão obtida no item anterior, temos

$$\begin{aligned}
(r_1+l_1)^2-(r_1-l_1)^2 &= (r_1+r_2-l_1)^2-(r_1-r_2-l_1)^2\\
4r_1l_1 &= 4r_1r_2-4r_2l_1\\
4l_1(r_1+r_2) &= 4r_1r_2\\
l_1 &= \frac{r_1r_2}{r_1+r_2}.
\end{aligned}$$

**Observação:** De modo análogo, considerando as projeções de $F$ sobre os segmentos $BC$ e $BD$, podemos obter que $l_2=\dfrac{r_1r_2}{r_1+r_2}$. Portanto, $l_1=l_2$.

## 16 *Quadrados de reais são sempre maiores que ou iguais a zero*

Uma desigualdade simples, mas bastante útil é $x^2\geq 0$, para todo $x$ real. Para prová-la, basta estudar separadamente as seguintes possibilidades: $x>0$, $x<0$ ou $x=0$. De fato, um número real positivo multiplicado por um número real positivo é positivo, um número real negativo multiplicado por outro número real negativo é também positivo e, finalmente, $0\cdot 0=0$. A partir dessa desigualdade, podemos derivar outras não tão elementares. Por exemplo, para quaisquer números reais $x$ e $y$ é verdade que $x^2+xy+y^2\geq 0$, pois

$$\begin{aligned}
x^2+xy+y^2 &= \left(x^2+\frac{2xy}{2}+\frac{y^2}{4}\right)+3\left(\frac{y^2}{4}\right)\\
&= \left(x+\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}\right)^2\\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Na última desigualdade, usamos que $\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2\geq 0$ e $\left(\dfrac{y}{2}\right)^2\geq 0$.

Veremos agora uma aplicação dessas desigualdades. Sejam $a$ e $b$ números reais tais que $a^3-b^3=2$ e $a^5-b^5\geq 4$.

(a) Sabendo que para quaisquer reais $x$ e $y$ vale $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$, verifique que $a>b$.

(b) Verifique que $a^2+b^2\geq 2$.

## 16 *Quadrados de reais são sempre maiores que ou iguais a zero – Solução*

(a) Pela fatoração sugerida,

$$\begin{aligned} 0 < 2 &= a^3 - b^3 \\ &= (a-b)(a^2+ab+b^2). \end{aligned}$$

Como $a^2 + ab + b^2 \geq 0$, segue que $a - b > 0$, ou seja, $a > b$.

(b) Sabemos que $a^2, b^2 \geq 0$ e $a - b > 0$. Daí,

$$\begin{aligned} (a^3 - b^3)(a^2 + b^2) &= a^5 - a^2b^3 + a^3b^2 - b^5 \\ 2(a^2 + b^2) &= a^5 - b^5 + a^2b^2(a-b) \\ &\geq a^5 - b^5 \\ &\geq 4. \end{aligned}$$

Portanto, $a^2 + b^2 \geq 2$.

## 17 *Quadrados perfeitos que possuem um número quadrado perfeito de divisores*

Seja $n > 1$ um inteiro positivo, chamamos de $d(n)$ a quantidade de divisores positivos de $n$. Para calcular $d(n)$, basta escrever a fatoração de $n$ em potências de primos distintos e multiplicar os sucessores dos expoentes. Por exemplo, para 2016 temos a fatoração $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1$ e $d(2016) = (5+1)(2+1)(1+1) = 36$.

(a) Prove que se $n$ é um quadrado perfeito, então $d(n)$ é ímpar.

(b) Determine todos os $n$ menores que 400 tais que $n$ e $d(n)$ sejam quadrados perfeitos.

## 17 *Quadrados perfeitos que possuem um número quadrado perfeito de divisores – Solução*

(a) Se $n$ é um quadrado perfeito, então existe um inteiro positivo $m$ tal que $n = m^2$. Na fatoração em primos de $n$, todos os expoentes são pares, pois cada fator primo de $m$ aparece o dobro de vezes na fatoração de $n$. Por exemplo, se $m = 2^2 \cdot 3$, então $n = m^2 = (2^2 \cdot 3)^2 = 2^4 \cdot 3^2$. Como o sucessor de um número par é ímpar e o produto de números ímpares também é ímpar, concluímos que $d(n)$ é ímpar.

(b) Escreva $n = m^2$. Como $m^2 < 400 = 20^2$ podemos concluir que $m \leq 20$. Entre os inteiros positivos menores que 20, temos apenas 3 possíveis fatorações para $m$: $p^k$, $p \cdot q$ ou $p^2 \cdot q$, com $p$ e $q$ primos distintos, pois qualquer produto de três primos distintos é maior que 20. Além disso, $k \leq 4$, pois $2^5 > 20$. No primeiro caso, $d(n) = d(p^2k) = 2k+1$ deve ser quadrado perfeito e apenas $m = 2^4$, ou seja, $n = 16^2$ satisfaz as condições. No segundo caso, $d(n) = d(p^2 \cdot q^2) = (2+1)(2+1) = 9$. Temos então os seguintes valores para $n$: $6^2$, $10^2$, $14^2$ e $15^2$. No terceiro caso, $d(p^4 \cdot q^2) = (4+1)(2+1) = 15$, que não é quadrado perfeito. Portanto, os números $n$ menores que 400 tais que $n$ e $d(n)$ são quadrados perfeitos são $6^2$, $10^2$, $14^2$, $15^2$ e $16^2$.

## 18 *Pintando pontos*

Seja $n \geq 3$ um inteiro positivo. Sobre uma reta, são marcados os $n$ pontos $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, nessa ordem e igualmente espaçados entre si. Em seguida, cada um dos pontos deve ser pintado de azul ou de vermelho de modo que **não** existam três pontos $P_x$, $P_{\frac{x+y}{2}}$ e $P_y$ pintados da mesma cor, sendo $x + y$ par.

(a) Mostre que para $n = 8$ existe uma maneira de colorir os pontos $P_1, P_2, \ldots, P_8$ satisfazendo a condição dada.

(b) Mostre que qualquer pintura para $n = 9$ não satisfaz a condição dada.

## 18 *Pintando pontos – Solução*

(a) Marcaremos com $A$ e $V$ as cores dos pontos em ordem. Considere a seguinte forma de colorir os 8 pontos:

$$\begin{array}{cccccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 \\ A & V & V & A & A & V & V & A. \end{array}$$

A condição dada requer que não existam pontos de mesma cor de modo que um deles seja o ponto médio do segmento formado pelos outros dois. É imediato verificar que essa condição é satisfeita no exemplo anterior.

(b) Considere uma pintura qualquer para $n = 9$ satisfazendo as condições do enunciado. Assim, não podem existir trios da forma $(P_x, P_{\frac{x+y}{2}}, P_y)$ com todos esses pontos com a mesma cor. Suponha inicialmente que $P_3$ e $P_5$ possuem a mesma cor, digamos azul. Então $P_1$, $P_4$ e $P_7$ deverão ter a cor oposta, ou seja, vermelho. Caso contrário, algum dos trios $(P_1, P_3, P_5)$, $(P_3, P_4, P_5)$ ou $(P_3, P_5, P_7)$ teria três pontos pintados de azul. Entretanto, isso implicaria que $(P_1, P_4, P_7)$ estão pintados de vermelho. Portanto, para a condição do enunciado ser satisfeita, concluímos que $P_3$ e $P_5$ não podem ter a mesma cor. O mesmo argumento anterior aplicado a $P_5$ e $P_7$ nos permite concluir que eles também possuem cores opostas. Suponha, sem perda de generalidade, que $P_3$ é azul e $P_5$ é vermelho. Logo, $P_7$ deve ter cor azul. Desse modo, temos a seguinte configuração:

$$\begin{array}{ccccccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 & P_9 \\ - & - & A & - & V & - & A & - & -. \end{array}$$

Analisaremos agora as possíveis cores dos outros pontos. Tratemos inicialmente do caso em que $P_1$ é azul. Assim, teremos a seguinte configuração:

$$\begin{array}{ccccccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 & P_9 \\ A & - & A & - & V & - & A & - & -. \end{array}$$

Para que $(P_1, P_4, P_7)$ ou $(P_1, P_2, P_3)$ não sejam azuis, $P_2$ e $P_4$ devem ser vermelhos.

$$\begin{array}{ccccccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 & P_9 \\ A & V & A & V & V & - & A & - & -. \end{array}$$

Para que $(P_2, P_4, P_6)$ não sejam todos vermelhos, $P_6$ deve ser azul:

$$\begin{array}{ccccccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 & P_9 \\ A & V & A & V & V & A & A & - & -. \end{array}$$

Se $P_8$ é vermelho, $(P_2, P_5, P_8)$ serão todos vermelhos e, se $P_8$ é azul, $(P_6, P_7, P_8)$ serão azuis. Em ambas as situações a condição do enunciado não é satisfeita. Resta analisarmos agora o que acontece quando $P_1$ é vermelho. Nesse caso, temos a seguinte configuração:

$$\begin{array}{ccccccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 & P_9 \\ V & & A & & V & & A & - & - \end{array}$$

Se $P_9$ é vermelho, $(P_1, P_5, P_9)$ serão todos vermelhos. Portanto, $P_9$ deve ser azul e a configuração deve ser:

$$\begin{array}{ccccccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 & P_9 \\ V & & A & & V & & A & - & A \end{array}$$

Mas esse caso é o simétrico do caso $P_1$ pintado de azul. Repetindo os mesmos passos, veremos que $P_2$ não poderá ser colorido de vermelho nem de azul. Para qualquer coloração do $P_1$, não será possível pintar todos os 9 pontos de modo que **não** existam três pontos $P_x$, $P_{\frac{x+y}{2}}$ e $P_y$ pintados da mesma cor.

## 19 *Produtos que são quadrados perfeitos*

Sérgio escolhe dois números inteiros positivos $a$ e $b$. Ele escreve 4 números no seu caderno: $a$, $a+2$, $b$ e $b+2$. Em seguida, todos os 6 produtos de dois desses números são escritos na lousa. Seja $Q$ a quantidade de quadrados perfeitos escritos nela, determine o valor máximo de $Q$.

## 19 *Produtos que são quadrados perfeitos – Solução*

Inicialmente provaremos que o produto $a(a+2)$ não é um quadrado perfeito para qualquer escolha de $a$. Temos dois casos a considerar:

i) Se $a$ é ímpar, então nenhum primo que divide $a$ poderá dividir $a+2$. Daí, $a$ e $a+2$ deverão ser, cada um, um quadrado perfeito. Isso claramente não tem solução para $a \geq 1$, pois a diferença entre dois quadrados perfeitos é pelo menos 3.

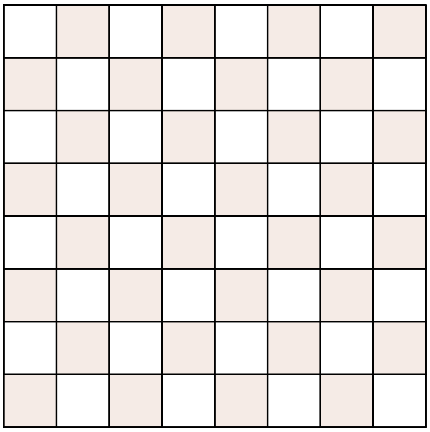
ii) Se $a$ é par, temos $a = 2k$ para algum inteiro positivo $k$. Daí, $a(a+2) = 2k(2k+2) = (2k+1)^2 - 1$. Isso também não é possível, pois neste caso teríamos um quadrado perfeito entre dois quadrados perfeitos consecutivos: $(2k)^2 < a(a+2) < (2k+1)^2$.

Assim, o produto $a(a+2)$ não pode ser um quadrado perfeito. Além disso, $ab$ e $b(a+2)$ não podem ser simultaneamente quadrados perfeitos, pois neste caso $ab \cdot b(a+2) = b^2 \cdot a(a+2)$ é um quadrado perfeito e isso implica $a(a+2)$ também quadrado perfeito, contradizendo o lema anterior. Analogamente, $a(b+2)$ e $(a+2)(b+2)$ também não podem ser simultaneamente quadrados perfeitos. Por simetria, $(a+2)b$ e $(a+2)(b+2)$ não podem ser ao mesmo tempo quadrados perfeitos.

Dessa forma, os possíveis quadrados seriam $ab, b(a+2), a(b+2)$ e $(a+2)(b+2)$. Excluindo-se os produtos $a(a+2), b(b+2)$ e notando que nos pares $(ab, b(a+2))$ e $(ab, a(b+2))$ apenas um de seus membros é um quadrado perfeito, podemos concluir que $Q \leq 3$. Para termos $Q = 3$, $b(a+2), a(b+2), (a+2)(b+2)$ são quadrados. Isso é um absurdo, pois já vimos que $b(a+2)$ e $(a+2)(b+2)$ não podem ser simultaneamente quadrados perfeitos. Veja que $Q = 2$ pode ser obtido, por exemplo, com $a = b = 1$, pois $ab = 1^2$ e $(a+2)(b+2) = 3^2$.

## **20** *Ataques de torres de xadrez*

Um tabuleiro de xadrez é um quadrado $8 \times 8$ em que as casinhas estão distribuídas em 8 linhas e 8 colunas.



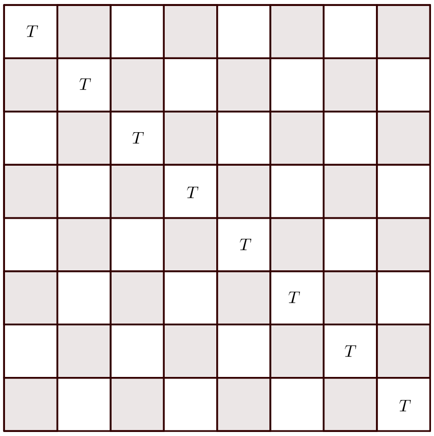
Uma torre em um tabuleiro de xadrez ataca todas as peças que estejam na sua linha ou na sua coluna. Sabendo disso, determine:

a) Qual o número máximo de torres que podemos colocar num tabuleiro de xadrez de modo que não haja duas se atacando?

b) Qual o número máximo de torres que podemos colocar num tabuleiro de xadrez de modo que cada torre seja ameaçada de ataque por no máximo uma das outras torres?

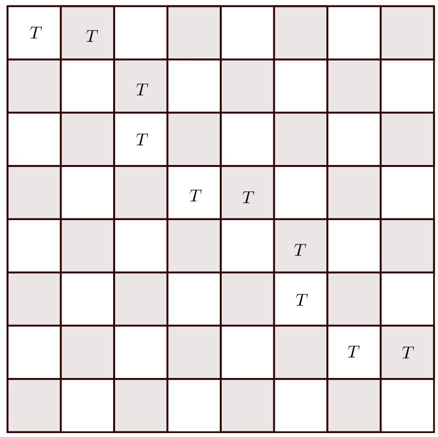
## **20** *Ataques de torres de xadrez – Solução*

a) A seguir, temos um exemplo com 8 torres sem que duas estejam se atacando.




Se colocarmos 9 ou mais torres, como existem apenas 8 linhas, haverá duas numa mesma linha e uma poderá atacar a outra. Portanto, o número máximo é 8.

b) A seguir, temos um exemplo com 10 torres em que cada uma é atacada por no máximo uma outra torre.



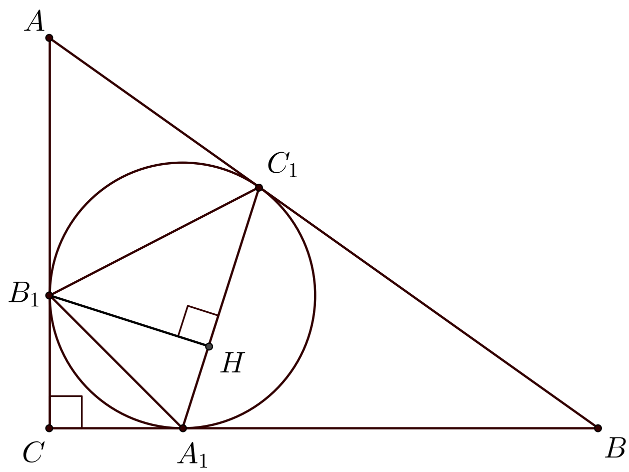

Agora resta mostrar que se colocarmos 11 ou mais torres haverá uma torre ameaçada por pelo menos duas outras. Considere uma distribuição de torres em que cada uma é ameaçada por no máximo outra. Podemos classificá-las em dois grupos: aquelas que não são ameaçadas por outras torres, chamadas de *solitárias*, e as que são ameaçadas por exatamente uma outra torre, chamadas de *torres com inimigas*. Para cada torre solitária, podemos colocar uma etiqueta em sua linha e coluna. Gastaremos precisamente duas etiquetas. Para cada torre que é ameaçada por exatamente uma outra, podemos colocar uma etiqueta nas linhas e nas colunas que contêm ela e sua inimiga. Usaremos precisamente três etiquetas nesse caso. Se $x$ é a quantidade de torres solitárias e $2y$ a quantidade de torres inimigas, em que $y$ é a quantidade de pares de torres inimigas, então a quantidade de etiquetas usadas é $2x+3y$. Além disso, como cada linha e coluna, que totalizam 16, recebeu apenas uma etiqueta, temos:

$$\begin{aligned} 16 &\geq 2x+3y \\ 32 &\geq 4x+6y \\ &\geq 3x+6y. \end{aligned}$$

Daí, $32/3 \geq x+2y$. Como a quantidade de torres, que é dada por $x+2y$, é um número inteiro e $32/3 < 11$, segue que podem existir no máximo 10 torres no tabuleiro satisfazendo as condições do segundo item.

## 21 *O ponto está sobre a bissetriz*

A figura a seguir representa um triângulo $ABC$, retângulo em $C$, com uma circunferência no seu interior tangenciando os três lados $AB$, $BC$ e $CA$ nos pontos $C_1$, $A_1$ e $B_1$, respectivamente. Seja $H$ o pé da altura relativa ao lado $A_1C_1$ do triângulo $A_1B_1C_1$.

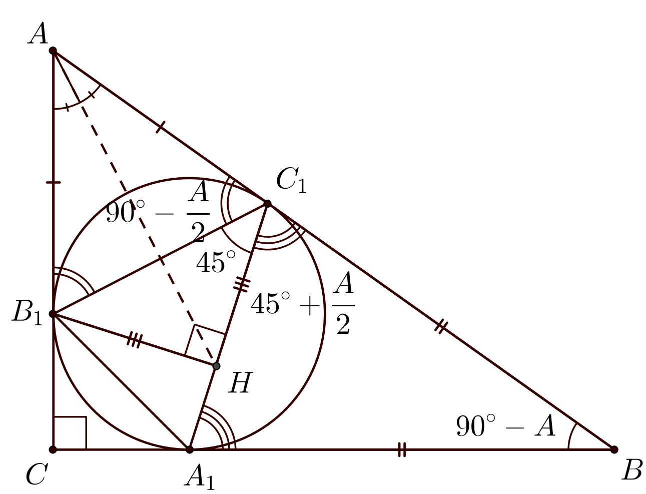



a) Calcule a medida do ângulo $\angle A_1C_1B_1$.

b) Mostre que o ponto $H$ está na bissetriz do ângulo $\angle BAC$.

## 21 *O ponto está sobre a bissetriz – Solução*

Considere a figura a seguir.



(a) Como $\angle ACB = 90°$, então $\angle CBA = 90° - \angle BAC = 90° - \angle A$. Dado que $AB_1$ e $AC_1$ são tangentes à circunferência, segue que $AB_1 = AC_1$. De modo semelhante, $BA_1 = BC_1$. Assim, como $A_1BC_1$ e $AB_1C_1$ são isósceles, segue que

$$\angle AB_1C_1 = \angle AC_1B_1 = \frac{180° - \angle B_1AC_1}{2} = 90° - \frac{\angle A}{2};$$
$$\angle BC_1A_1 = \angle BA_1C_1 = \frac{180° - \angle A_1BC_1}{2} = 45° + \frac{\angle A}{2}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\angle A_1C_1B_1 &= 180° - \angle AC_1B_1 - \angle A_1C_1B\\ &= 180° - (90° - \frac{A}{2}) - (45° + \frac{A}{2})\\ &= 45°.\end{aligned}$$

(b) Analisando agora o triângulo $B_1HC_1$, podemos obter $\angle HB_1C_1 = 90° - \angle A_1C_1B_1 = 45°$, ou seja, esse triângulo é isósceles com $B_1H = C_1H$. Assim, os triângulos $AB_1H$ e $AC_1H$ são congruentes, pois possuem os três lados de mesmo comprimento. Consequentemente, $\angle B_1AH = \angle C_1AH$ e $H$ está sobre a bissetriz do ângulo $\angle BAC$.

## 22 *Um termo na sequência maior que* 2016

Uma sequência de números reais $x_n$ é uma lista ordenada de reais em que o primeiro número da lista é o termo $x_1$, o segundo é o termo $x_2$ e assim por diante. Por exemplo, a sequência usual dos números inteiros positivos pode ser descrita como $x_n = n$ para todo inteiro positivo $n$. Algumas sequências podem ser definidas por equações de recorrências, em que um termo é definido em função dos seus anteriores.

Por exemplo, a sequência de inteiros positivos poderia ser definida por $x_1 = 1$ e $x_n = x_{n-1} + 1$ para todo inteiro positivo $n \geq 2$. Desse modo, poderíamos calcular $x_2 = 1 + 1 = 2$, $x_3 = 2 + 1 = 3$ e assim por diante.

Considere uma sequência de números reais definida por $x_1 = 1$ e $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}^2}$ para todo inteiro positivo $n \geq 2$.

a) Calcule $x_2$, $x_3$ e $x_4$.

b) Verifique que a sequência é estritamente crescente, ou seja, que $x_n > x_{n-1}$ para todo inteiro positivo $n$.

c) Perceba que a sequência parece crescer muito pouco. Após calcular alguns termos iniciais, poderíamos suspeitar que nenhum termo excede 2016, mas de fato vamos provar que existem termos maiores que 2016. Para isso, vamos usar a sequência auxiliar $y_n = x_n^3$. Prove que $y_n > y_{n-1} + 3$ para todo $n \geq 2$.

d) Prove que existe um número $N$ tal que $x_N > 2016$.

## 22 *Um termo na sequência maior que* 2016 *– Solução*

a) Basta usar a equação dada para $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$.

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{x_1^2} = 1 + \frac{1}{1^2} = 2.$$

$$x_3 = x_2 + \frac{1}{x_2^2} = 2 + \frac{1}{2^2} = \frac{9}{4}.$$

$$x_4 = x_3 + \frac{1}{x_3^2} = \frac{9}{4} + \frac{1}{\left(\frac{9}{4}\right)^2} = \frac{793}{324}.$$

b) Para qualquer $n$, se $x_{n-1} \neq 0$, então $x_{n-1}^2 > 0$ e $\frac{1}{x_{n-1}^2} > 0$, pois todo quadrado de um número real não nulo é positivo. Assim,

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}^2} \\ &> x_{n-1}. \end{aligned}$$

Como $x_1 = 1 > 0$, pelo argumento anterior, temos $x_2 > x_1 > 0$. Agora, usando $x_2$ no papel de $x_1$ no argumento anterior, temos $x_3 > x_2 > 0$. Veja que podemos continuar repetindo o argumento, agora com $x_3$ no papel de $x_2$. Esse processo indutivo nos permite concluir que a sequência é estritamente crescente.

c) Elevando a equação de recorrência ao cubo teremos

$$\begin{aligned} x_n^3 &= \left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}^2}\right)^3 \\ &= x_{n-1}^3 + 3x_{n-1}^2 \frac{1}{x_{n-1}^2} + 3x_{n-1} \frac{1}{x_{n-1}^4} + \frac{1}{x_{n-1}^6} \\ &> x_{n-1}^3 + 3. \end{aligned}$$

Logo,

$$y_n = x_n^3 > x_{n-1}^3 + 3 = y_{n-1} + 3.$$

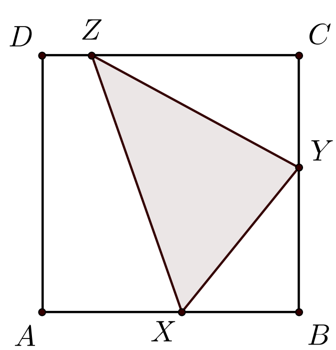
d) A ideia agora é usar o crescimento de $y_n$ para chegar em alguma conclusão sobre o crescimento de $x_n$. Temos $x_n > 2016$ se, e somente se, $y_n = x_n^3 > 2016^3$. No item anterior, provamos que $y_n > y_{n-1} + 3$ para todo $n \geq 2$. Aplicações sucessivas dessa desigualdade nos permitem concluir que:

$$\begin{aligned} y_n &> y_{n-1} + 3 \\ &> y_{n-2} + 6 \\ &> y_{n-3} + 9 \\ &\ldots \\ &> y_1 + 3(n-1) \\ &= 3n - 2. \end{aligned}$$

Bom, agora basta tomar $N$ que satisfaça $3N - 2 > 2016^3$, ou seja, $N > \frac{2016^3+2}{3}$. Podemos tomar $N = 2016^3$, por exemplo, já que esse número satisfaz a inequação anterior. Para esse valor de $N$, o termo $x_N$ da sequência será maior que 2016.

## 23 *Triângulos no interior de um quadrado*

a) Considere um quadrado $ABCD$ de lado 1. Os pontos $X$, $Y$ e $Z$ são marcados no interior ou nas arestas desse quadrado de modo que formem um triângulo. Considere uma possível configuração dos pontos na figura a seguir. Em que $X$, $Y$ e $Z$ estão sobre os lados $AB$, $BC$ e $CD$, respectivamente. Prove que existe um ponto $Y'$ sobre o lado $CD$ de modo que os triângulos $XYZ$ e $XY'Z$ possuam a mesma área.

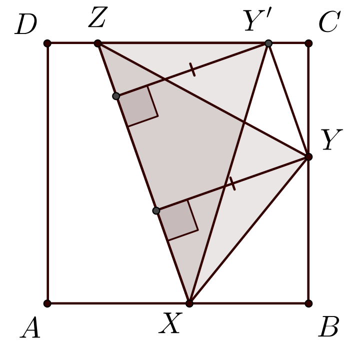



b) Considerando ainda a figura anterior, qual a maior área que um triângulo com dois vértices sobre o lado $CD$ e um sobre o lado $AB$ pode ter? Em seguida, estime a maior área possível de um triângulo com todos os seus vértices no interior do quadrado, não necessariamente sobre os seus lados.

c) No interior ou nos lados de um quadrado de lado 2 são marcados 9 pontos, sem que existam 3 deles colineares. Prove que podemos escolher 3 pontos de modo que o triângulo que tem esses três pontos como vértices possui a área menor que ou igual a $\frac{1}{2}$.

## 23 *Triângulos no interior de um quadrado – Solução*

a) Por $Y$, trace uma reta paralela a $XZ$ e seja $Y'$ o ponto de encontro dessa reta com $CD$.

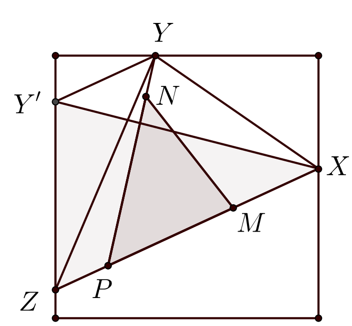



Os triângulos $XYZ$ e $XY'Z$ possuem mesma área, pois possuem mesma base $XZ$ e as alturas relativas a ela são iguais.

b) Aproveitando a notação do item anterior, considere o triângulo $XY'Z$, com $Y'$ e $Z$ sobre o lado $CD$ e $X$ sobre o lado $AB$. Considerando a base $Y'Z$ e a altura $h_x$, podemos estimar a área do triângulo $XY'Z$, denotada por $[XY'Z]$, através de

$$\begin{aligned}[XY'Z] &= \frac{Y'Z \cdot h_X}{2} \\ &\leq \frac{1 \cdot 1}{2} \\ &= 1/2.\end{aligned}$$

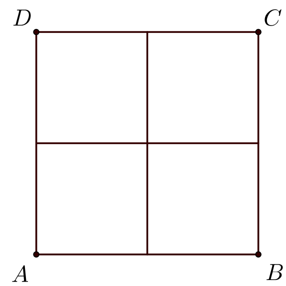
Veja que ocorre a igualdade apenas quando $Y'Z = CD$. Considere três pontos $M$, $N$ e $P$ escolhidos dentro de um quadrado de lado 1. Prolongue a reta $MP$ e a semirreta $PN$ até encontrar os lados do quadrado nos pontos $X$, $Y$ e $Z$. Note que a área do triângulo $XYZ$ é maior que ou igual à área do triângulo $MNP$.




Considerando a construção do primeiro item, caso não existam dois vértices do triângulo $XYZ$ sobre um mesmo lado, podemos considerar um triângulo $XY'Z$ de mesma área e possuindo essa propriedade. Assim,

$$\begin{aligned}[MNP] &\leq [XYZ] \\ &= [XY'Z] \\ &\leq 1/2.\end{aligned}$$

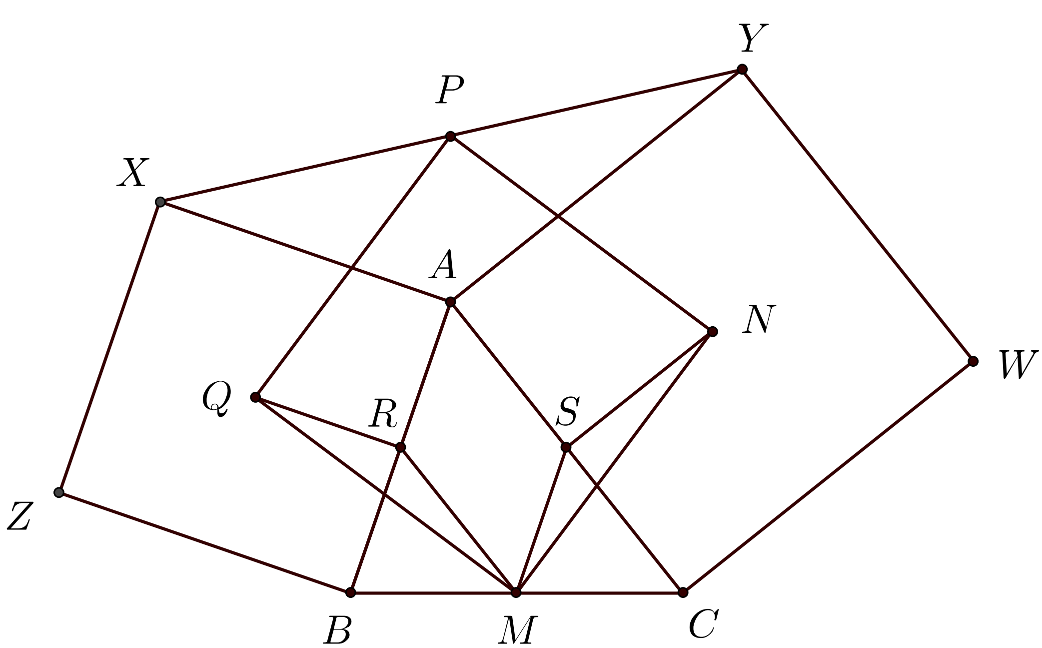
c) Divida o quadrado de lado 2 em 4 quadrados de lado 1 conforme a figura a seguir.




Como $9/4 > 2$, pelo menos um desses quatros quadrados terá 3 ou mais dos 9 pontos. Pelo item anterior, três pontos dentro de um quadrado de lado 1 formam um triângulo de área menor ou igual a $1/2$.

## 24 *Os pontos médios formam um quadrado*

Considere um triângulo acutângulo $ABC$ e quadrados $ABZX$ e $ACWY$, construídos externamente sobre os seus lados. Os pontos $M$ e $P$ são os pontos médios dos segmentos $BC$ e $XY$, respectivamente; os pontos $Q$ e $N$ são os centros dos quadrados $ABZX$ e $ACWY$, respectivamente; e os pontos $R$ e $S$ são pontos médios dos lados $AB$ e $AC$, respectivamente.




Vamos provar que $MNPQ$ é um quadrado em alguns passos.

a) Verifique que os triângulos $QRM$ e $MSN$ são congruentes.

b) Verifique que $\angle QMN = 90°$.

c) Sabendo dos resultados anteriores, mostre que $MNPQ$ é um quadrado.

## **24** *Os pontos médios formam um quadrado – Solução*

a) Uma base média de um triângulo é um segmento ligando dois pontos médios de seus lados. Esse segmento é paralelo ao lado oposto e possui metade do seu comprimento. Sabendo isso, temos $RM = \frac{AC}{2}$, $SM = \frac{AB}{2}$ e $\angle BRM = \angle BAC = \angle MSC$. Além disso, como $Q$ e $N$ são centros dos quadrados, podemos afirmar que $QR = \frac{AB}{2}$, $NS = \frac{AC}{2}$ e $\angle QRB = \angle NSC = 90°$. Dessa forma, os triângulos $QRM$ e $MSN$ são congruentes pelo caso $LAL$, pois $QR = MS$, $\angle QRM = \angle MSN = 90° + \angle BAC$ e $RM = SN$.

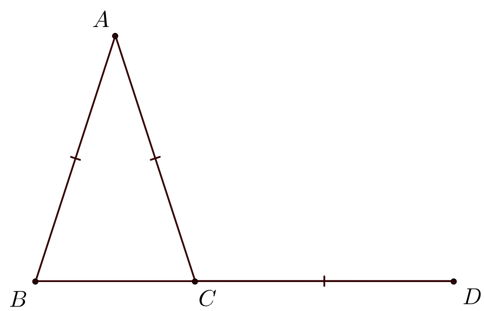
b) Como os triângulos $QRM$ e $MSN$ são congruentes, $MS \parallel AB$ e $\angle QRB = 90°$, então

$$
\begin{aligned}
\angle QMN &= \angle QMR + \angle RMS + \angle SMN \\
&= \angle QMR + \angle BRM + \angle MQR \\
&= \angle QMR + \angle QRM + \angle MQR - 90° \\
&= 180° - 90° \\
&= 90°.
\end{aligned}
$$

c) Com as informações dos itens anteriores, sabemos que o triângulo $QMN$ é um triângulo retângulo isósceles com $QM = MN$. Daí, $\angle MQN = \angle QNM = 45°$. De modo semelhante, podemos provar também que o triângulo $QPN$ também é um triângulo retângulo isósceles com $\angle QPN = 90°$ e $QP = PN$, pois basta repetir o argumento anterior trocando o papel do triângulo $ABC$ pelo do triângulo $XAY$. Dado que os triângulos retângulos isósceles $QNM$ e $PQN$ possuem a mesma hipotenusa, podemos concluir que eles são congruentes e assim $PNMQ$ é um retângulo com todos os lados iguais, ou seja, um quadrado.

## 25 *Uma construção geométrica*

Considere três pontos colineares $B$, $C$ e $D$ de modo que $C$ está entre $B$ e $D$. Seja $A$ um ponto que não pertence a reta $BD$ de modo que $AB = AC = CD$.




(a) Se $\angle BAC = 36°$, então verifique que

$$\frac{1}{CD} - \frac{1}{BD} = \frac{1}{CD + BD}.$$

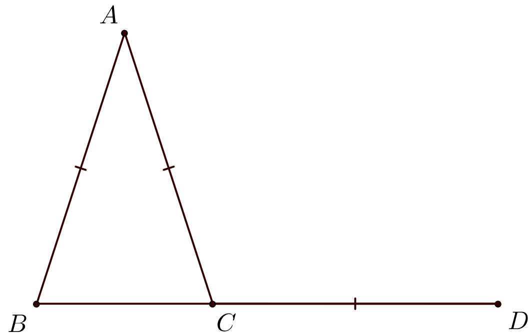
(b) Suponha agora que vale

$$\frac{1}{CD} - \frac{1}{BD} = \frac{1}{CD + BD}.$$

Verifique que $\angle BAC = 36°$.

## 25 *Uma construção geométrica – Solução*

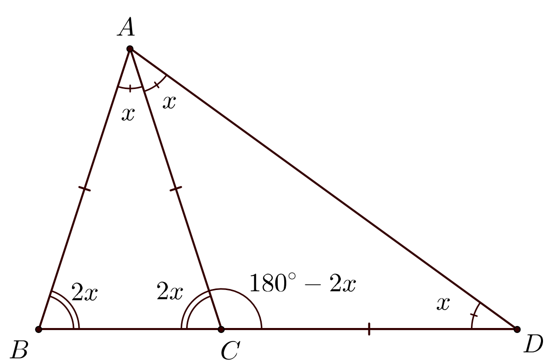
(a) Como $\angle BAC = 36°$ e o triângulo $ABC$ é isósceles, temos $\angle ABC = \angle ACB = 72°$. Além disso, como $\angle ACD = 108°$ e o triângulo $ACD$ também é isósceles, segue que $\angle CAD = \angle CDA = 36°$.



Portanto, os triângulos $ABC$ e $DBA$ são semelhantes, pois possuem todos os ângulos iguais. Consequentemente $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}$ e

$$\begin{aligned}
\frac{BC}{BA} &= \frac{AB}{BD}\\
\frac{BC}{CD} &= \frac{CD}{BD}\\
BD\cdot BC &= CD^2\\
BD(BD-CD) &= CD^2\\
BD^2 - BD\cdot CD &= CD^2\\
BD^2 - CD^2 &= BD\cdot CD\\
(BD-CD)(BD+CD) &= BD\cdot CD\\
\frac{BD-CD}{BD\cdot CD} &= \frac{1}{BD+CD}\\
\frac{1}{CD} - \frac{1}{BD} &= \frac{1}{CD+BD}.
\end{aligned}$$

(b)

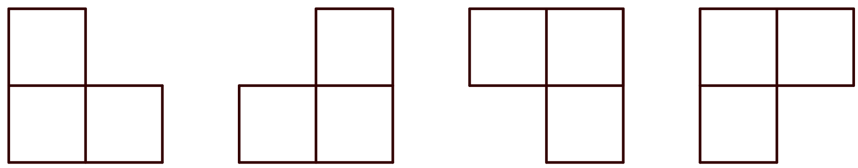



Suponha agora que vale a equação dada. A partir dela e repetindo os passos da última sequência de equações, na ordem inversa, podemos concluir que $\frac{BC}{BA} = \frac{BA}{DB}$. Como $\angle ABC = \angle DBA$, segue que $ABD$ e $ABC$ são semelhantes. Daí, se $\angle BAC = x$, temos $\angle BDA = x$. Lembrando que $AC = CD$ temos o triângulo $ACD$ isósceles implicando $\angle CAD = x$. Somando os ângulos internos do triângulo $ACD$ temos $\angle ACD = 180° - 2x$. De $AC = CD$, decorre que $\angle CAD = \angle CDA = x$ e, consequentemente, $\angle BCA = 2x$. Finalmente, como $AB = AC$, temos $\angle ABC = 2x$ e

$$\begin{aligned}
\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB &= 180^\circ\\
2x + 2x + x &= 180^\circ\\
x &= 36^\circ.
\end{aligned}$$

## 26 *Cortando a mesma quantidade de $L$-triminós*

As peças a seguir são chamadas de $L$-triminós.



Essas peças são usadas para cobrir completamente um tabuleiro $6 \times 6$. Nessa cobertura, cada $L$-triminó cobre exatamente 3 quadradinhos do tabuleiro $6 \times 6$ e nenhum quadradinho é coberto por mais de um $L$-triminó.

a) Quantos $L$-triminós são usados para cobrir um tabuleiro $6 \times 6$?

b) Em uma cobertura de todo o tabuleiro, dizemos que uma fileira (linha ou coluna) corta um $L$-triminó quando a fileira possui pelo menos um dos quadradinhos cobertos por esse $L$-triminó. Caso fosse possível obter uma cobertura do tabuleiro $6 \times 6$ na qual cada fileira cortasse exatamente a mesma quantidade de L-triminós, quanto seria essa quantidade?

c) Prove que não existe uma cobertura do tabuleiro $6 \times 6$ com $L$-triminós na qual cada fileira corte a mesma quantidade de $L$-triminós.

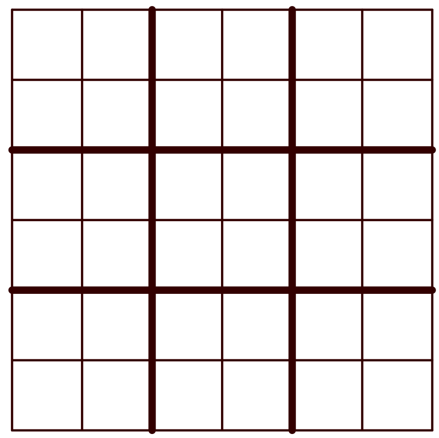
## 26 *Cortando a mesma quantidade de $L$-triminós – Solução*

a) Seja $x$ o número de $L$-triminós usados para cobrir um tabuleiro $6 \times 6$. Como esse tabuleiro possui exatamente $6 \cdot 6 = 36$ quadradinhos e cada um deve ser coberto por exatamente um dos $L$-triminós, então $3x = 36$, ou seja, $x = 12$.

b) Seja $y$ a quantidade de $L$-triminós que cada fileira corta. Considere todos os pares $(F, L)$, onde $F$ denota uma das 12 fileiras (linhas ou colunas) e $L$ um dos 12 $L$-triminós que é cortado pela fileira $F$. Por um lado, como cada fileira corta $y$ triminós, temos $12y$ pares do tipo $(F, L)$. Por outro lado, cada um dos 12 $L$-triminós é cortado por exatamente 4 fileiras (duas linhas e duas colunas) e isso nos dá o total de $12 \cdot 4 = 48$ pares do tipo $(F, L)$. Essa contagem deve ser a mesma nas duas situações e daí $12y = 48$, ou seja, $y = 4$.

c) Suponha, por absurdo, que exista uma cobertura em que cada fileira corta exatamente a mesma quantidade de L-triminós. Pelo item anterior, sabemos que cada fileira deve cortar exatamente 4 $L$-triminós. Quando uma fileira corta um L-triminó, eles possuem 1 ou 2 quadradinhos em comum. Tendo isso em mente, considere agora uma fileira em que dos 4 $L$-triminós cortados por ela, $a$ possuem 1 quadradinho na fileira e $(4 - a)$

possuem 2 quadradinhos. Como a fileira possui 6 quadradinhos, $a+2(4-a)=6$, ou seja, $a=2$ e $4-a=2$. Consequentemente, podemos concluir que em qualquer fileira existem 2 $L$-triminós cortados em 1 quadradinho e $a-2=2$ $L$-triminós cortados com 2 quadradinhos.



Considere agora a primeira linha do tabuleiro da figura anterior. Existem 2 L-triminós que cobrem, cada um, exatamente 1 quadradinho da primeira linha e, consequentemente, eles mesmos cobrem 2 quadradinhos da segunda linha. Analogamente, os 2 L-triminós que cobrem exatamente dois quadradinhos da primeira linha cobrem, cada um, exatamente 1 quadradinho da segunda linha. Note que isso já cobre totalmente a primeira e a segunda linhas implicando que nenhum $L$-triminó poderia cruzar a separação entre a segunda e a terceira linhas. Podemos repetir o raciocínio para terceira e quarta linhas e quinta e sexta linhas. Também podem fazer isso em colunas com a primeira e a segunda colunas, a terceira e a quarta colunas e a quinta e a sexta colunas. Dessa forma, o tabuleiro $6\times 6$ fica dividido em 9 subtabuleiros $2\times 2$ por faixas que não podem ser cruzadas por $L$-triminós. Isso implica que cada subtabuleiro tem que ser coberto por $L$-triminós. Isso é impossível, pois o número de quadradinhos em cada subtabuleiro não é um múltiplo de 3. Concluímos assim que não é possível cobrir o tabuleiro $6\times 6$ com $L$-triminós de modo que cada fileira corte a mesma quantidade de $L$-triminós.

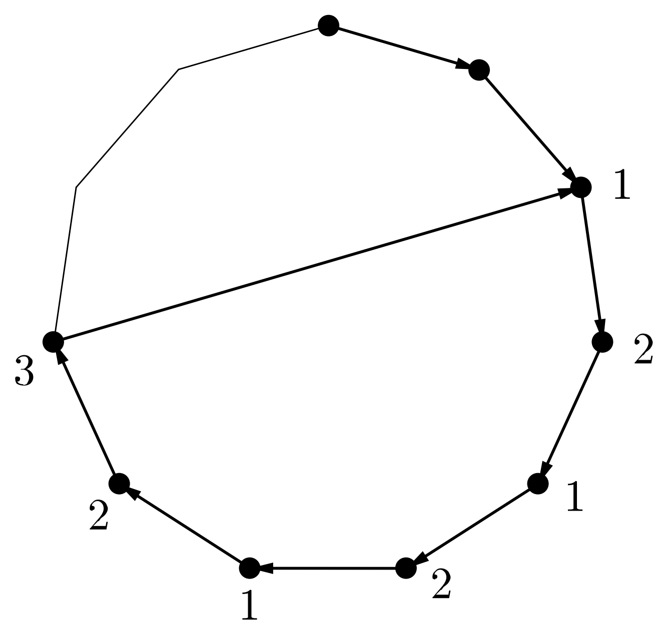
## 27 *Troca de presentes*

Existem 2017 pessoas em uma festa. Em um determinado momento, cada uma delas dá um presente para um outro convidado (é possível que um convidado receba mais de um presente). Mostre que podemos encontrar um grupo de 673 pessoas na festa de modo que quaisquer duas delas não trocaram presentes entre si.

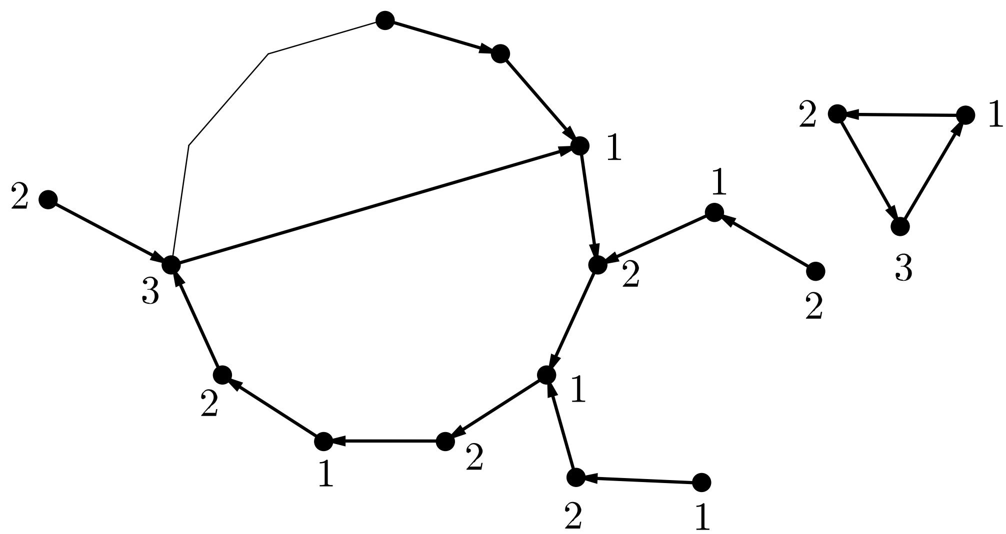
## 27 *Troca de presentes – Solução*

Nossa estratégia será classificar os convidados da festa em grupos de três cores de modo que pessoas associadas a uma mesma cor não trocaram presentes entre si. Pelo menos uma dessas cores terá 673 pessoas, pois caso contrário, o total de pessoas será no máximo $672 \cdot 3 = 2016 < 2017$. Bastará então escolher o grupo formado pelas 673 pessoas de uma mesma cor para satisfazer a condição do enunciado.

Para começar a classificação de cores, escolha uma pessoa qualquer e a coloque em uma mesa circular. Do seu lado esquerdo, sente a pessoa que recebeu um presente dela. Em seguida, caso ainda não esteja sentada, sente a pessoa que recebeu um presente da que acabou de sentar e repita esse processo. Como o número de pessoas é finito, eventualmente o processo de convite para que novas pessoas se sente será encerrado e teremos encontrado um ciclo, como ilustrado na figura abaixo:




Uma vez que um ciclo de pessoas tenha sido construído, escolha uma delas e a associe a cor 1. Em seguida, numere alternadamente as pessoas no ciclo com cores 1 e 2. Caso o ciclo tenha tamanho ímpar, a última cor associada deve ser a 3. Dessa forma, pessoas associadas a uma mesma cor não trocam presentes entre si.
Além disso, para as pessoas que não estão no ciclo, associe a cor 1 se ela deu um presente para alguém da cor 2 e associe a cor 2 se ela deu presente para alguém da cor 1 ou 3. Depois repita o processo sucessivamente seguindo essa mesma regra. Não existirá ambiguidade na atribuição de cores, pois cada pessoa só entrega um presente. Caso existam pessoas que não estejam associadas a algumas das três cores, podemos concluir que elas trocaram presentes entre si e não com as pessoas que já estão associadas às cores anteriores. Nesse caso, podemos repetir o argumento para esse grupo de pessoas que trocaram presentes entre si, construir um ciclo e, em seguida, realizar a atribuição de cores seguindo o mesmo padrão. Como a cada vez que executamos esse processo o número




de pessoas que não estão associadas a cores diminui e o número de pessoas na festa é finito, em algum momento todas elas estarão com alguma cor. Pela forma como foi feita a atribuição, pessoas de uma mesma cor não trocaram presente entre si e isso conclui o argumento descrito no início da solução.

## 28 *Somas no tabuleiro*

Cada um dos números $1, 2, 3 \ldots, 25$ é arranjado em uma das casas de um tabuleiro $5 \times 5$. Em cada linha, eles aparecem em ordem crescente, da esquerda para a direita. Encontre os valores máximo e mínimo possíveis para as somas dos números da terceira coluna.

## 28 *Somas no tabuleiro – Solução*

Podemos numerar as linhas e colunas do tabuleiro com os números de 1 a 5, de cima para baixo e da esquerda para a direita. Além disso, podemos denotar o número escrito na linha de número $i$ e na coluna de número $j$ por $a_{ij}$, como indicado na figura abaixo:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ | $a_{15}$ |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{24}$ | $a_{25}$ |
| $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $a_{34}$ | $a_{35}$ |
| $a_{41}$ | $a_{42}$ | $a_{43}$ | $a_{44}$ | $a_{45}$ |
| $a_{51}$ | $a_{52}$ | $a_{53}$ | $a_{54}$ | $a_{55}.$ |

Em cada linha $i$, sabemos que

$$a_{i1} < a_{i2} < a_{i3} < a_{i4} < a_{i5}.$$

Perceba que se trocarmos as posições de duas linhas entre si, a propriedade anterior continua sendo verdadeira e a soma dos elementos de cada coluna continua a mesma. Assim, realizando trocas entre as linhas até que os elementos da terceira coluna estejam ordenados de forma crescente, de cima para baixo, o problema se resume a calcular as somas máxima e mínima dos elementos da terceira coluna para essa configuração do tabuleiro. Para estimar a soma máxima, perceba que $a_{53}$ é no máximo 23, pois $a_{53} < a_{54} < a_{55}$. Existem pelo menos 5 inteiros no tabuleiro maiores que $a_{43}$, a saber, $a_{44}$, $a_{45}$, $a_{53}$, $a_{54}$ e $a_{55}$. Portanto, o valor máximo de $a_{43}$ é 20. Como $a_{33} < a_{34} < a_{35}$, $a_{33} < a_{43}$ e existem pelo menos 5 inteiros maiores que $a_{43}$, então existem pelo menos 8 inteiros no tabuleiro maiores que $a_{33}$ e daí o seu valor é no máximo 17. Repetiremos esse argumento mais duas vezes, usando que:

$$\begin{aligned} a_{23} &< a_{24} < a_{25}, \\ a_{23} &< a_{33}; \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_{13} &< a_{14} < a_{15}, \\ a_{13} &< a_{23}; \end{aligned}$$

para concluir que existem pelo menos 11 inteiros maiores que $a_{23}$ e 14 inteiros maiores que $a_{13}$. Logo, $a_{23}$ é no máximo 14 e $a_{13}$ é no máximo 11. Isso mostra que a soma dos elementos da terceira linha é no máximo

$$23 + 20 + 17 + 14 + 11 = 85.$$

Resta mostrarmos que realmente essa estimativa pode ser obtida. Basta exibirmos uma configuração do tabuleiro satisfazendo as regras mencionadas, como mostra o tabuleiro da esquerda da próxima figura.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 | 12 | 13 |
| 2 | 7 | 14 | 11 | 16 |
| 3 | 8 | 17 | 18 | 19 |
| 4 | 9 | 20 | 21 | 22 |
| 5 | 10 | 23 | 24 | 25 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 16 | 21 |
| 4 | 5 | 6 | 17 | 22 |
| 7 | 8 | 9 | 18 | 23 |
| 10 | 11 | 12 | 19 | 24 |
| 13 | 14 | 15 | 20 | 25 |

Para estimar a soma mínima, perceba que pelo menos dois elementos, a saber, $a_{11}$ e $a_{12}$ são menores que $a_{13}$. Portanto, $a_{13}$ é no mínimo 3. Em seguida, repetindo a estratégia anterior, temos pelo menos 5, 8, 11 e 14 elementos no tabuleiro que são menores que $a_{23}$, $a_{33}$, $a_{43}$ e $a_{53}$, respectivamente. Assim, a soma mínima dos elementos da terceira coluna é

$$3 + 6 + 9 + 12 + 15 = 45.$$

Para mostrar que essa soma é realmente possível, basta ver o tabuleiro da direita da última figura.

## 29 *O vovô e a vovó*

Em uma festa, existem 25 crianças. Sabemos que quaisquer duas delas possuem pelo menos um de seus avós em comum (avô ou avó). Explique por que pelo menos 17 crianças possuem ou um mesmo avô ou uma mesma avó nessa família.

## 29 *O vovô e a vovó – Solução*

Para cada criança, associe duas etiquetas, cada uma com o nome de um de seus avós. Se uma pessoa é o avô ou a avó de todas as crianças, então claramente a afirmação do enunciado é verdadeira. Tratemos então do caso em que nem todas as crianças são netas de uma mesma pessoa. Suponha que uma criança tenha as etiquetas das pessoas $A$ e $B$. Como nem todas as crianças são netas de uma mesma pessoa, deve existir uma criança que não tem a etiqueta $A$. Como essa criança deve possuir um avô ou avó em comum com a criança anteriormente mencionada, ele deve possuir etiquetas $B$ e $C$. Considere agora uma criança que não possua a etiqueta $B$ e a compare com as duas crianças anteriores. Para que ela tenha um avô ou avó em comum com as duas crianças, ela deve possuir as etiquetas $A$ e $C$. Uma criança que não possua apenas as etiquetas dos tipos $A$, $B$ ou $C$ não terá etiqueta em comum com alguma das três crianças anteriormente mencionadas e isso nos leva a concluir que todas as crianças são netas apenas das pessoas $A$, $B$ ou $C$. Foram usadas $2 \cdot 25 = 50$ etiquetas. Se nenhuma dessas pessoas aparece mais que 16 vezes, teremos no máximo $3 \cdot 16 = 48 < 50$ e isso é um absurdo. Portanto, alguma etiqueta é usada pelo menos 17 vezes e isso significa que uma pessoa é avô ou avó de pelo menos 17 crianças.

## 30 *Uma dízima periódica*

Determine os números primos $p$ tais que a representação decimal da fração $\dfrac{1}{p}$ tenha período de tamanho 5.

**Observação:** Se a representação decimal de um número possui uma sequência de dígitos que se repete de forma periódica, o tamanho da menor sequência de dígitos que se repete é o tamanho da representação decimal. Por exemplo, $61/495 = 0,1232323\ldots$, apesar de 23, 2323 serem sequências de dígitos que se repetem na representação decimal, o tamanho da menor sequência é 2 e este é o tamanho do período.

## 30 *Uma dízima periódica – Solução*

Sejam $q$ o tamanho da parte não periódica e $\overline{abcde}$ o período da representação decimal de $1/p$. Assim, se representarmos os dígitos da parte não periódica por meio do símbolo $\star$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p} &= 0,\star\star\ldots\star\, abcdeabcde\ldots \\
\frac{10^q}{p} &= \star\star\ldots\star, abcdeabcde\ldots \\
\frac{10^q}{p} &= M+\frac{abcde}{10^5-1}.
\end{aligned}
$$

Na última equação, representamos por $M$ o inteiro à esquerda da vírgula da representação decimal de $10^q/p$ ou, se preferir, a parte inteira do número em questão. Multiplicando a equação anterior por $(10^5-1)p$, obtemos

$$
\begin{aligned}
10^q(10^5-1) &= (10^5-1)\cdot p\cdot M + abcde\cdot p \\
10^q(10^5-1) &= [(10^5-1)\cdot M + abcde]\cdot p,
\end{aligned}
$$

consequentemente, $p \mid 10^q(10^5-1)$. Os únicos divisores primos de $10^q$ são 2 e 5 e claramente nenhum deles produz uma dízima periódica de período 5. Resta analisarmos os fatores primos de $10^5-1 = 9\cdot 11111 = 3^2\cdot 41\cdot 271$. Dentre os três números primos que aparecem na fatoração anterior, podemos checar que 41 e 271 são os únicos que produzem uma dízima periódica de período 5.

**Observação:** Se $p$ é um primo diferente de 2 e 5 e $k$ é o menor expoente positivo tal que $p$ divide $10^k-1$, é possível mostrarmos que a expansão decimal de $1/p$ possui período de tamanho $k$.

## 31 *Colares com miçangas coloridas*

Existem $2m$ miçangas de $m$ cores distintas, sendo duas de cada cor. Essas miçangas são distribuídas em $m$ caixas, com duas em cada caixa, de modo que é possível escolher uma miçanga em cada uma delas e obter um conjunto de $m$ miçangas de cores distintas. Prove que o número de maneiras de fazermos esse tipo de escolha é necessariamente uma potência de 2.

## 31 *Colares com miçangas coloridas – Solução*

Antes de descrevermos a solução para o caso geral, considere o caso particular com $m=5$, em que as cores das miçangas serão denotadas por $A$, $B$, $C$, $D$ e $E$, com as seguintes distribuições de caixas:

| $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ |
|---|---|---|---|---|
| $A,B$ | $B,C$ | $C,A$ | $D,E$ | $D,E.$ |

Contemos agora o número de escolhas de miçangas, uma de cada caixa, de modo que todas as escolhidas sejam de cores distintas. Analisando as duas últimas caixas, se escolhermos uma cor em $C_4$, somos forçados a escolher a outra cor em $C_5$. Essas escolhas não interferem nas escolhas das cores das primeiras caixas. Se escolhermos $A$ em $C_1$, somos obrigados a escolher $B$ em $C_2$ e $C$ em $C_3$. Por outro lado, se escolhermos $B$ em $C_1$, temos que escolher $C$ em $C_2$ e $A$ em $C_3$. Ou seja, existem 2 escolhas para as cores retiradas das três primeiras caixas e 2 para as das duas últimas. Essas $2 \cdot 2 = 4$ escolhas totalizam o número de maneiras de escolhermos 5 miçangas distintas nesse exemplo particular.

Para o caso geral, considere uma caixa genérica, que chamaremos de $C_1$ e denote por $m_1$ a cor de uma de suas miçangas. Em seguida, escolha uma outra caixa, que chamaremos de $C_2$, contendo uma miçanga de uma cor, que chamaremos de $m_2$, presente em $C_1$, mas distinta da cor $m_1$. Escolha agora um caixa $C_3$ contendo uma miçanga de cor $m_3$ presente em $C_2$, mas diferente de $m_2$. Continue esse processo até, eventualmente, obtermos para algum $l$ que $C_l = C_1$. Isso se traduz na seguinte distribuição:

| $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $\dots$ | $C_{l-1}$ |
|---|---|---|---|---|
| $m_1, m_2$ | $m_2, m_3$ | $m_3, m_4$ | $\dots$ | $m_{l-1}, m_1$. |

Perceba que qualquer uma das duas escolhas possíveis das cores escolhidas da caixa $C_1$ determina unicamente quais miçangas devem ser escolhidas nas outras caixas do ciclo anterior para que as cores permaneçam distintas. Se ainda existirem caixas fora deste ciclo, podemos repetir o processo descrito anteriormente e agrupá-las em ciclos. Para cada um deles, existirão apenas duas maneiras de selecionarmos suas miçangas de modo que as cores sejam todas distintas. Como as escolhas nesses ciclos são independentes, se $k$ é o número deles, o total de escolhas de miçangas de cores diferentes é $2^k$.

## 32 *Particionando os naturais*

Uma partição do Conjunto dos Números Naturais é uma coleção de conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_k$ de modo que cada número natural pertença a exatamente um deles. Veja que em qualquer partição do Conjunto dos Números Naturais pelo menos um desses conjuntos é infinito, pois caso contrário o Conjunto dos Números Naturais seria a união de uma quantidade finita de conjuntos finitos e seria, portanto, finito. Um exemplo de partição do Conjunto dos Números Naturais é considerar como $A_1$ o conjunto de todos os números naturais pares e como $A_2$ o conjunto de todos os números naturais ímpares. Existem várias partições possíveis e os próximos dois itens são fatos gerais que podem ser verificados em qualquer uma dessas partições.

a) Explique por que, para cada inteiro positivo $x$ fixado, existe sempre algum dos conjuntos $A_i$ com infinitos múltiplos de $x$.

b) Pelo item anterior, dados dois inteiros positivos $p$ e $q$, existe um dos conjuntos da partição com infinitos múltiplos de $p$ e outro conjunto que contém infinitos múltiplos de $q$. Entretanto, esses dois conjuntos não precisam ser necessariamente iguais. Mostre agora que sempre algum desses conjuntos $A_i$ possui infinitos múltiplos de qualquer inteiro positivo.

## 32 *Particionando os naturais – Solução*

a) Veja que $x$ possui infinitos múltiplos no conjunto dos números naturais que estarão divididos entre os conjuntos da partição. Se cada conjunto tivesse apenas uma quantidade finita de múltiplos de $x$, então o número total de múltiplos de $x$ entre os naturais, por ser uma união desses conjuntos, seria finito. Isso é uma contradição. Logo, podemos afirmar que algum dos conjuntos possui infinitos múltiplos de $x$.

b) Novamente faremos uma demonstração por absurdo. Suponha que não existe nenhum conjunto que satisfaça a condição, ou seja, para cada conjunto $A_i$ existe pelo menos um inteiro positivo $n_i$ que não possui infinitos múltiplos em $A_i$. Considere o número $n = n_1 n_2 \ldots n_k$, que é o produto de todos os números naturais $n_i$. Veja que $n$ é múltiplo de cada $n_i$ e isso implica que todo múltiplo de $n$ é múltiplo deles. Pelo item anterior, algum dos conjuntos, digamos $A_j$, deve possuir infinitos múltiplos de $n$. Daí, $A_j$ teria infinitos múltiplos de $n_j$ e isso contradiz nossa suposição inicial. Esse absurdo mostra que pelo menos um dos conjuntos possui infinitos múltiplos de qualquer inteiro positivo.

## 33 *Equação com o mdc*

Quantos são os pares ordenados $(a, b)$, com $a$ e $b$ inteiros positivos, tais que

$$a + b + mdc(a, b) = 33?$$

## 33 *Equação com o mdc – Solução*

Seja $d = mdc(a, b)$. Podemos reescrever a equação como:

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + 1 = \frac{33}{d}.$$

Como lado esquerdo é uma soma de números inteiros, segue que $d$ divide 33. Além disso,

$$\begin{aligned} mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) &= mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{33}{d} - 1\right) \\ &= mdc\left(\frac{b}{d}, \frac{33}{d} - 1\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Fixado $d$, é suficiente encontrarmos pares de inteiros positivos $(x, y)$ com $mdc(x, \frac{33}{d} - 1) = 1$ tais que $x + y = \frac{33}{d} - 1$, pois daí obteremos também $mdc(y, \frac{33}{d} - 1) = 1$ e que $(a, b) = (dx, dy)$ também é solução. Vejamos então as possibilidades para $d$:

i) Para $d = 1$ e $x + y = 32$, temos 16 soluções, pois basta escolher $x$ ímpar.

ii) Para $d = 3$ e $x + y = 10$, temos 4 soluções, pois $x$ não pode ser par e nem múltiplo de 5.

iii) Para $d = 11$ e $x + y = 2$, temos 1 solução apenas.

iv) Não podemos ter $d = 33$, pois $a$ e $b$ são positivos.

Logo, existem 21 pares de soluções.

## 34 *Soluções inteiras do sistema*

Encontre todas as soluções inteiras do sistema $\begin{cases} xz - 2yt &= 3 \\ xt + yz &= 1. \end{cases}$

## 34 *Soluções inteiras do sistema – Solução*

Uma boa estratégia será aplicar alguma manipulação algébrica, como somar as equações, multiplicá-las, somar um fator de correção, entre outras para obtermos alguma fatoração envolvendo esses números. Elevando ambas as equações ao quadrado, temos:

$$\begin{cases} x^2z^2 - 4xyzt + 4y^2t^2 &= 9 \\ x^2t^2 + 2xytz + y^2z^2 &= 1. \end{cases}$$

Multiplicando a segunda por dois e somando com a primeira, temos:

$$\begin{aligned} x^2(z^2 + 2t^2) + 2y^2(z^2 + 2t^2) &= 11 \\ (x^2 + 2y^2)(z^2 + 2t^2) &= 11. \end{aligned}$$

Como cada uma das parcelas anteriores é um inteiro não negativo, temos dois casos:

$$\begin{cases} x^2+2y^2 &= 11 \\ z^2+2t^2 &= 1 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z,t) = (\pm 3, \pm 1, \pm 1, 0);$$

ou

$$\begin{cases} x^2+2y^2 &= 1 \\ z^2+2t^2 &= 11 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z,t) = (\pm 1, 0, \pm 3, \pm 1).$$

Logo, as únicas soluções possíveis são as quádruplas $(\pm 1, 0, \pm 3, \pm 1)$ e $(\pm 3, \pm 1, \pm 1, 0)$.

## 35 *A equação com* 28 *soluções*

Seja $n$ um inteiro positivo. Se a equação $2x+2y+z=n$ tem 28 soluções em inteiros positivos $x, y$ e $z$, determine os possíveis valores de $n$.

## 35 *A equação com* 28 *soluções – Solução*

Perceba inicialmente que se $x$ e $y$ estão definidos, só existe uma possível escolha para $z$ e, além disso, $z$ e $n$ possuem a mesma paridade. Consideremos os seguintes casos:

i) O número $n$ é par, ou seja, $n = 2i$. Assim, devemos ter $z = 2j$ e

$$\begin{aligned} 2x+2y+z &= n \\ x+y &= i-j. \end{aligned}$$

Temos então as seguintes $i-j-1$ possibilidades para o par $(x,y)$:

$$(1, i-j-1), (2, i-j-2), \ldots, (i-j-1, 1).$$

Como devemos ter $1 \le i-j-1 \le \dfrac{n-4}{2}$, fixado $n$ par, temos

$$\frac{n-4}{2} + \frac{n-3}{2} + \ldots + 1 = \frac{(n-4)(n-2)}{8}$$

soluções.

ii) O número $n$ é ímpar, ou seja, $n = 2i+1$. Asssim, devemos ter $z = 2j+1$ e

$$\begin{aligned} 2x+2y+z &= n \\ x+y &= i-j. \end{aligned}$$

Temos então as seguintes $i-j-1$ possibilidades para o par $(x,y)$:

$$(1, i-j-1), (2, i-j-2), \ldots, (i-j-1, 1).$$

De modo semelhante ao caso anterior, devemos ter $1 \leq i - j - 1 \leq \frac{n-3}{2}$ e, fixado $n$ ímpar, temos

$$\frac{n-3}{2} + \frac{n-5}{2} + \ldots + 1 = \frac{(n-3)(n-1)}{8}$$

soluções.

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{(n-4)(n-2)}{8} &= 28 \text{ ou} \\ \frac{(n-3)(n-1)}{8} &= 28. \end{aligned}$$

As únicas soluções positivas das equações anteriores são $n = 17$ e $n = 18$.

# ÍNDICE DE PROBLEMAS