OBMEP – Banco de Questões 2016

Régis Barbosa e Samuel Feitosa

Impresso no Brasil/Printed in Brazil
Primeira edição e impressão

Texto e diagramação: Régis Barbosa e Samuel Feitosa

Revisão: Diogo Soares Dórea da Silva

Este livro foi escrito usando o sistema LaTeX.

Capa: Ampersand Comunicações Gráfica - EPP

IMPA/OBMEP
Banco de Questões 2016
Rio de Janeiro, IMPA, 2016
182 páginas
ISBN 978-85-244-0417-7

Distribuição
IMPA/OBMEP
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: contato@obmep.org.br
www.obmep.org.br

CONTEÚDO

APRESENTAÇÃO

Desde sua primeira edição em 2005, a OBMEP envia a todas as escolas públicas do país um Banco de Questões com problemas e desafios de Matemática para alunos e professores. O Banco pretende despertar o prazer pela Matemática, estimular o aluno interessado com perguntas instigantes e proporcionar um treinamento para as provas da OBMEP.

Os problemas deste ano, concebidos pelos professores Régis Barbosa e Samuel Feitosa, estão ordenados em grau crescente de dificuldade e exigem mais imaginação do que uma boa educação em Matemática.

A edição deste ano do Banco de Questões e todas as edições anteriores estão disponíveis na página www.obmep.org.br, assim como as apostilas e o material didático utilizado no Programa de Iniciação Científica Junior.

Caso encontre alguma solução diferente daquela apresentada ao final do Banco de Questões, não deixe de mandá-la para

bancodequestoes@obmep.org.br.

As mais originais serão publicadas na página da OBMEP.

Boa diversão!
Claudio Landim
Coordenador Geral da OBMEP

PREFÁCIO

Querido leitor/leitora,

O Banco de Questões deste ano da OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – segue o mesmo padrão do banco do ano passado. Para facilitar a busca de questões em meio ao livro, há um Sumário no início e um Índice Remissivo no final com os nomes dos problemas e respectivas páginas onde aparecem seus enunciados e soluções. Além disto, as questões do Nível 1 são numeradas como $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$ etc. As questões do Nível 2 são numeradas como $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$ etc. E as questões do Nível 3 são numeradas como $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$ etc.

Muitos dos problemas podem resistir às primeiras investidas do leitor e isto não deve ser motivo de desânimo. Um bom conselho é discuti-los com outras pessoas. Isto certamente tornará a experiência de resolvê-los ainda mais prazerosa. Além disto, durante a leitura das soluções, o uso do papel e da caneta podem ser bons instrumentos para a compreensão de todos os detalhes envolvidos.

Alguns dos problemas deste banco foram inspirados em clássicos problemas de olimpíadas ao redor do mundo e hoje constituem um tipo de conhecimento folclórico que todo estudante e professor interessado em competições deve ter contato. Não podemos deixar de manifestar um enorme agradecimento a todos os professores, geralmente anônimos, que dedicam um enorme tempo de suas vidas elaborando belos problemas de olimpíadas e que tanto nos estimulam a aprender mais Matemática.

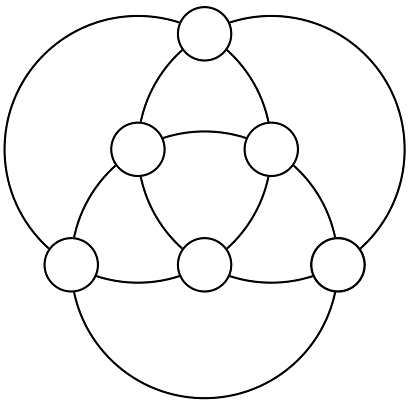
Bom proveito!

Régis Barbosa e Samuel Feitosa

NÍVEL 1

1 *Círculos nas três circunferências*

Na figura abaixo, três circunferências de mesmo raio se intersectam em seis pontos. Em cada um destes pontos, existe um círculo menor, todos de mesmo raio. Coloque os números 1, 2, 3, 4, 5, 6 nos círculos pequenos, de modo que os números escritos em cada uma das circunferências maiores seja 14.



2 *Filhos de Paulo*

A idade de cada um dos três filhos de Paulo é um número inteiro. A soma destes três inteiros é igual a 12 e seu produto é 30. Qual a idade de cada um dos seus três filhos?

3 *O tabuleiro* 3×5

Em cada uma das situações abaixo, decida se é possível dispormos os números $1, 2, \ldots, 15$ nos quadradinhos de um tabuleiro 3×5 de modo que:

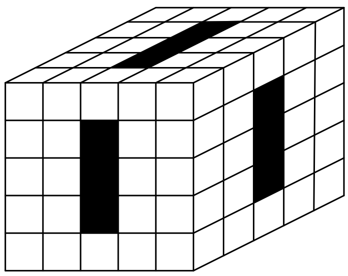
a) A soma dos números nas três linhas sejam iguais entre si e a soma dos números nas três colunas também sejam iguais entre si, mas, eventualmente, diferentes do valor das somas das linhas.

b) A soma dos números em todas as linhas e colunas sejam iguais entre si.

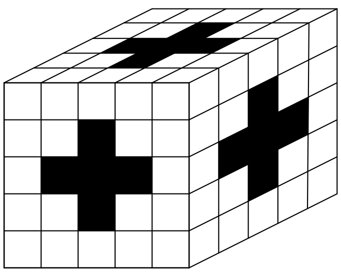
4 *Cubo com túnel*

No cubo $5 \times 5 \times 5$ das figuras abaixo, cubinhos foram retirados de modo que, para qualquer uma das faces, uma peça indicada pelo formato dos quadradinhos pintados de preto consiga atravessar o cubo e sair na face oposta. Determine quantos cubinhos foram retirados em cada item.

a)



b)



5 *Barras de chocolate*

João possui 30 barras de chocolate com os pesos: 2, 3 ou 4 quilos. A soma dos pesos das barras é 100 quilos. João possui mais barras de $2\,kg$ ou de $4\,kg$?

6 *A divisão da pizza*

Um grupo de oito pessoas pediu uma pizza. O garçom conseguiu dividi-la em oito pedaços fazendo apenas três cortes retos. Como ele conseguiu fazer isto?

7 *A calculadora do Planeta Zilot*

No planeta Zilot, as unidades de medidas são bem diferentes das que conhecemos na Terra. A medida padrão de comprimento é o Zimetro e um de seus submúltiplos é o Zimimimetro que equivale a 10^{-7} Zimetros. Uma calculadora pode realizar apenas duas operações: multiplicar um número por 10^8 ou dividi-lo por 10^5. Por exemplo, usando as operações da calculadora, podemos fazer as seguintes conversões:

$$3 \to 3 \cdot 10^{-5} \to 3 \cdot 10^{-10} \to 3 \cdot 10^{-2}.$$

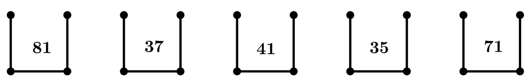
a) Explique como combinarmos as duas operações da calculadora e fazermos aparecer na tela o número que representa a conversão de $7 \cdot 10^2$ Zimetros em Zimimimetros.

b) Como obter a conversão de $10^{10} \cdot 10^{-4}$ Zimetros em Zimimimetros começando com o número 1000 na tela da calculadora?

c) Usando a calculadora, é possível transformar 10^{2017} em 10^{11} usando as duas teclas mencionadas?

8 *Emboscada para Colorado Jones*

Colorado Jones deve resolver um grande enigma para sobreviver. Ele deve remover apenas um dos cinco potes que estão na sua frente, como indica a figura abaixo, para poder abrir a porta da câmara secreta. Ele sabe que em cada pote existe apenas um tipo de moeda, ouro ou prata, e que cada número escrito neles representa a quantidade de moedas em seu interior. Além disto, o único pote correto que deve ser removido, faz com que nos potes restantes o número de moedas de prata seja o dobro do número de moedas de ouro. Qual pote deve ser removido?



9 *Qual a idade do Zé?*

Zé Roberto possui cinco filhos, dois são gêmeos e os outros três são trigêmeos. Sabe-se que hoje a idade de Zé é igual à soma das idades dos seus cinco filhos. Daqui a 15 anos, se somarmos as idades dos cinco filhos, teremos o dobro da idade que Zé possuirá na mesma época e a soma das idades dos gêmeos será igual à soma das idades dos trigêmeos.

(a) Qual a idade atual de Zé?

(b) Qual a idade atual dos trigêmeos?

10 *Agrupando bolinhas de gude*

Juca possui menos do que 800 bolinhas de gude. Ele gosta de separar as bolinhas em grupinhos com a mesma quantidade de bolinhas. Ele percebeu que se formar grupinhos com 3 bolinhas cada, sobram exatamente 2 bolinhas. Se ele formar grupinhos de 4 bolinhas, sobram 3 bolinhas. Se ele formar grupinhos de 5 bolinhas, sobram 4 bolinhas. E, finalmente, se ele formar grupinhos com 7 bolinhas cada, sobram 6 bolinhas.

(a) Se Juca formasse grupinhos com 20 bolinhas cada, quantas bolinhas sobrariam?

(b) Juca possui quantas bolinhas de gude?

11 *Os ângulos do triângulo escaleno*

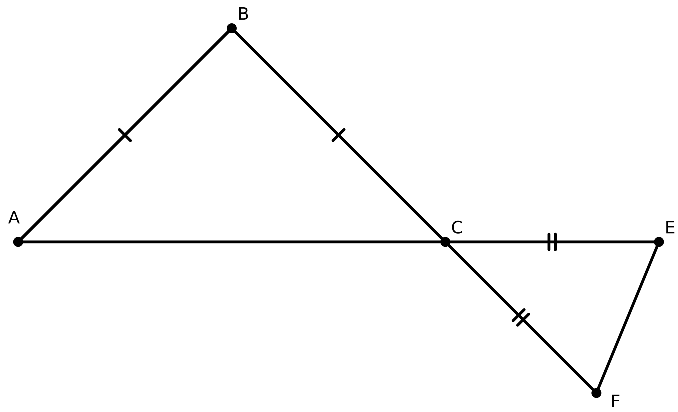
Em um triângulo escaleno, um ângulo é o dobro de outro. Se um dos ângulos é $36°$, determine todas as possibilidades para os ângulos do triângulo.

12 *Erdoslândia*

Existem 7 cidades em Erdoslândia. Queremos construir entre quaisquer duas cidades uma estrada de mão única, de modo que sempre seja possível partir de uma cidade e chegar a qualquer outra passando por no máximo mais uma cidade. Como isto pode ser feito?

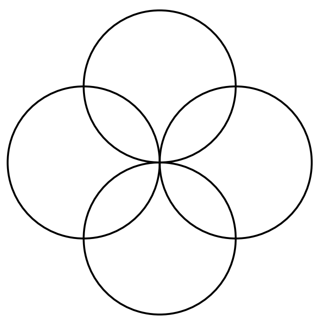
13 *Descobrindo o ângulo*

No desenho abaixo, C é o ponto de interseção de AE e BF, $AB = BC$ e $CE = CF$. Se $\angle CEF = 50°$, determine o ângulo $\angle ABC$.



14 *Circuitos circulares*

A figura a seguir representa 4 circuitos circulares de bicicleta. Os quatro ciclistas começam ao meio-dia e percorrem círculos diferentes, um deles com uma velocidade de $6km$ por hora, outro com uma velocidade de $9km$ por hora, outro com uma velocidade de $12km$ por hora e, finalmente, o quarto com uma velocidade de $15km$ por hora. Eles combinam andar de bicicleta até que todos se encontrem simultaneamente no centro da figura, que foi de onde eles partiram inicialmente. O perímetro de cada círcunferência é exatamente um terço de um quilômetro. Quando eles irão se encontrar novamente pela quarta vez?



15 *Frações em fila*

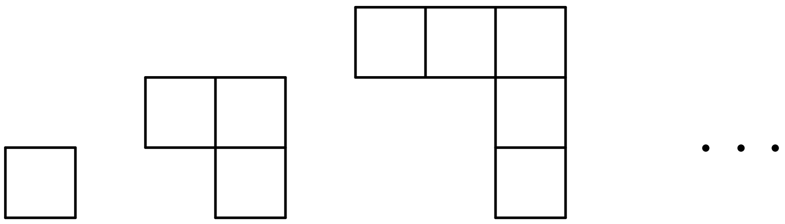
Imagine as 2015 frações:

$$\frac{2}{2016}, \frac{3}{2015}, \frac{4}{2014}, \ldots, \frac{2014}{4}, \frac{2015}{3}, \frac{2016}{2}.$$

É possível escolhermos três destas frações com produto igual a 1?

16 *Somando pecinhas*

Considere a seguinte sequência de pecinhas, em que a pecinha de número 1 é um quadradinho.



(a) Quantos quadradinhos formam a pecinha de número 50?

(b) Quantos quadradinhos existem na união das pecinhas de número 1 a 50?

(c) Observando o resultado do item b, calcule

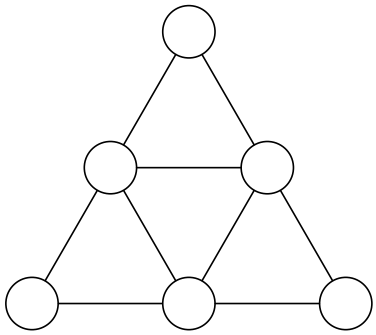
$$2+4+6+\ldots+96+98+100.$$

(d) Calcule

$$1+2+3+4+\ldots+97+98+99+100.$$

17 *Colocando números para obter a mesma soma*

Considere os seis círculos sobre os lados de um triângulo como na figura a seguir:



(a) Mostre uma maneira de colocar cada um dos números de 1 a 6 em cada um dos círculos de modo que a soma dos três números em cada lado do triângulo maior seja igual a 12.

(b) Mostre que **não** é possível colocar os números de 1 a 6 em cada um dos círculos de modo que a soma dos três números em cada lado do triângulo maior seja igual a 13.

(c) É possível colocar os números de 1 a 6 em cada um dos círculos de modo que as somas dos números em cada um dos lados do triângulo maior seja igual à soma dos três números que estão no meio dos três lados do triângulo maior?

18 *Escrevendo os números um ao lado do outro*

Carlinhos gosta de escrever números em seu caderno. Um dia ele escreveu os números de 1 até 999, um ao lado do outro, para formar o número gigante:

$$123456789101112\ldots997998999.$$

Sobre este número, pergunta-se:

(a) Quantos dígitos foram escritos?

(b) Quantas vezes aparece o dígito 1?

(c) Considerando que 1 ocupa a posição 1, 2 ocupa a posição 2 e 0 aparece pela primeira vez ocupando a posição 11, qual dígito ocupa a posição 2016?

19 *Dividindo moedas de ouro para ganhar mais*

Um grupo de dez caçadores de relíquias encontrou um baú de moedas de ouro com 100 moedas que permaneceu perdido por mais de duzentos anos.

Para facilitar a organização de todos, cada caçador recebe um número de 1 a 10 de acordo com a hierarquia que cada um tem no grupo. Isto é, o caçador número 10 é o chefe enquanto o número 1 não pode dar ordens para nenhum dos outros. Eles decidiram usar uma certa forma de "democracia" para dividir as moedas de ouro. O caçador 10 faz uma proposta para a divisão de todas as moedas entre os 10 caçadores. Cada caçador vota a favor ou contra. Se metade ou mais dos caçadores votar a favor, essa divisão é realizada. Caso contrário, o caçador 10 perde sua vez e fica fora da divisão de moedas. O caçador 9 então poderá fazer sua proposta de divisão das 100 moedas entre os caçadores de 1 até 9. Novamente, cada caçador de 1 até 9 vota a favor ou contra e, se metade ou mais concordar, a divisão é feita. Caso contrário, o caçador 9 perde sua vez e fica sem moedas. O processo segue passando para o caçador 8 e assim sucessivamente.

Os caçadores sabem que cada moeda não pode ser dividida, pois vale muito mais inteira. Além disto, cada caçador quer ganhar o máximo de moedas possível.

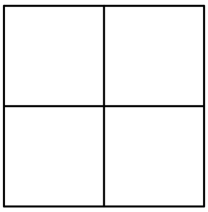
(a) Suponha que o processo chegou até a vez do caçador 3. Qual a proposta que ele deve fazer para obter o maior ganho e ainda contar com a garantia de que sua proposta seja aceita na votação com os caçadores 1, 2 e 3 ?

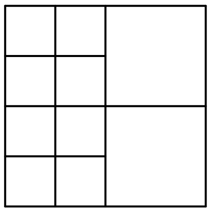
(b) Suponha que o processo chegou ao caçador 4. Os caçadores são muito espertos e sabem a resposta do item anterior. Qual a proposta que o caçador 4 deve fazer para ter o maior ganho possível e ainda contar com a garantia de que ela seja aceita?

(c) Voltemos ao início do problema e lembremo-nos de que todos os caçadores são muito espertos. Qual a proposta que o caçador 10 deve fazer para obter o maior ganho e ainda contar com a garantia de que sua proposta seja aceita em votação?

20 *Números quadradois*

Se um quadrado pode ser dividido em n quadrados de no máximo dois tamanhos diferentes, então, dizemos que n é um número *quadradois*. Veja que os números 4 e 10 são quadradois, como podemos ver nas figuras a seguir:





(a) Mostre que 6 é quadradois.

(b) Mostre que 2015 é quadradois.

(c) Mostre que todo o inteiro maior que 5 é quadradois.

21 *Retângulo formado por quadrados diferentes*

É bastante simples formar um retângulo com quadrados justapostos de tamanhos repetidos veja, por exemplo, o problema dos números quadradois. Uma atividade bem mais complicada é formar um retângulo, também com quadrados justapostos, todos possuindo tamanhos distintos. A primeira publicação de um retângulo formado por quadrados com todos os tamanhos distintos foi feita em 1925 por Z. Morón. Ele formou um retângulo 47×65 com dez quadrados de lados: 3, 5, 6, 11, 17, 19, 22, 23, 24 e 25. Zeca Mourão cortou quadrados de papel com o formato dos quadrados de lados usados por Z. Morón e decidiu montar o retângulo 47×65. Depois de algum tempo, o Zeca finalmente conseguiu. Vamos tentar descobrir como ficou a sua montagem?

(a) Sabendo que o perímetro do retângulo foi feito por apenas seis quadrados, quais quadrados foram usados no bordo?

(b) Faça a colocação destes quadrados de maneira adequada.

(c) Complete a montagem de Zeca Mourão.

22 *Tabela de multiplicação*

Cada letra de A até J representa um número distinto de 1 até 10. Na tabela a seguir, cada número escrito representa o produto do número da sua linha pelo número da sua coluna. Por exemplo, $A \cdot F = 18$.

$\times$	A	B	C	D	E
F	18				
G				20	
H		42			
I					24
J			10		

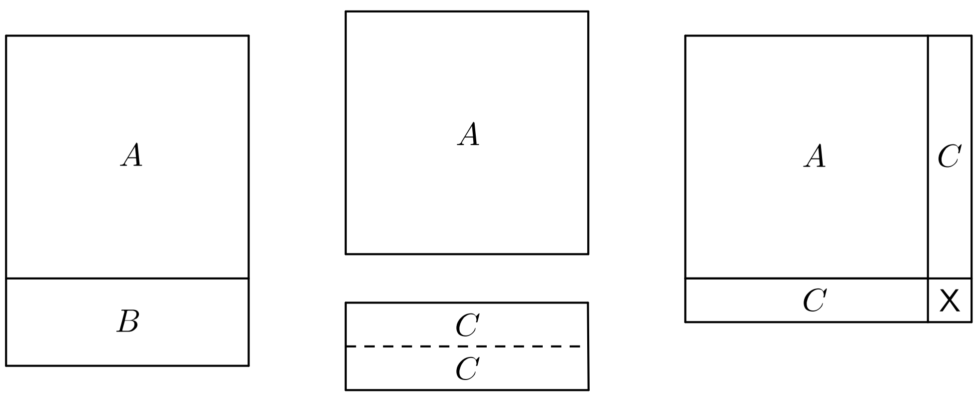
Usando a equação

$$A+B+C+D+E=F+G+H+I$$

e sabendo os cinco valores na tabela, determine o valor de cada letra de A até J.

23 *Completando o quadrado*

Encontrar um número que somado a 13600 forma um quadrado perfeito não parece ser uma tarefa fácil. Vamos resolver isto geometricamente. Considere um retângulo de área 13600 com um dos lados igual a 136. Divida-o em um quadrado A e um retângulo B. Corte o retângulo B em dois retângulos iguais, ambos denotados por C. Posicione os retângulos C sobre dois lados consecutivos do quadrado A.



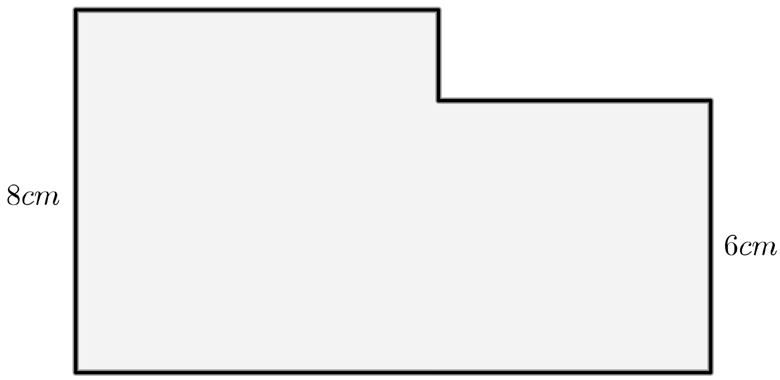
(a) Qual a área do retângulo C?

(b) Veja que se adicionarmos o quadrado X, completamos um quadrado maior. Qual deve ser o lado do quadrado X?

(c) Após responder os dois itens anteriores, determine um número que somado a 13600 resulta em um quadrado perfeito e determine a raiz quadrada deste quadrado perfeito.

24 *Cortando a escada para formar um quadrado*

A figura a seguir mostra uma "escadinha" formada por dois quadrados, um de lado $8cm$ e um de lado $6cm$. A tarefa é cortar a figura em três pedaços e reagrupá-los para formar um quadrado sem buracos.

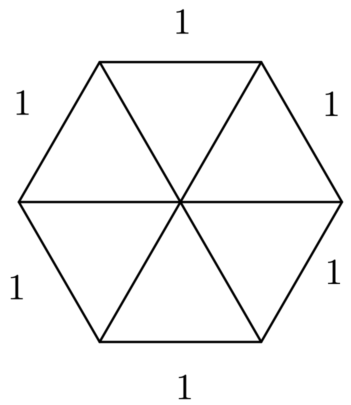


(a) Qual o lado do quadrado que deverá ser formado no final?

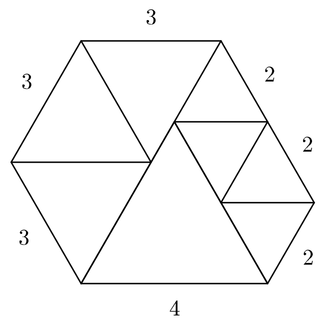
(b) Utilizando apenas um lápis, uma régua de $20cm$, com marcações de $1cm$ em $1cm$, e uma tesoura que corta apenas seguindo uma linha reta, mostre como realizar a tarefa desejada.

25 *Montando Hexagonângulos*

Um hexagonângulo é um hexágono que possui todos os ângulos iguais a 120°. Bia possui triângulos equiláteros com todos os lados inteiros possíveis. Além disso, ela possui muitos triângulos de cada tamanho e pretende usá-los para montar hexagonângulos. Por exemplo, ela usou 6 triângulos de lado 1 para formar um hexagonângulo de perímetro 6 como na figura a seguir:



Na próxima figura, temos outro hexagonângulo de perímetro 19 formado por 8 triângulos.



(a) Considere o hexagonângulo de perímetro 19 montado por Bia. Se ela o construísse usando apenas triângulos de lado 1, quantos triângulos seriam necessários?

(b) Mostre como construir um hexagonângulo de perímetro 8 usando 7 triângulos.

(c) Dê um exemplo de um hexagonângulo com 8 triângulos e um outro com 9 triângulos.

(d) Explique como construir um hexagonângulo usando exatamente 2016 triângulos.

26 *Entrega das garrafas*

Determine o maior número de garrafas de refrigerante que não podem ser entregues em caixas lacradas de 6, 15 e 10 garrafas de refrigerante.

27 *O resto da divisão de um número muito grande*

Qual o resto da divisão de 2^{2015} por 20? Bom, é difícil fazer esta divisão diretamente usando apenas papel e caneta. Vamos procurar uma maneira de obter tal resposta analisando os restos de potências de 2 por 20 com a esperança de encontrar algum padrão neles. Qual o resto que 2^5 deixa por 20?

$$2^5 = 32 = 1 \cdot 20 + 12.$$

Sabendo disto, fica fácil saber o resto de 2^6 por 20, pois

$$2^6 = 2 \cdot 2^5 = 2 \cdot (1 \cdot 20 + 12) = 2 \cdot 20 + 24.$$

Dado que 24 é maior que 20 e não pode ser um resto, devemos escrever

$$2^6 = 3 \cdot 20 + 4.$$

Podemos estender o argumento anterior concluindo que para saber o resto de 2^{i+1} por 20, basta saber o resto do produto do resto de 2^i por 20. Deste modo, podemos construir a sequência de potências e restos na divisão por 20.

n	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
Resto por 20	2	4	8	16	12	4

(a) Determine os restos que os números 2^7, 2^{10} e 2^{13} deixam na divisão por 20.

(b) Sabendo que os restos se repetem de forma periódica, determine o período de repetição, ou seja, o número de restos distintos que ficam se repetindo.

(c) Voltamos à pergunta do começo do problema. Qual o resto que 2^{2015} deixa na divisão por 20?

28 *Separando cartões e fazendo o produto*

Os três amigos José, Pedro e Daniel fazem um jogo com os oito cartões numerados com os números de 2 até 9. Em cada rodada, os oito cartões são separados para os três amigos, naturalmente não necessariamente em quantidades iguais, e cada um calcula o produto dos números nos seus cartões. Aquele que tiver como resultado um número maior que os outros dois vence a rodada. Se dois tiverem resultados iguais e maiores que o resultado do terceiro, então os dois vencem. Depois de algumas rodadas, Pedro desconfia que sempre algum dos três amigos possuirá cartões cujo produto será pelo menos 72. Infelizmente, Pedro não sabe como provar que isso sempre acontece. Vamos ajudá-lo?

(a) Mostre que se um dos amigos pegar 4 ou mais cartas, então certamente o produto das suas cartas será maior que 72.

(b) Em uma rodada, Daniel tirou três cartões, entre eles o 9. Sabendo que o produto dos seus números é menor que 72, quais são os outros dois cartões de Daniel?

(c) Na mesma rodada do item anterior, mostre que um dos outros amigos, José ou Pedro, terá três ou mais cartões e seu produto será maior que 72.

(d) Em outra rodada, Daniel pegou duas cartas, entre elas o 9, mas seu produto novamente é menor que 72. Mostre que o produto dos 6 cartões restantes é maior que 72^2 e conclua que um dos dois amigos, José ou Pedro, tem produto dos cartões maior que 72.

29 *Somas de cinco números de 1 até 20*

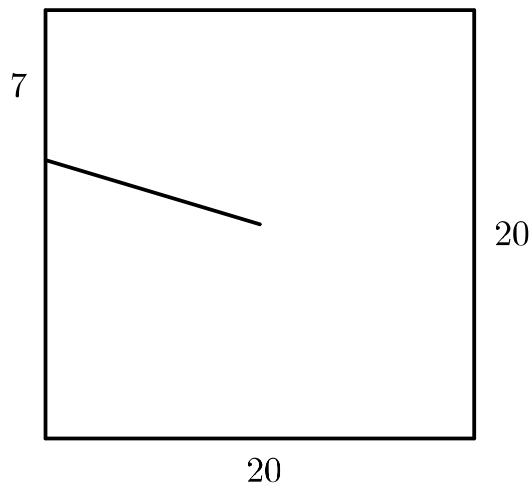
Paulinho está treinando para sua prova de aritmética. Para se tornar cada vez mais rápido, ele fica realizando várias somas. Paulinho pede que seu pai o ajude escolhendo cinco números inteiros de 1 até 20. Em seguida, Paulinho os soma. Após várias tentativas, seu pai percebeu que ele estava ficando muito entediado com as somas e decidiu fazer o filho pensar mais antes de responder. Vamos ajudar Paulinho a responder as novas perguntas do seu pai?

(a) Qual a menor e qual a maior soma possível de cinco números inteiros de 1 até 20?

(b) Para cada valor desde o menor até o maior possível, selecione cinco números de 1 até 20 tal que a soma deles seja este valor.

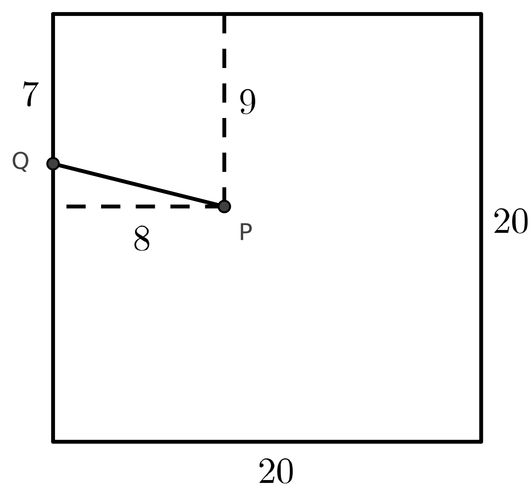
30 *Cortando o bolo em pedaços iguais*

Gervinho tem um bolo em forma de quadrado de lado $20cm$, visto de cima na figura a seguir. Ele vai dividir o bolo em 5 pedaços de mesma área para comer com seus 4 amigos. Ele só pode fazer cortes verticais, pois como o bolo é feito de camadas diferentes, assim todos receberão mesmas quantidades de cada camada.



(a) Suponha que Gervinho já fez o primeiro corte do centro até um ponto sobre o lado com distância $7cm$ para o canto superior esquerdo. Como ele deve fazer os demais cortes, sabendo que todos devem partir do centro?

(b) Deixando de lado a situação anterior, suponha que Gervinho fez o primeiro corte, a partir do ponto P distando $8cm$ e $9cm$ de seus lados mais próximos, e que terminou no ponto Q distante $7cm$ do canto superior esquerdo.



Como ele deve fazer os outros cortes sabendo que todos devem partir do ponto P até a lateral do bolo?

(c) Na borda da cobertura há doces, por isto, em cada um dos casos, Gervinho deve receber o pedaço de bolo que tiver maior perímetro da borda do bolo. Se há mais de um com este maior perímetro, então ele deve pegar qualquer um deles. Em cada um dos casos anteriores, indique o pedaço que Gervinho deve receber.

NÍVEL 2

$\boxed{1}$ *A corrente da oficina do Zé*

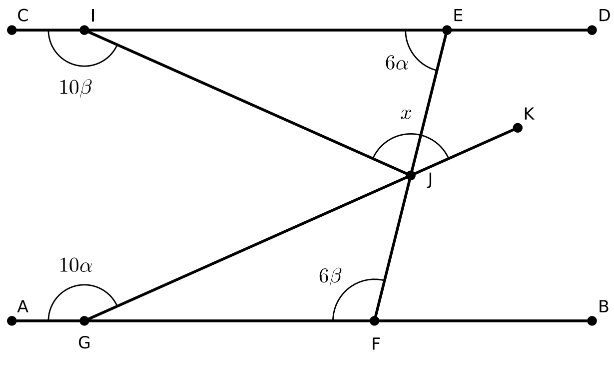
Na oficina do Zé, existem seis pedaços de correntes com as seguintes quantidades de elos: 10, 10, 8, 8, 5 e 2. Ele precisa unir estes pedaços para formar uma corrente circular. Ele gasta 1 minuto para cortar um elo e 2 minutos para uni-lo, perfazendo um total de 3 minutos por elo. Se ele cortar um elo ao final de cada peça separada, unindo as peças uma de cada vez, ele demoraria $6 \cdot 3 = 18$ minutos. Entretanto, como ele está com pressa, ele pretende realizar esta operação de uma forma mais rápida.

a) Diga como ele pode formar a corrente circular gastando apenas 15 minutos.

b) É possível ele fazer tal operação em menos de 15 minutos?

$\boxed{2}$ *Segmentos paralelos*

Na figura abaixo, os segmentos AB e CD são paralelos. Se $\angle CIJ = 10\beta$, $\angle AGJ = 10\alpha$, $\angle CEJ = 6\alpha$ e $\angle JFG = 6\beta$, determine o valor do ângulo $\angle IJK$.

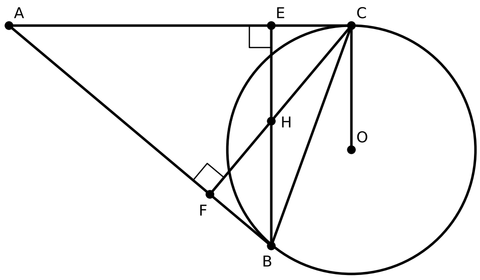


3 *A boia no rio*

Um barco motorizado solta uma boia em um rio de margens retilíneas e paralelas às 10:00 e começa a navegar, na direção determinada pelo rio, contra a correnteza até às 10:15. Depois disto, ele retorna, também na direção determinada pelo rio. Em que instante o barco encontrará novamente a boia?

4 *Tangentes do círculo*

Duas tangentes são desenhadas de um ponto A a um círculo de centro O, tocando-o em B e C. Seja H o ortocentro do triângulo ABC, sabendo que $\angle BAC = 40°$, encontre o valor do ângulo $\angle HCO$.



5 *Números três estrelas*

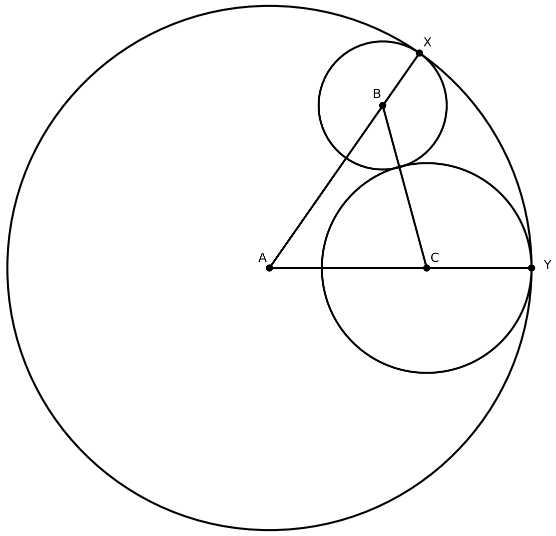
Dizemos que um número inteiro positivo de três dígitos é *três estrelas* se ele for o resultado do produto de três números primos distintos. Por exemplo, $286 = 2 \cdot 11 \cdot 13$ é um número três estrelas, mas $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ e $275 = 5 \cdot 5 \cdot 13$ não são números três estrelas, pois o primeiro só possui dois dígitos e o segundo não é o produto de três primos distintos.

(a) Qual o menor número três estrelas?

(b) Mostre que cada número três estrelas possui algum divisor em comum com 30 maior que 1.

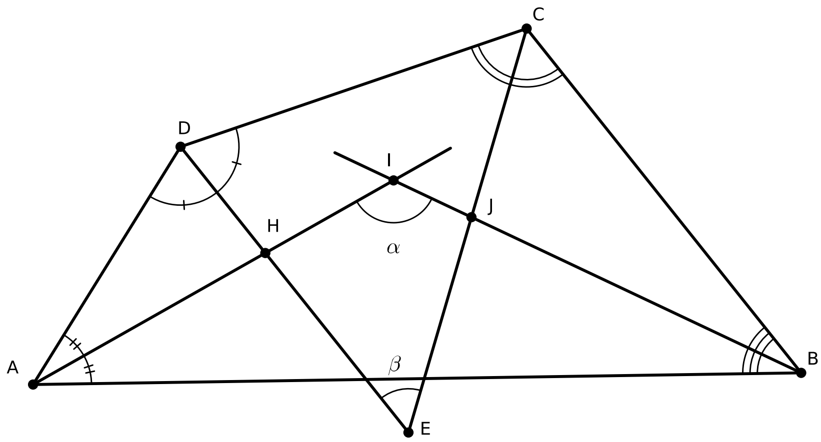
$\boxed{6}$ *Círculos Tangentes*

Na figura a seguir, o círculo de centro B é tangente ao círculo de centro A em X. O círculo de centro C é tangente ao círculo de centro A em Y. Além disto, os círculos de centros B e C também são tangentes. Se $AB = 6$, $AC = 5$ e $BC = 9$, quanto mede AX?



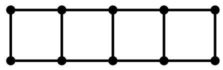
$\boxed{7}$ *Quadrilátero formado por bissetrizes*

Dado um quadrilátero convexo, se as quatro bissetrizes de seus ângulos formam um novo quadrilátero $HIJE$, calcule a soma dos ângulos opostos $\angle HIJ + \angle JEH$.

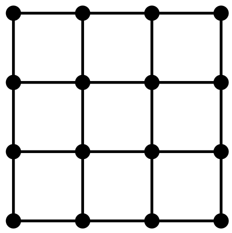


8 *A fuga das formigas*

a) João arranjou 13 palitos no formato de um cercado retangular 1×4 como mostrado na figura abaixo. Cada palito é o lado de um quadradinho 1×1 e no interior de cada um destes quadradinhos ele colocou uma formiga. Qual o número mínimo de palitos que devemos remover para garantir que todas as 4 formigas consigam fugir e retornar para os seus formigueiros?

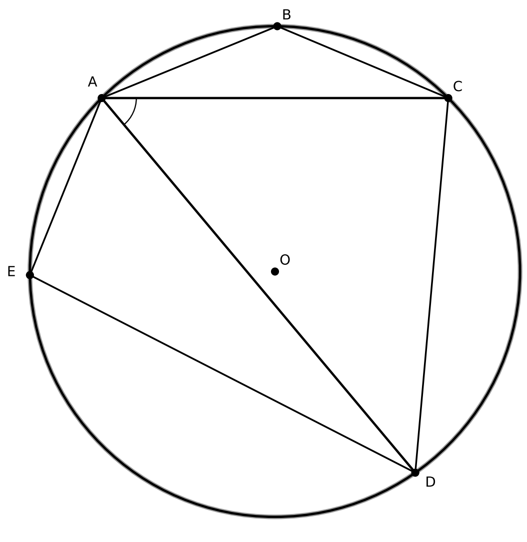


b) João agora arranjou 24 palitos no formato de um cercado quadrado 4×4 como mostrado na figura abaixo e no interior de cada um destes quadradinhos, ele colocou uma formiga. Qual o número mínimo de palitos que devemos remover para garantir que todas as 9 formigas consigam fugir e retornar para os seus formigueiros?



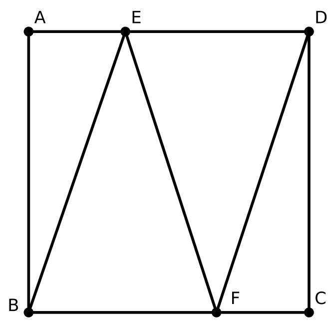
9 *Os ângulos do pentágono*

Todos os vértices do pentágono $ABCDE$ estão sobre um mesmo círculo. Se $\angle CAD = 50°$, determine $\angle ABC + \angle AED$.



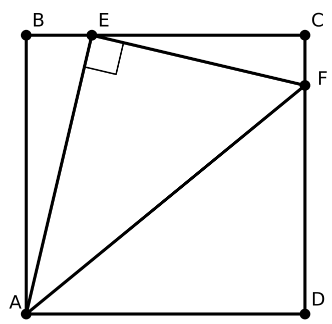
$\boxed{10}$ *Pontos nos lados do quadrado*

Os pontos E e F estão nos lados AD e BC, respectivamente, do quadrado $ABCD$. Sabendo que $BE = EF = FD = 30$, encontre a área do quadrado.



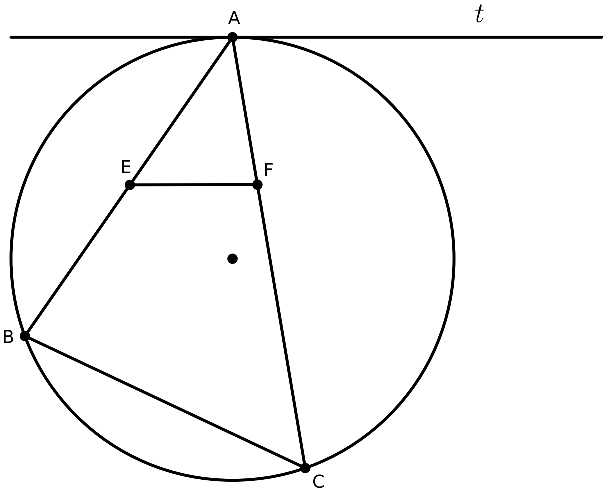
$\boxed{11}$ *Triângulo inscrito no quadrado*

No desenho a seguir, $ABCD$ é um quadrado e os pontos E e F estão sobre os lados BC e CD de modo que AEF é um triângulo retângulo, $AE = 4$ e $EF = 3$. Qual é a área do quadrado?



12 *O comprimento do segmento*

Na figura, a reta t é paralela ao segmento EF e tangente ao círculo. Se $AE = 12$, $AF = 10$ e $FC = 14$, determine a medida do comprimento de EB.

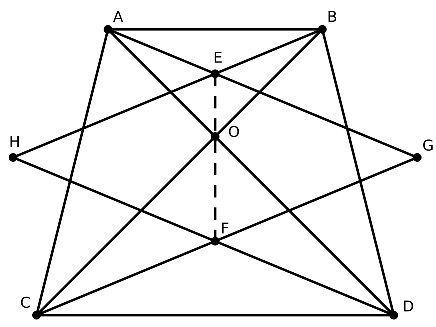


13 *Bissetrizes formando um losango*

Os lados AB e CD do quadrilátero $ABCD$ são paralelos. As bissetrizes dos ângulos $\angle BAD$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ e $\angle ADC$ se encontram em E, G, F e H como indica a figura a seguir. Seja O o ponto de interseção das diagonais de $ABCD$.

a) Verifique que E, O e F estão em uma mesma reta.

b) Supondo que $EGFH$ é um losango, verifique que $CO = OD$.



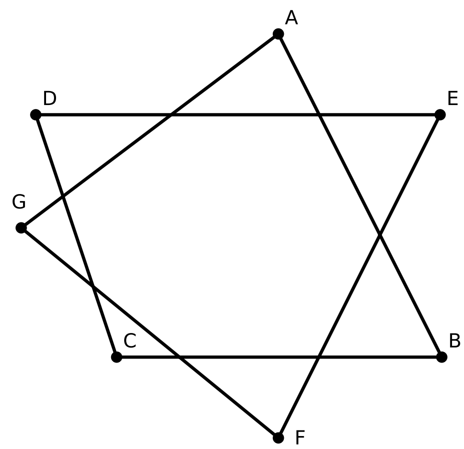
14 *Números no quadro negro*

Sobre um quadro negro existem os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Em cada movimento, João pode trocar dois números a e b por $a \cdot b + a + b$. Encontre todas as possibilidades para o último número no quadro negro.

15 *A soma dos ângulos*

Na figura abaixo, encontre o valor de

$$\angle GAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDE + \angle DEF + \angle EFG + \angle FGA.$$

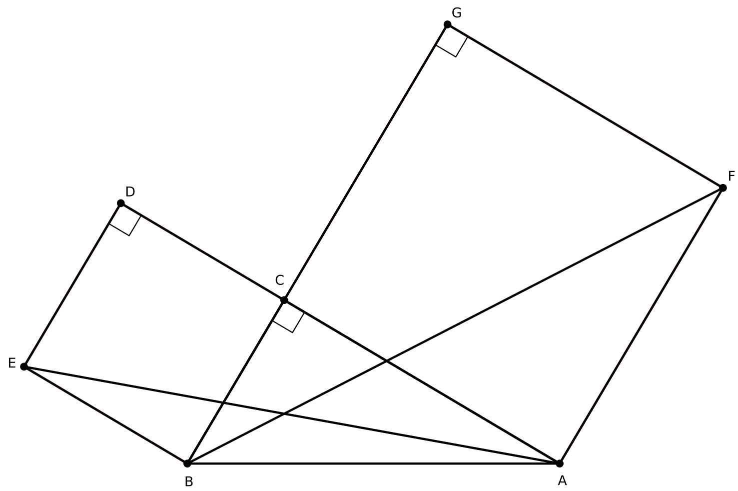


16 *Estrada triangular*

Três carros partem de uma cidade A ao mesmo tempo e percorrem um caminho fechado composto por três segmentos de reta AB, BC e CA. As velocidades do primeiro carro sobre esses segmentos são 12, 10 e 15 quilômetros por hora, respectivamente. As velocidades do segundo carro são 15, 15 e 10 quilômetros por hora, respectivamente. Finalmente, as velocidades do terceiro carro são 10, 20 e 12 quilômetros por hora, respectivamente. Encontre o valor do ângulo $\angle ABC$, sabendo que todos os três carros terminam na cidade A ao mesmo tempo.

17 *Produto das áreas*

Na figura abaixo, o triângulo ABC é retângulo em C e tanto $BCDE$ quanto $CAFG$ são quadrados. Se o produto das áreas dos triângulos EAB e BFA é 64, determine a área do triângulo ABC.



18 *Tempos de corrida*

Arnaldo, Bráulio e Carlos participarão de uma corrida de rua. Depois de algumas semanas, eles estavam discutindo suas estratégias. Arnaldo corre a primeira metade da distância total da corrida a $9km/h$ e a segunda metade a $11km/h$. Já Bráulio corre um terço da distância a $9km/h$, o segundo terço a $10km/h$ e, por fim, o último terço a $11km/h$. Carlos usa uma estratégia diferente dos dois primeiros, ele corre metade do seu tempo total de corrida a $9km/h$ e a metade final do tempo a $11km/h$. Determine a ordem entre os tempos totais de Arnaldo, Bráulio e Carlos de chegada ao final da corrida.

19 *Fazendo o Máximo Divisor Comum com idades*

Paulinho estava estudando o Máximo Divisor Comum (MDC) na escola e decidiu praticar em casa. Ele chamou de a, b e c as idades de três pessoas que moram com ele. Em seguida, fez algumas operações com os fatores primos deles e obteve os máximos divisores comuns dos 3 pares de números. Alguns dias depois, ele esqueceu as idades a, b e c, mas encontrou os seguintes resultados anotados:

$$\begin{aligned} a\cdot b\cdot c &= 2^4\cdot 3^2\cdot 5^3,\\ MDC(a,b) &= 15,\\ MDC(a,c) &= 5,\\ MDC(b,c) &= 20. \end{aligned}$$

Ajude Paulinho a determinar os valores de a, b e c.

$\boxed{20}$ *A soma dos primos de* 1 *até* 1000 *é no máximo quanto?*

Há muitos anos, um professor que não queria dar aula, ordenou que seus alunos calculassem a soma dos números de 1 até 100. Um aluno muito esperto, chamado *Gauss*, descobriu um jeito muito simples de realizar a tarefa descobrindo a fórmula:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Como esta história já tem muito tempo, hoje os desafios dados aos alunos pedem tarefas mais elaboradas.

(a) Verifique que todo número primo maior que 3 deixa resto 1 ou 5 na divisão por 6.

(b) Verifique que a soma dos números primos que são maiores que 1 e menores que 1000 é menor que 166338.

(c) Na estimativa acima, para ter menos complicações técnicas, não eliminamos alguns números que certamente não são primos. Elimine alguns desses números e verifique que a soma dos primos que são maiores que 1 e menores que 1000 é menor que 166000.

$\boxed{21}$ *Escrevendo quocientes e restos*

Júlia está treinando para olimpíadas de matemática. Um dia ela decide dividir 2014 por cada um dos divisores inteiros positivos de 2015. Para cada divisão, ela escreve o quociente no seu caderno e o resto em uma lousa.

(a) Vamos ajudar Júlia. Escreva os oito divisores inteiros positivos de 2015.

(b) Para cada um dos divisores, faça a divisão e escreva uma lista com os quocientes e outra com os restos obtidos.

(c) Ao terminar, Júlia percebeu uma grande "coincidência": os números escritos no caderno eram os mesmos que estavam no quadro, apenas escritos em uma ordem diferente. Seria uma coincidência? Mostre que, para qualquer número n que Júlia escolher, se ela calcular o quociente e o resto da divisão de $n-1$ por cada um dos divisores de n os números no caderno e na lousa serão exatamente os mesmos, estando apenas, possivelmente, escritos em uma ordem diferente.

22 *Formando conjuntos com a mesma soma*

Os elementos do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ podem ser separados nos conjuntos $\{3,9,10,11\}$ e $\{1,2,4,5,6,7,8\}$ de modo que cada um deles possua soma dos elementos igual a 33.

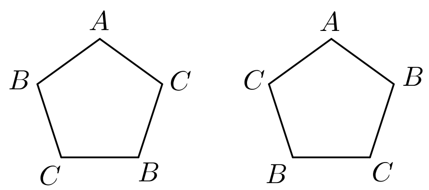
(a) Exiba um modo de separar os elementos do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ em três conjuntos tais que as somas dos elementos de cada conjunto seja a mesma.

(b) Explique por que não é possível separar os números do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ em dois conjuntos de mesma soma.

(c) Para cada inteiro positivo $n \geq 2$, determine o menor inteiro positivo N tal que o conjunto $\{1,2,\ldots,N\}$ pode ser separado em exatamente n conjuntos de mesma soma.

23 *Trocando os botões*

João possui botões de três cores: azul, branco e cinza. Representaremos um botão azul por A, um botão branco por B e um botão cinza por C. Ele coloca cinco botões nos vértices de um pentágono regular no sentido horário: A, C, B, C e B, como na primeira figura a seguir. Ele sabe que pode fazer algumas trocas de botões obedecendo uma certa regra. Ao escolher um botão, ele pode trocá-lo por um de outra cor desde que não fiquem dois botões com uma mesma cor em vértices vizinhos. Para não ficar trocando botões sem objetivo, ele decide adotar como meta deixar os botões com as cores A, B, C, B e C no sentido horário como indicado na segunda figura a seguir.



Após fazer várias trocas, João não conseguiu chegar na situação final desejada. Decidiu então pedir ajuda ao seu professor Piraldo. O professor afirma que não é possível partir da configuração inicial e chegar na configuração final desejada. Para provar isto, o professor Piraldo pegou algumas cartas com os números 1, -1 e 0. Então ele disse para João colocar sobre cada lado do pentágono uma carta com o seguinte padrão:

i) Olhando no sentido horário, se os vértices tiverem B e A ou tiverem A e C coloque uma carta com o número 1.

ii) Ainda olhando no sentido horário, se os vértices tiverem A e B ou tiverem C e A coloque uma carta com o número -1.

iii) Para os demais casos coloque a carta 0.

Sempre que fizer uma troca, mude as cartas usando essas instruções. Após a explicação, o professor Piraldo disse que analisando o comportamento das cartas João agora poderia concluir porque é impossível atingir o objetivo inicial.

(a) Fazendo todas as trocas possíveis de botões, de A para B, de B para C ou de C para A e as trocas reversas, o que acontece com a soma das cartas colocadas sobre os lados segundo as instruções do professor Piraldo?

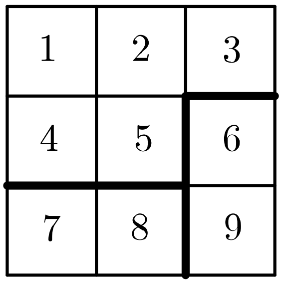
(b) Qual a soma das cartas na situação inicial e na situação final desejada? Conclua que não é possível partir da configuração inicial e chegar na situação final desejada.

24 *Dividindo quadrados em poliminós com mesma soma*

Um poliminó é uma sequência de quadradinhos 1×1 justapostos compartilhando lados em um comum com seus vizinhos e formando uma única peça. Os poliminós de dois quadradinhos são conhecidos como dominós e os poliminós com quatro quadradinhos são conhecidos como tetraminós, as pecinhas do famoso jogo Tetris. A figura a seguir mostra um quadrado 3×3 com números de 1 até 9 escritos em cada um de seus quadradinhos 1×1.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Sabendo que $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$, podemos tentar dividir o quadrado em 3 poliminós com mesma soma, cada um com soma $\frac{45}{3} = 15$. A figura a seguir, mostra uma maneira de fazer isto.



(a) Mostre que não é possível dividir o quadrado 3×3 em uma quantidade maior que três de poliminós de mesma soma.

(b) Considere o quadrado 4×4 com os números de 1 até 16, escritos em ordem crescente como indicado na figura abaixo

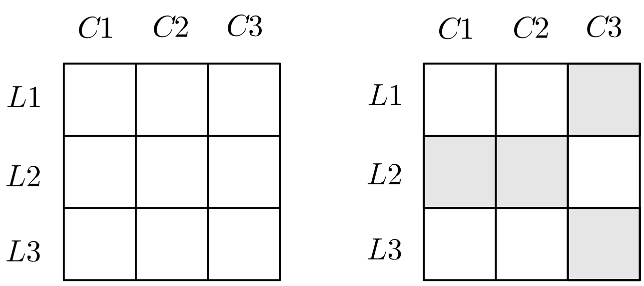
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Mostre como dividir este quadrado em dois poliminós de modo que a soma dos números em cada um deles seja a mesma.

(c) Considere o quadrado 5×5 com os números de 1 até 25 escritos em ordem crescente seguindo o padrão da figura anterior. Mostre que não é possível dividir este quadrado em dois ou mais poliminós com a mesma soma dos números em cada um deles.

$\boxed{25}$ *Apertando botões para mudar as cores*

A figura a seguir mostra um tabuleiro 3×3 de quadradinhos 1×1 e botões $L1$, $L2$, $L3$, $C1$, $C2$ e $C3$. Inicialmente todos os quadradinhos estão brancos, mas ao apertar um botão do lado de uma fila, linha ou coluna, altera-se a cor, de branco para preto ou de preto para branco, de todos os quadradinhos daquela fila. Por exemplo, se apertarmos $L2$, mudam-se todos os quadradinhos da segunda linha para a cor preta e, se $C3$ for apertado em seguida, o quadradinho da segunda linha e terceira coluna volta à cor branca e os outros dois quadradinhos da terceira coluna se tornam pretos. O resultado final do uso dos botões $L2$ e $C3$ é exibido na segunda figura a seguir.

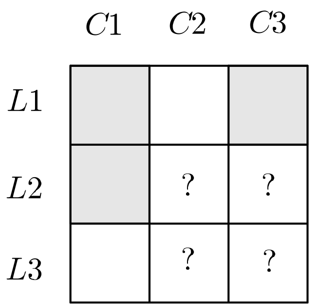


(a) Mostre uma forma de apertar alguns botões para chegar ao mesmo resultado que apertar $L2$ e $C3$, mas sem apertar nenhum destes dois botões.

(b) Considere os quadradinhos X, Y, Z e W a seguir. Após algumas apertadas nos botões, sabe-se que o quadradinho X mudou de cor três vezes, o quadradinho Y mudou de cor cinco vezes e o quadradinho Z mudou de cor duas vezes. Quantas vezes mudou de cor o quadradinho W?

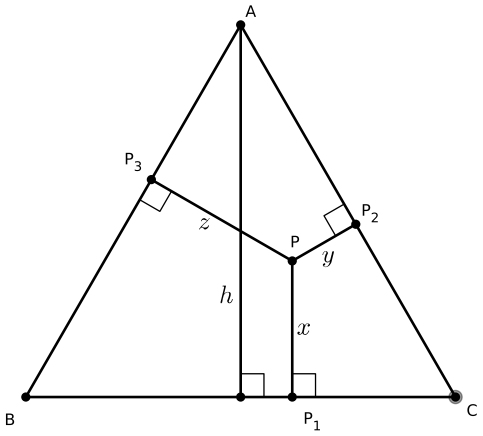
	$C1$	$C2$	$C3$
$L1$	X	Y	?
$L2$	Z	W	?
$L3$	?	?	?

(c) A figura a seguir mostra um tabuleiro resultante de alguns apertos. O tabuleiro possui quatro quadradinhos de cores desconhecidas marcados com ? e cinco quadradinhos de cores conhecidas no bordo. Descubra as cores dos quatro quadradinhos desconhecidos.



26 *Provando o Teorema de Viviani*

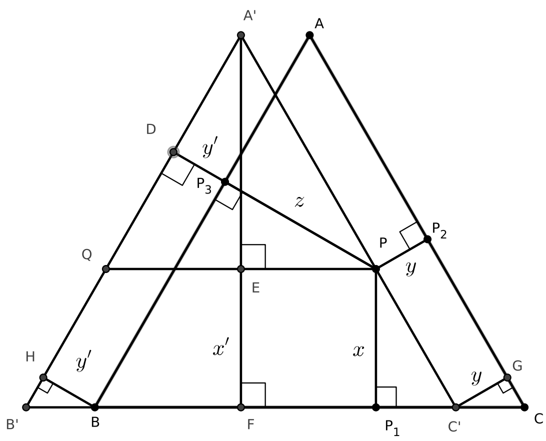
O Teorema de Viviani afirma que a soma das distâncias de um ponto no interior de um triângulo equilátero aos três lados é igual à altura do triângulo. Em outras palavras, seja ABC um triângulo equilátero e P um ponto no seu interior como mostrado na figura a seguir.



Então

$$x + y + z = h.$$

Vamos provar o Teorema de Viviani. Para isto, considere o triângulo $A'B'C'$ congruente ao triângulo ABC, mas que possui o ponto P sobre o lado $A'C'$. O triângulo $A'QP$ possui todos os lados paralelos a $A'B'C'$ e, portanto, também é equilátero.



(a) Prove que $PP_1 = EF$, ou seja, que $x = x'$.

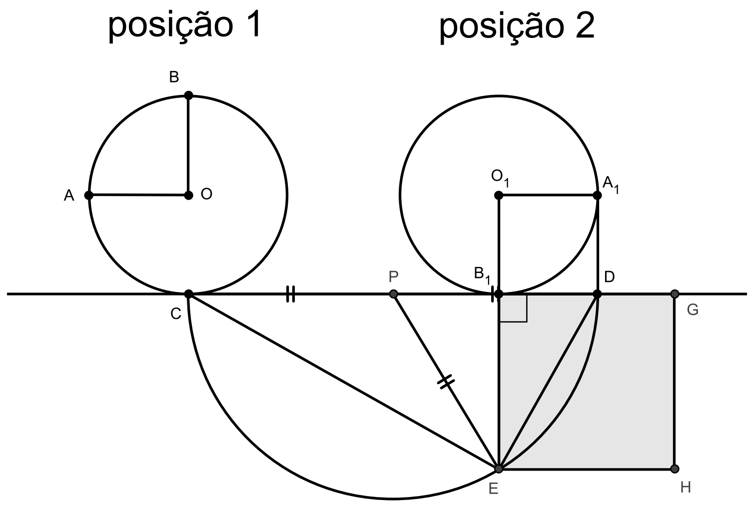
(b) Prove que $P_3D = PP_2$, ou seja, que $y = y'$.

(c) Prove que $A'E = PP_3 + PP_2$, ou seja, que $A'E = y + z$.

(d) Sabendo que $A'F = h$, pois os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes, conclua a demonstração do Teorema de Viviani.

$\boxed{27}$ *Círculo rolando para formar um quadrado de mesma área*

A figura a seguir mostra um círculo de centro O que rolou meia volta para ir da posição 1 até a posição 2. São desenhados a semicircunferência de diâmetro CD e os quadrados $O_1A_1DB_1$ e B_1EHG.



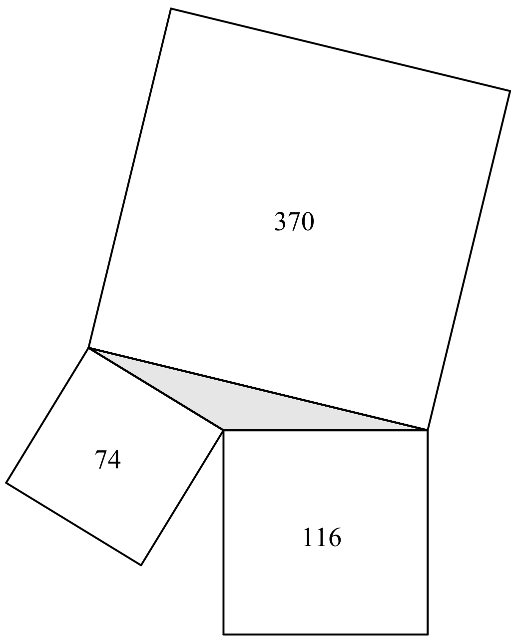
(a) Seja P o centro do diâmetro CD. Observando que $PC = PD = PE$, prove que $\angle CED = 90°$.

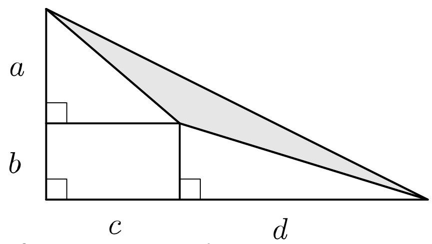
(b) Mostre que os triângulos DB_1E e EB_1C são semelhantes.

(c) Mostre que o círculo de centro O e o quadrado B_1EHG possuem a mesma área.

$\boxed{28}$ *Determinando a área do lago em forma de triângulo*

Na cidade de Oropis existe um lago em forma de triângulo com cada um dos três lados sendo parte do perímetro de um terreno em forma de quadrado com áreas $370m^2$, $116m^2$ e $74m^2$, como na primeira figura a seguir. O prefeito de Oropis, Arnaldo, deseja calcular a área do lago, mas não sabe como. O assistente do prefeito Bernaldo tem uma ideia. Ele diz que basta encontrar valores de a, b, c e d que satisfaçam as condições geométricas da segunda figura em que a área sombreada é congruente ao lago. Ele afirma que depois disto a tarefa se tornará muito mais simples.



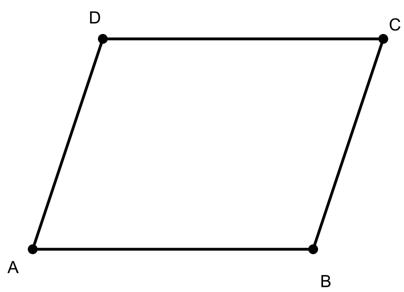


(a) Determine valores inteiros de a, b, c e d que satisfaçam as condições geométricas da figura de Bernaldo.

(b) Determine a área do lago.

$\boxed{29}$ *Condições para um quadrilátero ser um paralelogramo*

Um quadrilátero que possui os pares de lados opostos paralelos é chamado de paralelogramo. Por exemplo, no quadrilátero $ABCD$ a seguir, AB é paralelo a CD e AD é paralelo a BC.

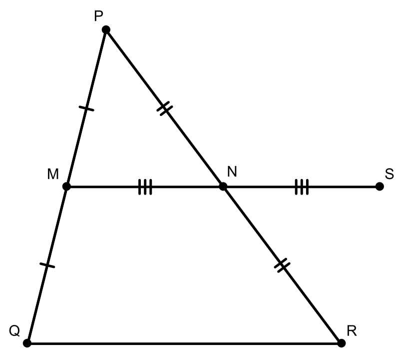


(a) Considerando o paralelogramo $ABCD$, trace a diagonal AC e mostre que os comprimentos dos lados opostos são iguais, ou seja, que $AB = CD$ e $AD = BC$.

(b) Considere um quadrilátero $XYZW$ no qual os lados XY e ZW têm mesma medida e são paralelos, mostre que $XYZW$ é um paralelogramo, ou seja, que o outro par de lados XW e YZ também são paralelos.

(c) Seja $EFGH$ um quadrilátero e seja T o ponto de encontro das suas diagonais. Sabendo que $ET = TG$ e $FT = TH$, prove que $EFGH$ é um paralelogramo.

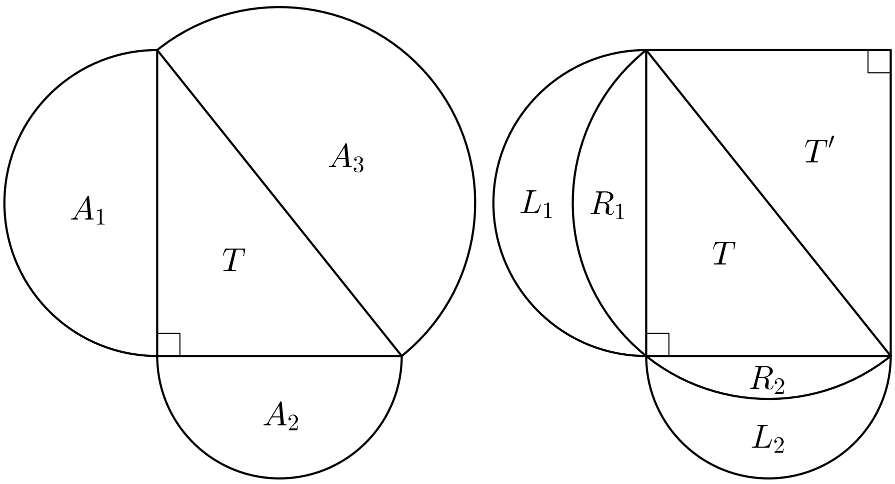
(d) Na figura a seguir, os pontos M e N são os pontos médios dos lados PQ e PR do triângulo PQR. O ponto S é o simétrico do ponto M em relação ao ponto N.



O segmento MN é chamado de base média do triângulo em relação ao lado QR. Mostre que o segmento MN tem metade do comprimento do lado QR e é paralelo a este lado.

30 *Soma das áreas das duas luas*

A primeira figura a seguir mostra um triângulo retângulo T e três semicírculos construídos externamente com diâmetro sobre cada lado. Na segunda figura, o triângulo T' é congruente a T e o semicírculo A_3 é dobrado sobre o triângulo T formando as regiões L_1, L_2, R_1 e R_2. Veja que L_1 e L_2 têm formato de lua crescente.



(a) Neste problema, usaremos a notação $[X]$ para denotar a área da região X. Verifique que

$$[A_1]+[A_2]=[A_3].$$

(b) Usando a figura formada por T e T', verifique que ao dobrarmos o semicírculo A_3 o bordo passará pelo vértice de ângulo reto no triângulo.

(c) Verifique que a soma das áreas das luas L_1 e L_2 é igual à área do triângulo T, ou seja,

$$[L_1]+[L_2]=[T].$$

31 *Verificando que certos números não são inteiros*

Considere as estimativas envolvendo o número π^2:

$$\begin{aligned}\pi &< 3,15\\ \pi^2 &< (3,15)^2 = 9,9225\\ \pi^2 &< 10.\end{aligned}$$

Como sabemos que $\pi^2 > 3^2 = 9$, temos $9 < \pi^2 < 10$. Assim, por se situar entre dois inteiros consecutivos, podemos afirmar que π^2 não é um número inteiro.

(a) Os números a, b, c e d são reais positivos quaisquer. Verifique que o número

$$E = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{b+c+a} + \frac{c}{c+d+b} + \frac{d}{d+a+c}$$

está entre dois inteiros positivos consecutivos e conclua que ele não é inteiro.

(b) Seja n um inteiro positivo. Verifique que o número

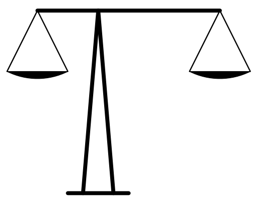
$$\sqrt{n^2+n}$$

não é inteiro.

NÍVEL 3

1 *A balança de Arquimedes*

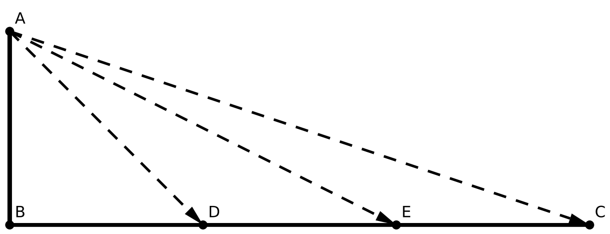
Arquimedes possui uma balança de dois pratos com braços de comprimentos diferentes. Objetivando pesar dois quilos de açúcar, ele procedeu da seguinte forma: colocou um peso de um quilo no prato da esquerda e açúcar no outro lado até que a balança ficasse equilibrada. Em seguida, ele esvaziou os dois pratos, colocou o peso de um quilo no prato da direita e açúcar no prato da esquerda até que os dois pratos ficassem equilibrados. Somando as duas quantidades de açúcar nestas pesagens, ele obteve menos de dois quilos, mais de dois quilos ou exatamente dois quilos? Observação: Para que ocorra o equilíbrio, os pesos nos pratos devem ser inversamente proporcionais aos comprimentos dos braços correspondentes.



2 *A sombra do mastro*

Um mastro vertical AB de altura $1m$ é iluminado por raios do sol e forma sombras no plano horizontal de comprimentos: 1, 2 e 3 metros em três momentos diferentes. Prove que a soma dos ângulos de incidência dos raios nestes três momentos forma um ângulo reto, ou seja,

$$\angle ACD + \angle AEB + \angle ADB = 90^\circ.$$



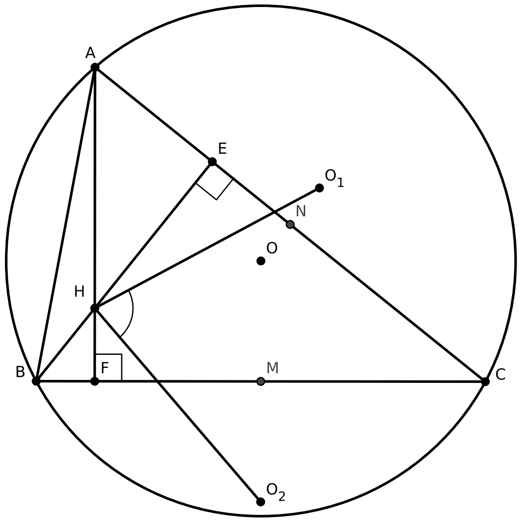
3 *Reflexões nos lados do triângulo*

Sejam O e H o circuncentro e o ortocentro do triângulo $\triangle ABC$, respectivamente. Sejam O_1, O_2 tais que AC é mediatriz de OO_1 e BC é mediatriz de OO_2, respectivamente.

a) Verifique que $\angle BAH = \angle OAC$.

b) Se M é o ponto médio de BC, mostre que $OM = \dfrac{AH}{2}$.

c) Encontre o ângulo $\angle O_1HO_2$ sabendo que $\angle BAC = 60°$ e $\angle ABC = 80°$.



4 *Fatores da soma*

a) Observe as somas:

$$\begin{aligned}
1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 900 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 901 &= \\
\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 900\cdot 901}{901} + 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 901 &= \\
\frac{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 900\cdot 901(1+901)}{901} &= \\
\frac{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 900\cdot 901\cdot 902}{901}&.
\end{aligned}$$

Verifique que vale:

$$\frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdot\ldots\cdot(k+901)}{901} + (k+2)\cdot(k+3)\cdot(k+4)\cdot\ldots\cdot(k+901) = \frac{(k+2)\cdot(k+3)\cdot\ldots\cdot(k+901)\cdot(k+902)}{901}.$$

b) Seja N a soma dos números:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & \times & 2 & \times & 3 & \times & \ldots & \times & 900 \\ + & 2 & \times & 3 & \times & 4 & \times & \ldots & \times & 901 \\ + & \ldots & & & & & & & & \\ + & 1116 & \times & 1117 & \times & 1118 & \times & \ldots & \times & 2015. \end{array}$$

Mostre que $901 \cdot N$ é divisível por todo elemento do conjunto $\{1116, 1117, \ldots, 2016\}$.

5 *Escolha de cartas do baralho*

Um baralho possui 32 cartas divididas em 4 tipos, cada um com 8 cartas. De quantas formas podemos escolher 6 cartas de modo que todos os quatro tipos de cartas estejam entre elas?

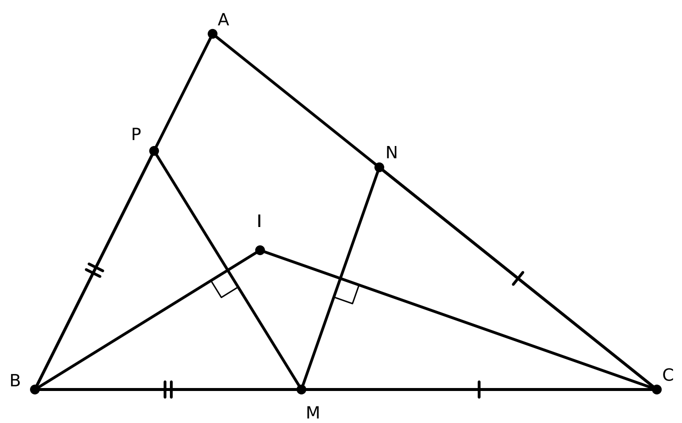
6 *Uma fatoração radical*

a) Verifique que $(x-1)(x+1)+1 = x^2$.

b) Encontre o valor de $\sqrt{1+2014\sqrt{1+2015\sqrt{1+2016\cdot 2018}}}$.

7 *Os ângulos congruentes*

Os pontos M, N e P são escolhidos sobre os lados BC, CA e AB do triângulo ABC de modo que $BM = BP$ e $CM = CN$. A perpendicular baixada de B à MP e a perpendicular baixada de C à MN se intersectam em I. Prove que os ângulos $\angle IPA$ e $\angle INC$ são congruentes.

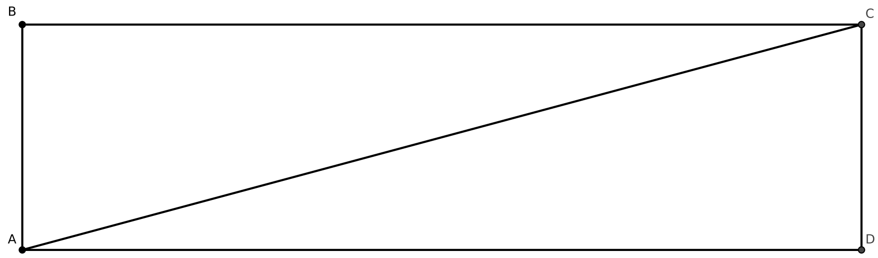


8 *Múltiplo terminado em* 2016

Mostre que existe um múltiplo de 2017 que termina em 2016.

9 *O cosseno de* $75°$

Seja $ABCD$ um retângulo com $AB = \sqrt{3}$. Se $\angle ACD = 75°$, calcule o comprimento de AC e o valor de $\cos 75°$.



10 *Bolas na urna*

Uma urna contém k bolas marcadas com k, para todo $k = 1, 2, \ldots, 2016$. Qual é o número mínimo de bolas que devemos retirar, sem reposição e sem olharmos as bolas, para termos certeza de que teremos 12 bolas com o mesmo número?

11 *Soma dos quadrados de* 1 *até* n

Considere a soma das três tabelas a seguir. A primeira representa n linhas, sendo a primeira com n números iguais a n, a segunda com $n-1$ números iguais a $n-1$ e assim por diante. Na segunda, temos uma distribuição de números parecida, mas em colunas em vez de linhas. Já na terceira, temos estes números em diagonais, a primeira diagonal possui um número 1, a segunda dois números iguais a 2, a terceira três números iguais a 3 e assim por diante.

$$\begin{array}{cccccc} n & n & n & \cdots & n & n \\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & & \\ n-2 & \cdots & & & & \\ \cdots & & & & & \\ 2 & 2 & & & & \\ 1 & & & & & \end{array} + \begin{array}{cccccc} n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 2 & & \\ n & \cdots & & & & \\ \cdots & & & & & \\ n & n-1 & & & & \\ n & & & & & \end{array} + \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & & \\ 3 & & & & & \\ \cdots & & & & & \\ n-1 & n & & & & \\ n & & & & & \end{array}$$

O resultado da soma das três tabelas será uma tabela com a mesma quantidade de números e com cada posição sendo o resultado da soma das posições correspondentes nas três tabelas. Por exemplo, no canto superior esquerdo, teremos o número $n + n + 1 = 2n + 1$.

(a) Um modo de verificar quantos números tem em cada tabela é virar uma delas de ponta cabeça e juntar com outra para formar um retângulo com n linhas e o dobro de números de uma tabela. Sabendo disto, quantos números existem em uma tabela?

(b) Quantas vezes aparece cada número k em todas as três tabelas?

(c) Para cada posição, linha i e coluna j, determine os números escritos nela nas três tabelas e na tabela resultado.

(d) Usando as informações dos itens anteriores, verifique que

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

12 *Soma dos cubos de* 1 *até* 100

Considere a tabela de números a seguir. A primeira linha possui os números de 1 até n. A segunda possui os números de 1 até n com cada um multiplicado por 2. As linhas seguem esse padrão até a última linha que apresenta n vezes cada número de 1 até n.

1	2	3	$\cdots$	n
2	4	6	$\cdots$	$2n$
3	6	9	$\cdots$	$3n$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	$2n$	$3n$	$\cdots$	n^2

Vamos usá-la para calcular o valor da expressão

$$1^3+2^3+\ldots+100^3.$$

Além da tabela, usaremos o fato de que

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

(a) Determine a soma de todos os números da linha de número k. Com isto, determine uma expressão para a soma de todos os números da tabela.

(b) Observe pedaços na tabela separando-a em camadas em forma de L. Os números em uma certa camada k são: k, $2k$, $\ldots$, $(k-1)k$, k^2, $(k-1)k$, $\ldots$, $2k$, k. Determine a soma dos números desta camada em função de k.

(c) Somando os resultados de todas as camadas, chegaremos ao mesmo resultado que somando todas as linhas. Juntando estas informações determine o valor da expressão:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + 100^3.$$

13 *Descubra a cor do seu chapéu*

Ana, Beto e Carolina vão participar do programa de televisão "Descubra a cor do seu chapéu". No programa, eles se posicionam em roda e sobre a cabeça de cada um será colocado um chapéu azul ou verde. Cada um pode ver os chapéus dos outros, mas não a cor do seu próprio chapéu. Em seguida, cada um deles escreve em um papel uma dentre três opções "azul", "verde" ou "passo". Se todos os que escreveram cores "azul" ou "verde" acertarem a cor do seu chapéu, eles ganham um carro $0\,km$. Se algum deles chutar a cor do chapéu, "azul" ou "verde", e errar, os três perdem. Se todos eles escreverem "passo", então os três também perdem. Vale ressaltar que eles não podem combinar sinais e não podem ver os papéis dos outros participantes. Os três se reúnem para tentar combinar uma estratégia. Carolina começa "nenhum de nós deve escrever 'passo', devemos chutar entre 'azul' e 'verde', pois se todos passarmos perderemos". Beto reage dizendo "discordo, melhor apenas Ana chutar a cor do seu chapéu, enquanto eu e Carolina escrevemos 'passo'. Neste caso, a chance de ganhar será maior". Ana se pronuncia "tive uma ideia, se usarmos a minha estratégia teremos a probabilidade de $\frac{3}{4}$ de ganhar o carro".

(a) Seguindo a ideia de Carolina, qual a probabilidade de ganhar o carro?

(b) Mudando para a ideia de Beto, qual passa a ser a probabilidade de ganhar o carro?

(c) Dê um exemplo da possível estratégia de Ana que faz a probabilidade de ganhar o carro ser $\frac{3}{4}$.

14 *Qual a probabilidade de sair dois ases da mesma cor?*

Manuel é um matemático que gosta de jogos de cartas. Ele encontra os irmãos Jonas e Jonatan durante uma viagem de ônibus e propõe um jogo. Serão usados apenas os quatro ases do baralho, o de copas e o de ouros são vermelhos enquanto o de espadas e o de paus são pretos.

Manuel será o banco e os dois irmãos, um de cada vez, apostarão 1 real contra ele em cada rodada. As cartas são postas viradas com face para baixo. Jonas escolhe uma carta e Jonatan a vira para cima. Jonas escolhe mais uma carta e Jonatan novamente a vira. Se as duas cartas tiverem a mesma cor, então Jonas ganha 1 real de Manuel. Caso contrário, Manuel ganha 1 real de Jonas. Em seguida, Jonas e Jonatan trocam de posição e o jogo segue. Veja que Manuel não mexe nas cartas, por isto não pode manipular o jogo. Jonatan pensa um pouco e conclui que tem probabilidade de $\frac{2}{3}$ de vencer, pois os resultados são apenas duas cartas vermelhas, duas pretas ou uma vermelha e uma preta. Será mesmo?

(a) Jonas já participou de olimpíadas de matemática e decidiu tomar mais cuidado. Ele decidiu analisar esse jogo usando uma árvore de possibilidades. Como ficaria a árvore de possibilidades de Jonas?

(b) Considerando os resultados da árvore do item anterior, qual a probabilidade de Manuel vencer cada rodada do jogo?

15 *Se trocarmos* 1 *por* -1*, o que acontece?*

Seja n um número inteiro positivo maior ou igual a 5. Para números a_i escolhidos no conjunto $\{-1, 1\}$, calcula-se o número

$$S_n = a_1a_2a_3a_4 + \ldots + a_na_1a_2a_3$$

que soma os produtos de cada quatro termos a_i de índices consecutivos, inclusive os que começam em a_{n-2}, a_{n-1} e a_n e terminam em a_1, a_2 e a_3, respectivamente.

(a) Considerando $n = 8$, comecemos com $a_1 = a_2 = \ldots = a_7 = a_8 = 1$. Qual o valor de S_8? Se trocarmos $a_4 = 1$ por $a_4 = -1$ quanto passa a ser a soma S_8? Após a primeira troca, trocamos $a_5 = 1$ por $a_5 = -1$. Após esta segunda troca, quanto vale S_8?

(b) Para cada troca de 1 por -1, quantas parcelas mudam de valor? Quais são as possíveis variações no valor de S_8 quando se faz uma troca?

(c) Mostre que para quaisquer oito valores de a_1, a_2, …, a_7 e a_8 no conjunto $\{-1, 1\}$ a soma S_8 resulta sempre em um número múltiplo de 4.

(d) Para certo valor de n e certa escolha dos números a_i no conjunto $\{-1,1\}$ a soma

$$S_n = a_1a_2a_3a_4 + \ldots + a_na_1a_2a_3$$

resultou em zero. Prove que n é necessariamente um número múltiplo de 4.

16 *Apagando números e fazendo a operação estrela*

Sejam a e b números reais positivos com produto diferente de 1, define-se a operação estrela, representada por "$*$", pela equação

$$a * b = \frac{a+b-2ab}{1-ab}.$$

Em uma lousa, estão escritos 2015 números iguais a $\frac{1}{2}$. Em cada passo, apagam-se dois números x e y escritos na lousa e escreve-se o número $x * y$. Este passo é repetido 2014 vezes até que fique apenas um número na lousa.

(a) Demonstre que a equação

$$\frac{x*y}{1-x*y} = \frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y}$$

é verdadeira para quaisquer x e y reais com $x \neq 1$, $y \neq 1$ e $xy \neq 1$.

(b) Se para cada número x que é escrito na lousa, calcularmos $\frac{x}{1-x}$ e somarmos todos estes resultados, teremos um certo resultado. Mostre que este resultado é sempre o mesmo não importando quantos passos tenham sido feitos até aquele momento.

(c) Qual o número que estará escrito na lousa ao final dos 2014 passos?

(d) Se além dos 2015 números iguais a $\frac{1}{2}$ na situação inicial, também escrevermos um número 1, qual será o número final após a realização de 2015 passos?

17 *Acertando na trave na Loteria*

Em certa loteria, existem 60 números distintos e 6 deles são sorteados sem reposição. Cada bilhete possui 6 números distintos entre os 60 possíveis. O prêmio máximo, conhecido como *"gol-no-ângulo"*, é dado para o jogador que possuir o bilhete com os mesmos 6 números que foram sorteados. Nesta loteria, existe também o prêmio *"bola-na-trave"*. Em um bilhete bola-na-trave, o menor número não possui diferença, em módulo, maior que 1 para o menor número sorteado, o segundo menor número não possui diferença, em módulo, maior que 1 para o segundo menor número sorteado e assim por diante até o sexto menor número. Por exemplo, suponha que o bilhete gol-no-ângulo seja $\{4,7,25,48,51,60\}$. Então os bilhetes $\{3,6,25,49,50,59\}$ e $\{5,6,25,47,50,60\}$ são bilhetes bola-na-trave, mas o bilhete $\{3,4,6,24,47,50\}$ não é bola-na-trave. Vale lembrar que um bilhete gol-no-ângulo não é um bilhete bola-na-trave. Para os itens a seguir, considere cada bilhete como a escolha de uma sequência de 6 números escritos em ordem crescente.

(a) Dê um exemplo de conjunto de 6 números formando um bilhete gol-no-ângulo que tem o menor número possível de bilhetes bola-na-trave associados a ele. Quantos bilhetes bola-na-trave possíveis haveria para estes 6 números?

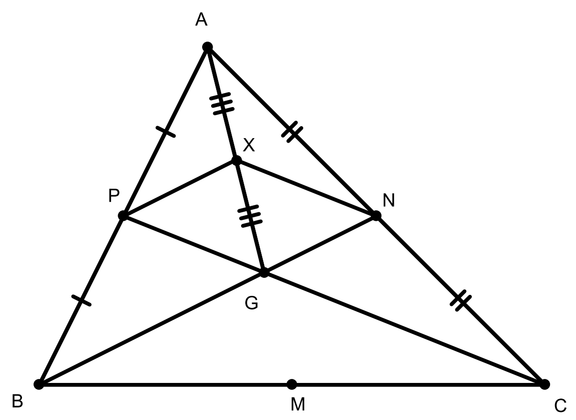
(b) Dê um exemplo de conjunto de 6 números formando um bilhete gol-no-ângulo que resulta na maior quantidade possível de bilhetes bola-na-trave. Neste caso, haveria quantos bilhetes bola-na-trave possíveis?

(c) Considere os números sorteados $\{2,3,8,11,14,17\}$, quantos são os bilhetes bola-na-trave associados a ele?

(d) Suponha que o conjunto de números sorteados seja $\{8,10,12,14,16,18\}$. Neste caso, quantos são os bilhetes bola-na-trave possíveis associados a ele?

18 *Propriedades das medianas*

Uma mediana de um triângulo é o segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto. Considere o triângulo ABC na figura a seguir e sejam M, N e P os pontos médios dos lados BC, CA e AB, respectivamente. As medianas BN e CP se cortam no ponto G. Seja X o ponto médio do segmento AG.



(a) Usando o quadrilátero $GPXN$, verifique que o ponto G divide o segmento CP na razão $2:1$, ou seja, que $CG = 2 \cdot GP$.

(b) A partir do item anterior, verifique que a mediana AM corta a mediana CP no mesmo ponto G. Note que isto mostra que as três medianas de um triângulo passam por um mesmo ponto. Este ponto é chamado de *Baricentro* do triângulo.

(c) Suponha que as medianas BN e CP possuem o mesmo comprimento, verifique que $AC = AB$.

19 *Desigualdade com números de Fibonacci*

A sequência de Fibonacci começa com $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e, a partir do segundo termo, cada novo termo é obtido somando-se os dois anteriores, ou seja,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ para } n \geq 0.$$

Assim, os primeiros termos da sequência de Fibonacci são:

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

a) Verifique que $F_{n+3} < 5F_n$ para todo $n \geq 3$.

b) Seja n um inteiro positivo. Mostre que entre potências consecutivas de n existe no máximo n números de Fibonacci.

20 *O menor valor do quociente polinomial*

Qual o menor valor da fração

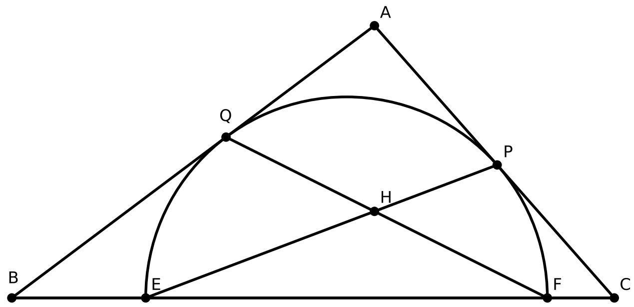
$$\frac{x^4 + x^2 + 5}{(x^2 + 1)^2}?$$

21 *As listas de Bruno e Bernardo*

Bruno tem uma lista com todos os números naturais de 10 dígitos que se podem formar utilizando apenas os dígitos 1, 2, 3 e 4 e além disto que possuem igual quantidade de algarismos 1 e 2, por exemplo, 3333333333, 1111342222 etc. Bernardo tem a lista de todos os números naturais de 20 dígitos formados por 10 dígitos 1 e 10 dígitos 2. Demonstre que a lista de Bruno tem a mesma quantidade de dígitos da lista de Bernardo.

22 *A altura e o semicírculo*

Um semicírculo de diâmetro EF, situado no lado BC do triângulo ABC, é tangente aos lados AB e AC em Q e P, respectivamente. As retas EP e FQ se encontram em H. Mostre que AH é a altura do triângulo.



23 *A disputa de pingue-pongue*

Alguns alunos do sétimo e oitavo ano de uma escola participam de um torneio de pingue-pongue, onde cada aluno joga contra todos os outros exatamente uma vez recebendo 1 por vitória e 0 ponto por derrota. Existem dez vezes mais alunos do oitavo ano do que do sétimo ano. A pontuação total dos alunos do oitavo ano é 4.5 vezes a pontuação total dos alunos do sétimo ano.

a) Verifique que se no torneio existem k alunos, então o número de jogos é $\dfrac{k(k-1)}{2}$.

b) Qual é a soma das pontuações obtidas por todos os alunos do sétimo ano?

24 *Uma equação muito radical*

Resolva a equação

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

25 *As pontuações do torneio*

Em um torneio, quaisquer dois jogadores jogam entre si. Cada jogador obtém um ponto por vitória, 1/2 por empate e 0 ponto por derrota. Seja S o conjunto das 10 menores pontuações. Sabemos que cada jogador obteve metade da sua pontuação jogando contra jogadores de S.

a) Qual a soma das pontuações dos jogadores de S?

b) Determine quantos participantes tem o torneio.

26 *Quem é o maior?*

Se n e k são inteiros positivos, então

$$(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k) < (n+k)^k.$$

Use isto para determinar qual dos dois números a seguir é maior que o outro:

$$(100!)! \text{ e } 99!^{100!}\cdot 100!^{99!}.$$

27 *Qual o máximo de triângulos?*

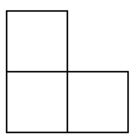
São dadas 2017 retas separadas em três conjuntos de modo que retas em um mesmo conjunto são paralelas entre si. Qual é o maior número possível de triângulos que podemos formar com vértices nestas retas?

28 *Retângulos nos quadradinhos*

Seja n um inteiro positivo.

a) Um quadrado de lado n é dividido em n^2 quadradinhos de lados unitários por retas paralelas aos seus lados. Determine o número de retângulos cujos vértices são vértices de quadradinhos e que possuem lados paralelos aos lados do quadrado original.

b) Três quadrados de lado n são arranjados como na figura a seguir e cada um deles é dividido em n^2 quadrados de lados unitários por retas paralelas aos seus lados. Determine o número de retângulos cujos vértices são vértices de quadradinhos e que possuem lados paralelos aos lados dos três quadrados originais.



29 *Separando quatro números em grupos de mesma soma*

Considere cinco números reais positivos ordenados por $0 < a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Sabe-se que sempre que tiramos um destes números, podemos separar os outros quatro em dois grupos tais que a soma dos números de um grupo é igual à soma dos números do outro grupo. Se uma sequência (a, b, c, d, e) satisfaz esta condição, dizemos que ela é **quase-equilibrada**. Existem sequências que atendem a uma condição mais restrita: se retirarmos um número podemos separar os quatro números restantes em dois grupos **com a mesma quantidade de números** tais que a soma dos números de um grupo é igual à soma dos números do outro grupo. Se uma sequência de números reais positivos (a, b, c, d, e) satisfaz esta condição mais restrita, dizemos que esta sequência é **equilibrada**.

(a) Mostre um exemplo de cinco números reais positivos ordenados por $0 < a \leq b \leq c \leq d \leq e$, com $a < e$, que formam uma sequência quase-equilibrada. Veja que podemos fazer alguns deles iguais se isto for conveniente.

(b) Se uma sequência equilibrada possui três termos iguais, mostre que os cinco números são obrigatoriamente iguais.

(c) Considere uma sequência equilibrada (a, b, c, d, e) com $0 < a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Sabe-se ainda que $(e + c) = (b + d)$ e que $(e + a) = (c + d)$. Prove que os cinco números são iguais.

30 *Resolvendo uma equação diofantina com cubos*

Neste problema desejamos achar todos os inteiros m e n que satisfazem a condição $mn \geq 0$ e a equação:

$$m^3 + n^3 + 99mn = 33^3.$$

Sejam $s = m + m$ e $p = mn$. É possível expressar $m^3 + n^3$ em termos de s e p, usando a fatoração

$$\begin{aligned} m^3 + n^3 &= (m+n)(m^2 - mn + n^2) \\ &= s(m^2 + 2mn + n^2 - 3mn) \\ &= s(s^2 - 3p) \\ &= s^3 - 3sp. \end{aligned}$$

(a) Substitua o resultado da expressão dada em termos de s e p na equação que queremos solucionar. Em seguida, escreva-a como um produto de fatores iguais a zero.

(b) O produto de fatores é zero apenas quando algum deles for zero. Mostre que um dos fatores igual a zero implica 34 soluções com m e n inteiros não negativos.

(c) Para o outro fator, mostre que ele ser nulo equivale a

$$(m - n)^2 + (m + 33)^2 + (n + 33)^2 = 0.$$

Neste caso, a única solução será $m = n = -33$.

31 *Distribuindo no máximo dois chocolates para cada criança*

Defina $f(n,k)$ como o número de maneiras de distribuir k chocolates para n crianças em que cada criança recebe 0, 1 ou 2 chocolates. Por exemplo, $f(3,4) = 6$, $f(3,6) = 1$ e $f(3,7) = 0$.

(a) Exiba todas as 6 maneiras de distribuir 4 chocolates para 3 crianças com cada uma ganhando no máximo dois chocolates.

(b) Considerando 2015 crianças, verifique que $f(2015,k) = 0$ para todo k maior ou igual a um valor apropriado.

(c) Mostre que a equação

$$f(2016,k) = f(2015,k) + f(2015,k-1) + f(2015,k-2)$$

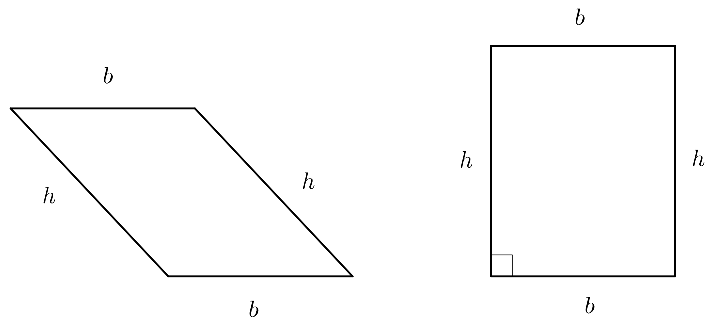
é verdadeira para todo k inteiro positivo maior ou igual a 2.

(d) Calcule o valor da expressão

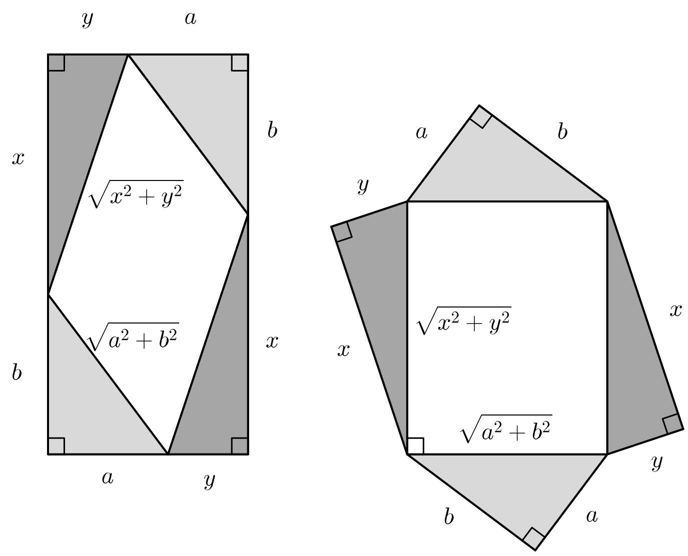
$$f(2016,1) + f(2016,4) + f(2016,7) + \ldots + f(2016,4027) + f(2016,4030).$$

32 *Desigualdade de Cauchy-Schwarz para dois termos via geometria*

(a) Um quadrilátero com lados opostos iguais é um paralelogramo. As figuras a seguir mostram dois paralelogramos com os mesmos lados, sendo o segundo um retângulo. Determine a maior área possível de um paralelogramo de lados b e h.



(b) Considere as duas figuras a seguir, onde a, b, x e y são números reais positivos. Mostre que a segunda figura possui maior área.

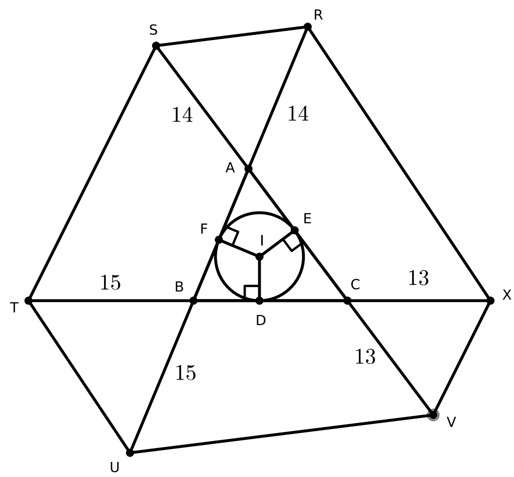


(c) Usando o resultado do item anterior, prove a desigualdade de Cauchy-Schwarz para dois termos, descrita pela desigualdade a seguir:

$$ax + by \leq \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}.$$

33 *Um hexágono inscritível*

A figura a seguir mostra um triângulo ABC com lados $AB = 13cm$, $BC = 14cm$ e $CA = 15cm$. A circunferência de centro I tangencia os lados AB, BC e CA nos pontos F, D e E, respectivamente. Os pontos R, S, T, U, V e X são marcados nos prolongamentos dos lados do triângulo ABC tal que $AR = AS = 14cm$, $BT = BU = 15cm$ e $CV = CX = 13cm$.



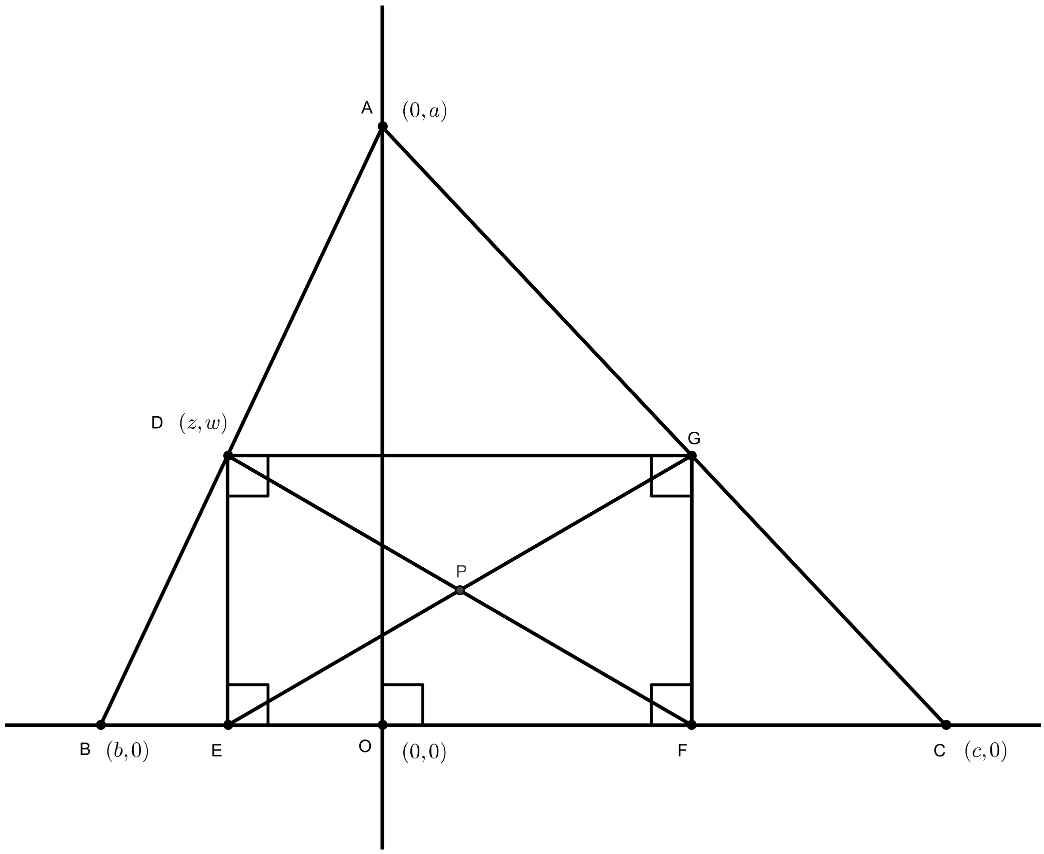
(a) Prove que $AE = AF$.

(b) Determine a medida do segmento BF.

(c) Prove que o hexágono $RSTUVX$ é inscritível, ou seja, mostre que existe uma circunferência passando pelos seus seis vértices.

34 *Lugar geométrico dos centros dos retângulos*

Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB \neq AC$. Considere todos os retângulos com dois vértices sobre o lado BC, um sobre o lado AB e um sobre o lado AC. Chamaremos de centro do retângulo o ponto de encontro das diagonais. Na figura a seguir, o centro do retângulo $DEFG$ é o ponto P.



Deseja-se determinar qual o lugar geométrico determinado pelos centros destes retângulos, ou seja, se fossem marcados todos os centros possíveis, qual figura seria formada pela união destes pontos. Para resolver este problema, usaremos geometria analítica. Seja O o pé da altura por A ao lado BC. Considere o sistema de coordenadas com origem em O, eixo x sobre a reta BC e eixo y sobre a reta OA. Então podemos marcar os pontos $O = (0,0)$, $A = (0,a)$, $B = (b,0)$ e $C = (c,0)$. Vale ressaltar que de $AB \neq AC$ podemos afirmar que $b \neq -c$, ou seja, $b + c \neq 0$.

(a) Determine as coordenadas dos pontos médios M e N dos segmentos OA e BC, respectivamente. Em seguida, determine a equação da reta MN.

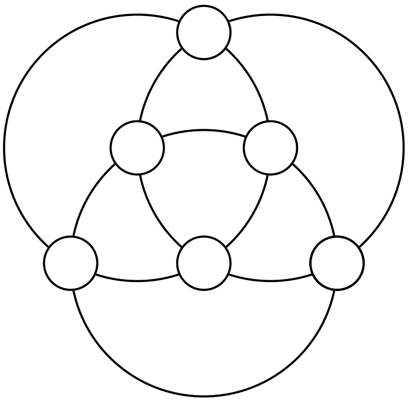
(b) Se considerarmos as coordenadas do ponto $D = (z, w)$, quais as coordenadas dos pontos E, F e G?

(c) O centro do retângulo é o encontro das diagonais e, como todo retângulo é um paralelogramo, ele coincide com o ponto médio da diagonal DF. Determine as coordenadas deste ponto e conclua que ele está sobre a reta MN.

ENUNCIADOS E SOLUÇÕES DO NÍVEL 1

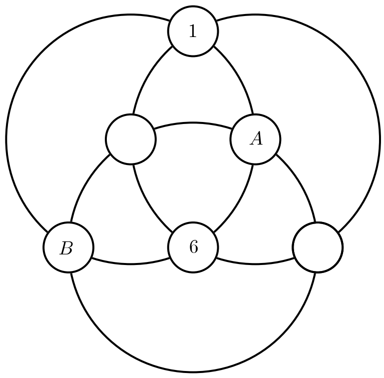
1 *Círculos nas três circunferências*

Na figura abaixo, três circunferências de mesmo raio se intersectam em seis pontos. Em cada um destes pontos, existe um círculo menor, todos de mesmo raio. Coloque os números 1, 2, 3, 4, 5, 6 nos círculos pequenos, de modo que os números escritos em cada uma das circunferências maiores seja 14.

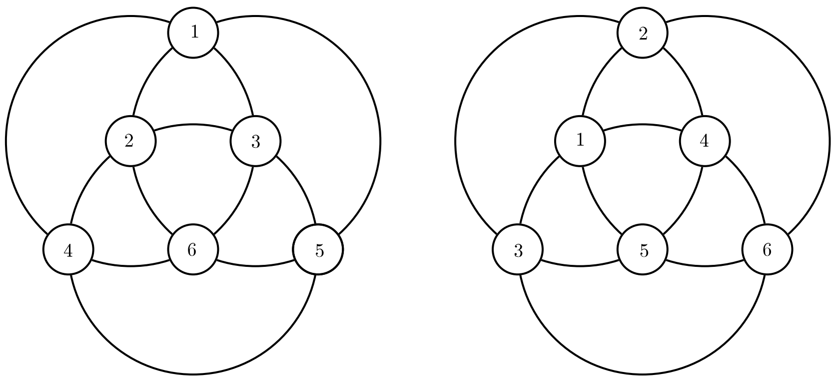


1 *Círculos nas três circunferências – Solução*

A soma de todos os números dados é $1+2+3+4+5+6 = 21$. Como a soma dos quatro números escritos em cada circunferência maior é 14, a soma dos outros dois números é $21-14 = 7$. Os possíveis pares de números com tal soma são: $(3,4)$, $(2,5)$ e $(1,6)$. Fixando um desses pares de soma 7, como exemplificado na figura a seguir com o par $(1,6)$ e considerando um dos círculos grandes que passam por eles, podemos concluir que os outros dois números, indicados por A e B neste mesmo círculo, devem somar $14-7 = 7$.



Portanto, basta escolhermos um dos pares restantes para as posições A e B e, finalmente, o par que sobrou para outras duas posições. A figura a seguir indica dois possíveis preenchimentos:



2 *Filhos de Paulo*

A idade de cada um dos três filhos de Paulo é um número inteiro. A soma destes três inteiros é igual a 12 e seu produto é 30. Qual a idade de cada um dos seus três filhos?

2 *Filhos de Paulo – Solução*

Sejam a, b e c as idades dos três filhos de Paulo. Então:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 12 \\ abc &= 30. \end{aligned}$$

O conjunto dos divisores de 30 é $\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$. Como se tratam de inteiros positivos e a soma deles é 12, segue que $a,b,c \in \{1,2,3,5,6,10\}$. Como o produto é 30, necessariamente um deles deve ser múltiplo de 5. Se um deles é 10, para que o produto seja 30, os outros só podem ser 1 e 3. Isto não satisfaz a condição da soma das idades. Portanto, uma das idades é 5. Logo, o produto das outras duas é $30/5 = 6$. As únicas possibilidades são 2 e 3 ou 1 e 6. A primeira não é possível em virtude da condição da soma das idades. Assim, as três idades são 1, 5 e 6.

3 *O tabuleiro* 3×5

Em cada uma das situações abaixo, decida se é possível dispormos os números $1,2,\ldots,15$ nos quadradinhos de um tabuleiro 3×5 de modo que:

a) A soma dos números nas três linhas sejam iguais entre si e a soma dos números nas três colunas também sejam iguais entre si, mas, eventualmente, diferentes do valor das somas das linhas.

b) A soma dos números em todas as linhas e colunas sejam iguais entre si.

3 *O tabuleiro* 3×5 *– Solução*

a) Sim, é possível, como mostra o exemplo:

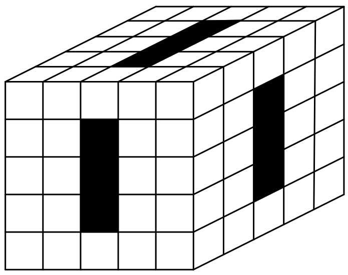
1	11	5	14	9
8	3	12	4	13
15	10	7	6	2

b) Suponha, por absurdo, que é possível fazer tal preenchimento do tabuleiro e seja k o valor comum das somas das linhas e colunas. Como existem 5 colunas, a soma de todos os números do tabuleiro é $5k$. Por outro lado, como temos 3 linhas, a soma de todos os números é $3k$. Isto produz um absurdo, pois $3k = 5k$ apenas quando k é igual a zero.

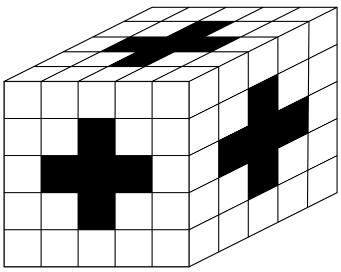
4 *Cubo com túnel*

No cubo $5 \times 5 \times 5$ das figuras abaixo, cubinhos foram retirados de modo que, para qualquer uma das faces, uma peça indicada pelo formato dos quadradinhos pintados de preto consiga atravessar o cubo e sair na face oposta. Determine quantos cubinhos foram retirados em cada item.

a)



b)



4 *Cubo com túnel – Solução*

a) Se fosse feito apenas um buraco entre duas faces opostas, teríamos que retirar exatamente $3 \cdot 5 = 15$ cubinhos. Se simplesmente somarmos a mesma quantidade para os outros dois buracos, teremos retirado $3 \cdot 15 = 45$ cubinhos. Entretanto, alguns cubinhos estão sendo retirados mais de uma vez. Para corrigir a contagem, devemos acrescentar os cubos que fazem parte de cada dois buracos. As interseções entre dois buracos são $3 \cdot 3 = 9$, $3 \cdot 1 = 3$ e $3 \cdot 1 = 3$ cubos comuns. Além disto, somando os cubos que foram retirados duas vezes, teremos negligenciado os cubos que fazem parte dos três buracos. Como a interseção dos três buracos é uma peça formada por 3 cubinhos, o total de cubos retirados é:

$$45 - 9 - 3 - 3 + 3 = 33.$$

Outra maneira de contar é "desmontar" os quatro blocos $2 \times 2 \times 5$ de quadrados brancos nas pontas do cubo maior e, em seguida, as peças brancas que sobraram: 4 delas do tamanho $1 \times 1 \times 1$ e 4 do tamanho $1 \times 1 \times 2$. Isto nos produz a contagem:

$$125 - 4 \cdot 20 - 4 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 33.$$

b) Se fosse feito apenas um buraco entre duas faces opostas, teríamos que retirar exatamente $5 \cdot 5 = 25$ cubinhos. Se simplesmente somarmos a mesma quantidade para os outros dois buracos, teremos retirado $3 \cdot 25 = 75$ cubinhos. Entretanto, alguns cubinhos estão sendo retirados mais de uma vez. Para corrigir a contagem, devemos acrescentar os cubos que fazem parte de cada dois buracos. Entre quaisquer dois buracos, existem $3 \cdot 3 + 2 = 11$ quadrinhos de interseção. Além disso, somando os cubos que foram retirados duas vezes, teremos negligenciado os cubos que fazem parte dos três buracos. Como a interseção dos três buracos é uma peça formada por 7 cubinhos, o total de cubos retirados é:

$$75 - 3 \cdot 11 + 7 = 49.$$

Outra maneira de contar é "desmontar" os oito blocos $2 \times 2 \times 2$ de quadrados brancos nas pontas do cubo maior e, em seguida, as 12 peças brancas $1 \times 1 \times 1$ entre as cruzes pretas das faces. Isso produz a contagem:

$$125 - 8 \cdot 8 - 12 = 49.$$

$\boxed{5}$ *Barras de chocolate*

João possui 30 barras de chocolate com os pesos: 2, 3 ou 4 quilos. A soma dos pesos das barras é 100 quilos. João possui mais barras de $2\,kg$ ou de $4\,kg$?

$\boxed{5}$ *Barras de chocolate – Solução*

Sejam x, y e z as quantidades de barras de $2\,kg$, $3\,kg$ e $4\,kg$, respectivamente. Sabemos que:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 30 \\ 2x + 3y + 4z &= 100. \end{aligned}$$

Se multiplicarmos a primeira equação por 3 e a subtrairmos da segunda, obteremos

$$z - x = 10.$$

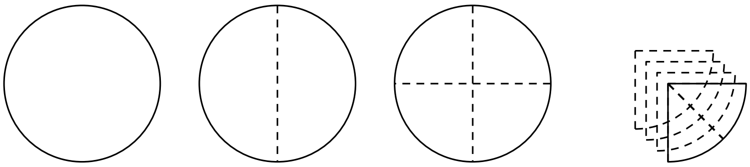
Como $z - x > 0$, segue que temos mais barras de $4\,kg$ do que barras de $2\,kg$.

$\boxed{6}$ *A divisão da pizza*

Um grupo de oito pessoas pediu uma pizza. O garçom conseguiu dividi-la em oito pedaços fazendo apenas três cortes retos. Como ele conseguiu fazer isto?

6 *A divisão da pizza – Solução*

Faça os cortes como indicado nas figuras a seguir:



7 *A calculadora do Planeta Zilot*

No planeta Zilot, as unidades de medidas são bem diferentes das que conhecemos na Terra. A medida padrão de comprimento é o Zimetro e um de seus submúltiplos é o Zimimimetro que equivale a 10^{-7} Zimetros. Uma calculadora pode realizar apenas duas operações: multiplicar um número por 10^8 ou dividi-lo por 10^5. Por exemplo, usando as operações da calculadora, podemos fazer as seguintes conversões:

$$3 \to 3 \cdot 10^{-5} \to 3 \cdot 10^{-10} \to 3 \cdot 10^{-2}.$$

a) Explique como combinarmos as duas operações da calculadora e fazermos aparecer na tela o número que representa a conversão de $7 \cdot 10^2$ Zimetros em Zimimimetros.

b) Como obter a conversão de $10^{10} \cdot 10^{-4}$ Zimetros em Zimimimetros começando com o número 1000 na tela da calculadora?

c) Usando a calculadora, é possível transformar 10^{2017} em 10^{11} usando as duas teclas mencionadas?

7 *A calculadora do Planeta Zilot – Solução*

a) Queremos que apareça na tela o número $7 \cdot 10^2 \cdot 10^7 = 7 \cdot 10^9$. Uma maneira de fazer tal conversão, começando com $7 \cdot 10^2$, é apertar quatro vezes a tecla com a operação de multiplicar por 10^8 e cinco vezes a tecla da divisão por 10^5:

$$7 \cdot 10^2 \to 7 \cdot 10^{10} \to 7 \cdot 10^{18} \to 7 \cdot 10^{26} \to 7 \cdot 10^{34} \to 7 \cdot 10^{29} \to 7 \cdot 10^{24} \to 7 \cdot 10^{19} \to 7 \cdot 10^{14} \to 7 \cdot 10^{9}.$$

b) Queremos que apareça na tela o número $10^{10} \cdot 10^{-4} \cdot 10^7 = 10^{13}$, que é a conversão do número dado em Zimimimetros. Uma maneira de fazer tal conversão, começando com 1000, é apertar cinco vezes a tecla com a operação de multiplicar por 10^8 e seis vezes a tecla da divisão por 10^5:

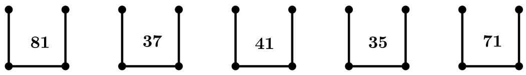
$$1000 \to 1000 \cdot 10^{5\cdot 8} \to 1000 \cdot 10^{5\cdot 8} \cdot 10^{-6\cdot 5} = 10^{3+5\cdot 8-6\cdot 5} = 10^{13}.$$

c) Se usarmos a tecla de divisão por 10^5 cinco vezes e, em seguida, usarmos a tecla de multiplicação por 10^8 três vezes, alteraremos o número da tela por um fator de $10^{-5\cdot5+3\cdot8} = 10^{-1}$. Portanto, repetindo-se esta exata sequência de operações $2017 - 11 = 2006$ vezes, iremos tranformar o número dado em:

$$10^{2017} \to 10^{2017} \cdot 10^{-1} = 10^{2016} \to \ldots \to 10^{12} \cdot 10^{-1} = 10^{11}.$$

8 *Emboscada para Colorado Jones*

Colorado Jones deve resolver um grande enigma para sobreviver. Ele deve remover apenas um dos cinco potes que estão na sua frente, como indica a figura abaixo, para poder abrir a porta da câmara secreta. Ele sabe que em cada pote existe apenas um tipo de moeda, ouro ou prata, e que cada número escrito neles representa a quantidade de moedas em seu interior. Além disto, o único pote correto que deve ser removido, faz com que nos potes restantes o número de moedas de prata seja o dobro do número de moedas de ouro. Qual pote deve ser removido?



8 *Emboscada para Colorado Jones – Solução*

A retirada de um dos potes deve permitir que Colorado Jones consiga separar os restantes em dois grupos, sendo que em um destes grupos existe o dobro de moedas do outro grupo. Se a quantidade de moedas do menor grupo é x, a soma das moedas dos dois grupos é $x + 2x = 3x$. Portanto, já sabemos pelo menos que a retirada do pote correto faz a quantidade de moedas restantes ser um múltiplo de 3. A soma das quantidades de moedas dos cinco potes é $81 + 71 + 41 + 37 + 35 = 265$, que deixa resto 1 na divisão por 3. Consequentemente, para que a remoção de um pote torne esta quantidade múltipla de 3, o mesmo deve deixar resto 1 por 3. Dos números apresentados, apenas 37 possui tal propriedade. Além disto, veja que ao retirá-lo, os potes restantes podem ser divididos em dois grupos: um com soma $81+71 = 2\cdot76$ e outro com soma $35 + 41 = 76$. Assim, Colorado Jones deve remover o pote de 37 moedas.

9 *Qual a idade do Zé?*

Zé Roberto possui cinco filhos, dois são gêmeos e os outros três são trigêmeos. Sabe-se que hoje a idade de Zé é igual à soma das idades dos seus cinco filhos. Daqui a 15 anos, se somarmos as idades dos cinco filhos, teremos o dobro da idade que Zé possuirá na mesma época e a soma das idades dos gêmeos será igual à soma das idades dos trigêmeos.

(a) Qual a idade atual de Zé?

(b) Qual a idade atual dos trigêmeos?

9 *Qual a idade do Zé? – Solução*

(a) Sejam z a idade atual de Zé, g a idade atual dos gêmeos e t a idade atual dos trigêmeos. As informações do problema podem ser traduzidas em três equações:

$$\begin{aligned} z &= 2g+3t \\ 2(z+15) &= 2(g+15)+3(t+15) \\ 2(g+15) &= 3(t+15). \end{aligned}$$

Para determinar z, basta substituir o valor de $2g+3t$ da primeira equação na segunda:

$$\begin{aligned} z &= 2g+3t \\ 2z+30 &= 2g+30+3t+45 \\ 2z &= z+45 \\ z &= 45. \end{aligned}$$

(b) Da terceira equação, temos $2g = 3t+15$. Substituindo esta equação e o valor de z do item anterior na primeira equação, teremos:

$$\begin{aligned} 45 &= 3t+15+3t \\ 45 &= 6t+15 \\ 30 &= 6t \\ t &= 5. \end{aligned}$$

10 *Agrupando bolinhas de gude*

Juca possui menos do que 800 bolinhas de gude. Ele gosta de separar as bolinhas em grupinhos com a mesma quantidade de bolinhas. Ele percebeu que se formar grupinhos com 3 bolinhas cada, sobram exatamente 2 bolinhas. Se ele formar grupinhos de 4 bolinhas, sobram 3 bolinhas. Se ele formar grupinhos de 5 bolinhas, sobram 4 bolinhas. E, finalmente, se ele formar grupinhos com 7 bolinhas cada, sobram 6 bolinhas.

(a) Se Juca formasse grupinhos com 20 bolinhas cada, quantas bolinhas sobrariam?

(b) Juca possui quantas bolinhas de gude?

10 *Agrupando bolinhas de gude – Solução*

(a) Seja B o número de bolinhas de Juca. Veja que o número de bolinhas que sobram ao formar um grupinho é igual ao resto da divisão de B pelo tamanho dos grupinhos. Para determinar o resto na divisão por 20, deve-se utilizar os restos na divisão por 4 e por 5, já que $20 = 4 \cdot 5$. Suponha que seja dada uma bola a mais para Juca. Sabendo que com com grupinhos de 5 bolinhas sobram 4 bolinhas e em grupinhos de 4 sobram 3, então Juca pode dividir as $B+1$ bolas em grupinhos de 4 bolas e em grupinhos de 5 bolas sem sobrar nenhuma, logo $B+1$ é múltiplo de $4 \cdot 5 = 20$, já que este é o Mínimo Múltiplo Comum entre 4 e 5. Portanto, B deixa resto 19 na divisão por 20. Assim, sobrariam 19 bolinhas.

(b) Para cada um dos números do conjunto $\{3, 4, 5, 7\}$, o resto na divisão é uma unidade a menos que o tamanho dos grupinhos. Deste modo, se adicionarmos uma bola a mais na coleção de Juca, teremos um número $B+1$ que é múltiplo de 3, 4, 5 e 7, consequentemente, $B+1$ é múltiplo do Mínimo Múltiplo Comum destes quatro números, ou seja, múltiplo de $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 420$. Como Juca possui menos que 800 bolinhas, então $B+1 = 420$ e assim concluímos que $B = 419$.

11 *Os ângulos do triângulo escaleno*

Em um triângulo escaleno, um ângulo é o dobro de outro. Se um dos ângulos é 36°, determine todas as possibilidades para os ângulos do triângulo.

11 *Os ângulos do triângulo escaleno – Solução*

Sejam $x < y < z$ os ângulos do triângulo. Como a soma dos ângulos do triângulo é 180°, temos

$$\begin{aligned} 3z &> x+y+z \\ &= 180^\circ \\ z &> \frac{180^\circ}{3} \\ &= 60^\circ. \end{aligned}$$

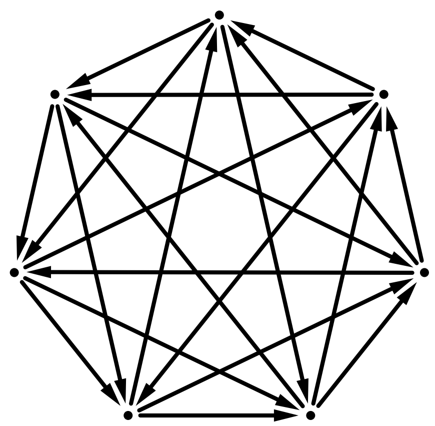
De forma semelhante, podemos concluir que $x < 60^\circ$. Logo, $x = 36^\circ$ ou $y = 36^\circ$. No primeiro caso, se $y = 2x$, temos $z = 180^\circ - 3x = 72^\circ = 2x$. Isto é um absurdo, pois $z > y$. Se $z = 2x$, temos $y = 180^\circ - 3x = 72^\circ$ e isto também é um absurdo, pois novamente temos $z = y$. Logo, se $x = 36^\circ$, então $z = 2y$ e $180^\circ = x + y + z = 36^\circ + 3y$, ou seja, $(x, y, z) = (36^\circ, 48^\circ, 96^\circ)$. No segundo caso, quando $y = 36^\circ$, se $z = 2y$, teremos $x = 180^\circ - 3y = 72^\circ$. Isto é impossível, pois $x < y$. Se $z = 2x$, então $3x = 180^\circ - y = 144^\circ$, ou seja, $x = 48^\circ$. Novamente um absurdo em virtude de $x < y$. Só resta a possibilidade $y = 2x$ e assim $z = 180^\circ - y - y/2 = 126^\circ$, ou seja, $(x, y, z) = (18^\circ, 36^\circ, 126^\circ)$.

12 *Erdoslândia*

Existem 7 cidades em Erdoslândia. Queremos construir entre quaisquer duas cidades uma estrada de mão única, de modo que sempre seja possível partir de uma cidade e chegar a qualquer outra passando por no máximo mais uma cidade. Como isto pode ser feito?

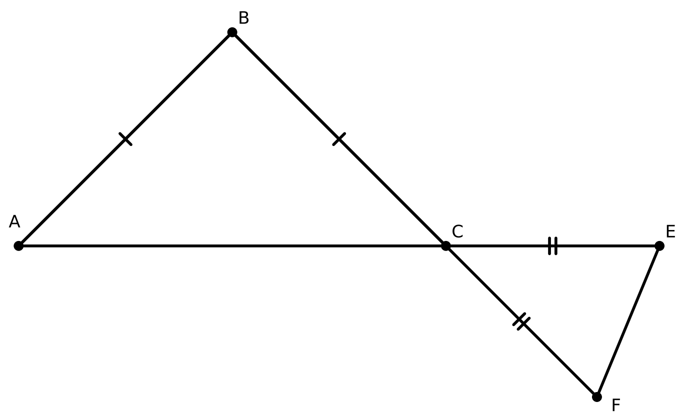
12 *Erdoslândia – Solução*

O mapa abaixo indica uma possível escolha de orientações entre as estradas:



13 *Descobrindo o ângulo*

No desenho abaixo, C é o ponto de interseção de AE e BF, $AB = BC$ e $CE = CF$. Se $\angle CEF = 50°$, determine o ângulo $\angle ABC$.



13 *Descobrindo o ângulo – Solução*

Como o triângulo CEF é isósceles, temos $\angle CEF = \angle CFE = 50°$ e

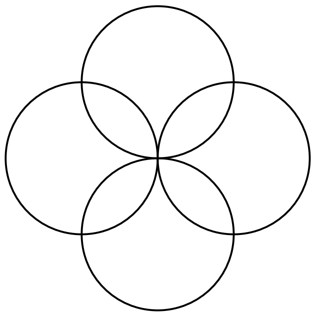
$$\begin{aligned}\angle FCE &= 180° - \angle CEF - \angle CFE\\ &= 180° - 50° - 50°\\ &= 80°.\end{aligned}$$

Também temos $\angle BCA = \angle FCE$, pois eles são ângulos opostos pelo vértice. Além disto, como ABC é isósceles, temos $\angle BAC = \angle BCA = 80°$. Finalmente, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\angle ABC &= 180° - \angle BAC - \angle BCA\\ &= 180° - 80° - 80°\\ &= 20°.\end{aligned}$$

14 *Circuitos circulares*

A figura a seguir representa 4 circuitos circulares de bicicleta. Os quatro ciclistas começam ao meio-dia e percorrem círculos diferentes, um deles com uma velocidade de $6km$ por hora, outro com uma velocidade de $9km$ por hora, outro com uma velocidade de $12km$ por hora e, finalmente, o quarto com uma velocidade de $15km$ por hora. Eles combinam andar de bicicleta até que todos se encontrem simultaneamente no centro da figura, que foi de onde eles partiram inicialmente. O perímetro de cada círcunferência é exatamente um terço de um quilômetro. Quando eles irão se encontrar novamente pela quarta vez?



14 *Circuitos circulares – Solução*

Se os ciclistas A, B, C e D possuem as velocidades $6km/h$, $9km/h$, $12km/h$ e $15km/h$, respectivamente, temos a seguinte tabela com os tempos que eles vão gastar para fazerem uma volta completa:

	Tempos em horas para concluir uma volta
Ciclista A	$\frac{1}{3} \div 6 = \frac{1}{18}h$
Ciclista B	$\frac{1}{3} \div 9 = \frac{1}{27}h$
Ciclista C	$\frac{1}{3} \div 12 = \frac{1}{36}h$
Ciclista D	$\frac{1}{3} \div 15 = \frac{1}{45}h$

Como a velocidade do ciclista C é o dobro da velocidade do ciclista A, a cada duas voltas que o ciclista C realiza, o ciclista A realiza apenas uma. Assim, eles só se encontram após um número par de voltas do ciclista C. Depois de $2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{18}h$, os ciclistas A e C se encontram no centro, mas os ciclistas B e C não estão lá. O próximo encontro possível entre A e C é após $4 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{9}h$. Para tal valor de tempo decorrido, o ciclista B terá percorrido exatamente $\frac{1}{27} \div \frac{1}{9} = 3$ voltas e o ciclista D terá percorrido exatamente $\frac{1}{45} \div \frac{1}{9} = 5$ voltas, ou seja, todos se encontrarão pela primeira vez. Veja que o próximo instante de encontro deverá ser após exatamente $\frac{1}{9}h$, pois a partir do primeiro ponto de encontro tudo se passa, do ponto de vista prático, como se todos estivessem recomeçando a corrida. Repetindo o raciocínio para o terceiro e o quarto encontro, obteremos que o quarto encontro será após $4 \cdot \frac{1}{9}h = \frac{80}{3}m = 26m40s$.

15 *Frações em fila*

Imagine as 2015 frações:

$$\frac{2}{2016}, \frac{3}{2015}, \frac{4}{2014}, \ldots, \frac{2014}{4}, \frac{2015}{3}, \frac{2016}{2}.$$

É possível escolhermos três destas frações com produto igual a 1?

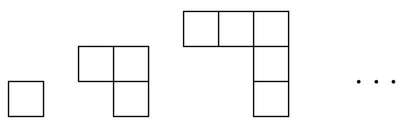
15 *Frações em fila – Solução*

Sim. Veja que cada fração é da forma $\dfrac{x}{2018-x}$. Assim, para $x = 1009$, a fração $\dfrac{1009}{1009} = 1$ faz parte da lista. Basta então multiplicarmos as frações:

$$\frac{2}{2016} \cdot \frac{1009}{1009} \cdot \frac{2016}{2} = 1.$$

16 *Somando pecinhas*

Considere a seguinte sequência de pecinhas, em que a pecinha de número 1 é um quadradinho.



(a) Quantos quadradinhos formam a pecinha de número 50?

(b) Quantos quadradinhos existem na união das pecinhas de número 1 a 50?

(c) Observando o resultado do item b, calcule

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 96 + 98 + 100.$$

(d) Calcule

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100.$$

16 *Somando pecinhas – Solução*

(a) Veja que a cada incremento de uma unidade no número da pecinha, aumenta-se o número de quadradinhos em 2 unidades. Logo, a pecinha 50 terá $1 + 2 \cdot 49 = 99$ quadradinhos.

(b) Veja que as pecinhas podem ser justapostas para formar um quadrado maior dividido em quadradinhos. O que determina o lado desse quadrado é o número da maior pecinha utilizada. Deste modo, as 50 pecinhas têm no total $50 \cdot 50 = 2500$ quadradinhos.

(c) Veja que o item anterior nos fornece a equação:

$$1+3+5+\ldots+95+97+99 = 2500.$$

Se adicionarmos 1 a cada uma das 50 parcelas da soma anterior, teremos a soma desejada:

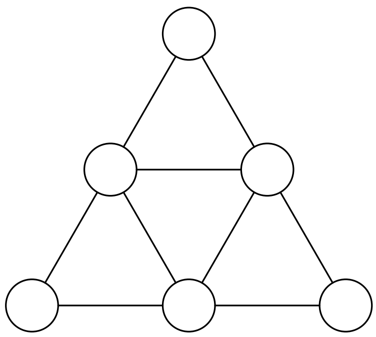
$$\begin{aligned} 1+3+5+\ldots+95+97+99 &= 2500 \\ (1+1)+(3+1)+(5+1)+\ldots+(95+1)+(97+1)+(99+1) &= 2500+50 \\ 2+4+6+\ldots+96+98+100 &= 2550. \end{aligned}$$

(d) Levando em conta os resultados obtidos nos itens anteriores, basta adicionar a soma dos números ímpares e a soma dos pares. Concluímos assim que

$$1+2+3+4+\ldots+97+98+99+100 = 2500+2550 = 5050.$$

17 *Colocando números para obter a mesma soma*

Considere os seis círculos sobre os lados de um triângulo como na figura a seguir:



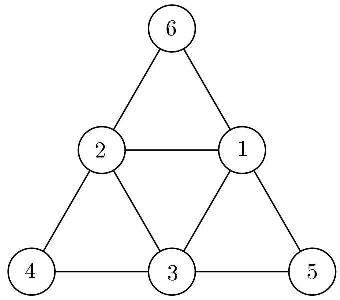
(a) Mostre uma maneira de colocar cada um dos números de 1 a 6 em cada um dos círculos, de modo que a soma dos três números em cada lado do triângulo maior seja igual a 12.

(b) Mostre que **não** é possível colocar os números de 1 a 6 em cada um dos círculos, de modo que a soma dos três números em cada lado do triângulo maior seja igual a 13.

(c) É possível colocar os números de 1 a 6 em cada um dos círculos, de modo que as somas dos números em cada um dos lados do triângulo maior seja igual à soma dos três números que estão no meio dos três lados do triângulo maior?

17 *Colocando números para obter a mesma soma – Solução*

(a) Uma possível solução é:



(b) Observe que o número 6 participa no máximo de dois lados do triângulo maior. Considere um lado em que ele não aparece. A soma máxima dos números nos círculos deste lado é:

$$\begin{aligned} 3+4+5 &= 12 \\ &< 13. \end{aligned}$$

(c) Não. Provaremos isto por contradição. Suponha que as quatro somas resultassem em um mesmo inteiro S. Cada número em um círculo aparece em exatamente duas destas somas, portanto,

$$\begin{aligned} 4\cdot S &= 2\cdot(1+2+3+4+5+6) \\ 2\cdot S &= 21. \end{aligned}$$

Como 21 é ímpar, o número S não seria inteiro e isto é uma contradição.

18 *Escrevendo os números um ao lado do outro*

Carlinhos gosta de escrever números em seu caderno. Um dia ele escreveu os números de 1 até 999, um ao lado do outro, para formar o número gigante:

$$123456789101112\ldots997998999.$$

Sobre este número, pergunta-se:

(a) Quantos dígitos foram escritos?

(b) Quantas vezes aparece o dígito 1?

(c) Considerando que 1 ocupa a posição 1, 2 ocupa a posição 2 e 0 aparece pela primeira vez ocupando a posição 11, qual dígito ocupa a posição 2016?

18 *Escrevendo os números um ao lado do outro – Solução*

(a) Observe que temos 9 números com um dígito cada, $99-9=90$ números com dois dígitos cada e $999-99=900$ números com três dígitos cada. Portanto, a quantidade de dígitos escritos é:
$$9\cdot 1+90\cdot 2+900\cdot 3=2889.$$

(b) Veja que o dígito 1 aparece uma vez entre os números de um dígito. Entre os números de dois dígitos, o 1 aparece 10 vezes como dezena e aparece 9 vezes como unidade, totalizando 19 vezes entre os números de dois dígitos. Entre os números de três dígitos, o 1 aparece 100 vezes como centena. Além disto, para cada uma das 9 centenas distintas, teremos o 1 aparecendo 10 vezes como dezena e 10 vezes como unidade. Logo, em tais números ele aparece $9\cdot(10+10)=180$ vezes. Concluímos que o número de aparições do dígito 1 é:
$$1+19+100+180=300.$$

(c) Veja que $2016>9+90\cdot 2=189$, então o dígito de posição 2016 aparecerá entre os números de três dígitos. De fato, podemos buscar o dígito $2016-189=1827$ a partir dos números $100101102103\ldots$. Como $1827=3\cdot 609$, então, sendo o 100 o primeiro número, o último dígito do número de ordem 609 será o dígito procurado. O número de ordem 609 é
$$100+609-1=708.$$
Concluímos assim que o dígito de ordem 2016 nesta sequência é 8.

19 *Dividindo moedas de ouro para ganhar mais*

Um grupo de dez caçadores de relíquias encontrou um baú de moedas de ouro com 100 moedas que permaneceu perdido por mais de duzentos anos.

Para facilitar a organização de todos, cada caçador recebe um número de 1 a 10 de acordo com a hierarquia que cada um tem no grupo. Isto é, o caçador número 10 é o chefe enquanto o número 1 não pode dar ordens para nenhum dos outros. Eles decidiram usar uma certa forma de "democracia" para dividir as moedas de ouro. O caçador 10 faz uma proposta para a divisão de todas as moedas entre os 10 caçadores. Cada caçador vota a favor ou contra. Se metade ou mais dos caçadores votar a favor, esta divisão é realizada. Caso contrário, o caçador 10 perde sua vez e fica fora da divisão de moedas. O caçador 9, então, poderá fazer sua proposta de divisão das 100 moedas entre os caçadores de 1 até 9. Novamente, cada caçador de 1 até 9 vota a favor ou contra e, se metade ou mais concordar, a divisão é feita. Caso contrário, o caçador 9 perde sua vez e fica sem moedas. O processo segue passando para o caçador 8 e assim sucessivamente.

Os caçadores sabem que cada moeda não pode ser dividida, pois vale muito mais inteira. Além disso, cada caçador quer ganhar o máximo de moedas possível.

(a) Suponha que o processo chegou até a vez do caçador 3. Qual a proposta que ele deve fazer para obter o maior ganho e ainda contar com a garantia de que sua proposta seja aceita na votação com os caçadores 1, 2 e 3 ?

(b) Suponha que o processo chegou ao caçador 4. Os caçadores são muito espertos e sabem a resposta do item anterior. Qual a proposta o caçador 4 deve fazer para ter o maior ganho possível e ainda contar com a garantia de que ela seja aceita?

(c) Voltemos ao início do problema e lembremo-nos de que todos os caçadores são muito espertos. Qual a proposta que o caçador 10 deve fazer para obter o maior ganho e ainda contar com a garantia de que sua proposta seja aceita em votação?

19 *Dividindo moedas de ouro para ganhar mais – Solução*

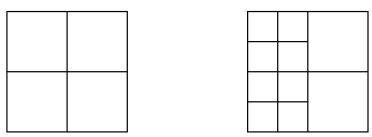
(a) Considere primeiro o cenário em que a proposta do caçador 3 não é aceita. Neste caso, o caçador 2 leva tudo, pois o voto dele já representa metade dos votos. Voltando à proposta do caçador 3, veja que além do próprio voto ele precisa de mais um para que sua proposta seja aceita. Se ele propuser 99 moedas para si e uma para o caçador 2, os caçadores 1 e 2 poderiam votar contra, pois o caçador 2 poderia ganhar todas as moedas e, para o caçador 1, tal resultado seria indiferente. Por outro lado, se o caçador 3 propuser 99 para si e uma moeda para o caçador 1, então este último votará a favor, pois esta situação é melhor para ele do que o caçador 2 levar tudo.

(b) É importante lembrar que todos os caçadores chegam à mesma conclusão sobre o item anterior. Então se o caçador 4 propuser 99 moedas para si e uma para o caçador 2, este último aceitará, pois caso contrário ele ficará sem nenhuma. Apenas contando com os votos de 2 e 4, a proposta será aceita.

(c) O raciocínio feito nos itens anteriores pode ser repetido várias vezes até chegar ao caçador 9, que deve propor 96 moedas para si e uma moeda para cada um dos caçadores de ordem ímpar: 1, 3, 5 e 7. A partir disto, o caçador 10 deve propor 96 moedas para si e uma para cada um dos caçadores de ordem par: 2, 4, 6 e 8. Os caçadores com números pares votam a favor, já que seu ganho será maior do que na proposta do caçador 9.

20 *Números quadradois*

Se um quadrado pode ser dividido em n quadrados de no máximo dois tamanhos diferentes, então, dizemos que n é um número *quadradois*. Veja que os números 4 e 10 são quadradois como podemos ver nas figuras a seguir:



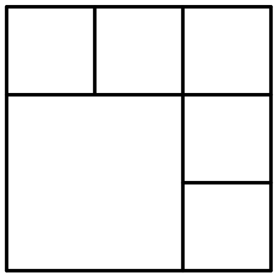
(a) Mostre que 6 é quadradois.

(b) Mostre que 2015 é quadradois.

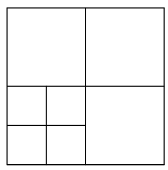
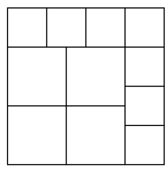
(c) Mostre que todo inteiro maior que 5 é quadradois.

20 *Números quadradois – Solução*

(a) Basta exibir um exemplo com 6 quadrados menores possuindo no máximo dois tamanhos diferentes entre eles, como na figura a seguir:

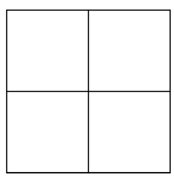
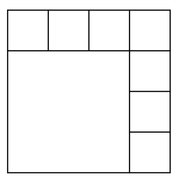


(b) Para cada inteiro ímpar i, desenhe $i-4$ quadrados formando uma figura no formato de L circundando um quadrado. Isto pode ser feito, pois $i-4$ é ímpar. Em seguida, divida o quadrado circundado em outros quatro quadrados. Sendo $i>5$, temos $i \geq 7$ e $i-4 \geq 3$. Observe o padrão das duas figuras a seguir para $i=7$ e $i=11$:

Seguindo este padrão para 2015, podemos colocar 4 quadrados grandes no canto inferior esquerdo, 1005 quadrados de tamanho menor sobre a lateral direita e 1005 quadrados deste mesmo tamanho menor na lateral superior destes 4 quadrados. E, finalmente, um quadrado com o mesmo tamanho dos 2010 menores já colocados ocupando no canto superior direito.

(c) O item anterior nos permite concluir que todos os ímpares maiores ou iguais a 7 são quadradois. Podemos aproveitar tal fato. Para tanto, na representação de um inteiro ímpar, basta transformar os 4 quadrados de maior tamanho em um só com o dobro do lado. Assim, perdemos 4 quadrados, mas ganhamos um no lugar reduzindo o número total de quadrados em 3. Nos exemplos do item anterior, notando que $7-3=4$ e $11-3=8$, temos:

Subtraindo 3 unidades de todo inteiro ímpar maior ou igual a 7, obtemos todos os inteiros pares maiores ou iguais a 4. Então todo o número inteiro maior que 5 é quadradois.

21 *Retângulo formado por quadrados diferentes*

É bastante simples formar um retângulo com quadrados justapostos de tamanhos repetidos veja, por exemplo, o problema dos números quadradois. Uma atividade bem mais complicada é formar um retângulo, também com quadrados justapostos, todos possuindo tamanhos distintos. A primeira publicação de um retângulo formado por quadrados com todos os tamanhos distintos foi feita em 1925 por Z. Morón. Ele formou um retângulo 47×65 com dez quadrados de lados: 3, 5, 6, 11, 17, 19, 22, 23, 24 e 25. Zeca Mourão cortou quadrados de papel com o formato dos quadrados de lados usados por Z. Morón e decidiu montar o retângulo 47×65. Depois de algum tempo, o Zeca finalmente conseguiu. Vamos tentar descobrir como ficou a sua montagem?

(a) Sabendo que o perímetro do retângulo foi feito por apenas seis quadrados, quais quadrados foram usados no bordo?

(b) Faça a colocação destes quadrados de maneira adequada.

(c) Complete a montagem de Zeca Mourão.

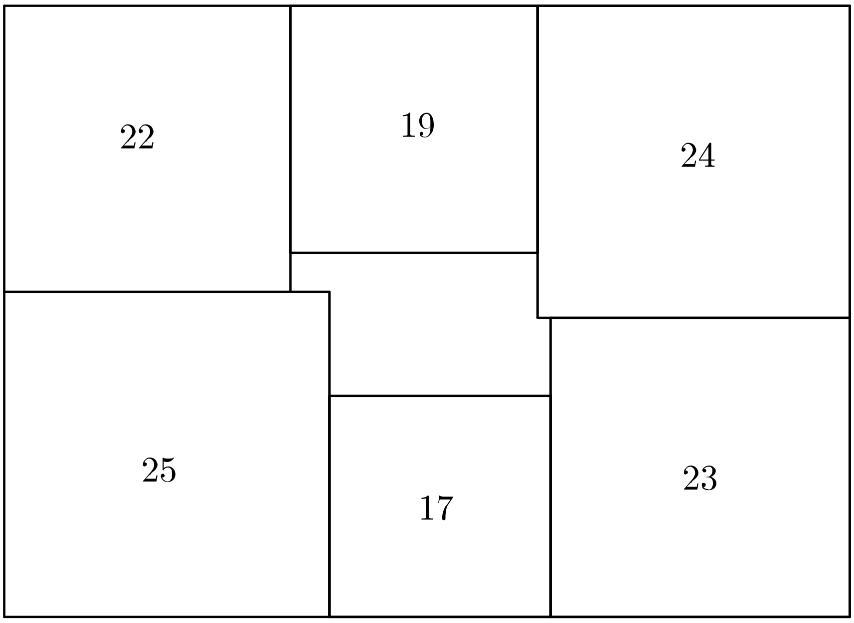
21 *Retângulo formado por quadrados diferentes – Solução*

(a) O perímetro do retângulo a ser formado é $2 \cdot (47+65) = 224$. Entre os quadrados, haverá 4 que ficarão nos cantos contribuindo duas vezes para o perímetro. Como são exatamente 6 quadrados contribuindo para os lados, dois deles contribuem apenas uma vez para o perímetro. Entre os quadrados disponíveis, o maior perímetro que podemos ter com 4 deles contribuindo duas vezes e 2 deles contribuindo uma vez é

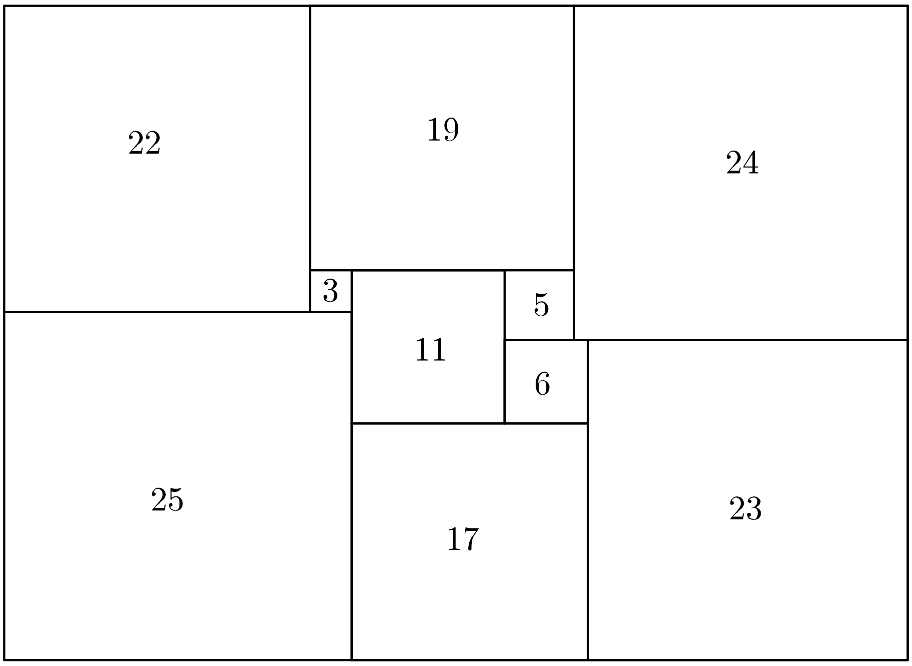
$$\begin{aligned} 2(25+24+23+22)+17+19 &= 2 \cdot 94 + 36 \\ &= 188 + 36 \\ &= 224. \end{aligned}$$

Então, como este máximo só é atingido de uma única forma, os quadrados usados no bordo são: 17, 19, 22, 23, 24 e 25.

(b) Veja que os lados de tamanho 47 foram cobertos por dois quadrados cada. O único modo de fazer isto é usando 25 e 22 em um lado e 24 e 23 no outro. Além disto, para formar os lados 65, devem ser usados 25, 17 e 23 sobre um lado e 22, 19 e 24 sobre o outro. Com estas informações, chegamos à seguinte configuração:



(c) Observe que o quadrado de lado 11 completa o espaço entre o quadrado com lado 17 e o quadrado com lado 19. Excluindo algumas possibilidades naturais, podemos completar a montagem como na figura a seguir:



22 *Tabela de multiplicação*

Cada letra de A até J representa um número distinto de 1 até 10. Na tabela a seguir, cada número escrito representa o produto do número da sua linha pelo número da sua coluna. Por exemplo, $A \cdot F = 18$.

$\times$	A	B	C	D	E
F	18				
G				20	
H		42			
I					24
J			10		

Usando a equação

$$A+B+C+D+E=F+G+H+I$$

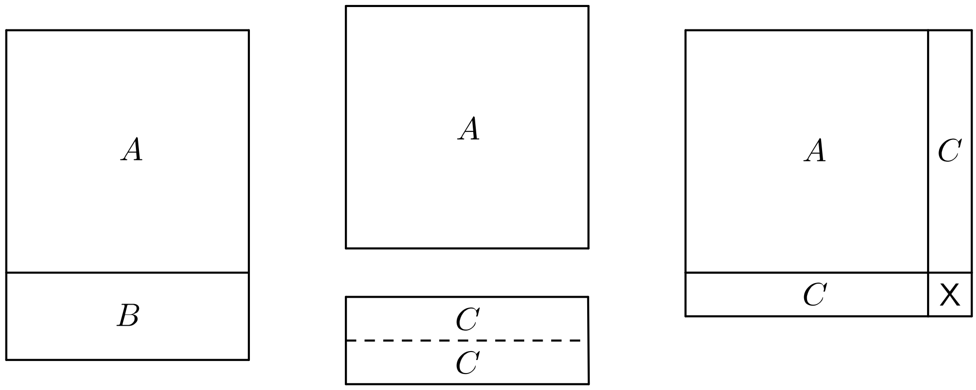
e sabendo os cinco valores na tabela, determine o valor de cada letra de A até J.

22 *Tabela de multiplicação – Solução*

Comecemos com o número 42, o único modo dele aparecer é com o produto $6 \cdot 7$. Daí, $\{B, H\} = \{6, 7\}$. Em seguida, analisemos o 18 e 24. Como o 6 já foi usado, podemos concluir que $\{A, F\} = \{2, 9\}$ e $\{E, I\} = \{3, 8\}$. Olhando 10 e 20 e lembrando que o 2 já foi usado, temos $\{C, J\} = \{1, 10\}$ e $\{D, G\} = \{4, 5\}$. A soma de todos os números de 1 até 10 é 55 e sendo $S = A+B+C+D+E$, temos $2S+J = 55$ implicando que J é ímpar. Como $\{C, J\} = \{1, 10\}$, temos $J = 1$, $C = 10$ e $S = 27$. Note que $A+B+D+E = 17$. Cada uma destas letras possui apenas dois valores possíveis e a menor soma possível é $2+6+4+3 = 15$. Trocando 3 por 8 ou 2 por 9 excedemos a soma 17, então a única forma de chegar a 17 é tomar $A = 2$, $B = 7$, $D = 5$ e $E = 3$. Isto nos permite encontrar os valores das demais letras $F = 9$, $G = 4$, $H = 6$ e $I = 8$.

23 *Completando o quadrado*

Encontrar um número que somado a 13600 forma um quadrado perfeito não parece ser uma tarefa fácil. Vamos resolver isso geometricamente. Considere um retângulo de área 13600 com um dos lados igual a 136. Divida-o em um quadrado A e um retângulo B. Corte o retângulo B em dois retângulos iguais, ambos denotados por C. Posicione os retângulos C sobre dois lados consecutivos do quadrado A.



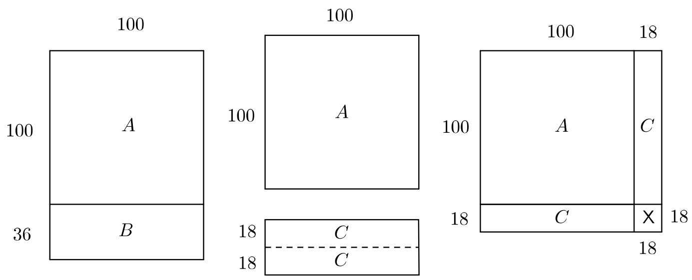
(a) Qual a área do retângulo C?

(b) Veja que se adicionarmos o quadrado X, completamos um quadrado maior. Qual deve ser o lado do quadrado X?

(c) Após responder os dois itens anteriores, determine um número que somado a 13600 resulta em um quadrado perfeito e determine a raiz quadrada desse quadrado perfeito.

23 *Completando o quadrado – Solução*

(a) Como um dos lados é 136 e a área é 13600, então o outro lado é 100. Além disto, sendo A um quadrado, ele possui lado 100. Consequentemente, o lado menor do retângulo B é $136-100=36$ e o seu lado maior é 100, como indicado na figura a seguir:



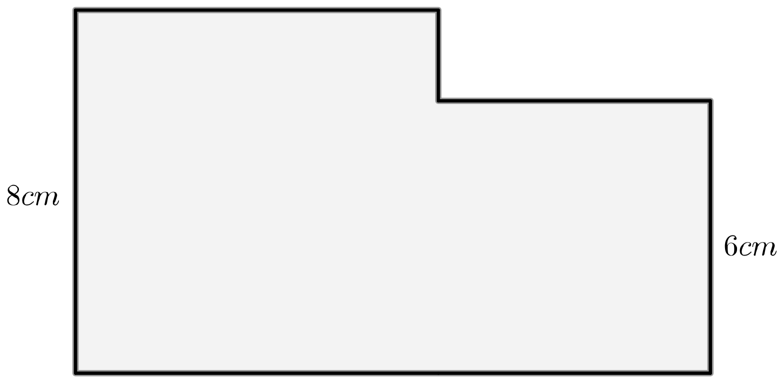
Um dos lados do retângulo C é 100 e o outro é metade do lado menor do retângulo B, ou seja, $\frac{36}{2}=18$. Concluímos que a área do retângulo C é $18 \cdot 100 = 1800$.

(b) O lado do quadrado X é igual ao menor lado do retângulo C, ou seja, 18.

(c) Se somarmos $18^2 = 324$ ao número 13600, então o resultado será $13924 = 118^2$. Portanto, a raiz procurada é 118.

24 *Cortando a escada para formar um quadrado*

A figura a seguir mostra uma "escadinha" formada por dois quadrados, um de lado $8cm$ e um de lado $6cm$. A tarefa é cortar a figura em três pedaços e reagrupá-los para formar um quadrado sem buracos.



(a) Qual o lado do quadrado que deverá ser formado no final?

(b) Utilizando apenas um lápis, uma régua de $20cm$, com marcações de $1cm$ em $1cm$, e uma tesoura que corta apenas seguindo uma linha reta, mostre como realizar a tarefa desejada.

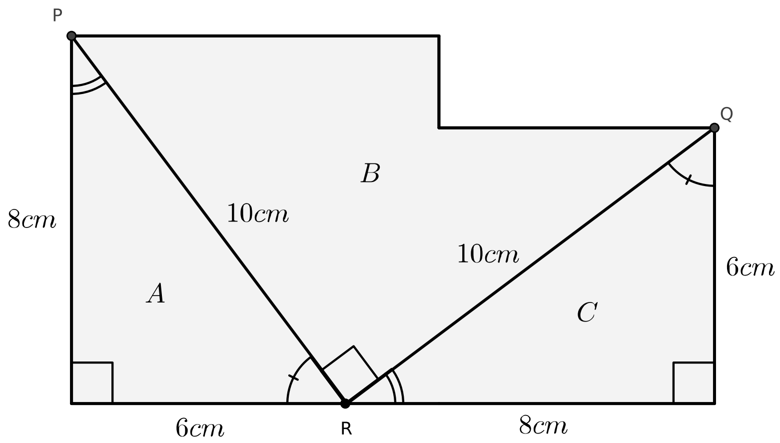
24 *Cortando a escada para formar um quadrado – Solução*

Cortando a escada para formar um quadrado

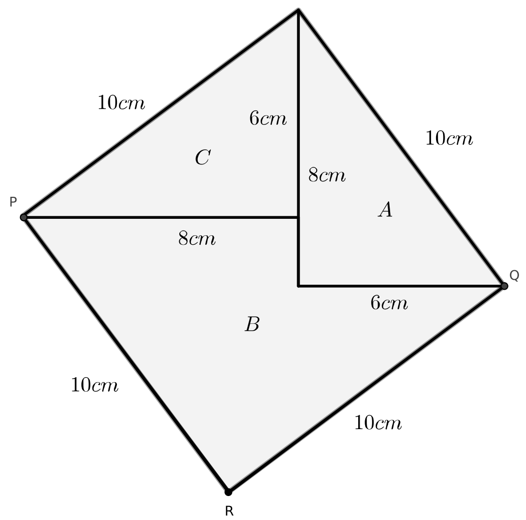
(a) Como o quadrado não deve ter buracos, a área final deve ser igual à área original. Se chamarmos de L o lado do quadrado, temos:

$$\begin{aligned} L^2 &= 8^2 + 6^2 \\ L^2 &= 64 + 36 \\ L^2 &= 100 \\ L &= 10. \end{aligned}$$

(b) Pelo Teorema de Pitágoras, 8, 6 e 10 são lados de um triângulo retângulo, pois $6^2 + 8^2 = 10^2$. Tomando o lado maior da figura acima, que possui comprimento $8+6 = 14$, marque o ponto R que o divide em pedaços de tamanhos 6 e 8. Isto pode ser feito com a régua. Com o lápis, trace os segmentos deste ponto para os extremos opostos esquerdo e direito, denotados por P e Q, como na figura a seguir. Usando o Teorema de Pitágoras, temos $PR = QR = 10$. Estes segmentos separam a figura nos pedaços A, B e C. Os pedaços A e C são triângulos congruentes e, usando as somas de seus ângulos internos, podemos concluir que $\angle PRQ = 90°$.

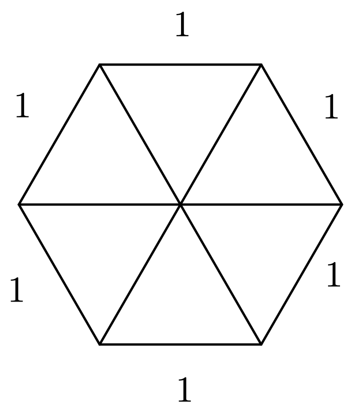


Com a tesoura, a figura é separada nos pedaços A, B e C. Em seguida, eles são realocados para formar o quadrado de lado 10 da figura a seguir:

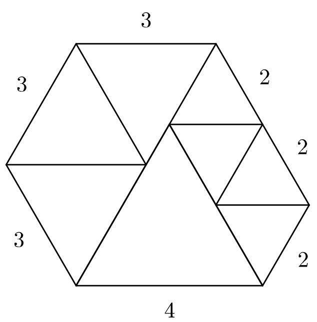


25 *Montando Hexagonângulos*

Um hexagonângulo é um hexágono que possui todos os ângulos iguais a 120°. Bia possui triângulos equiláteros com todos os lados inteiros possíveis. Além disto, ela possui muitos triângulos de cada tamanho e pretende usá-los para montar hexagonângulos. Por exemplo, ela usou 6 triângulos de lado 1 para formar um hexagonângulo de perímetro 6 como na figura a seguir:



Na próxima figura, temos outro hexagonângulo de perímetro 19 formado por 8 triângulos.



(a) Considere o hexagonângulo de perímetro 19 montado por Bia. Se ela o construísse usando apenas triângulos de lado 1, quantos triângulos seriam necessários?

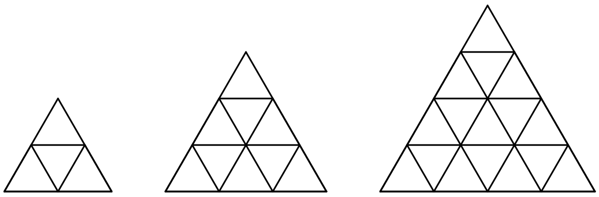
(b) Mostre como construir um hexagonângulo de perímetro 8 usando 7 triângulos.

(c) Dê um exemplo de um hexagonângulo com 8 triângulos e um outro com 9 triângulos.

(d) Explique como construir um hexagonângulo usando exatamente 2016 triângulos.

25 *Montando Hexagonângulos – Solução*

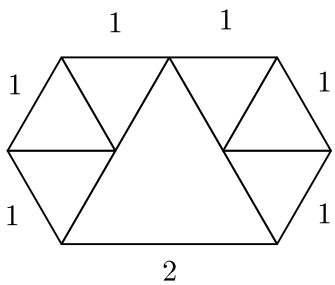
(a) Observe que um triângulo de lado 2 é formado por 4 triângulos de lado 1, o triângulo de lado 3 por 9 triângulos de lado 1 e o triângulo de lado 4 por 16 triângulos de lado 1.



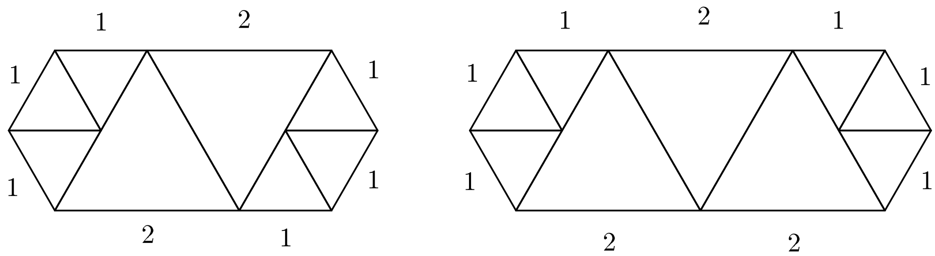
Como o hexágono é formado por 4 triângulos de lado 2, 3 de lado 3 e 1 de lado 4, então a quantidade de triângulos de lado 1 para formar o mesmo hexágono é

$$4 \cdot 4 + 3 \cdot 9 + 1 \cdot 16 = 16 + 27 + 16 = 59.$$

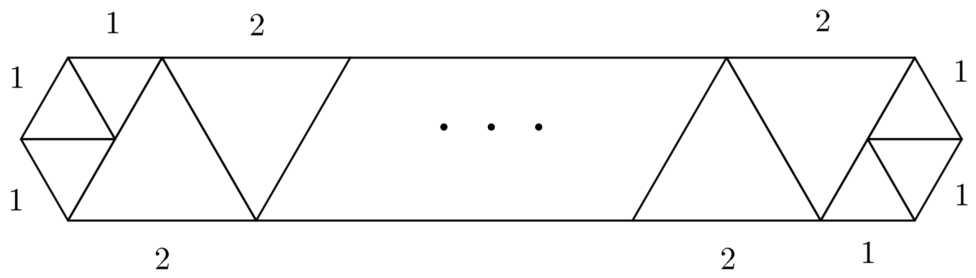
(b) O hexagonângulo da próxima figura é formado por 7 triângulos e tem perímetro 8.



(c) Observe que a partir do hexagonângulo do item anterior, podemos ir adicionando triângulos de lado 2 para formar hexagonângulos com quantidade de triângulos maior ou igual a 7. A seguir, veja exemplos para 8 e 9 triângulos.



(d) O padrão visto nos exemplos anteriores pode ser replicado para qualquer número maior que 6. No caso do lado de tamanho 2016, teremos 6 triângulos de lado 1 e 2010 triângulos de lado 2 se alternando em uma fila horizontal, como indicado abaixo:



26 *Entrega das garrafas*

Determine o maior número de garrafas de refrigerante que não podem ser entregues em caixas lacradas de 6, 15 e 10 garrafas de refrigerante.

26 *Entrega das garrafas – Solução*

Qualquer quantidade de refrigerantes que pode ser entregue é um número da forma $6x + 15y + 10z$, onde x, y e z são inteiros não negativos representando as quantidades de caixas de cada um dos três tipos mencionados no enunciado. O Menor Múltiplo Comum das três quantidades de caixas, o número $MMC(6,10,15) = 30$, certamente representa uma quantidade de refrigerente que pode ser entregue, pois basta escolher $x = 5$ ou $y = 2$ ou ainda $z = 3$. Façamos então uma tabela com alguns números que podem representar quantidades entregues de refrigerantes.

x	y	z	6x+15y+10z
0	1	2	35
4	0	1	34
3	1	0	33
2	0	2	32
1	1	1	31
5	0	0	30
			29
3	0	1	28
2	1	0	27
1	0	2	26
0	1	1	25
4	0	0	24

Não podemos entregar a quantidade de 29 garrafas, pois como 29 é ímpar e tanto 6 quanto 10 são números pares, precisamos usar pelo menos uma caixa de 15 garrafas. Não podemos usar mais que uma porque 29 é menor que $2 \cdot 15 = 30$. Isto nos força a entregar $29 - 15 = 14$ garrafas combinando caixas de 6 e 10. Como 14 não é múltiplo de 6, precisamos usar pelo menos uma caixa com 10. Como $2 \cdot 10 > 14$, devemos usar exatamente uma caixa com 10. Isso nos obriga a entregar $14 - 10 = 4$ garrafas com caixas de 6. Isto é impossível. Notemos agora que existem 6 números consecutivos logo após 29, representando quantidades que podem ser entregues. Seja n um inteiro maior que 29 e o dividamos por 6 obtendo $n = 6q + r$, onde q é o quociente e $r \in \{0,1,2,3,4,5\}$ é o seu resto. Como $n > 29$, devemos ter $q \geq 5$ e, consequentemente, podemos escrever $n = 6(q-5) + 30 + r$. O número $6(q-5)$ representa claramente uma quantidade de garrafas que pode ser entregue apenas com caixas de 6 e o número $30 + r$, por estar no conjunto $\{30,31,32,33,34,35\}$, representa uma quantidade de garrafas que pode ser entregue com combinações das três caixas. Portanto, o número 29 é a maior quantidade de refrigerantes que não podem ser entregues.

27 *O resto da divisão de um número muito grande*

Qual o resto da divisão de 2^{2015} por 20? Bom, é difícil fazer esta divisão diretamente usando apenas papel e caneta. Vamos procurar uma maneira de obter tal resposta analisando os restos de potências de 2 por 20 com a esperança de encontrar algum padrão neles. Qual o resto que 2^5 deixa por 20?

$$2^5 = 32 = 1 \cdot 20 + 12.$$

Sabendo disto, fica fácil saber o resto de 2^6 por 20, pois

$$2^6 = 2 \cdot 2^5 = 2 \cdot (1 \cdot 20 + 12) = 2 \cdot 20 + 24.$$

Dado que 24 é maior que 20 e não pode ser um resto, devemos escrever

$$2^6 = 3 \cdot 20 + 4.$$

Podemos estender o argumento anterior concluindo que para saber o resto de 2^{i+1} por 20, basta saber o resto do produto do resto de 2^i por 20. Desse modo, podemos construir a sequência de potências e restos na divisão por 20.

n	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
Resto por 20	2	4	8	16	12	4

(a) Determine os restos que os números 2^7, 2^{10} e 2^{13} deixam na divisão por 20.

(b) Sabendo que os restos se repetem de forma periódica, determine o período de repetição, ou seja, o número de restos distintos que ficam se repetindo.

(c) Voltamos à pergunta do começo do problema. Qual o resto que 2^{2015} deixa na divisão por 20?

27 *O resto da divisão de um número muito grande – Solução*

(a) Vamos continuar a calcular os restos da divisão até o 13.

n	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}
Resto por 20	2	4	8	16	12	4	8	16	12	4	8	16	12

Logo, os restos procurados são 8, 4 e 12.

(b) Os restos começam a se repetir a partir de 2^2 e a cada quatro potências consecutivas. Portanto, o período é 4 e os restos que ficam se repetindo são: 4, 8, 16 e 12.

(c) Como o período de repetição é 4, basta observar o resto na divisão de 2015 por 4. Como este resto é 3, concluímos que ao dividir o número 2^{2015} por 20 obtemos resto igual a 8.

28 *Separando cartões e fazendo o produto*

Os três amigos José, Pedro e Daniel fazem um jogo com os oito cartões numerados com os números de 2 até 9. Em cada rodada, os oito cartões são separados para os três amigos, naturalmente não necessariamente em quantidades iguais, e cada um calcula o produto dos números nos seus cartões. Aquele que tiver como resultado um número maior que os outros dois vence a rodada. Se dois tiverem resultados iguais e maiores que o resultado do terceiro, então os dois vencem. Depois de algumas rodadas, Pedro desconfia que sempre algum dos três amigos possuirá cartões cujo produto será pelo menos 72. Infelizmente, Pedro não sabe como provar que isso sempre acontece. Vamos ajudá-lo?

(a) Mostre que se um dos amigos pegar 4 ou mais cartas, então certamente o produto das suas cartas será maior que 72.

(b) Em uma rodada, Daniel tirou três cartões, entre eles o 9. Sabendo que o produto dos seus números é menor que 72, quais são os outros dois cartões de Daniel?

(c) Na mesma rodada do item anterior, mostre que um dos outros amigos, José ou Pedro, terá três ou mais cartões e seu produto será maior que 72.

(d) Em outra rodada, Daniel pegou duas cartas, entre elas o 9, mas seu produto novamente é menor que 72. Mostre que o produto dos 6 cartões restantes é maior que 72^2 e conclua que um dos dois amigos, José ou Pedro, tem produto dos cartões maior que 72.

28 *Separando cartões e fazendo o produto – Solução*

(a) Se um dos amigos pegar 4 ou mais cartões, o menor produto possível de seus números ocorrerá se ele pegar os quatro cartões com os menores números. Portanto, o produto será pelo menos

$$\begin{aligned} 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 &= 120 \\ &> 72. \end{aligned}$$

(b) Se os outros dois cartões de Daniel forem os menores possíveis, ou seja, 2 e 3, seu produto é de pelo menos

$$\begin{aligned} 2\cdot 3\cdot 9 &= 54 \\ &< 72. \end{aligned}$$

Se forem diferentes de 2 e 3, ele tem cartões com números maiores que ou iguais a 2 e 4, resultando assim no produto $2\cdot 4\cdot 9 = 72$, que não é menor que 72.

(c) Retirando os cartões de Dariel, restam $8-3=5$ cartões. Como estes cinco cartões serão distribuídos entre dois amigos, um deles receberá pelo menos 3 cartões. O produto destes cartões é maior ou igual a $4\cdot 5\cdot 6=120$, que passa de 72.

(d) Primeiro, veja que o outro cartão de Daniel é no máximo 7, para que multiplicado por 9 ainda seja menor que 72. Deste modo, o produto dos demais cartões é pelo menos

$$\begin{aligned} 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 8 &= (3\cdot 4\cdot 6)(2\cdot 5\cdot 8)\\ &= 72\cdot 80\\ &> 72\cdot 72\\ &= 72^2. \end{aligned}$$

Se o produto dos dois números é maior que 72^2, então é impossível que os dois produtos sejam simultaneamente menores que 72. Concluímos assim que um deles é maior que 72.

29 *Somas de cinco números de 1 até 20*

Paulinho está treinando para sua prova de aritmética. Para se tornar cada vez mais rápido, ele fica realizando várias somas. Paulinho pede que seu pai o ajude escolhendo cinco números inteiros de 1 até 20. Em seguida, Paulinho os soma. Após várias tentativas, seu pai percebeu que ele estava ficando muito entediado com as somas e decidiu fazer o filho pensar mais antes de responder. Vamos ajudar Paulinho a responder as novas perguntas do seu pai?

(a) Qual a menor e qual a maior soma possível de cinco números inteiros de 1 até 20?

(b) Para cada valor desde o menor até o maior possível, selecione cinco números de 1 até 20 tal que a soma deles seja este valor.

29 *Somas de cinco números de 1 até 20 – Solução*

(a) A soma mínima é obtida quando são utilizados os cinco menores números, ou seja, a menor soma possível é $1+2+3+4+5=15$. Usando o mesmo raciocínio, a maior soma possível é $16+17+18+19+20=90$.

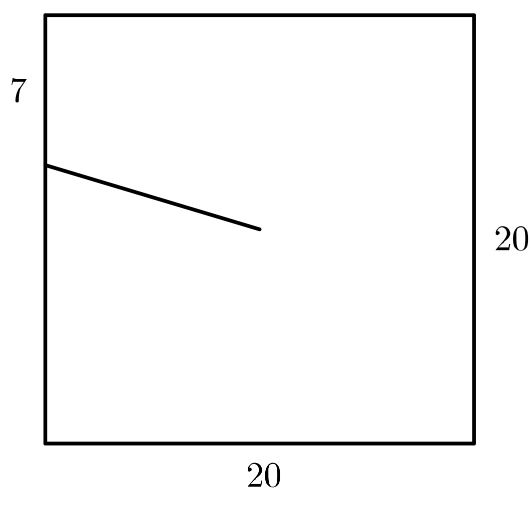
(b) Sim, vamos provar que podemos incrementar de 1 em 1 o valor da soma de cinco números começando de 15 até chegar a 90. Começamos da soma mínima $1+2+3+4+5$. Aumente de 1 em 1 o maior número que ainda não chegou ao seu valor máximo. Em outras palavras, aumenta-se o 5 até 20. Em seguida, aumenta-se o 4 até 19. Deste modo, teremos:

$$\begin{array}{rcl}
1+2+3+4+5 &=& 15\\
1+2+3+4+6 &=& 16\\
1+2+3+4+7 &=& 17\\
&\ldots&\\
1+2+3+4+20 &=& 30\\
1+2+3+5+20 &=& 31\\
1+2+3+6+20 &=& 32\\
&\ldots&\\
1+2+3+19+20 &=& 45\\
&\ldots&\\
15+17+18+19+20 &=& 89\\
16+17+18+19+20 &=& 90.
\end{array}$$

Perceba que cada número de 15 até 90 aparecerá como soma de cinco números distintos.

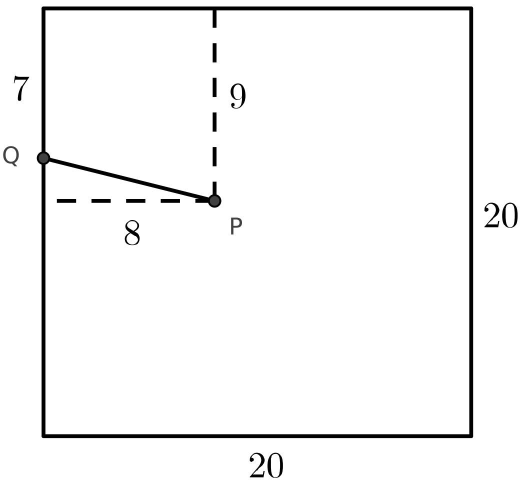
30 *Cortando o bolo em pedaços iguais*

Gervinho tem um bolo em forma de quadrado de lado $20cm$, visto de cima na figura a seguir. Ele vai dividir o bolo em 5 pedaços de mesma área para comer com seus 4 amigos. Ele só pode fazer cortes verticais, pois como o bolo é feito de camadas diferentes, assim todos receberão mesmas quantidades de cada camada.



(a) Suponha que Gervinho já fez o primeiro corte do centro até um ponto sobre o lado com distância $7cm$ para o canto superior esquerdo. Como ele deve fazer os demais cortes, sabendo que todos devem partir do centro?

(b) Deixando de lado a situação anterior, suponha que Gervinho fez o primeiro corte, a partir do ponto P distando $8cm$ e $9cm$ de seus lados mais próximos, e que terminou no ponto Q distante $7cm$ do canto superior esquerdo.

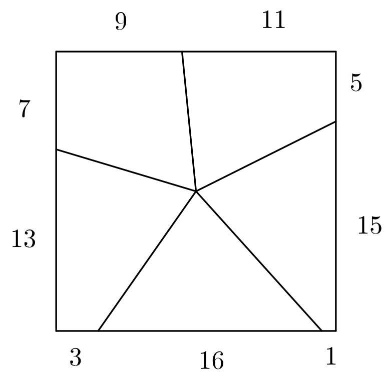


Como ele deve fazer os outros cortes sabendo que todos devem partir do ponto P até a lateral do bolo?

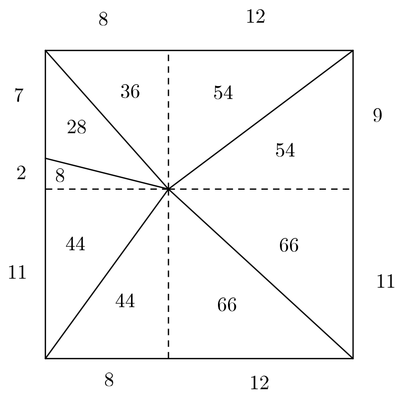
(c) Na borda da cobertura há doces, por isto, em cada um dos casos, Gervinho deve receber o pedaço de bolo que tiver maior perímetro da borda do bolo. Se há mais de um com este maior perímetro, então ele deve pegar qualquer um deles. Em cada um dos casos anteriores, indique o pedaço que Gervinho deve receber.

30 *Cortando o bolo em pedaços iguais – Solução*

(a) Como a área do quadrado é $20 \cdot 20 = 400$, cada um dos 5 amigos deve receber $\frac{400}{5} = 80$ de área de bolo. Se considerarmos cada pedaço de bolo como um triângulo com base sobre os lados do bolo ou união de triângulos com base sobre os lados, então a altura será sempre 10. Deste modo, basta fazer com que a base ou soma das bases sobre os lados seja 16. Com a parte que tem 7, devemos adicionar uma parte com base $16 - 7 = 9$. Restando assim uma parte com base $20 - 9 = 11$. Para tal parte, devemos adicionar outra com base $16 - 11 = 5$. Seguindo assim, teremos os seguintes cortes:

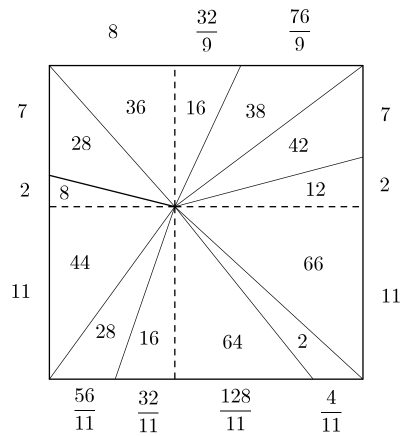


(b) Usando a mesma estratégia do item anterior, basta calcular as áreas de cada triângulo formado por cortes paralelos aos lados e em direções aos vértices saindo do centro. Obtemos assim, a seguinte repartição do bolo:

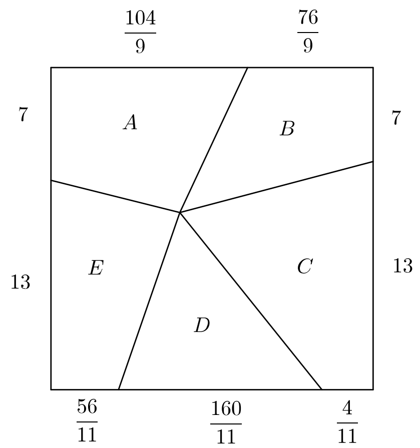


Observando as áreas, podemos criar um procedimento para montar os pedaços, um de cada vez. Para usar os dois pedaços de tamanhos 28 e 36, devemos retirar $80-28-36 = 16$ do triângulo de área 54, sobrando assim $54-16 = 38$. Para completar o pedaço de área 80 usando o pedaço de tamanho 38, precisamos de pedaços que somem área $80 - 38 = 42$. Ele pode ser obtido do segundo triângulo de área 54.

O processo segue até atingir a configuração a seguir:



Abaixo temos outra figura sem as subdivisões de cada pedaço:



(c) No caso do primeiro item, todos os pedaços possuem o mesmo perímetro da borda do bolo, então Gervinho deve receber qualquer um deles. No caso do segundo item, podemos comparar os perímetros da borda de cada pedaço, que chamaremos de: P_A, P_B, P_C, P_D e P_E.

$$P_A = 7 + \frac{104}{9} = 18 + \frac{5}{9}$$
$$P_B = \frac{76}{9} + 7 = 15 + \frac{4}{9}$$
$$P_C = 13 + \frac{4}{11}$$
$$P_D = \frac{160}{11} = 14 + \frac{6}{11}$$
$$P_E = \frac{56}{11} + 13 = 18 + \frac{1}{11}.$$

Como $\frac{5}{9} > \frac{1}{11}$, concluímos que Gervinho deve ficar com o pedaço A, pois ele possui o maior perímetro da borda do bolo.

ENUNCIADOS E SOLUÇÕES DO NÍVEL 2

$\boxed{1}$ *A corrente da oficina do Zé*

Na oficina do Zé, existem seis pedaços de correntes com as seguintes quantidades de elos: 10, 10, 8, 8, 5 e 2. Ele precisa unir estes pedaços para formar uma corrente circular. Ele gasta 1 minuto para cortar um elo e 2 minutos para uni-lo, perfazendo um total de 3 minutos por elo. Se ele cortar um elo ao final de cada peça separada, unindo as peças uma de cada vez, ele demoraria $6 \cdot 3 = 18$ minutos. Entretanto, como ele está com pressa, ele pretende realizar esta operação de uma forma mais rápida.

a) Diga como ele pode formar a corrente circular gastando apenas 15 minutos.

b) É possível ele fazer tal operação em menos de 15 minutos?

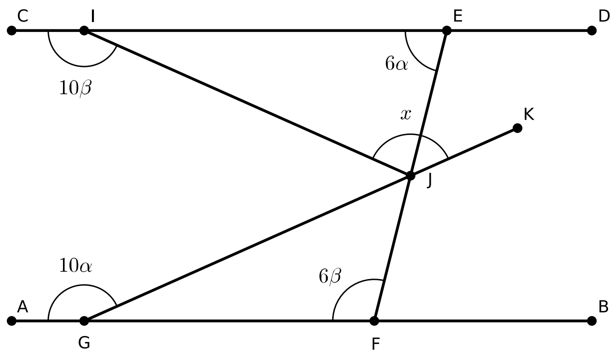
$\boxed{1}$ *A corrente da oficina do Zé – Solução*

a) Uma maneira para ele formar a corrente em 15 minutos é inicialmente abrir todos os elos do pedaço de 5 elos. Neste procedimento ele gastará $5 \cdot 1 = 5$ minutos. Em seguida, ele deve usar cada um destes elos abertos entre os 5 pedaços de correntes restante, usando exatamente um elo para unir dois pedaços distintos. Para este último procedimento ele gastará $5 \cdot 2 = 10$ minutos.

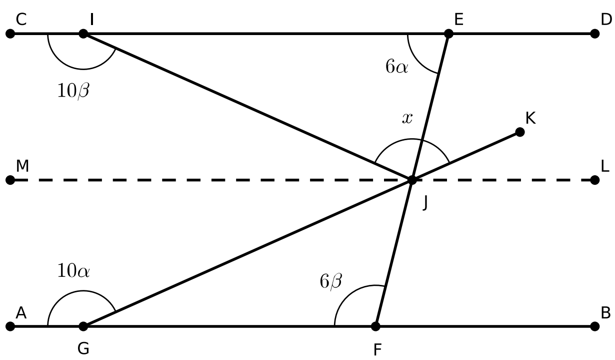
b) O tempo gasto sempre é um múltiplo de 3 porque uma vez que se gasta 1 minuto para se abrir um elo, é necessário gastarmos 2 minutos para fechá-lo e assim o tempo total por elo alterado é $1+2 = 3$ minutos. Como $12 = 3 \cdot 4$ é o maior múltiplo de 3 menor que 15, se fosse possível ele gastar menos de 15 minutos, ele teria que alterar no máximo 4 elos. Como existem 6 pedaços de correntes, pelo menos dois deles não teriam elos alterados. Para unir estes dois pedaços na corrente maior, precisaríamos de pelo menos 3 elos alterados inseridos em suas extremidades. Assim, poderíamos usar apenas um elo para conectar os pedaços restantes. Como ele terá pelo menos três pedaços restantes, isto é impossível.

2 *Segmentos paralelos*

Na figura abaixo, os segmentos AB e CD são paralelos. Se $\angle CIJ = 10\beta$, $\angle AGJ = 10\alpha$, $\angle CEJ = 6\alpha$ e $\angle JFG = 6\beta$, determine o valor do ângulo $\angle IJK$.



2 *Segmentos paralelos – Solução*



Como $\angle CEJ$ e $\angle JFA$ são ângulos colaterais internos, $6\alpha + 6\beta = 180°$, ou seja, $\alpha + \beta = 30°$. Pelo ponto J, considere o segmento ML paralelo a AB. Temos

$$\begin{aligned} x &= 180° - \angle IJG \\ &= 180° - \angle IJM - \angle MJG \\ &= 180° - \angle JIE - \angle JGF \\ &= 180° - (180° - 10\beta) - (180° - 10\alpha) \\ &= 10(\alpha + \beta) - 180° \\ &= 120°. \end{aligned}$$

3 *A boia no rio*

Um barco motorizado solta uma boia em um rio de margens retilíneas e paralelas às 10:00 e começa a navegar, na direção determinada pelo rio, contra a correnteza até às 10:15. Depois disto, ele retorna, também na direção determinada pelo rio. Em que instante o barco encontrará novamente a boia?

3 *A boia no rio – Solução*

Como tanto o barco quanto a boia vão estar sujeitos aos mesmos efeitos da correnteza do rio, para efeitos práticos, podemos considerar apenas a velocidade relativa do barco em relação à boia e supor que a correnteza é nula. Neste caso, se o barco levou 15 minutos para ir em correnteza parada, ele também levará 15 para voltar e assim ele encontrará a boia às 10:30.

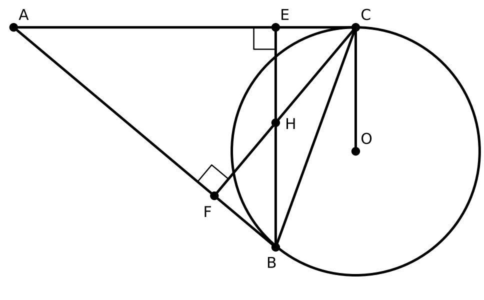
Podemos também resolver o problema analisando o sistema de equações produzido pelas informações do enunciado. Sejam c a velocidade da correnteza e v a velocidade do barco, ambos medidos em quilômetros por hora. Seja ainda x o tempo que leva para o barco encontrar a boia desde o momento em que ele a solta no rio. Como o barco navega contra a correnteza no primeiro um quarto de hora, a distância que ele percorre é $\frac{v}{4}-\frac{c}{4}$, pois o motor do barco produz o deslocamento de $\frac{v}{4}$ e a correnteza do rio o faz retroceder $\frac{c}{4}$. No movimento de volta, que dura $x-\frac{1}{4}$ horas, o barco percorre, agora no sentido da correnteza, $\left(x-\frac{1}{4}\right)v+\left(x-\frac{1}{4}\right)c$, onde a primeira parcela é a contribuição do motor do barco no deslocamento e a segunda a da correnteza. Durante o movimento de ida e volta do barco, a boia foi deslocada pela corretenza por uma distância de xc quilômetros, portanto, este valor corresponde à diferença entre as distâncias de ida e volta:

$$\begin{aligned}
\frac{v}{4}-\frac{c}{4}+xc &= \left(x-\frac{1}{4}\right)v+\left(x-\frac{1}{4}\right)c\\
xv &= \frac{v}{2}\\
x &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Assim, o barco gastou $1/2$ de uma hora, ou seja, 30 minutos, para encontrar a boia.

4 *Tangentes do círculo*

Duas tangentes são desenhadas de um ponto A a um círculo de centro O, tocando-o em B e C. Seja H o ortocentro do triângulo ABC, sabendo que $\angle BAC = 40°$, encontre o valor do ângulo $\angle HCO$.



$\boxed{4}$ *Tangentes do círculo – Solução*

Como AC é tangente ao círculo, temos $\angle ACO = 90°$. Assim

$$\begin{aligned}\angle HCO &= 90° - \angle ACF\\ &= \angle CAF\\ &= 40°.\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ *Números três estrelas*

Dizemos que um número inteiro positivo de três dígitos é *três estrelas* se ele for o resultado do produto de três números primos distintos. Por exemplo, $286 = 2 \cdot 11 \cdot 13$ é um número três estrelas, mas $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ e $275 = 5 \cdot 5 \cdot 13$ não são números três estrelas, pois o primeiro só possui dois dígitos e o segundo não é o produto de três primos distintos.

(a) Qual o menor número três estrelas?

(b) Mostre que cada número três estrelas possui algum divisor em comum com 30 maior que 1.

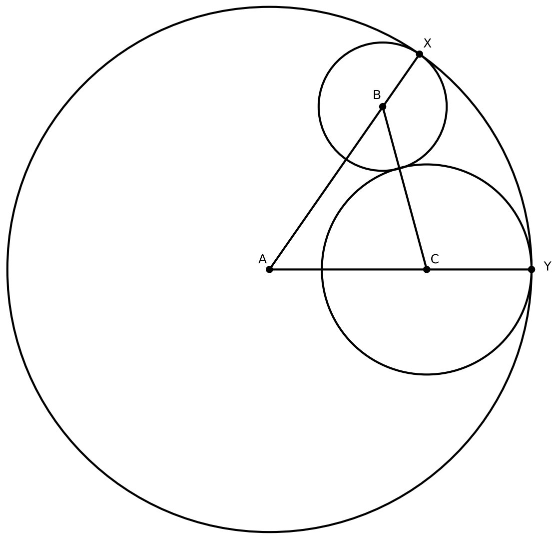
$\boxed{5}$ *Números três estrelas – Solução*

(a) Os dois primeiros números de três dígitos são $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ e $101 = 101$ (que é primo). Ao testar 102, temos $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$, que é o menor número três estrelas.

(b) Basta mostrar que todo número três estrelas possui pelo menos um dos fatores primos do conjunto $\{2, 3, 5\}$. Se tomarmos um número três estrelas que não tenha pelo menos um destes fatores, ele será pelo menos $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ e, consequentemente, possuirá mais que três dígitos e não será um número três estrelas.

6 *Círculos Tangentes*

Na figura a seguir, o círculo de centro B é tangente ao círculo de centro A em X. O círculo de centro C é tangente ao círculo de centro A em Y. Além disto, os círculos de centros B e C também são tangentes. Se $AB = 6$, $AC = 5$ e $BC = 9$, quanto mede AX?



6 *Círculos Tangentes – Solução*

Sejam r_a, r_b e r_c os raios dos círculos de centros A, B e C, respectivamente. Se Z é o ponto de tangência dos círculos de centros B e C, os dados do problema nos permitem montar o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} AB &= AX - BX \\ 6 &= r_a - r_b \\ AC &= AY - CY \\ 5 &= r_a - r_c \\ BC &= BZ + ZC \\ 9 &= r_b + r_c. \end{aligned}$$

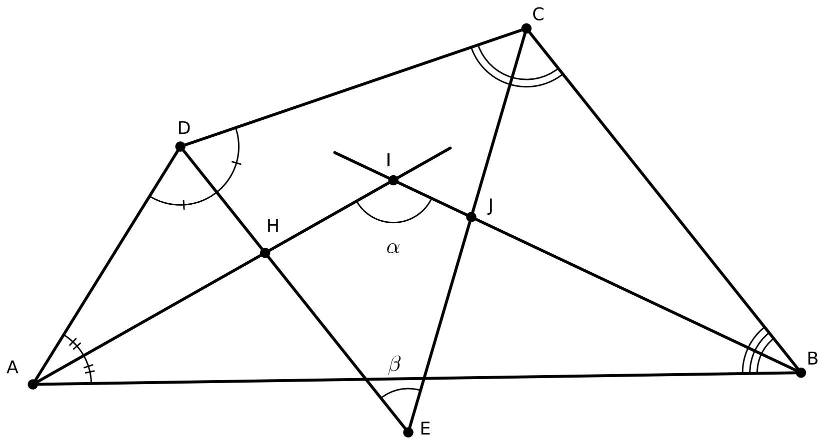
Então

$$\begin{aligned} 6+5 &= (r_a - r_b) + (r_a - r_c) \\ &= 2r_a - (r_b + r_c) \\ &= 2r_a - 9 \\ r_a &= 10. \end{aligned}$$

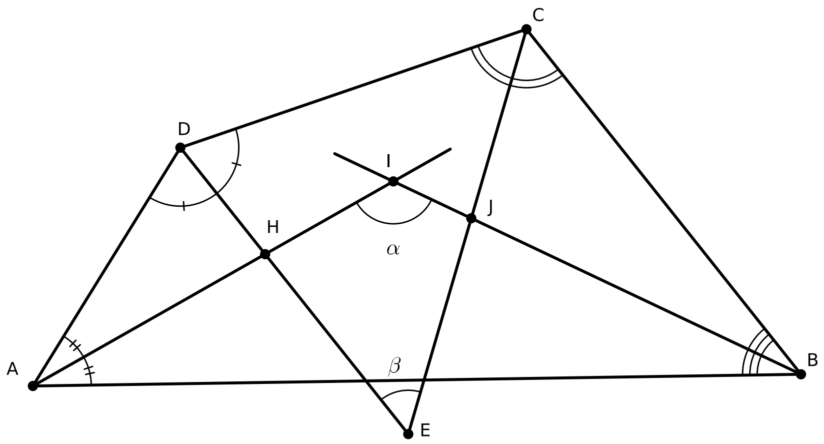
Portanto, $AX = 10$.

7 *Quadrilátero formado por bissetrizes*

Dado um quadrilátero convexo, se as quatro bissetrizes de seus ângulos formam um novo quadrilátero $HIJE$, calcule a soma dos ângulos opostos $\angle HIJ + \angle JEH$.



7 *Quadrilátero formado por bissetrizes – Solução*

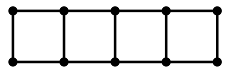


Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, temos:

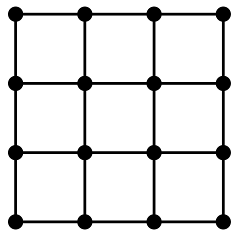
$$\begin{aligned}
\alpha+\beta &= 360^\circ - \angle IHE - \angle IJE \\
&= 360^\circ - \angle DHA - \angle CJB \\
&= 360^\circ - (180^\circ - \angle ADH - \angle DAH) - (180^\circ - \angle JCB - \angle JBC) \\
&= \angle ADH + \angle DAH + \angle JCB + \angle JBC \\
&= \frac{\angle ADC}{2} + \frac{\angle DAB}{2} + \frac{\angle DCB}{2} + \frac{\angle CBA}{2} \\
&= \frac{360^\circ}{2} \\
&= 180^\circ.
\end{aligned}$$

$\boxed{8}$ *A fuga das formigas*

a) João arranjou 13 palitos no formato de um cercado retangular 1×4 como mostrado na figura abaixo. Cada palito é o lado de um quadradinho 1×1 e no interior de cada um destes quadradinhos ele colocou uma formiga. Qual o número mínimo de palitos que devemos remover para garantir que todas as 4 formigas consigam fugir e retornar para os seus formigueiros?

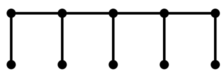


b) João agora arranjou 24 palitos no formato de um cercado quadrado 4×4 como mostrado na figura abaixo e no interior de cada um destes quadradinhos, ele colocou uma formiga. Qual o número mínimo de palitos que devemos remover para garantir que todas as 9 formigas consigam fugir e retornar para os seus formigueiros?



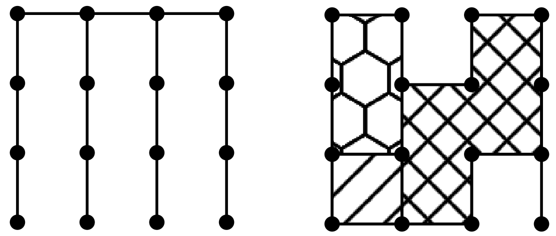
$\boxed{8}$ *A fuga das formigas – Solução*

a) É possível libertarmos todas as formigas removendo 4 palitos como indica a figura a seguir.



Como cada palito é compartilhado por no máximo dois quadrados e cada quadrado deve possuir pelo menos uma lateral aberta para que a formiga em seu interior possa fugir, para usarmos 3 ou menos palitos, somos obrigados a remover pelo menos um palito do interior que é lateral de dois quadrados. A remoção de um destes palitos aglutina o interior de dois quadradinhos num compartimento maior e, do ponto de vista prático, transforma o problema de libertar 4 formigas em um cercado 1×4 no problema de libertarmos 3 formigas em um cercado 1×3. Se é possível removermos 3 ou menos no cercado 1×4, também deve ser possível libertarmos as formigas de um 1×3 usando 2 ou menos palitos. Pelo mesmo argumento inicial, isto nos força a remover pelo menos um palito interior e assim, o problema é novamente transformado em libertarmos duas formigas em um cercado 1×2 removendo apenas um palito. Isto é claramente impossível, tanto removendo o único palito interior como um palito do bordo de tal cercado. Logo, o mínimo de palitos que devem ser removidos neste caso é 4.

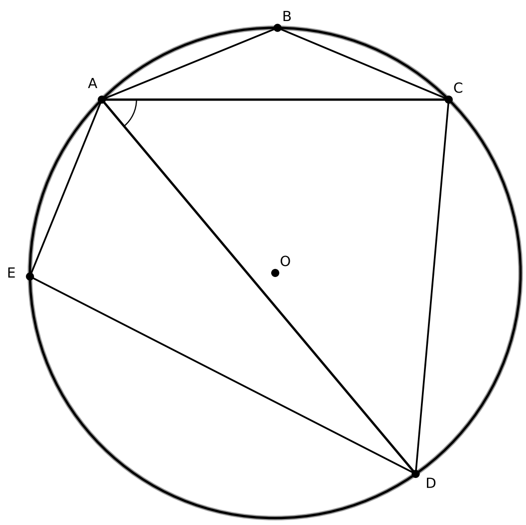
b) É possível libertarmos todas as formigas removendo 9 palitos como indica o exemplo da esquerda da figura a seguir



Durante a retirada sucessiva de palitos para a libertação das formigas, chamemos em qualquer momento por compartimento qualquer linha poligonal fechada de palitos sem possuir em seu interior uma outra linha poligonal fechada de palitos. Por exemplo, na figura da direita acima, onde foram removidos 6 palitos, temos 3 compartimentos indicados por três tipos de preenchimentos distintos. Veja que a remoção de um palito diminui o número de compartimentos em no máximo uma unidade. Portanto, como temos inicialmente 9 compartimentos e queremos que no final nenhuma formiga fique presa em qualquer tipo de compartimento, devemos remover pelo menos 9 palitos.

$\boxed{9}$ *Os ângulos do pentágono*

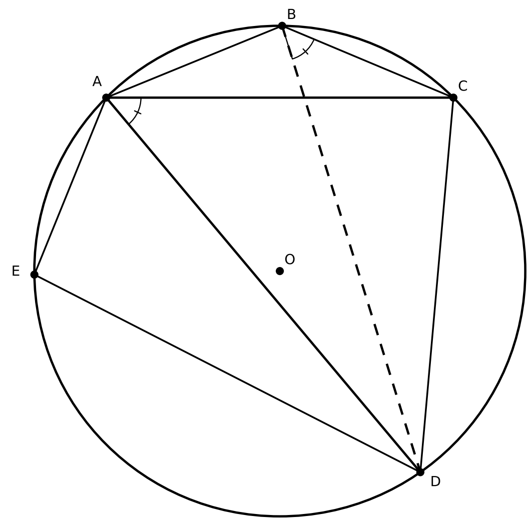
Todos os vértices do pentágono $ABCDE$ estão sobre um mesmo círculo. Se $\angle DAC = 50°$, determine $\angle ABC + \angle AED$.



9 *Os ângulos do pentágono – Solução*

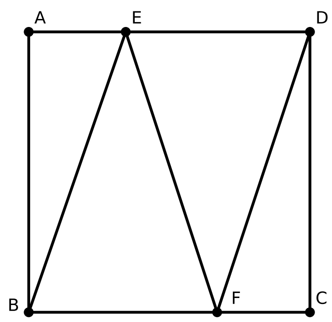
Como ângulos inscritos associados a um mesmo arco são iguais, temos $\angle DAC = \angle DBC$. Além disto, sabendo que a soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscritível é 180°, segue que

$$\begin{aligned}
\angle ABC + \angle AED &= (\angle ABD + \angle AED) + \angle DBC \\
&= 180^\circ + \angle DAC \\
&= 180^\circ + 50^\circ \\
&= 230^\circ.
\end{aligned}$$



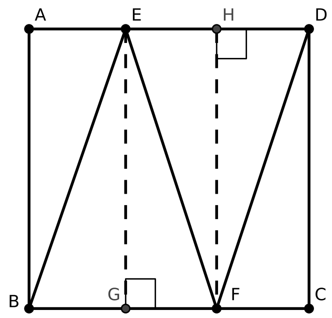
10 *Pontos nos lados do quadrado*

Os pontos E e F estão nos lados AD e BC, respectivamente, do quadrado $ABCD$. Sabendo que $BE = EF = FD = 30$, encontre a área do quadrado.



$\boxed{10}$ *Pontos nos lados do quadrado – Solução*

Sejam G e H os pés das perpendiculares traçadas de E e F aos lados BC e AD, respectivamente.



Como $AB = CD$ e $BE = FD$, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned} AE &= \sqrt{BE^2 - AB^2} \\ &= \sqrt{FD^2 - CD^2} \\ &= FC. \end{aligned}$$

Além disto, como $EF = FD$, novamente pelo Teorema de Pitágoras, podemos concluir que

$$\begin{aligned} EH &= \sqrt{EF^2 - HF^2} \\ &= \sqrt{FD^2 - HF^2} \\ &= HD \\ &= FC. \end{aligned}$$

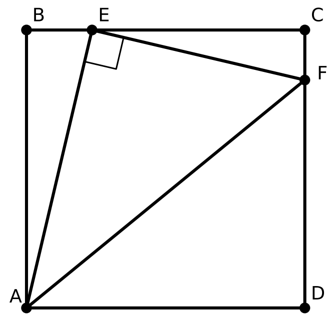
Consequentemente, $AE = EH = HD = x$ e $AB = AD = 3x$. Finalmente, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AEB, temos

$$900 = BE^2 = AE^2 + AB^2 = x^2 + 9x^2.$$

Logo, a área do quadrado é $AB^2 = 9x^2 = 810$.

$\boxed{11}$ *Triângulo inscrito no quadrado*

No desenho a seguir, $ABCD$ é um quadrado e os pontos E e F estão sobre os lados BC e CD de modo que AEF é um triângulo retângulo, $AE = 4$ e $EF = 3$. Qual é a área do quadrado?



11 *Triângulo inscrito no quadrado – Solução*

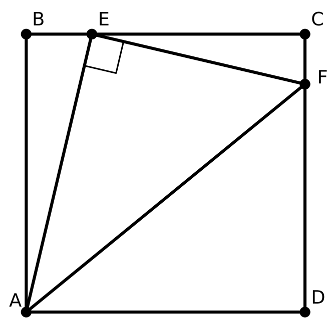
Se $\angle BAE = \alpha$, como $\angle ABC = \angle AEF = 90^\circ$, temos $\angle BEA = 90^\circ - \alpha$ e $\angle FEC = \alpha$. Consequentemente os triângulos BEA e CFE são semelhantes e

$$\frac{BE}{CF} = \frac{AB}{EC} = \frac{AE}{EF} = \frac{4}{3}.$$

Se $BE = x$, temos $CF = \frac{3x}{4}$ e $\frac{AB}{AB - x} = \frac{4}{3}$, ou seja, $AB = 4x$. Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos EAF e AFD, temos

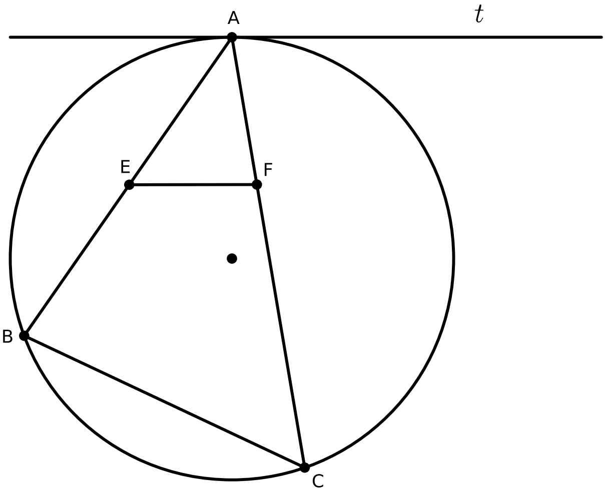
$$\begin{aligned}
AE^2 + EF^2 &= AF^2 \\
3^2 + 4^2 &= AD^2 + FD^2 \\
25 &= AB^2 + (AB - CF)^2 \\
25 &= 16x^2 + \frac{169x^2}{16} \\
25 &= \frac{425x^2}{16} \\
x^2 &= \frac{16}{17}.
\end{aligned}$$

Portanto, a área do quadrado é $AB^2 = 16x^2 = \frac{256}{17}$.



12 *O comprimento do segmento*

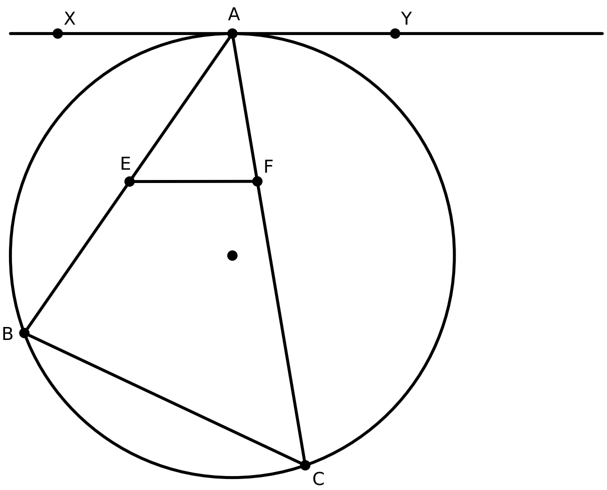
Na figura, a reta t é paralela ao segmento EF e tangente ao círculo. Se $AE = 12$, $AF = 10$ e $FC = 14$, determine a medida do comprimento de EB.



12 *O comprimento do segmento – Solução*

Como a reta t é tangente ao círculo, temos $\angle XAE = \angle ACB$. Além disto, como t e EF são paralelos, temos $\angle XAE = \angle AEF$. De forma semelhante, temos $\angle YAF = \angle AFE = \angle ABC$. Portanto, $\triangle AFE \simeq \triangle ABC$. Daí,

$$\begin{aligned}\frac{AE}{AC} &= \frac{AF}{AB}\\ \frac{12}{10+14} &= \frac{10}{12+EB}\\ 12+EB &= 20\\ EB &= 8.\end{aligned}$$

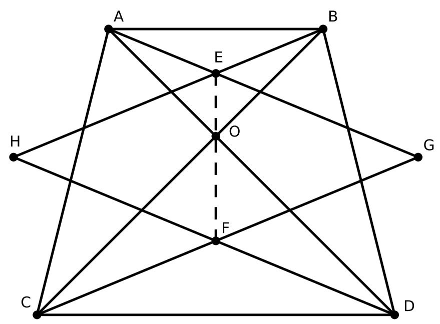


13 *Bissetrizes formando um losango*

Os lados AB e CD do quadrilátero $ABDC$ são paralelos. As bissetrizes dos ângulos $\angle BAD$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ e $\angle ADC$ se encontram em E, G, F e H como indica a figura a seguir. Seja O o ponto de interseção das diagonais de $ABDC$.

a) Verifique que E, O e F estão em uma mesma reta.

b) Supondo que $EGFH$ é um losango, verifique que $CO = OD$.



13 *Bissetrizes formando um losango – Solução*

a) Como AG e BH são as bissetrizes de $\angle BAO$ e $\angle ABO$, segue que E é o incentro do triângulo ABO. Portanto, EO é a bissetriz do ângulo $\angle AOB$. De forma semelhante, podemos concluir que OF é bissetriz do ângulo $\angle COD$. Como os ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$ são opostos pelo vértice, as retas determinadas por EO e OF coincidem com a bissetriz de $\angle AOB$. Logo, E, O e F estão em uma mesma reta.

b) Dado que $EGFH$ é um losango, temos $\angle EFG = \angle FEG = \angle EFH = \angle HEF$. Portanto,

$$\begin{aligned} \angle OFC &= \angle OFH + \angle HFC \\ &= \angle OFG + \angle GFD \\ &= \angle OFD. \end{aligned}$$

Como $\angle DOF = \angle FOC$, seque que os triângulos OFC e ODF possuem os mesmos ângulos e o lado OF em comum. Pelo caso de congruência ALA, temos $\triangle COF \equiv \triangle DOF$ e, consequentemente, $CO = OD$.

$\boxed{14}$ *Números no quadro negro*

Sobre um quadro negro existem os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Em cada movimento, João pode trocar dois números a e b por $a \cdot b + a + b$. Encontre todas as possibilidades para o último número no quadro negro.

$\boxed{14}$ *Números no quadro negro – Solução*

Realizemos uma sequência de movimentos para analisar o comportamento da lista de números ao longo dos movimentos:

$$\begin{aligned}
1,\mathbf{2},\mathbf{3},4,5,6 &\quad\rightarrow\\
1,11,\mathbf{4},5,\mathbf{6} &\quad\rightarrow\\
\mathbf{1},11,5,\mathbf{34} &\quad\rightarrow\\
\mathbf{69},11,\mathbf{5} &\quad\rightarrow\\
\mathbf{11},\mathbf{419} &\quad\rightarrow\\
5039. &
\end{aligned}$$

A expressão $a \cdot b + a + b$ é muito semelhante à expressão $(a+1)\cdot(b+1)$. Veja que se somarmos 1 em todos os números antes de um movimento, o multiplicarmos e fizermos o mesmo nos números após um movimento, obteremos o mesmo resultado S, pois

$$(a+1)\cdot(b+1) = [(a \cdot b + a + b) + 1].$$

No exemplo inicial, temos

$$\begin{aligned}
1,\mathbf{2},\mathbf{3},4,5,6 &\qquad S = (1+1)(2+1)(3+1)(4+1)(5+1)(6+1) = 5040\\
1,11,\mathbf{4},5,\mathbf{6} &\qquad S = (1+1)(11+1)(4+1)(5+1)(6+1) = 5040\\
\mathbf{1},11,5,\mathbf{34} &\qquad S = (1+1)(11+1)(5+1)(34+1) = 5040\\
\mathbf{69},11,\mathbf{5} &\qquad S = (69+1)(11+1)(5+1) = 5040\\
\mathbf{11},\mathbf{419} &\qquad S = (11+1)(419+1) = 5040\\
5039 &\qquad S = (5039+1) = 5040
\end{aligned}$$

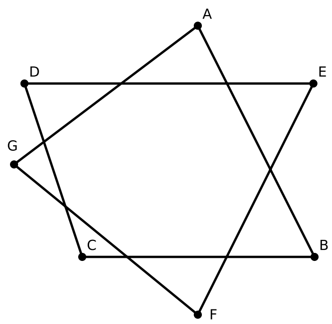
Logo, independentemente de como sejam realizadas as operações, a quantidade S não será alterada e o número final sempre será

$$\begin{aligned}
S &= (1+1)(2+1)(3+1)(4+1)(5+1)(6+1) - 1\\
&= 5039.
\end{aligned}$$

15 *A soma dos ângulos*

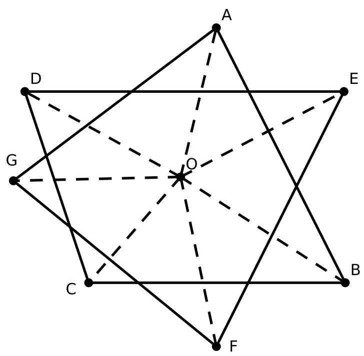
Na figura abaixo, encontre o valor de

$$\angle GAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDE + \angle DEF + \angle EFG + \angle FGA.$$



15 *A soma dos ângulos – Solução*

Considere o ponto O no interior da figura, como indicado no desenho abaixo.



Então

$$\begin{aligned}
\angle GAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDE + \angle DEF + \angle EFG + \angle FGA &= \\
(\angle GAO + \angle OAB) + (\angle ABO + \angle OBC) + (\angle BCO + \angle OCD) &+ \\
+(\angle CDO + \angle ODE) + (\angle DEO + \angle OEF) + (\angle EFO + \angle OFG) &+ \\
+(\angle FGO + \angle OGA).&
\end{aligned}$$

Veja agora que a soma dos ângulos entre parênteses correspondem a 7 pares de ângulos dos triângulos DOE, EOF, FOG, GOA, ABO, BOC e CDO. Como a soma dos ângulos desses triângulos é $7 \cdot 180° = 1260°$ e

$$\begin{aligned}
\angle DOE + \angle EOF + \angle FOG + \angle GOA + \angle AOB + \angle BOC + \angle COD &= 2 \cdot 360° \\
&= 720°,
\end{aligned}$$

segue, após comparação com a primeira equação, que a soma procurada é

$$1260° - 720° = 540°.$$

$\boxed{16}$ *Estrada triangular*

Três carros partem de uma cidade A ao mesmo tempo e percorrem um caminho fechado composto por três segmentos de reta AB, BC e CA. As velocidades do primeiro carro sobre esses segmentos são 12, 10 e 15 quilômetros por hora, respectivamente. As velocidades do segundo carro são 15, 15 e 10 quilômetros por hora, respectivamente. Finalmente, as velocidades do terceiro carro são 10, 20 e 12 quilômetros por hora, respectivamente. Encontre o valor do ângulo $\angle ABC$, sabendo que todos os três carros terminam na cidade A ao mesmo tempo.

$\boxed{16}$ *Estrada triangular – Solução*

Sejam x, y e z os comprimentos de AB, BC e AC, respectivamente. O tempo de chegada t, comum aos três carros, pode ser encontrado através das equações:

$$\begin{cases} \frac{x}{12}+\frac{y}{10}+\frac{z}{15} &= t \\ \frac{x}{15}+\frac{y}{15}+\frac{z}{10} &= t \\ \frac{x}{10}+\frac{y}{20}+\frac{z}{12} &= t. \end{cases}$$

Multiplicando todas as equações por 60, obtemos

$$\begin{cases} 5x+6y+4z &= 60t \\ 4x+4y+6z &= 60t \\ 6x+3y+5z &= 60t. \end{cases}$$

Da segunda equação, temos $x+y=(60t-6z)/4=(30t-3z)/2$. Substituindo este valor na terceira equação, temos

$$x=\frac{60t-3(x+y)-5z}{3}=\frac{30t-z}{6}.$$

Além disto,

$$y=\frac{30t-3z}{2}-\frac{30t-z}{6}=\frac{60t-8z}{6}.$$

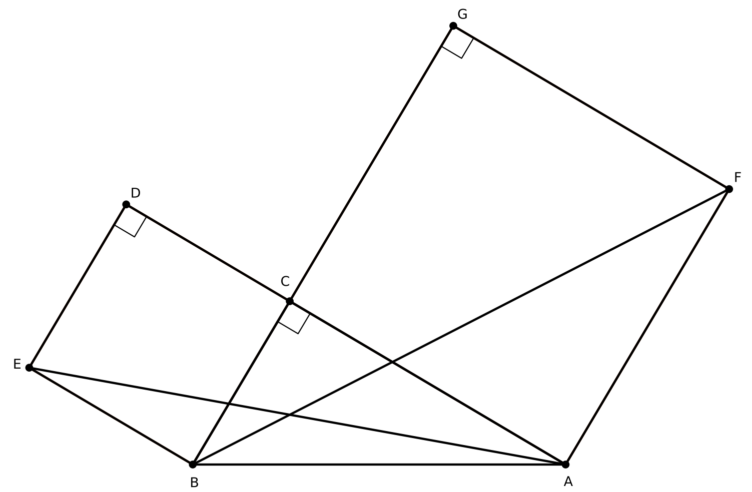
Finalmente, substituindo os dois valores encontrados na primeira equação do último sistema, obtemos

$$\begin{aligned} 5\cdot\frac{30t-z}{6}+6\cdot\frac{60t-8z}{6}+4z &= 60t \\ 150t-5z+360t-48z+24z &= 360t \\ t &= \frac{29}{150}z. \end{aligned}$$

Substituindo nas expressões para x e y, podemos concluir que $(x,y,z)=(4z/5,3z/5,z)$. Como os lados do triângulo ABC estão na proporção $3:4:5$, podemos concluir que ele é semelhante ao triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5. Consequentemente, $\angle ABC=90°$.

17 *Produto das áreas*

Na figura abaixo, o triângulo ABC é retângulo em C e tanto $BCDE$ quanto $CAFG$ são quadrados. Se o produto das áreas dos triângulos EAB e BFA é 64, determine a área do triângulo ABC.



17 *Produto das áreas – Solução*

Como DA é paralelo a EB, a área do triângulo AEB é $\dfrac{EB \cdot BC}{2} = \dfrac{BC^2}{2}$. Da mesma forma, a área do triângulo ABF é $\dfrac{AC^2}{2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} [ABE] \cdot [ABF] &= \frac{BC^2}{2} \cdot \frac{AC^2}{2} \\ 64 \cdot 4 &= BC^2 \cdot AC^2 \\ 16 &= BC \cdot AC. \end{aligned}$$

Logo, a área do triângulo ABC é $\dfrac{BC \cdot AC}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$.

18 *Tempos de corrida*

Arnaldo, Bráulio e Carlos participarão de uma corrida de rua. Depois de algumas semanas, eles estavam discutindo suas estratégias. Arnaldo corre a primeira metade da distância total da corrida a $9km/h$ e a segunda metade a $11km/h$. Já Bráulio corre um terço da distância a $9km/h$, o segundo terço a $10km/h$ e, por fim, o último terço a $11km/h$. Carlos usa uma estratégia diferente dos dois primeiros, ele corre metade do seu tempo total de corrida a $9km/h$ e a metade final do tempo a $11km/h$. Determine a ordem entre os tempos totais de Arnaldo, Bráulio e Carlos de chegada ao final da corrida.

18 *Tempos de corrida – Solução*

Chamaremos os tempos, medidos em horas, de Arnaldo, Bráulio e Carlos de t_A, t_B e t_C, respectivamente. Seja $6d$ a distância total da corrida, medida em quilômetros. Como Carlos corre metade do tempo a $9km/h$ e metade a $11km/h$, então

$$6d = 9 \cdot \frac{t_C}{2} + 11 \cdot \frac{t_C}{2} = 10 \cdot t_C.$$

Com isto, podemos montar equações e comparar os três tempos.

$$\begin{aligned}
t_A &= \frac{3d}{9} + \frac{3d}{11} \\
&= \frac{600d}{990} \\
t_B &= \frac{2d}{9} + \frac{2d}{10} + \frac{2d}{11} \\
&= \frac{598d}{990} \\
t_C &= \frac{6d}{10} \\
&= \frac{594d}{990}.
\end{aligned}$$

Concluímos que $t_C < t_B < t_A$, ou seja, o tempo de Carlos é menor que o de Bráulio que, por sua vez, é menor que o de Arnaldo.

19 *Fazendo o Máximo Divisor Comum com idades*

Paulinho estava estudando o Máximo Divisor Comum (MDC) na escola e decidiu praticar em casa. Ele chamou de a, b e c as idades de três pessoas que moram com ele. Em seguida, fez algumas operações com os fatores primos deles e obteve os máximos divisores comuns dos 3 pares de números. Alguns dias depois, ele esqueceu as idades a, b e c, mas encontrou os seguintes resultados anotados:

$$\begin{aligned}
a \cdot b \cdot c &= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3, \\
MDC(a,b) &= 15, \\
MDC(a,c) &= 5, \\
MDC(b,c) &= 20.
\end{aligned}$$

Ajude Paulinho a determinar os valores de a, b e c.

$\boxed{19}$ *Fazendo o Máximo Divisor Comum com idades – Solução*

Analisando os máximos divisores comuns listados, podemos garantir que a é múltiplo de 15 e de 5, b é múltiplo de 15 e de 20 e c é múltiplo de 5 e de 20. Usando os fatores primos destes números, temos que a é múltiplo de 15, b é múltiplo de 60 e c é múltiplo de 20. Deste modo, existem inteiros positivos x, y e z, tais que

$$\begin{aligned} a &= 15 \cdot x = 3 \cdot 5 \cdot x, \\ b &= 60 \cdot y = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot y, \\ c &= 20 \cdot z = 2^2 \cdot 5 \cdot z. \end{aligned}$$

Substituindo estas expressões de a, b e c no produto, temos $x \cdot y \cdot z = 1$ e, portanto, $x = y = z = 1$. Logo, $a = 15$, $b = 60$ e $c = 20$.

$\boxed{20}$ *A soma dos primos de* 1 *até* 1000 *é no máximo quanto?*

Há muitos anos, um professor que não queria dar aula, ordenou que seus alunos calculassem a soma dos números de 1 até 100. Um aluno muito esperto, chamado *Gauss*, descobriu um jeito muito simples de realizar a tarefa descobrindo a fórmula:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Como esta história já tem muito tempo, hoje os desafios dados aos alunos pedem tarefas mais elaboradas.

(a) Verifique que todo número primo maior que 3 deixa resto 1 ou 5 na divisão por 6.

(b) Verifique que a soma dos números primos que são maiores que 1 e menores que 1000 é menor que 166338.

(c) Na estimativa acima, para ter menos complicações técnicas, não eliminamos alguns números que certamente não são primos. Elimine alguns desses números e verifique que a soma dos primos que são maiores que 1 e menores que 1000 é menor que 166000.

$\boxed{20}$ *A soma dos primos de* 1 *até* 1000 *é no máximo quanto? – Solução*

(a) Seja p um primo maior que 3. Este primo, como qualquer número inteiro positivo, só pode deixar restos de 0 a 5 na divisão por 6. Veja que se ele deixasse os restos 0, 2, 3 ou 4, poderíamos fatorá-lo:

$$\begin{aligned} p &= 6q + 0 = 2 \cdot 3q \\ p &= 6q + 2 = 2 \cdot (3q + 1) \\ p &= 6q + 3 = 3 \cdot (2q + 1) \\ p &= 6q + 4 = 2 \cdot (3q + 2). \end{aligned}$$

Como p é maior que 3, em cada um dos casos acima ele seria um número composto. Então os únicos restos possíveis de p por 6 são 1 e 5.

(b) Para fazer uma estimativa superior, podemos somar 2, 3 e todos os números que deixam restos 1 ou 5 na divisão por 6. Usaremos a fórmula de soma dada no enunciado e, por simplicidade, representaremos um número que deixa resto 5 por um múltiplo de 6 menos 1:

$$\begin{aligned} 2+3+(6\cdot 1-1)+(6\cdot 1+1)+\ldots+(6\cdot 166+1) &= 5+12\cdot(1+2+\ldots+166) \\ &= 5+12\cdot\frac{166\cdot 167}{2} \\ &= 5+166332 \\ &= 166337. \end{aligned}$$

Então a soma dos números primos menores que 1000 é menor que 166338.

(c) Entre os números considerados no item anterior, há vários que não são primos. Consideremos números que são múltiplos de 5 maiores que 5 dentre os que deixam resto 1 ou 5 por 6. Basta então subtrair alguns destes múltiplos de 5 menores que 100 para melhorarmos a estimativa:

$$\begin{aligned} 25+35+55+65+85+95 &= 60+120+180 \\ &= 360. \end{aligned}$$

E, com isto, podemos concluir que a soma dos números primos menores que 1000 é menor que $166338-360<166000$.

$\boxed{21}$ *Escrevendo quocientes e restos*

Júlia está treinando para olimpíadas de matemática. Um dia ela decide dividir 2014 por cada um dos divisores inteiros positivos de 2015. Para cada divisão, ela escreve o quociente no seu caderno e o resto em uma lousa.

(a) Vamos ajudar Júlia. Escreva os oito divisores inteiros positivos de 2015.

(b) Para cada um dos divisores, faça a divisão e escreva uma lista com os quocientes e outra com os restos obtidos.

(c) Ao terminar, Júlia percebeu uma grande "coincidência": os números escritos no caderno eram os mesmos que estavam no quadro, apenas escritos em uma ordem diferente. Seria uma coincidência? Mostre que, para qualquer número n que Júlia escolher, se ela calcular o quociente e o resto da divisão de $n-1$ por cada um dos divisores de n os números no caderno e na lousa serão exatamente os mesmos, estando apenas, possivelmente, escritos em uma ordem diferente.

21 *Escrevendo quocientes e restos – Solução*

(a) A fatoração de 2015 em primos é $5 \cdot 13 \cdot 31$. Então seus oito divisores inteiros positivos são:

$$\{1, 5, 13, 31, 65, 155, 403, 2015\}.$$

(b) Escrevendo as divisões na forma $n = m \cdot q + r$, onde q é o quociente e r é o resto, teremos

$$\begin{aligned}
2014 &= 1 \cdot 2014 + 0 \\
2014 &= 5 \cdot 402 + 4 \\
2014 &= 13 \cdot 154 + 12 \\
2014 &= 31 \cdot 64 + 30 \\
2014 &= 65 \cdot 30 + 64 \\
2014 &= 155 \cdot 12 + 154 \\
2014 &= 403 \cdot 4 + 402 \\
2014 &= 2015 \cdot 0 + 2014.
\end{aligned}$$

(c) Além dos números nas duas listas serem os mesmos, note que eles são exatamente os antecessores dos divisores de 2015. De fato, seja x um divisor de n, então existe um divisor y tal que $n = x \cdot y$. Dividindo $n-1$ por x e por y, temos:

$$\begin{aligned}
n &= x \cdot y \\
n-1 &= x \cdot (y-1) + (x-1) \\
n-1 &= y \cdot (x-1) + (y-1).
\end{aligned}$$

Como o resto na divisão de um número por outro é único e sabemos que $0 \le x-1 < x$ e $0 \le y-1 < y$, então os restos destas duas divisões são exatamente $x-1$ e $y-1$. O que define também, de forma única, os quocientes: $y-1$ e $x-1$. Estes números devem ser escritos na lousa e no caderno, mas na ordem trocada. Vale lembrar que se $x = y$, no caso em que n é um quadrado perfeito, então em vez de duas divisões existirá apenas uma e o mesmo número será escrito na lousa e no caderno. Deste modo, as listas na lousa e no caderno possuem os mesmos números, que são os antecessores dos divisores positivos de n.

22 *Formando conjuntos com a mesma soma*

Os elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ podem ser separados nos conjuntos $\{3, 9, 10, 11\}$ e $\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$ de modo que cada um deles possua soma dos elementos igual a 33.

(a) Exiba um modo de separar os elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ em três conjuntos tais que as somas dos elementos de cada conjunto seja a mesma.

(b) Explique por que não é possível separar os números do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ em dois conjuntos de mesma soma.

(c) Para cada inteiro positivo $n \geq 2$, determine o menor inteiro positivo N tal que o conjunto $\{1,2,\ldots,N\}$ pode ser separado em exatamente n conjuntos de mesma soma.

22 *Formando conjuntos com a mesma soma – Solução*

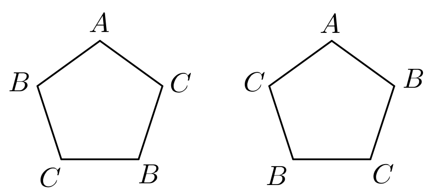
(a) A soma dos números de 1 até 8 é igual a 36, então cada um dos três conjuntos deve ter soma 12. Basta separar nos conjuntos: $\{4,8\}$, $\{5,7\}$ e $\{1,2,3,6\}$.

(b) A soma dos números de 1 até 10 é igual a 55. Para separar em dois conjuntos de mesma soma, cada um teria elementos inteiros positivos e soma $\frac{55}{2}$. Como $\frac{55}{2}$ não é inteiro, não é possível fazer tal separação.

(c) Se formarmos n conjuntos de mesma soma, no máximo um deles pode ter um elemento e os demais $n-1$ conjuntos teriam pelo menos dois elementos. Isto nos permite concluir que $N \geq 1+2\cdot(n-1) = 2n-1$. Para verificar que $N = 2n-1$ é o menor, temos que separar o conjunto $\{1,2,...,2n-1\}$ em n conjuntos de mesma soma. Considere os conjuntos $\{2n-1\}$, $\{2n-2,1\}$, $\{2n-3,2\}$, ..., $\{n+1,n-2\}$ e $\{n,n-1\}$. São exatamente n conjuntos e cada um possui soma dos elementos igual a $2n-1$. Assim, concluímos que $N = 2n-1$ é o menor inteiro positivo que satisfaz às condições do problema.

23 *Trocando os botões*

João possui botões de três cores: azul, branco e cinza. Representaremos um botão azul por A, um botão branco por B e um botão cinza por C. Ele coloca cinco botões nos vértices de um pentágono regular no sentido horário: A, C, B, C e B, como na primeira figura a seguir. Ele sabe que pode fazer algumas trocas de botões obedecendo uma certa regra. Ao escolher um botão, ele pode trocá-lo por um de outra cor desde que não fiquem dois botões com uma mesma cor em vértices vizinhos. Para não ficar trocando botões sem objetivo, ele decide adotar como meta deixar os botões com as cores A, B, C, B e C no sentido horário como indicado na segunda figura a seguir.



Após fazer várias trocas, João não conseguiu chegar na situação final desejada. Decidiu então pedir ajuda ao seu professor Piraldo. O professor afirma que não é possível partir da configuração inicial e chegar na configuração final desejada. Para provar isto, o professor Piraldo pegou algumas cartas com os números 1, −1 e 0. Então ele disse para João colocar sobre cada lado do pentágono uma carta com o seguinte padrão:

i) Olhando no sentido horário, se os vértices tiverem B e A ou tiverem A e C coloque uma carta com o número 1.

ii) Ainda olhando no sentido horário, se os vértices tiverem A e B ou tiverem C e A coloque uma carta com o número -1.

iii) Para os demais casos coloque a carta 0.

Sempre que fizer uma troca, mude as cartas usando estas instruções. Após a explicação, o professor Piraldo disse que analisando o comportamento das cartas João agora poderia concluir porque é impossível atingir o objetivo inicial.

(a) Fazendo todas as trocas possíveis de botões, de A para B, de B para C ou de C para A e as trocas reversas, o que acontece com a soma das cartas colocadas sobre os lados segundo as instruções do professor Piraldo?

(b) Qual a soma das cartas na situação inicial e na situação final desejada? Conclua que não é possível partir da configuração inicial e chegar na situação final desejada.

23 *Trocando os botões – Solução*

(a) Como são apenas três cores, há apenas 3 trocas de botões possíveis. Além disto, os dois botões nos vértices vizinhos do vértice onde a troca é feita, devem ter botões de cores diferentes tanto da cor anterior quanto da cor após a troca. Como são apenas três cores, os dois vizinhos necessariamente possuem botões da mesma cor. Considerando o vértice em que o botão será trocado junto com seu anterior e seu sucessor no sentido horário, temos apenas três tipos de trocas possíveis de botões:

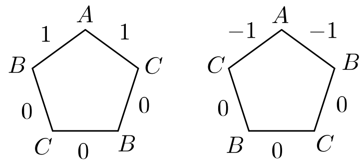
$$\begin{aligned} CAC &\leftrightarrow CBC \\ ABA &\leftrightarrow ACA \\ BCB &\leftrightarrow BAB. \end{aligned}$$

Considerando agora a soma dos valores das duas cartas que estão entre o primeiro e o segundo e entre o segundo e terceiro vértice, teremos as seguintes possíveis alterações:

$$\begin{aligned} (-1)+1 &= 0+0, \\ (-1)+1 &= 1+(-1), \\ 0+0 &= 1+(-1), \end{aligned}$$

respectivamente. Deste modo, concluímos que a soma dos números nas cartas, seguindo as instruções do professor Piraldo, não varia.

(b) Na figura a seguir, temos as cartas colocadas na situação inicial e na situação final.



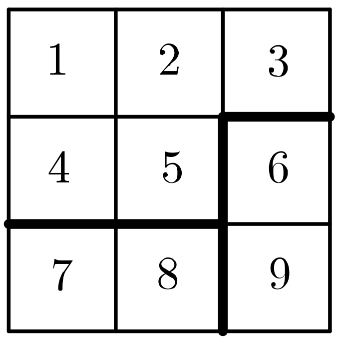
Como a soma das cartas é diferente e já vimos no item anterior que as trocas não podem alterar esta soma, então não é possível chegar à situação final desejada partindo da situação inicial.

24 *Dividindo quadrados em poliminós com mesma soma*

Um poliminó é uma sequência de quadradinhos 1×1 justapostos compartilhando lados em comum com seus vizinhos e formando uma única peça. Os poliminós de dois quadradinhos são conhecidos como dominós e os poliminós com quatro quadradinhos são conhecidos como tetraminós, as pecinhas do famoso jogo Tetris. A figura a seguir mostra um quadrado 3×3 com números de 1 até 9 escritos em cada um de seus quadradinhos 1×1.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Sabendo que $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$, podemos tentar dividir o quadrado em 3 poliminós com mesma soma, cada um com soma $\frac{45}{3} = 15$. A figura a seguir, mostra uma maneira de fazer isto.



(a) Mostre que não é possível dividir o quadrado 3×3 em uma quantidade maior que três de poliminós de mesma soma.

(b) Considere o quadrado 4×4 com os números de 1 até 16, escritos em ordem crescente como indicado na figura abaixo

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

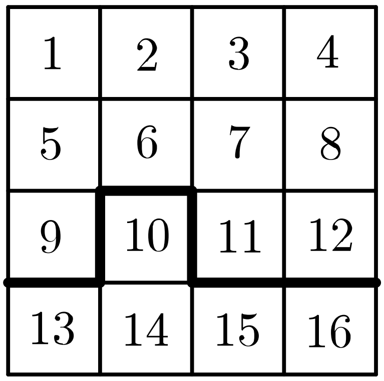
Mostre como dividir este quadrado em dois poliminós de modo que a soma dos números em cada um deles seja a mesma.

(c) Considere o quadrado 5×5 com os números de 1 até 25 escritos em ordem crescente seguindo o padrão da figura anterior. Mostre que não é possível dividir este quadrado em dois ou mais poliminós com a mesma soma dos números em cada um deles.

$\boxed{24}$ *Dividindo quadrados em poliminós com mesma soma – Solução*

(a) Para dividirmos o quadrado em x poliminós de mesma soma, então x deve obrigatoriamente ser um divisor da soma total dos números. No caso do quadrado 3×3, como a soma é 45, se $x > 5$, então cada poliminó teria soma menor que $\frac{45}{5} = 9$. Entretanto, o poliminó que tivesse o quadradinho 9 não poderia realizar esta soma. No caso $x = 5$, devemos ter 5 pedaços com soma 9 em cada. Com isto, o 9 teria que ser deixado sozinho. Porém, o número 8 deixado sozinho não produziria a soma 9 e se o adicionarmos com qualquer um de seus vizinhos, formaremos um poliminó com soma maior que 9. Como 4 não divide 45, concluímos que não é possível dividir em mais que 3 pedaços de mesma soma.

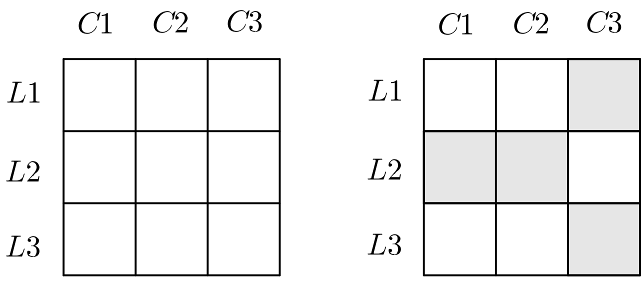
(b) Como a soma dos números de 1 até 16 é igual a 136, então cada um dos dois pedaços deve somar 68. Somando os números da última linha teremos $13+14+15+16 = 58$. As 10 unidades que faltam podem ser incluídas com um único quadradinho, pois os quadrados com os números 10 e 14 possuem um lado em comum. Veja a divisão construída na figura a seguir.



(c) Novamente o primeiro passo é calcular a soma dos números no quadrado, que no caso 5×5, resulta em 325. Lembrando que para dividir o quadrado em x poliminós de mesma soma é necessário que x seja um divisor de 325. Se $x > 13$, então cada parte deverá ter soma menor que $\frac{325}{13} = 25$, mas o poliminó com o quadrado 25 já ultrapassa este valor e impossibilita tal divisão. Entre os divisores de 325, os únicos entre 2 e 13 são 5 e 13. Se $x = 13$, então 25 ficaria sozinho em um poliminó e, em seguida, o 24 não poderia formar poliminó com soma 25 em virtude de seus vizinhos. Se $x = 5$, então a soma de cada poliminó deverá ser 65. Novamente, olhamos para o 25. Se ele estiver no mesmo poliminó que 24 a soma já será 49 e qualquer quadrado adicional faria a soma passar de 65. Então, considere o 25 junto com o 20. Se neste mesmo poliminó tivermos 15 ou 19, a soma passará de 59 e qualquer quadradinho que adicionarmos fará a soma passar de 65. Concluímos que não é possível dividir este quadrado 5×5 em dois ou mais poliminós de mesma soma.

25 *Apertando botões para mudar as cores*

A figura a seguir mostra um tabuleiro 3×3 de quadradinhos 1×1 e botões $L1$, $L2$, $L3$, $C1$, $C2$ e $C3$. Inicialmente todos os quadradinhos estão brancos, mas ao apertar um botão do lado de uma fila, linha ou coluna, altera-se a cor, de branco para preto ou de preto para branco, de todos os quadradinhos daquela fila. Por exemplo, se apertarmos $L2$, mudam-se todos os quadradinhos da segunda linha para a cor preta e, se $C3$ for apertado em seguida, o quadradinho da segunda linha e terceira coluna volta à cor branca e os outros dois quadradinhos da terceira coluna se tornam pretos. O resultado final do uso dos botões $L2$ e $C3$ é exibido na segunda figura a seguir.

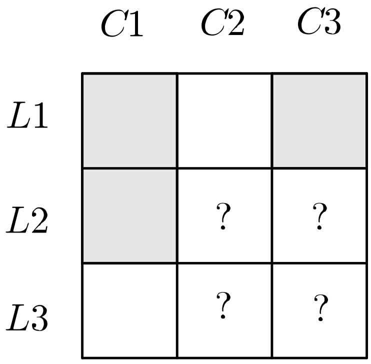


(a) Mostre uma forma de apertar alguns botões para chegar ao mesmo resultado que apertar $L2$ e $C3$, mas sem apertar nenhum destes dois botões.

(b) Considere os quadradinhos X, Y, Z e W a seguir. Após algumas apertadas nos botões, sabe-se que o quadradinho X mudou de cor três vezes, o quadradinho Y mudou de cor cinco vezes e o quadradinho Z mudou de cor duas vezes. Quantas vezes mudou de cor o quadradinho W?

	$C1$	$C2$	$C3$
$L1$	X	Y	?
$L2$	Z	W	?
$L3$	?	?	?

(c) A figura a seguir mostra um tabuleiro resultante de alguns apertos. O tabuleiro possui quatro quadradinhos de cores desconhecidas marcados com ? e cinco quadradinhos de cores conhecidas no bordo. Descubra as cores dos quatro quadradinhos desconhecidos.



25 *Apertando botões para mudar as cores – Solução*

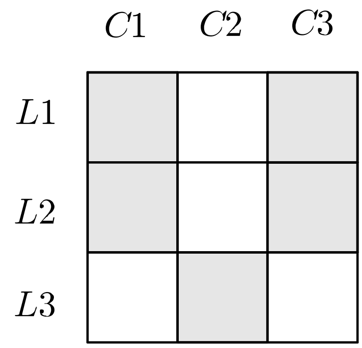
(a) Veja que a cor final de um quadradinho depende apenas da paridade do número de vezes que o quadradinho mudou de cor. Se este número for par, ele termina com a cor branca e, se este número for ímpar, sua cor final será preta. Se apertarmos todos os botões exceto $L2$ e $C3$, todos os quadradinhos terão mesma paridade na quantidade de mudanças de cores comparados com os respectivos quadradinhos depois de apertados $L2$ e $C3$. Então basta apertar $L1$, $L3$, $C1$ e $C2$ para chegar na mesma configuração.

(b) Veja que o número de vezes que X mudou de cor é igual ao número de apertadas de $C1$ mais o número de apertadas de $L1$, pois X muda de cor quando um destes dois botões é apertado. Seguindo este raciocínio, o número de mudanças de W é igual ao número de apertadas de $L2$ e $C2$, o número de mudanças de Y é a soma das quantidades de apertadas de $L1$ e $C2$ e, por último, o número de mudanças de Z é igual ao número de apertadas de $C1$ e $L2$. Isto nos permite concluir que os números de mudanças de X e W somados chegam ao mesmo resultado que os números de mudanças de Y e Z somados. Deste modo, o número de mudanças de W é dado por $5+2-3=4$.

(c) Pelo raciocínio do item anterior, se considerarmos os quatro quadrados nas interseções de duas linhas e duas colunas, as somas dos números de mudanças dos quadrados em diagonal serão iguais. Em outras palavras, sendo preto ímpar e branco par, então quadradinhos de três pontas conhecidas do retângulo permitem determinar a cor do quadradinho que falta. De maneira simplificada:

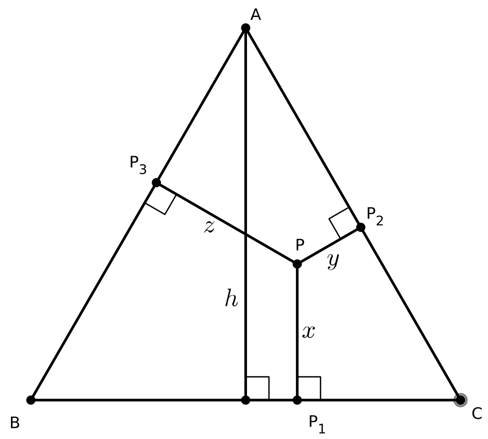
$$\begin{aligned}
(preto + preto) - preto &= preto\\
(preto + preto) - branco &= branco\\
(branco + branco) - preto &= preto\\
(branco + branco) - branco &= branco\\
(preto + branco) - branco &= preto\\
(preto + branco) - preto &= branco.
\end{aligned}$$

Como os quatro desconhecidos formam retângulo, usando os que estão no bordo, podemos achar as cores desconhecidas. A figura a seguir mostra a cor de cada quadradinho.



$\boxed{26}$ *Provando o Teorema de Viviani*

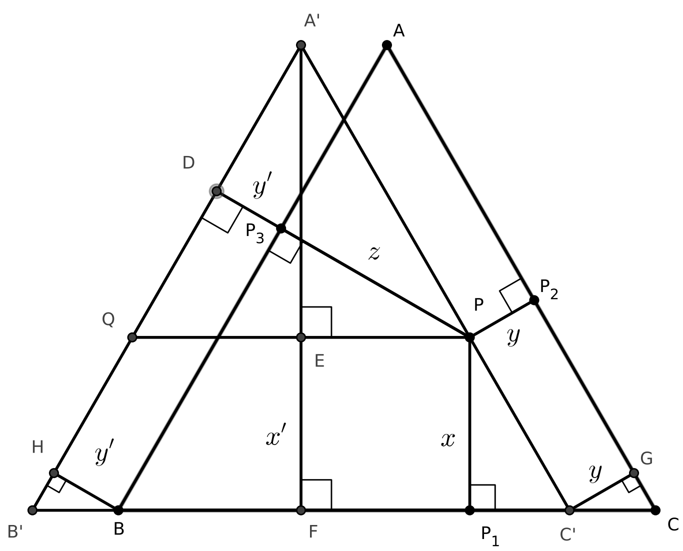
O Teorema de Viviani afirma que a soma das distâncias de um ponto no interior de um triângulo equilátero aos três lados é igual à altura do triângulo. Em outras palavras, seja ABC um triângulo equilátero e P um ponto no seu interior como mostrado na figura a seguir.



Então

$$x + y + z = h.$$

Vamos provar o Teorema de Viviani. Para isto, considere o triângulo $A'B'C'$ congruente ao triângulo ABC, mas que possui o ponto P sobre o lado $A'C'$. O triângulo $A'QP$ possui todos os lados paralelos a $A'B'C'$ e, portanto, também é equilátero.



(a) Prove que $PP_1 = EF$, ou seja, que $x = x'$.

(b) Prove que $P_3D = PP_2$, ou seja, que $y = y'$.

(c) Prove que $A'E = PP_3 + PP_2$, ou seja, que $A'E = y + z$.

(d) Sabendo que $A'F = h$, pois os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes, conclua a demonstração do Teorema de Viviani.

26 *Provando o Teorema de Viviani – Solução*

(a) Note que PP_1 e EF são lados opostos do retângulo PP_1FE, portanto eles possuem o mesmo comprimento.

(b) Observe que P_3DHB e PP_2GC' são retângulos, logo $P_3D = BH = y'$ e $PP_2 = C'G = y$. Veja que os triângulo CGC' e $B'HB$ são congruentes, pois $BB' = CC'$ e possuem ângulos de $90°$ e $60°$. Com isso, $y = y'$.

(c) Veja que o segmento PQ é paralelo ao lado $B'C$, logo $A'PQ$ é um triângulo equilátero. Como as alturas do triângulo equilátero possuem o mesmo comprimento, temos

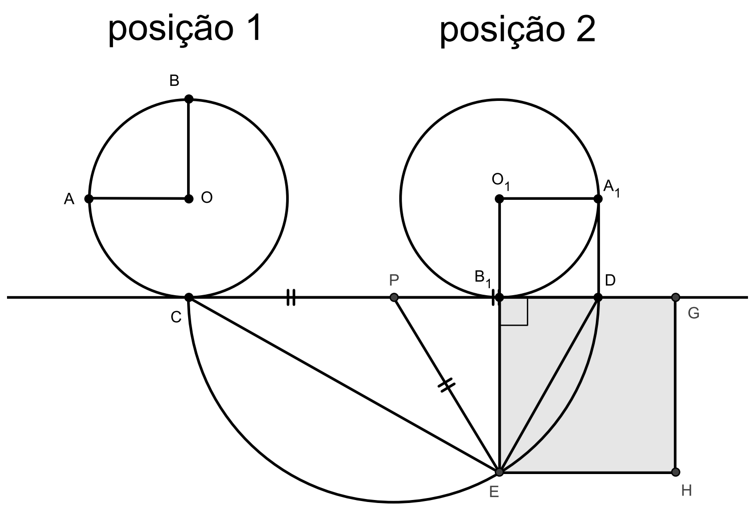
$$A'E = PP_3 + P_3D = y' + z = y + z.$$

(d) Reunindo as informações dos itens anteriores, obtemos:

$$\begin{aligned} x + y + z &= PP_1 + PP_2 + PP_3 \\ &= EF + P_3D + PP_3 \\ &= EF + A'E \\ &= A'F \\ &= h. \end{aligned}$$

27 *Círculo rolando para formar um quadrado de mesma área*

A figura a seguir mostra um círculo de centro O que rolou meia volta para ir da posição 1 até a posição 2. São desenhados a semicircunferência de diâmetro CD e os quadrados $O_1A_1DB_1$ e B_1EHG.



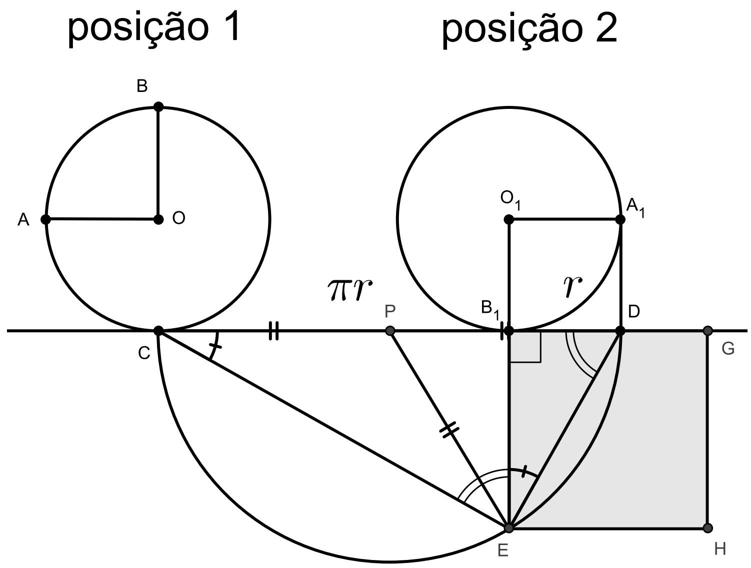
(a) Seja P o centro do diâmetro CD. Observando que $PC = PD = PE$, prove que $\angle CED = 90°$.

(b) Mostre que os triângulos DB_1E e EB_1C são semelhantes.

(c) Mostre que o círculo de centro O e o quadrado B_1EHG possuem a mesma área.

27 *Círculo rolando para formar um quadrado de mesma área – Solução*

Para a solução usaremos a figura a seguir.



(a) Como os triângulos CPE e DPE são isósceles, então $\angle PCE = \angle PEC = x$ e $\angle PED = \angle PDE = y$. Além disto, como a soma dos ângulos internos do triângulo CDE é $2x + 2y$, concluímos que $x + y = 90°$. Logo,

$$\angle CED = \angle CEP + \angle PED = x + y = 90°.$$

(b) Como $x + y = 90°$, podemos concluir que o triângulo DB_1E, que já possui ângulos y e $90°$, possuirá o terceiro ângulo igual a $180° - 90° - y = x$. Analogamente, o triângulo EB_1C possui estes mesmos ângulos. Consequentemente, estes dois triângulos são semelhantes.

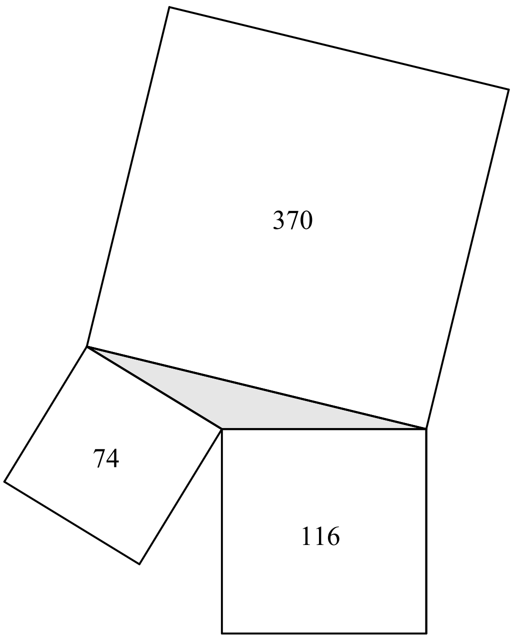
(c) Seja r o raio da circunferência. Como o círculo deu meia volta, então o centro O se deslocou $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$. Analisando o quadrado $O_1A_1DB_1$, temos $B_1D = r$. Pela semelhança do item anterior, sabemos que

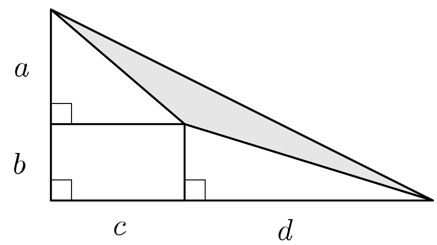
$$\frac{B_1E}{B_1D} = \frac{B_1C}{B_1E} \Rightarrow B_1E^2 = B_1C \cdot B_1D \Rightarrow B_1E^2 = \pi r^2.$$

Como B_1E^2 é a área do quadrado B_1EHG e πr^2 é a área do círculo, fica demonstrado que estas duas figuras possuem a mesma área.

28 *Determinando a área do lago em forma de triângulo*

Na cidade de Oropis existe um lago em forma de triângulo com cada um dos três lados sendo parte do perímetro de um terreno em forma de quadrado com áreas $370m^2$, $116m^2$ e $74m^2$, como na primeira figura a seguir. O prefeito de Oropis, Arnaldo, deseja calcular a área do lago, mas não sabe como. O assistente do prefeito, Bernaldo, tem uma ideia. Ele diz que basta encontrar valores de a, b, c e d que satisfaçam as condições geométricas da segunda figura em que a área sombreada é congruente ao lago. Ele afirma que depois disto a tarefa se tornará muito mais simples.





(a) Determine valores inteiros de a, b, c e d que satisfaçam as condições geométricas da figura de Bernaldo.

(b) Determine a área do lago.

28 *Determinando a área do lago em forma de triângulo – Solução*

(a) Veja que os lados do lago ao quadrado resultam em 74, 116 e 370. As condições que devem ser atendidas são as equações oriundas de três aplicações do Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} a^2+c^2 &= 74 \\ b^2+d^2 &= 116 \\ (a+b)^2+(c+d)^2 &= 370. \end{aligned}$$

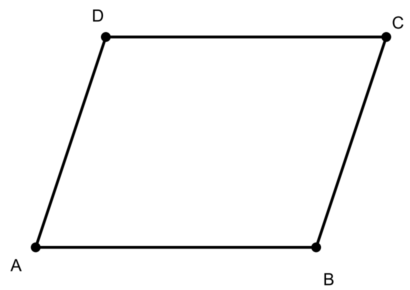
Podemos limitar os testes da primeira equação para números menores que 9, pois $9^2 > 74$. Após uma análise de casos, obtemos $a = 5$ e $c = 7$ ou $a = 7$ e $c = 5$ como únicas possibilidades. Na segunda equação, também após uma análise de casos, temos $b = 4$ e $d = 10$ ou $b = 10$ e $d = 4$ e, por conseguinte, $a + b = 5 + 4 = 9$ e $c + d = 7 + 10 = 17$, pois $(5+10)^2 + (7+4)^2 \neq 370$. Logo, $a = 5$, $b = 4$, $c = 7$ e $d = 10$.

(b) Deste modo, a área do lago é a área do triângulo maior subtraído de dois triângulos e um retângulo. Ou seja, a área do lago, em m^2 é

$$\begin{aligned}\frac{17\cdot 9}{2}-\frac{7\cdot 5}{2}-\frac{10\cdot 4}{2}-7\cdot 4 &= \frac{118}{2}-20-28\\ &= 11.\end{aligned}$$

29 *Condições para um quadrilátero ser um paralelogramo*

Um quadrilátero que possui os pares de lados opostos paralelos é chamado de paralelogramo. Por exemplo, no quadrilátero $ABCD$ a seguir, AB é paralelo a CD e AD é paralelo a BC.

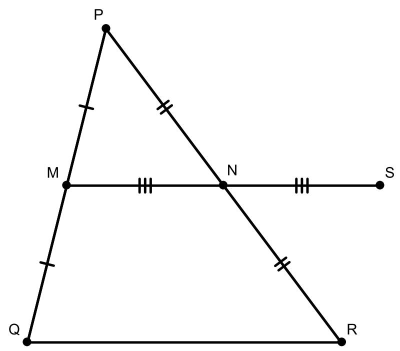


(a) Considerando o paralelogramo $ABCD$, trace a diagonal AC e mostre que os comprimentos dos lados opostos são iguais, ou seja, que $AB = CD$ e $AD = BC$.

(b) Considere um quadrilátero $XYZW$ no qual os lados XY e ZW têm mesma medida e são paralelos, mostre que $XYZW$ é um paralelogramo, ou seja, que o outro par de lados XW e YZ também são paralelos.

(c) Seja $EFGH$ um quadrilátero e seja T o ponto de encontro das suas diagonais. Sabendo que $ET = TG$ e $FT = TH$, prove que $EFGH$ é um paralelogramo.

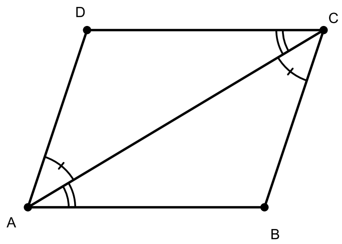
(d) Na figura a seguir, os pontos M e N são os pontos médios dos lados PQ e PR do triângulo PQR. O ponto S é o simétrico do ponto M em relação ao ponto N.



O segmento MN é chamado de base média do triângulo em relação ao lado QR. Mostre que o segmento MN tem metade do comprimento do lado QR e é paralelo a este lado.

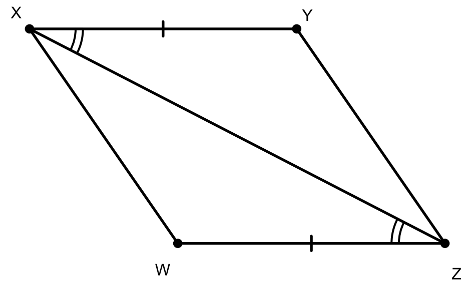
29 *Condições para um quadrilátero ser um paralelogramo – Solução*

(a) Ao traçar AC, temos, por paralelismo, $\angle DAC = \angle BCA$ e $\angle DCA = \angle BAC$.



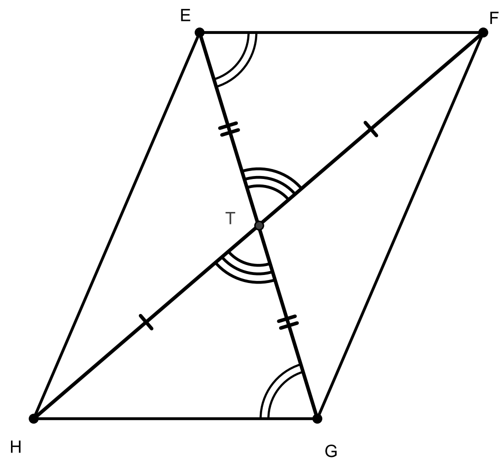
Como o lado AC é comum, os triângulos BCA e DAC são congruentes pelo caso ALA. Logo, $AB = CD$ e $BC = DA$.

(b) Pelo paralelismo de XY e ZW, temos $\angle YXZ = \angle WZX$.



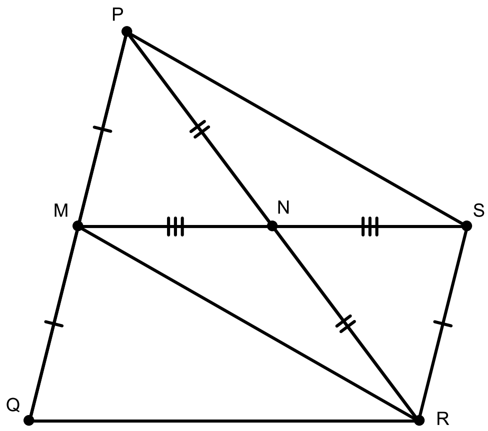
Usando que $XY = ZW$, $\angle ZXY = \angle XZW$ e que o lado XZ é comum aos dois triângulos XYZ e ZWX, concluímos que eles são congruentes pelo caso LAL. Isto prova que $\angle YZX = \angle WXZ$ e, consequentemente, os lados XW e YZ também são paralelos.

(c) Veja que $\angle ETF = \angle GTH$, pois são opostos pelo vértice.



Com esta informação e a relação de igualdade dos segmentos, podemos afirmar que os triângulos ETF e GTH são congruentes pelo caso LAL. Então os lados EF e GH são segmentos paralelos de mesma medida e, usando o item anterior, fica provado que $EFGH$ é um paralelogramo.

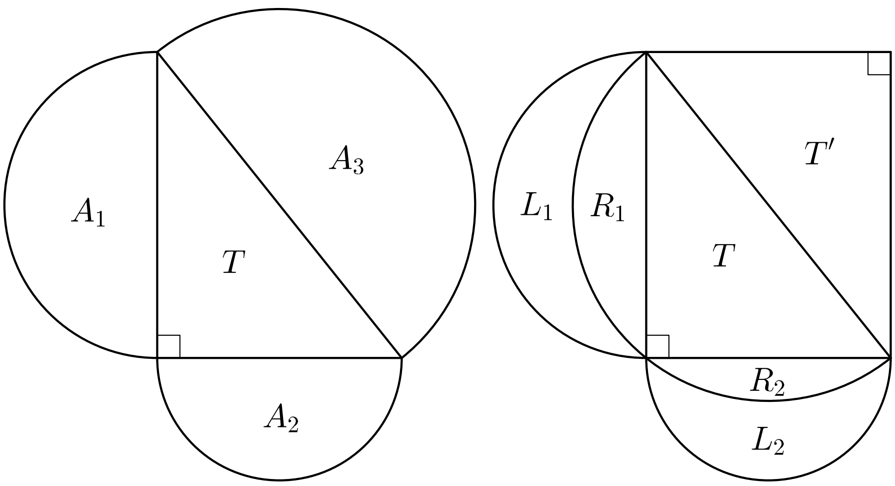
(d) Considere a figura a seguir.



Pelo item c, provamos que o quadrilátero $PSRM$ é um paralelogramo. Isto implica que o lado SR é paralelo a MP e que ambos possuem o mesmo comprimento. Como M é o ponto médio de PQ, concluímos que SR e QM são paralelos e possuem mesmo comprimento. Deste modo, o quadrilátero $MSRQ$ é um paralelogramo. Como $QR = MS = 2 \cdot MN$ e QR é paralelo a MS, temos $MN = \frac{QR}{2}$ e $MN \parallel QR$.

30 *Soma das áreas das duas luas*

A primeira figura a seguir mostra um triângulo retângulo T e três semicírculos construídos externamente com diâmetro sobre cada lado. Na segunda figura, o triângulo T' é congruente a T e o semicírculo A_3 é dobrado sobre o triângulo T formando as regiões L_1, L_2, R_1 e R_2. Veja que L_1 e L_2 têm formato de lua crescente.



(a) Neste problema, usaremos a notação $[X]$ para denotar a área da região X. Verifique que

$$[A_1] + [A_2] = [A_3].$$

(b) Usando a figura formada por T e T', verifique que ao dobrarmos o semicírculo A_3 o bordo passará pelo vértice de ângulo reto no triângulo.

(c) Verifique que a soma das áreas das luas L_1 e L_2 é igual à área do triângulo T, ou seja,

$$[L_1] + [L_2] = [T].$$

30 *Soma das áreas das duas luas – Solução*

(a) Sejam a e b os comprimentos dos dois catetos e c o comprimento da hipotenusa do triângulo T. Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= c^2\\
\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} &= \frac{c^2}{4}\\
\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 &= \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\\
[A_1] + [A_2] &= [A_3].
\end{aligned}$$

(b) Como a figura é formada por T e T' é um retângulo, suas diagonais têm mesma medida e se cortam no ponto médio de ambas, que chamaremos de O. Então O é o centro do semicírculo A_3 e a distância de O até o vértice com ângulo reto é igual à distância aos vértices da hipotenusa. Consequentemente, o semicírculo A_3 passará pelo vértice com ângulo reto de T.

(c) Observe que os semicírculos A_1 e A_2 ficam divididos em luas e regiões como visto na figura. Assim,

$$\begin{aligned}
[L_1] + [L_2] &= [A_1] - [R_1] + [A_2] - [R_2]\\
&= [A_3] - [R_1] - [R_2]\\
&= [T].
\end{aligned}$$

31 *Verificando que certos números não são inteiros*

Considere as estimativas envolvendo o número π^2:

$$\begin{aligned}
\pi &< 3,15\\
\pi^2 &< (3,15)^2 = 9,9225\\
\pi^2 &< 10.
\end{aligned}$$

Como sabemos que $\pi^2 > 3^2 = 9$, temos $9 < \pi^2 < 10$. Assim, por se situar entre dois inteiros consecutivos, podemos afirmar que π^2 não é um número inteiro.

(a) Os números a, b, c e d são reais positivos quaisquer. Verifique que o número

$$E = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{b+c+a} + \frac{c}{c+d+b} + \frac{d}{d+a+c}$$

está entre dois inteiros positivos consecutivos e conclua que ele não é inteiro.

(b) Seja n um inteiro positivo. Verifique que o número

$$\sqrt{n^2+n}$$

não é inteiro.

$\boxed{31}$ *Verificando que certos números não são inteiros – Solução*

(a) Em uma fração, se aumentarmos o denominador, reduzimos o seu valor. Logo,

$$\begin{aligned}
E &= \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{b+c+a} + \frac{c}{c+d+b} + \frac{d}{d+a+c}\\
&> \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d}\\
&= \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se diminuirmos o denominador, aumentamos o seu valor. Logo,

$$\begin{aligned}
E &= \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{b+c+a} + \frac{c}{c+d+b} + \frac{d}{d+a+c}\\
&< \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d}\\
&= \frac{a+b}{a+b} + \frac{c+d}{c+d}\\
&= 2.
\end{aligned}$$

Concluímos assim que E está entre 1 e 2, que são dois inteiros positivos consecutivos, logo o resultado desta expressão nunca será um número inteiro.

(b) Veja que $n^2+n = n(n+1)$, deste modo, temos:

$$n \cdot n < n(n+1) < (n+1)\cdot(n+1).$$

Como se tratam de números inteiros positivos, podemos extrair a raiz quadrada dos três:

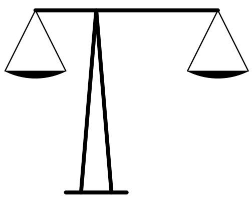
$$n < \sqrt{n^2+n} < n+1.$$

Sendo um número compreendido entre dois inteiros positivos consecutivos, ele não é inteiro.

ENUNCIADOS E SOLUÇÕES DO NÍVEL 3

1 *A balança de Arquimedes*

Arquimedes possui uma balança de dois pratos com braços de comprimentos diferentes. Objetivando pesar dois quilos de açúcar, ele procedeu da seguinte forma: colocou um peso de um quilo no prato da esquerda e açúcar no outro lado até que a balança ficasse equilibrada. Em seguida, ele esvaziou os dois pratos, colocou o peso de um quilo no prato da direita e açúcar no prato da esquerda até que os dois pratos ficassem equilibrados. Somando as duas quantidades de açúcar nestas pesagens, ele obteve menos de dois quilos, mais de dois quilos ou exatamente dois quilos? Observação: Para que ocorra o equilíbrio, os pesos nos pratos devem ser inversamente proporcionais aos comprimentos dos braços correspondentes.



1 *A balança de Arquimedes – Solução*

Denotando o comprimento do braço da esquerda por p, o da direita por q e por x e y as quantidades pesadas de açúcar na primeira e na segunda pesagem, respectivamente. Em virtude do equilíbrio, podemos escrever

$$\begin{aligned} 1\cdot p &= x\cdot q \\ y\cdot p &= 1\cdot q. \end{aligned}$$

Portanto, a quantidade total de açúcar pesado foi de

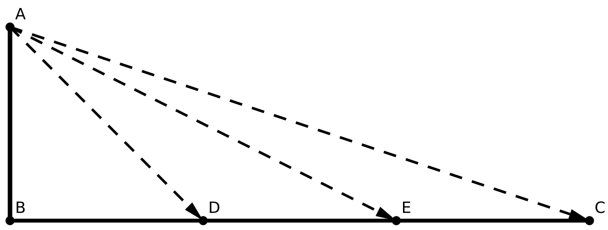
$$\begin{aligned} \frac{p}{q}+\frac{q}{p} &= \left(\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}-\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}\right)^2+2, \\ &> 2. \end{aligned}$$

pois como os braços possuem comprimentos diferentes, temos $\left(\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}-\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}\right)^2>0$.

2 *A sombra do mastro*

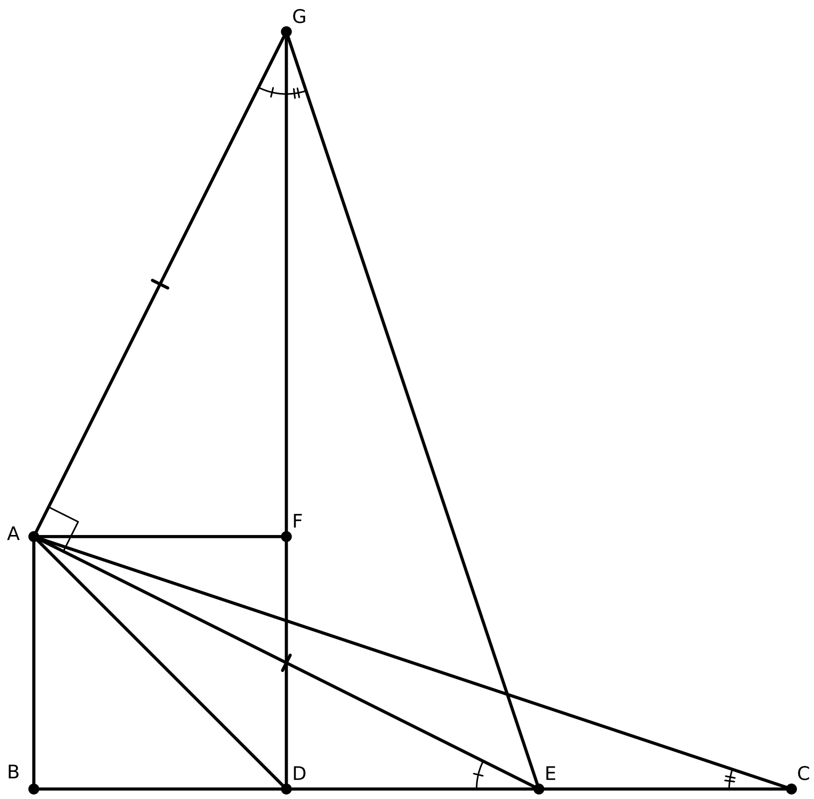
Um mastro vertical AB de altura $1m$ é iluminado por raios do sol e forma sombras no plano horizontal de comprimentos: 1, 2 e 3 metros em três momentos diferentes. Prove que a soma dos ângulos de incidência dos raios nestes três momentos forma um ângulo reto, ou seja,

$$\angle ACD + \angle AEB + \angle ADB = 90^\circ.$$



2 *A sombra do mastro – Solução*

Como D, E e C, são as extremidades das sombras do mastro, segue que $BD = DE = EC = 1$. Sendo ABD um triângulo retângulo com $AB = BD$, temos $\angle ADB = \angle BAD = 45^\circ$. Portanto, basta mostrar que $\angle BEA + \angle BCA = 45^\circ$. Construamos o triângulo AFG de modo que $AFDB$ seja um quadrado e $GD = BC$.



Assim, $\angle AFG = \angle ABC$, $BE = FG$ e $AF = AB$. Consequentemente os triângulos AGF e AEB são congruentes pelo caso LAL e assim $AG = AE$. Além disto,

$$\begin{aligned}\angle GAE &= \angle GAF + \angle FAE\\ &= \angle EAB + \angle FAE\\ &= \angle FAB\\ &= 90^\circ.\end{aligned}$$

Portanto, GAE é um triângulo retângulo isósceles. Como $GD = BC$, $DE = AB$ e $\angle GDE = \angle ABC$, segue pelo caso LAL que os triângulos GDE e CBA são congruentes. Daí

$$\begin{aligned}45^\circ &= \angle AGE\\ &= \angle AGD + \angle DGE\\ &= \angle AEB + \angle ACB.\end{aligned}$$

Observação: Também é possível obtermos uma solução direta usando trigonometria:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\angle AEB + \angle ACB) &= \frac{\operatorname{tg}(\angle AEB) + \operatorname{tg}(\angle ACB)}{1 - \operatorname{tg}(\angle AEB)\operatorname{tg}(\angle ACB)}\\ &= \frac{AB/BE + AB/BC}{1 - (AB/BE)(AB/BC)}\\ &= \frac{1/2 + 1/3}{1 - 1/2 \cdot 1/3}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Portanto, $\angle AEB + \angle ACB = 45^\circ$.

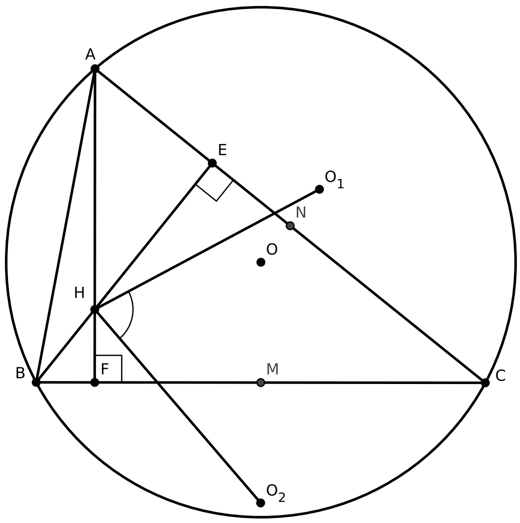
3 *Reflexões nos lados do triângulo*

Sejam O e H o circuncentro e o ortocentro do triângulo $\triangle ABC$, respectivamente. Sejam O_1, O_2 tais que AC é mediatriz de OO_1 e BC é mediatriz de OO_2, respectivamente.

a) Verifique que $\angle BAH = \angle OAC$.

b) Se M é o ponto médio de BC, mostre que $OM = \dfrac{AH}{2}$.

c) Encontre o ângulo $\angle O_1HO_2$ sabendo que $\angle BAC = 60°$ e $\angle ABC = 80°$.



3 *Reflexões nos lados do triângulo – Solução*

a) Como o triângulo ABF é retângulo, temos $\angle BAH = 90° - \angle ABC$. No triângulo isósceles AOC, o ângulo da base $\angle OAC$ mede $\dfrac{180° - \angle AOC}{2} = 90° - \angle ABC$. Portanto, $\angle BAH = \angle OAC$.

b) Sejam D e G as interseções, diferentes de A, de AO e AF, respectivamente, com o circuncírculo do triângulo ABC. Como $\angle BAG = \angle DAC$ e

$$\begin{aligned} \angle BAD &= \angle BAG + \angle GAD \\ &= \angle GAD + \angle DAC \\ &= \angle GAC, \end{aligned}$$

segue que $BG = DC$ e $BD = GC$. Além disto, $\angle GBC = \angle GAC = \angle BAD = \angle BCD$ e, pelo caso de congruência LAL, segue que $\triangle BGC \equiv \triangle CDB$. Consequentemente, $BG = CD$. Temos também $\angle EBC = 90° - \angle BCA = \angle GAC = \angle GBC$. Assim, pelo caso de congruência ALA, dado que $\angle HFB = \angle BFG$ e $\angle HBF = \angle GBF$, temos $\triangle BHF \equiv \triangle BGF$ e, como consequência, $BH = BG$. Observando os triângulos BHM e MCD, temos

$$\begin{aligned} BH &= CD \\ BM &= MC \\ \angle HBM = 90° - \angle BCA &= \angle ACD - \angle BCA = \angle MCD. \end{aligned}$$

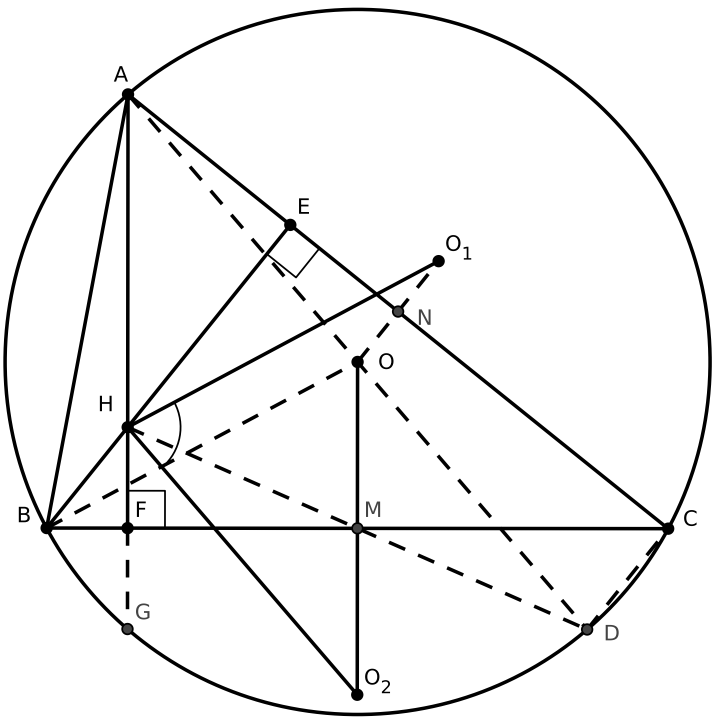
Novamente pelo caso de congruência LAL, podemos concluir que os triângulos BHM e CDM são congruentes. Isto implica que:

$$\begin{aligned} \angle HMB &= \angle CMD \\ HM &= MD. \end{aligned}$$

Assim, H, M e D são colineares e OM é base média do triângulo AHD. Portanto, $OM = \dfrac{AH}{2}$.

c) Como BC é mediatriz de OO_2, segue que $OO_2 = 2 \cdot OM = AH$. Além disto, como OM e AH são perpendiculares a BC, segue que AH e OO_2 são paralelos e congruentes. Consequentemente AHO_2O é um paralelogramo e $AO \parallel HO_2$. De modo semelhante, HO_1OB é um paralelogramo e $HO_1 \parallel BO$. Assim,

$$\begin{aligned} \angle O_1HO_2 &= \angle AOB \\ &= 2 \cdot \angle ACB \\ &= 2 \cdot (180^\circ - \angle BAC - \angle ABC) \\ &= 80^\circ. \end{aligned}$$



4 *Fatores da soma*

a) Observe as somas:

$$\begin{aligned} 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 900+2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 901 &= \\ \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 900\cdot 901}{901}+2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 901 &= \\ \frac{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 900\cdot 901(1+901)}{901} &= \\ \frac{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 900\cdot 901\cdot 902}{901}&. \end{aligned}$$

Verifique que vale:

$$\begin{aligned} \frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdot\ldots\cdot(k+901)}{901}+(k+2)\cdot(k+3)\cdot(k+4)\cdot\ldots\cdot(k+901) &= \\ \frac{(k+2)\cdot(k+3)\cdot\ldots\cdot(k+901)\cdot(k+902)}{901}&. \end{aligned}$$

b) Seja N a soma dos números:

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & \times & 2 & \times & 3 & \times & \ldots & \times & 900 \\ + & 2 & \times & 3 & \times & 4 & \times & \ldots & \times & 901 \\ + & \ldots & & & & & & & & \\ + & 1116 & \times & 1117 & \times & 1118 & \times & \ldots & \times & 2015. \end{array}$$

Mostre que $901\cdot N$ é divisível por todo elemento do conjunto $\{1116, 1117, \ldots, 2016\}$.

4 *Fatores da soma – Solução*

a)

$$\begin{aligned} \frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdot\ldots\cdot(k+901)}{901}+(k+2)\cdot(k+3)\cdot(k+4)\cdot\ldots\cdot(k+901) &= \\ \frac{(k+2)\cdot(k+3)\cdot\ldots\cdot(k+901)\cdot[(k+1)+901]}{901} &= \\ \frac{(k+2)\cdot(k+3)\cdot\ldots\cdot(k+901)\cdot(k+902)}{901}&. \end{aligned}$$

b) Usando o item anterior 1116 vezes para $k = 0, 1, 2, \ldots, 1115$, podemos reduzir sucessivamente a quantidade de parcelas que constituem N sempre operando com os dois primeiros termos da soma. Obtemos assim:

$$\begin{aligned} N &= \frac{1116\cdot 1117\cdot 1118\cdot\ldots\cdot 2016}{901} \\ 901\cdot N &= 1116\cdot 1117\cdot 1118\cdot\ldots\cdot 2016. \end{aligned}$$

Portanto, cada um dos números do conjunto $\{1116, 1117, \ldots, 2016\}$ é um divisor de $901\cdot N$.

5 *Escolha de cartas do baralho*

Um baralho possui 32 cartas divididas em 4 tipos, cada um com 8 cartas. De quantas formas podemos escolher 6 cartas de modo que todos os quatro tipos de cartas estejam entre elas?

5 *Escolha de cartas do baralho – Solução*

Vamos dividir as escolhas apropriadas de cartas em dois grupos:

a) Grupo S_1: Dois tipos são representados por duas cartas e os outros dois tipos restantes por apenas uma carta cada.

b) Grupo S_2: Um tipo é representado por três cartas e os outros três tipos restantes por apenas uma carta cada.

Para contar a quantidade de cartas de S_1, podemos primeiramente escolher os dois tipos que serão representados por duas cartas de $\binom{4}{2}$ maneiras. Em seguida, podemos escolher duas cartas dentre as 8 de cada um destes tipos de $\binom{8}{2} \cdot \binom{8}{2}$. Finalmente, podemos escolher as cartas restantes nos grupos que restaram de $\binom{8}{1} \cdot \binom{8}{1}$ maneiras. Portanto, a quantidade de elementos de S_1 é

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{8}{1} = \binom{4}{2} \cdot \binom{8}{2}^2 \cdot 8^2.$$

Para contar a quantidade de cartas de S_2, podemos incialmente escolher o tipo que será representado por 3 cartas de $\binom{4}{1}$ maneiras. Em seguida, as três cartas deste tipo podem ser escolhidas de $\binom{8}{3}$ maneiras. Finalmente, podemos escolher as cartas restantes dos três grupos que restaram de $\binom{8}{1} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{8}{1}$ maneiras. Portanto, a quantidade de elementos de S_2 é

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{8}{1} = \binom{4}{3} \cdot \binom{8}{3} \cdot 8^3.$$

Assim, a quantidade de escolhas é

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{8}{2}^2 \cdot 8^2 + \binom{4}{3} \cdot \binom{8}{3} \cdot 8^3 = 415744.$$

6 *Uma fatoração radical*

a) Verifique que $(x-1)(x+1)+1 = x^2$.

b) Encontre o valor de $\sqrt{1+2014\sqrt{1+2015\sqrt{1+2016\cdot 2018}}}$.

6 *Uma fatoração radical – Solução*

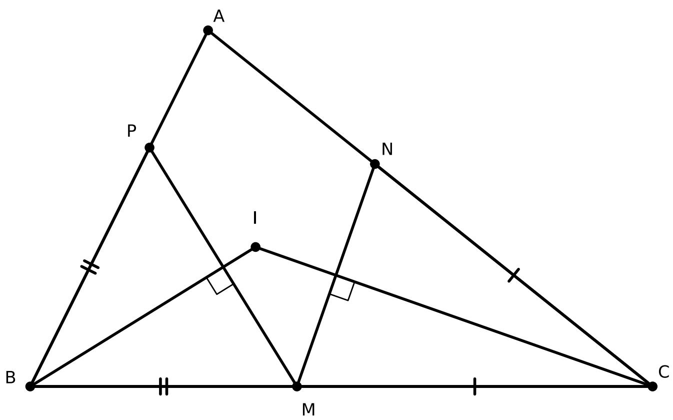
a) $(x-1)(x+1)+1 = (x^2-1)+1 = x^2$.

b) Usando o item anterior algumas vezes, obtemos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+2014\sqrt{1+2015\sqrt{1+2016\cdot 2018}}} &= \\
\sqrt{1+2014\sqrt{1+2015\sqrt{2017^2}}} &= \\
\sqrt{1+2014\sqrt{1+2015\cdot 2017}} &= \\
\sqrt{1+2014\sqrt{2016^2}} &= \\
\sqrt{1+2014\cdot 2016} &= \\
\sqrt{2015^2} &= \\
2015.
\end{aligned}$$

7 *Os ângulos congruentes*

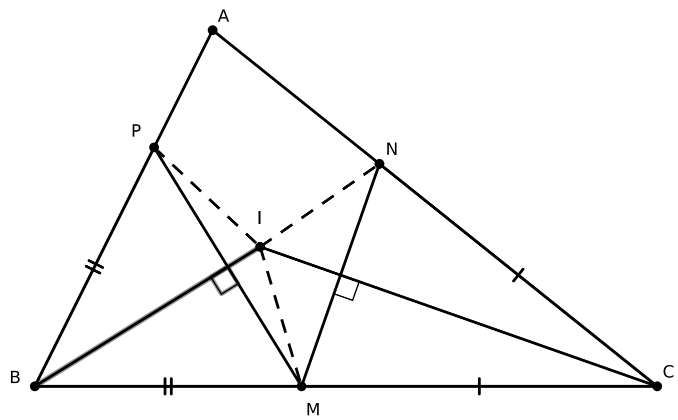
Os pontos M, N e P são escolhidos sobre os lados BC, CA e AB do triângulo ABC de modo que $BM = BP$ e $CM = CN$. A perpendicular baixada de B à MP e a perpendicular baixada de C à MN se intersectam em I. Prove que os ângulos $\angle IPA$ e $\angle INC$ são congruentes.



7 *Os ângulos congruentes – Solução*

Como o triângulo MNC é isósceles, CI além de altura é também a bissetriz relativa ao vértice C. Consequentemente, $\angle ICN = \angle ICM$. Pelo caso de congruência LAL, segue que $\triangle ICM \equiv \triangle ICN$. Daí, $\angle IMC = \angle INC$. De forma semelhante, temos $\angle BPI = \angle BMI$. Assim,

$$\angle IPA = 180^\circ - \angle IPB = 180^\circ - \angle IMB = \angle IMC = \angle INC.$$



8 *Múltiplo terminado em* 2016

Mostre que existe um múltiplo de 2017 que termina em 2016.

8 *Múltiplo terminado em* 2016 – *Solução*

Considere a seguinte lista contendo 2018 números:

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & 2016 \\ a_2 & = & 20162016 \\ a_3 & = & 201620162016 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2018} & = & \underbrace{20162016\ldots20162016}_{2018 \text{ vezes}}. \end{array}$$

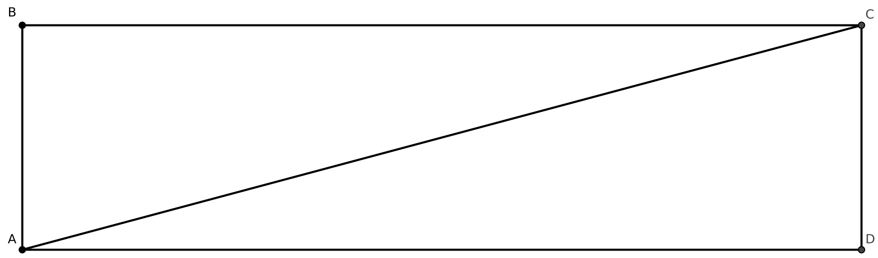
Como existem apenas 2017 restos possíveis na divisão por 2017, dois dos números da lista anterior devem possuir o mesmo resto por 2017 e, consequentemente, a diferença entre eles deve ser um múltiplo de 2017. Digamos que eles sejam a_i e a_j:

$$\begin{array}{rcl} a_i - a_j & = & \underbrace{20162016\ldots20162016}_{i-j \text{ vezes } 2016}\underbrace{00\ldots0}_{4j \text{ vezes}} \\ & = & \underbrace{20162016\ldots20162016}_{i-j \text{ vezes } 2016} \cdot 10^{4j}. \end{array}$$

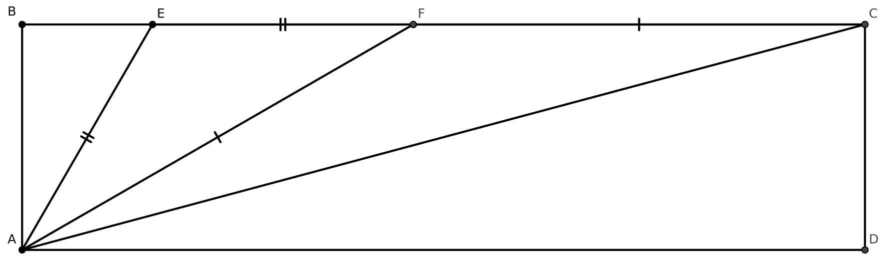
Como $MDC(2017, 10^{4j}) = 1$, segue que $\underbrace{20162016\ldots20162016}_{i-j \text{ vezes } 2016}$ deve ser divisível por 2017.

9 ***O cosseno de*** $75°$

Seja $ABCD$ um retângulo com $AB = \sqrt{3}$. Se $\angle ACD = 75°$, calcule o comprimento de AC e o valor de $\cos 75°$.



9 ***O cosseno de*** $75°$ ***– Solução***



Considere os pontos F e E sobre o lado BC de modo que $FC = FA$ e $EF = AE$. Então, pelo Teorema do Ângulo Externo, temos

$$\angle BEA = 2 \cdot \angle EFA = 4 \cdot \angle FCA = 4 \cdot (90° - \angle ACD) = 60°.$$

Daí, $\dfrac{AB}{AE} = \operatorname{sen} 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\dfrac{AB}{BE} = \operatorname{tg} 60°$, ou seja, $AE = 2$ e $BE = 1$. Além disto, $EF = AE = 2$. Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo BFA, temos

$$\begin{aligned} AF &= \sqrt{AB^2 + BF^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} \\ &= 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Portanto, $FC = AF = 2\sqrt{3}$. Finalmente, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (3 + 2\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{24 + 12\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Consequentemente, temos

$$\cos 75° = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}} = \frac{1}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$$

10 *Bolas na urna*

Uma urna contém k bolas marcadas com k, para todo $k = 1, 2, \ldots, 2016$. Qual é o número mínimo de bolas que devemos retirar, sem reposição e sem olharmos as bolas, para termos certeza de que teremos 12 bolas com o mesmo número?

10 *Bolas na urna – Solução*

Somemos a maior quantidade de bolas que podem ser retiradas de cada tipo sem que obtenhamos 12 bolas de cada cor:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+\underbrace{11+11+\ldots+11}_{\text{2005 vezes}} = 22121.$$

Assim, é possível que tenhamos azar e retiremos tal quantidade de bolas sem obtermos 12 bolas de cada cor. Entretanto, se retirarmos 22122 bolas, certamente teremos 12 bolas de uma mesma cor, pois a soma anterior conta exatamente o máximo de bolas que podem ser retiradas sem que isto ocorra. Logo, o mínimo buscado é 22122.

11 *Soma dos quadrados de* 1 *até* n

Considere a soma das três tabelas a seguir. A primeira representa n linhas, sendo a primeira com n números iguais a n, a segunda com $n-1$ números iguais a $n-1$ e assim por diante. Na segunda, temos uma distribuição de números parecida, mas em colunas em vez de linhas. Já na terceira, temos estes números em diagonais, a primeira diagonal possui um número 1, a segunda dois números iguais a 2, a terceira três números iguais a 3 e assim por diante.

$$\begin{array}{cccccc}
n & n & n & \cdots & n & n \\
n-1 & n-1 & & \cdots & n-1 & \\
n-2 & \cdots & & & & \\
\cdots & & & & & \\
2 & 2 & & & & \\
1 & & & & &
\end{array}
+
\begin{array}{cccccc}
n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\
n & n-1 & & \cdots & 2 & \\
n & \cdots & & & & \\
\cdots & & & & & \\
n & n-1 & & & & \\
n & & & & &
\end{array}
+
\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\
2 & 3 & & \cdots & n & \\
3 & & & & & \\
\cdots & & & & & \\
n-1 & n & & & & \\
n & & & & &
\end{array}$$

O resultado da soma das três tabelas será uma tabela com a mesma quantidade de números e com cada posição sendo o resultado da soma das posições correspondentes nas três tabelas. Por exemplo, no canto superior esquerdo, teremos o número $n+n+1 = 2n+1$.

(a) Um modo de verificar quantos números tem em cada tabela é virar uma delas de ponta cabeça e juntar com outra para formar um retângulo com n linhas e o dobro de números de uma tabela. Sabendo disto, quantos números existem em uma tabela?

(b) Quantas vezes aparece cada número k em todas as três tabelas?

(c) Para cada posição, linha i e coluna j, determine os números escritos nela nas três tabelas e na tabela resultado.

(d) Usando as informações dos itens anteriores, verifique que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

11 *Soma dos quadrados de* 1 *até* n *– Solução*

(a) Ao virar uma delas de ponta cabeça e juntar com outra, formamos um retângulo $n \times (n+1)$. Como este retângulo possui o dobro de números de uma tabela, cada uma delas possui $\frac{n(n+1)}{2}$ números.

(b) Cada número k aparece k vezes na primeira tabela, k vezes na segunda e k vezes na terceira. Portanto, cada número k aparece $3k$ vezes no total.

(c) Na primeira tabela, a linha determina o valor daquela posição. Como o número inicial n é reduzido em uma unidade a cada linha mais abaixo, então na linha i e coluna j teremos $n+1-i$. Usando o mesmo raciocínio na segunda tabela, na linha i e coluna j teremos o número $n+1-j$. Já na terceira tabela, observe que as posições associadas a elementos de uma diagonal possuem a soma de sua linha e coluna constante. Além disto, o número escrito em uma casa de uma diagonal é uma unidade a menos que esta constante. Logo, na linha i e coluna j teremos $i+j-1$. Na tabela do resultado teremos o número

$$(n+1-i)+(n+1-j)+(i+j-1)=2n+1.$$

(d) Usando os itens anteriores, notamos que a tabela do resultado possui $\frac{n(n+1)}{2}$ elementos iguais a $2n+1$. Deste modo, podemos somar os números das três tabelas dadas de duas maneiras diferentes: somando cada número k nas três tabelas ou somando os números da tabela resultante. Assim,

$$\begin{aligned}
(3\cdot 1)\cdot 1+(3\cdot 2)\cdot 2+\ldots+(3\cdot n)\cdot n &= \frac{n(n+1)}{2}\cdot(2n+1)\\
3(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2) &= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)\\
1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).
\end{aligned}$$

12 *Soma dos cubos de* 1 *até* 100

Considere a tabela de números a seguir. A primeira linha possui os números de 1 até n. A segunda possui os números de 1 até n com cada um multiplicado por 2. As linhas seguem este padrão até a última linha que apresenta n vezes cada número de 1 até n.

1	2	3	$\cdots$	n
2	4	6	$\cdots$	$2n$
3	6	9	$\cdots$	$3n$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	$2n$	$3n$	$\cdots$	n^2

Vamos usá-la para calcular o valor da expressão

$$1^3 + 2^3 + ... + 100^3.$$

Além da tabela, usaremos o fato de que

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(a) Determine a soma de todos os números da linha de número k. Com isso, determine uma expressão para a soma de todos os números da tabela.

(b) Observe pedaços na tabela separando-a em camadas em forma de L. Os números em uma certa camada k são: k, $2k$, $\ldots$, $(k-1)k$, k^2, $(k-1)k$, $\ldots$, $2k$, k. Determine a soma dos números desta camada em função de k.

(c) Somando os resultados de todas as camadas, chegaremos ao mesmo resultado que somando todas as linhas. Juntando estas informações determine o valor da expressão:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + 100^3.$$

12 *Soma dos cubos de 1 até 100 – Solução*

(a) Os números na linha t são os números de 1 até n multiplicados por t. A soma deles é

$$\begin{aligned} t+2t+3t+\ldots+nt &= t(1+2+3+\ldots+n) \\ &= t\frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

A soma dos números na tabela pode ser calculada usando a soma de todas as linhas. Como $\frac{n(n+1)}{2}$ é fator comum, ele pode ser colocado em evidência e teremos

$$\frac{n(n+1)}{2}(1+2+3+\ldots+n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

(b) Somando os números teremos:

$$\begin{aligned} k+2k+\ldots+(k-1)k+k^2+(k-1)k+\ldots+k &= k^2+2k(1+2+3+\ldots+(k-1)) \\ &= k^2+2k\frac{(k-1)k}{2} \\ &= k^2+k^2(k-1) \\ &= k^3. \end{aligned}$$

(c) Se fizermos a tabela para $n = 100$ teremos 100 linhas e 100 camadas. Com as informações dos itens anteriores podemos concluir que

$$\begin{aligned} 1^3+2^3+\ldots+100^3 &= \left(\frac{100\cdot 101}{2}\right)^2 \\ &= 5050^2 \\ &= 25502500. \end{aligned}$$

13 *Descubra a cor do seu chapéu*

Ana, Beto e Carolina vão participar do programa de televisão “Descubra a cor do seu chapéu”. No programa, eles se posicionam em roda e sobre a cabeça de cada um será colocado um chapéu azul ou verde. Cada um pode ver os chapéus dos outros, mas não a cor do seu próprio chapéu. Em seguida, cada um deles escreve em um papel uma dentre três opções “azul”, “verde” ou “passo”. Se todos os que escreveram cores “azul” ou “verde” acertarem a cor do seu chapéu, eles ganham um carro 0 km. Se algum deles chutar a cor do chapéu, “azul” ou “verde”, e errar, os três perdem. Se todos eles escreverem “passo”, então os três também perdem. Vale ressaltar que eles não podem combinar sinais e não podem ver os papéis dos outros participantes. Os três se reúnem para tentar combinar uma estratégia. Carolina começa “nenhum de nós deve escrever ‘passo’, devemos chutar entre ‘azul’ e ‘verde’, pois se todos passarmos perderemos”. Beto reage dizendo “discordo, melhor apenas Ana chutar a cor do seu chapéu, enquanto eu e Carolina escrevemos ‘passo’. Neste caso, a chance de ganhar será maior”. Ana se pronuncia “tive uma ideia, se usarmos a minha estratégia teremos a probabilidade de $\frac{3}{4}$ de ganhar o carro”.

(a) Seguindo a ideia de Carolina, qual a probabilidade de ganhar o carro?

(b) Mudando para a ideia de Beto, qual passa a ser a probabilidade de ganhar o carro?

(c) Dê um exemplo da possível estratégia de Ana que faz a probabilidade de ganhar o carro ser $\frac{3}{4}$.

13 *Descubra a cor do seu chapéu – Solução*

(a) Seguindo a ideia de Carolina, cada pessoa tem duas cores possíveis de chapéu, no total há $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ possibilidades de chutes. Entre eles, há apenas um caso favorável: acertarem seus chutes. Portanto, a probabilidade de ganhar o carro é $\frac{1}{8}$.

(b) Com a ideia de Beto, há agora apenas duas possibilidades: o chapéu de Ana é azul ou verde. Com um chute, ela terá probabilidade $\frac{1}{2}$ de acertar e os três ganharem. Veja que Beto e Carolina não influenciarão o resultado, pois eles vão simplesmente passar.

(c) Cada pessoa olha as cores dos chapéus dos seus dois companheiros. Se forem de cores diferentes, esta pessoa deve passar. Se forem da mesma cor, então esta pessoa chuta que seu chapéu é da outra cor. Por exemplo, se os chapéus de Ana, Beto e Carolina forem azul, azul e verde, respectivamente, então Ana e Beto devem escrever "passo", pois enxergam chapéus de cores diferentes, enquanto Carolina deve escrever "verde" que é a cor diferente da cor dos dois chapéus que ela vê. Neste caso os três ganhariam o carro. No total há 8 possibilidades para as cores dos três chapéus. Note que, com a estratégia de Ana, os três perdem apenas em duas possibilidades, todos os chapéus verdes ou todos os chapéus azuis. Nas outras seis possibilidades, haverá dois chapéus de uma cor e um chapéu da outra e, como no exemplo, os três ganham. Concluímos que a probabilidade de ganhar o carro é $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

14 *Qual a probabilidade de sair dois ases da mesma cor?*

Manuel é um matemático que gosta de jogos de cartas. Ele encontra os irmãos Jonas e Jonatan durante uma viagem de ônibus e propõe um jogo. Serão usados apenas os quatro ases do baralho, o de copas e o de ouros são vermelhos enquanto o de espadas e o de paus são pretos.

Manuel será o banco e os dois irmãos, um de cada vez, apostarão 1 real contra ele em cada rodada. As cartas são postas viradas com face para baixo. Jonas escolhe uma carta e Jonatan a vira para cima. Jonas escolhe mais uma carta e Jonatan novamente a vira. Se as duas cartas tiverem a mesma cor, então Jonas ganha 1 real de Manuel. Caso contrário, Manuel ganha

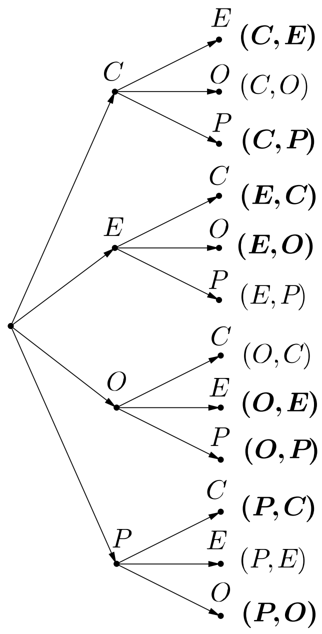
1 real de Jonas. Em seguida, Jonas e Jonatan trocam de posição e o jogo segue. Veja que Manuel não mexe nas cartas, por isto não pode manipular o jogo. Jonatan pensa um pouco e conclui que tem probabilidade de $\frac{2}{3}$ de vencer, pois os resultados são apenas duas cartas vermelhas, duas pretas ou uma vermelha e uma preta. Será mesmo?

(a) Jonas já participou de olimpíadas de matemática e decidiu tomar mais cuidado. Ele decidiu analisar este jogo usando uma árvore de possibilidades. Como ficaria a árvore de possibilidades de Jonas?

(b) Considerando os resultados da árvore do item anterior, qual a probabilidade de Manuel vencer cada rodada do jogo?

14 *Qual a probabilidade de sair dois ases da mesma cor? – Solução*

(a) Representaremos copas, espadas, ouros e paus pelas letras C, E, O e P, respectivamente. A árvore de possibilidades é mostrada na figura a seguir:



(b) Usando a árvore de possibilidades, há 12 resultados possíveis e em 8 deles Manuel vence. Portanto, a probabilidade de Manuel vencer cada rodada é $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. O raciocínio de Jonatan não está correto, pois as possibilidades de cores não ocorrem com a mesma probabilidade.

Vale ressaltar que este item poderia ser respondido sem a árvore de possibilidades. Considere o momento após a virada da primeira carta. Entre as outras três, duas favorecem Manuel, pois possuem a cor diferente da cor da carta que foi virada. Então, assim como na conclusão usando a árvore, a probabilidade de Manuel vencer é $\frac{2}{3}$.

15 *Se trocarmos* 1 *por* -1*, o que acontece?*

Seja n um número inteiro positivo maior ou igual a 5. Para números a_i escolhidos no conjunto $\{-1,1\}$, calcula-se o número

$$S_n = a_1a_2a_3a_4 + \ldots + a_na_1a_2a_3$$

que soma os produtos de cada quatro termos a_i de índices consecutivos, inclusive os que começam em a_{n-2}, a_{n-1} e a_n e terminam em a_1, a_2 e a_3, respectivamente.

(a) Considerando $n = 8$, comecemos com $a_1 = a_2 = \ldots = a_7 = a_8 = 1$. Qual o valor de S_8? Se trocarmos $a_4 = 1$ por $a_4 = -1$ quanto passa a ser a soma S_8? Após a primeira troca, trocamos $a_5 = 1$ por $a_5 = -1$. Após esta segunda troca, quanto vale S_8?

(b) Para cada troca de 1 por -1, quantas parcelas mudam de valor? Quais são as possíveis variações no valor de S_8 quando se faz uma troca?

(c) Mostre que para quaisquer oito valores de a_1, a_2, ..., a_7 e a_8 no conjunto $\{-1,1\}$ a soma S_8 resulta sempre em um número múltiplo de 4.

(d) Para certo valor de n e certa escolha dos números a_i no conjunto $\{-1,1\}$ a soma

$$S_n = a_1a_2a_3a_4 + \ldots + a_na_1a_2a_3$$

resultou em zero. Prove que n é necessariamente um número múltiplo de 4.

15 *Se trocarmos* 1 *por* -1*, o que acontece? – Solução*

(a) Com os valores dados, tem-se:

$$S_8 = 1\cdot1\cdot1\cdot1 + 1\cdot1\cdot1\cdot1 + \ldots + 1\cdot1\cdot1\cdot1 = 8.$$

É a soma de oito parcelas iguais a 1. Veja que ao trocar o a_4 de 1 para -1, os quatro produtos em que ele aparece mudam de sinal. Então a soma perde quatro parcelas 1 que passam a ser quatro parcelas -1. Deste modo, a soma passa a ser

$$S_8' = 8 - 4 + (-4) = 0.$$

Se trocarmos agora o a_5 de 1 para -1, há quatro parcelas afetadas, mas algumas passam de 1 para -1 e outras passam de -1 para 1. Mais especificamente, as parcelas com o a_5 que já mudaram de sinal com o a_4 voltarão a ser 1. A parcela $a_5a_6a_7a_8$ passa de 1 a -1 e as outras três passam de -1 a 1. Após a segunda troca a soma será

$$\begin{aligned} S_8'' &= S_8' - (1 + (-1) + (-1) + (-1)) + ((-1) + 1 + 1 + 1) \\ &= S_8' - (-2) + 2 \\ &= S_8' + 4 \\ &= 4. \end{aligned}$$

(b) Como vimos no item anterior, as quatro parcelas em que o produto possui certo a_i mudam de valor quando trocamos este número de 1 para -1. Para saber as possíveis variações, considere x, y, z e w as parcelas que possuem o a_i no produto.

$$\begin{aligned} S_8' &= S_8-(x+y+z+w)+(-x-y-z-w) \\ &= S_8-2(x+y+z+w). \end{aligned}$$

Como x, y, z e w são produtos de números 1 ou -1, eles mesmos são iguais a 1 ou -1. Então ao somar os quatro, os resultados possíveis são $1+1+1+1=4$, $1+1+1+(-1)=2$, $1+1+(-1)+(-1)=0$, $1+(-1)+(-1)+(-1)=-2$ ou $(-1)+(-1)+(-1)+(-1)=-4$. Finalmente, concluímos que as variações possíveis são $+8$, $+4$, 0, -4 ou -8.

(c) Primeiro faça todos os números iguais a 1, então a soma é 8. Agora, para cada número da sequência, podemos trocá-lo para -1 e analisar a soma. Deste jeito, todas as possibilidades de números a_i são analisadas. Pelo item anterior, cada troca gera uma variação que é um múltiplo de 4. Como no início a soma é um múltiplo de 4 e esta propriedade não se altera em cada troca, concluímos que a soma S_8 resulta sempre em um múltiplo de 4.

(d) Novamente, comece com todos os números iguais a 1 resultando em soma n. Para uma dada escolha dos elementos da sequência, trocamos cada a_i igual a -1 por 1, um por vez. Em cada troca, não altera-se o resto de S_n na divisão por 4 e, ao final, chegamos no número 0 que é múltiplo de 4. Portanto, o número inicial n também é um múltiplo de 4.

16 *Apagando números e fazendo a operação estrela*

Sejam a e b números reais positivos com produto diferente de 1, define-se a operação estrela, representada por "$*$", pela equação

$$a*b=\frac{a+b-2ab}{1-ab}.$$

Em uma lousa, estão escritos 2015 números iguais a $\frac{1}{2}$. Em cada passo, apagam-se dois números x e y escritos na lousa e escreve-se o número $x*y$. Este passo é repetido 2014 vezes até que fique apenas um número na lousa.

(a) Demonstre que a equação

$$\frac{x*y}{1-x*y}=\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}$$

é verdadeira para quaisquer x e y reais com $x\neq 1$, $y\neq 1$ e $xy\neq 1$.

(b) Se para cada número x que é escrito na lousa, calcularmos $\frac{x}{1-x}$ e somarmos todos estes resultados, teremos um certo resultado. Mostre que este resultado é sempre o mesmo não importando quantos passos tenham sido feitos até aquele momento.

(c) Qual o número que estará escrito na lousa ao final dos 2014 passos?

(d) Se além dos 2015 números iguais a $\frac{1}{2}$ na situação inicial, também escrevermos um número 1, qual será o número final após a realização de 2015 passos?

16 *Apagando números e fazendo a operação estrela – Solução*

(a) Desenvolvendo a expressão da operação estrela, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{x*y}{1-x*y} &= \frac{\frac{x+y-2xy}{1-xy}}{1-\frac{x+y-2xy}{1-xy}} \\
&= \frac{x+y-2xy}{1-xy-x-y+2xy} \\
&= \frac{x+y-2xy}{1-x-y+xy} \\
&= \frac{x+y-2xy}{(1-x)(1-y)} \\
&= \frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}.
\end{aligned}$$

(b) Seja S a soma dos termos $\frac{x}{1-x}$ para cada x escrito na lousa. Usando o item anterior, concluímos que retirando dois termos $\frac{x}{1-x}$ e $\frac{y}{1-y}$ e adicionando o termo $\frac{x*y}{1-x*y}$, a soma não se altera. Como isto vale para cada passo, então continua valendo não importando quantos passos tenham sido feitos.

(c) Seja N o número final. Pelo item anterior, sabe-se que a soma não sofre alteração com as trocas. Portanto, podemos usá-la para descobrir o número final.

$$\begin{aligned}
\frac{N}{1-N} &= \frac{1/2}{1-1/2}+\frac{1/2}{1-1/2}+\ldots+\frac{1/2}{1-1/2} \\
&= 1+1+\ldots+1 \\
&= 2015 \\
N &= 2015(1-N) \\
2016N &= 2015 \\
N &= \frac{2015}{2016}.
\end{aligned}$$

(d) Para um número $x \neq 1$, fazendo a operação $x*1$, temos:

$$\begin{aligned}
x*1 &= \frac{x+1-2x}{1-x} \\
&= \frac{1-x}{1-x} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Como $x*1=1$, fazer a troca de x e 1 por $x*1$ é o mesmo que apagar o x. Assim, podemos afirmar que ao final dos 2015 passos o único número escrito na lousa será 1.

17 *Acertando na trave na Loteria*

Em certa loteria, existem 60 números distintos e 6 deles são sorteados sem reposição. Cada bilhete possui 6 números distintos entre os 60 possíveis. O prêmio máximo, conhecido como *"gol-no-ângulo"*, é dado para o jogador que possuir o bilhete com os mesmos 6 números que foram sorteados. Nesta loteria, também existe o prêmio *"bola-na-trave"*. Em um bilhete bola-na-trave, o menor número não possui diferença, em módulo, maior que 1 para o menor número sorteado, o segundo menor número não possui diferença, em módulo, maior que 1 para o segundo menor número sorteado e assim por diante até o sexto menor número. Por exemplo, suponha que o bilhete gol-no-ângulo seja $\{4,7,25,48,51,60\}$. Então os bilhetes $\{3,6,25,49,50,59\}$ e $\{5,6,25,47,50,60\}$ são bilhetes bola-na-trave, mas o bilhete $\{3,4,6,24,47,50\}$ não é bola-na-trave. Vale lembrar que um bilhete gol-no-ângulo não é um bilhete bola-na-trave. Para os itens a seguir, considere cada bilhete como a escolha de uma sequência de 6 números escritos em ordem crescente.

(a) Dê um exemplo de conjunto de 6 números formando um bilhete gol-no-ângulo que tem o menor número possível de bilhetes bola-na-trave associados a ele. Quantos bilhetes bola-na-trave possíveis haveria para estes 6 números?

(b) Dê um exemplo de conjunto de 6 números formando um bilhete gol-no-ângulo que resulta na maior quantidade possível de bilhetes bola-na-trave. Neste caso, haveria quantos bilhetes bola-na-trave possíveis?

(c) Considere os números sorteados $\{2,3,8,11,14,17\}$, quantos são os bilhetes bola-na-trave associados a ele?

(d) Suponha que o conjunto de números sorteados seja $\{8,10,12,14,16,18\}$. Neste caso, quantos são os bilhetes bola-na-trave possíveis associados a ele?

17 *Acertando na trave na Loteria – Solução*

(a) Tome os 6 menores números $\{1,2,3,4,5,6\}$. Neste caso, temos apenas 6 bilhetes bola-na-trave, que são formados por escolhas de 6 números do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Em princípio, existiriam 7 bilhetes, mas como um bilhete gol-no-ângulo não é bola-na-trave, o número de bilhetes bola-na-trave associados a ele é 6. Provaremos que este é o menor valor possível mostrando que todos os outros conjuntos têm pelo menos 6 bilhetes bola-na-trave.

Tomando o conjunto $\{a,b,c,d,e,f\}$ em ordem crescente do a para o f. Se $f<60$, temos os bilhetes bola-na-trave:

$$\{a,b,c,d,e,f+1\}$$
$$\{a,b,c,d,e+1,f+1\}$$
$$\{a,b,c,d+1,e+1,f+1\}$$
$$\{a,b,c+1,d+1,e+1,f+1\}$$
$$\{a,b+1,c+1,d+1,e+1,f+1\}$$
$$\{a+1,b+1,c+1,d+1,e+1,f+1\}.$$

Se $f=60$, mas $a>1$, temos os bilhetes:

$$\{a-1,b,c,d,e,f\}$$
$$\{a-1,b-1,c,d,e,f\}$$
$$\{a-1,b-1,c-1,d,e,f\}$$
$$\{a-1,b-1,c-1,d-1,e,f\}$$
$$\{a-1,b-1,c-1,d-1,e-1,f\}$$
$$\{a-1,b-1,c-1,d-1,e-1,f-1\}.$$

Se $a=1$ e $f=60$, então existiriam dois números seguidos que não seriam consecutivos, por exemplo, $d-c\geq 2$, neste caso teríamos os bilhetes:

$$\{a,b,c+1,d,e,f\}$$
$$\{a,b+1,c+1,d,e,f\}$$
$$\{a+1,b+1,c+1,d,e,f\}$$
$$\{a,b,c,d-1,e,f\}$$
$$\{a,b,c,d-1,e-1,f\}$$
$$\{a,b,c,d-1,e-1,f-1\}.$$

(b) Veja que cada número x no bilhete gol-no-ângulo gera 3 possibilidades para sua posição no bola-na-trave, a saber $x-1$, x e $x+1$. Se números seguidos estiverem próximos, então teremos que eliminar repetições, por exemplo, se $a=b-1$ ou $a+1=b-1$. Portanto, para chegar no máximo podemos deixar números seguidos com diferença de pelo menos 3. Um exemplo é o bilhete gol-no-ângulo $\{3,6,9,12,15,18\}$. Um bilhete bola-na-trave possui três possibilidades para o menor número, três para o segundo menor e assim por diante. Lembrando de não contar o bilhete gol-no-ângulo, teremos ao todo $3^6-1=728$ bilhetes bola-na-trave associados a ele.

(c) Vamos separar em casos. Se o primeiro número for 1, então para cada um dos cinco números temos três possibilidades, resultando assim em 3^5 bilhetes. Se o primeiro número for 2, então o segundo número terá que ser 3 ou 4. Os outros têm três possibilidades cada, logo teremos $2 \cdot 3^4$ bilhetes bola-na-trave associados. Se o primeiro número for 3, o segundo é obrigatoriamente 4. Para cada um dos demais, há três possibilidades. Logo, teremos 3^4 possibilidades. Lembrando de retirar o bilhete gol-no-ângulo, ficamos com

$$3^5 + 2 \cdot 3^4 + 3^4 - 1 = 485$$

bilhetes bola-na-trave associados ao gol-no-ângulo $\{2,3,8,11,14,17\}$.

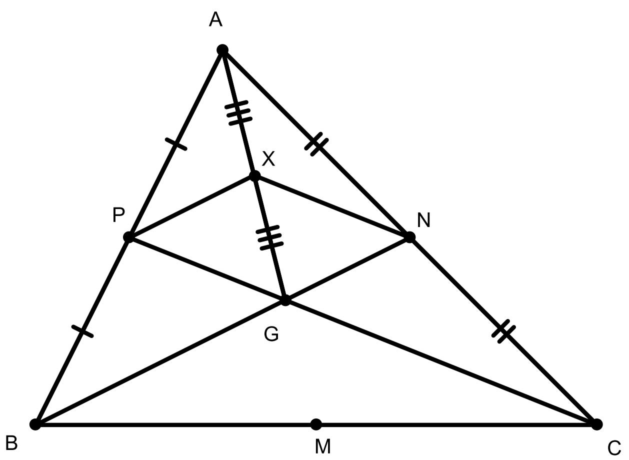
(d) Vamos começar analisando separadamente os conjuntos $\{8,10,12\}$ e $\{14,16,18\}$. Para o primeiro grupo de números, se o maior número do bola-na-trave for 13, restam três possibilidades para o 8 e três para o 10, com a exceção das duas escolhas serem iguais a 9. Logo, existem oito possibilidades neste caso. Se o maior número for 12 temos também 8 possibilidades e, se o maior for 11, temos apenas duas possibilidades para o 10 e três para o 8, com a exceção das duas escolhas serem iguais a 9. Temos assim 5 possibilidades. Então para o primeiro grupo, temos $8+8+5 = 21$ possibilidades. Por simetria, podemos observar as possibilidades do menor número do segundo grupo e concluir que para o segundo grupo temos também $8+8+5 = 21$ possibilidades. Veja que temos que subtrair as possibilidades em que foi escolhido 13 para o 12 e 13 também para o 14, ou seja, $8 \cdot 8 = 64$ possibilidades. Novamente, temos que lembrar de excluir o bilhete gol-no-ângulo. Então teremos

$$21 \cdot 21 - 8 \cdot 8 - 1 = 441 - 64 - 1 = 376$$

bilhetes bola-na-trave associados ao $\{8,10,12,14,16,18\}$.

18 *Propriedades das medianas*

Uma mediana de um triângulo é o segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto. Considere o triângulo ABC na figura a seguir e sejam M, N e P os pontos médios dos lados BC, CA e AB, respectivamente. As medianas BN e CP se cortam no ponto G. Seja X o ponto médio do segmento AG.



(a) Usando o quadrilátero $GPXN$, verifique que o ponto G divide o segmento CP na razão $2:1$, ou seja, que $CG = 2\cdot GP$.

(b) A partir do item anterior, verifique que a mediana AM corta a mediana CP no mesmo ponto G. Note que isto mostra que as três medianas de um triângulo passam por um mesmo ponto. Este ponto é chamado de *Baricentro* do triângulo.

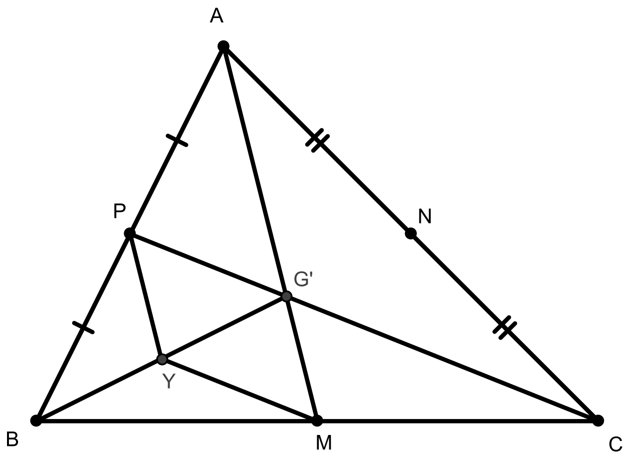
(c) Suponha que as medianas BN e CP possuem o mesmo comprimento, verifique que $AC = AB$.

18 *Propriedades das medianas – Solução*

(a) Observe que os triângulos AXN e AGC são semelhantes, pois $\frac{AX}{AG} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$ e o ângulo A é comum aos dois triângulos. Com isto, $XN = \frac{GC}{2}$ e XN é paralelo a GC. De maneira análoga, podemos provar que PX é paralelo a BN. Assim, o quadrilátero $GPXN$ é um paralelogramo, pois possui lados opostos paralelos. Como paralelogramos também possuem lados opostos de mesma medida (para mais detalhes olhar o problema "Condições para um quadrilátero ser um paralelogramo" do nível 2) temos

$$CG = 2\cdot XN = 2\cdot GP.$$

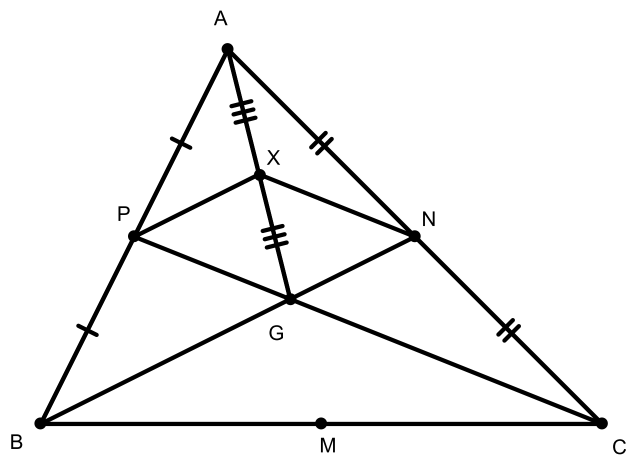
(b) Chamaremos de G' o ponto onde AM corta CP.



Usando a mesma ideia que o item anterior, o quadrilátero $G'PYM$ é um paralelogramo e vale $CG' = 2\cdot G'P$. Como G e G' dividem o segmento de C para P na mesma razão, podemos concluir que $G = G'$ e que as três medianas passam por G.

(c) Se as medianas BN e CP possuem o mesmo comprimento, então os triângulos PGB e NGC são congruentes pelo caso LAL, pois:

$$\begin{aligned}
PG &= \frac{CP}{3} \\
&= \frac{BN}{3} \\
&= NG; \\
\angle PGB &= \angle NGC; \\
GB &= \frac{2 \cdot BN}{3} \\
&= \frac{2 \cdot CP}{3} \\
&= GC.
\end{aligned}$$



Consequentemente,

$$\begin{aligned}
PB &= NC \\
\frac{AB}{2} &= \frac{AC}{2} \\
AB &= AC.
\end{aligned}$$

19 *Desigualdade com números de Fibonacci*

A sequência de Fibonacci começa com $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e, a partir do segundo termo, cada novo termo é obtido somando-se os dois anteriores, ou seja,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ para } n \geq 0.$$

Assim, os primeiros termos da sequência de Fibonacci são:

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

a) Verifique que $F_{n+3} < 5F_n$ para todo $n \geq 3$.

b) Seja n um inteiro positivo. Mostre que entre potências consecutivas de n existe no máximo n números de Fibonacci.

19 *Desigualdade com números de Fibonacci – Solução*

a) Como a sequência de Fibonacci é crescente, temos

$$\begin{aligned} F_{n+3} &= F_{n+2} + F_{n+1} \\ &= 2 \cdot F_{n+1} + F_n \\ &= 3 \cdot F_n + 2 \cdot F_{n-1} \\ &< 3 \cdot F_n + 2 \cdot F_n \\ &= 5 \cdot F_n. \end{aligned}$$

b) Suponha que existam mais que n números de Fibonacci entre n^k e n^{k+1}. Denotemos as $n+1$ primeiras delas por $F_l, F_{l+1}, \ldots, F_{l+n}$. Assim, como F_l e F_{l+1} são maiores que n^k, temos

$$\begin{aligned} F_{l+2} &= F_{l+1} + F_l \\ &> n^k + n^k \\ &= 2 \cdot n^k \\ F_{l+3} &= F_{l+2} + F_{l+1} \\ &> 2 \cdot n^k + n^k \\ &= 3 \cdot n^k \\ F_{l+4} &= F_{l+3} + F_{l+2} \\ &> 3 \cdot n^k + n^k \\ &= 4 \cdot n^k \\ &\vdots \\ F_{l+n} &= F_{l+n-1} + F_{l+n-2} \\ &> (n-1) \cdot n^k + n^k \\ &= n^{k+1}. \end{aligned}$$

Isto é um absurdo, pois $F_{l+n} < n^{k+1}$.

Observação: É possível mostrar que $F_{n+l} = F_{n-1} \cdot F_l + F_n \cdot F_{l+1}$.

20 *O menor valor do quociente polinomial*

Qual o menor valor da fração

$$\frac{x^4 + x^2 + 5}{(x^2+1)^2}?$$

20 *O menor valor do quociente polinomial – Solução*

Temos

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^4+x^2+5}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(x^2+1)^2-(x^2+1)+5}{(x^2+1)^2} \\ &= 1-\frac{1}{1+x^2}+\frac{5}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Se $v = \dfrac{1}{1+x^2}$, então o problema se resume a encontrarmos o mínimo de $y = 1-v+5v^2$. Como o gráfico, em função de u, da função $y = 1-v+5v^2$ é uma parábola, o mínimo será atingido quando $v = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{10}$. Outra maneira de ver isto, é fazer o completamento de quadrados:

$$\begin{aligned} 1-v+5v^2 &= 5\left(v-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{19}{20} \\ &\geq \frac{19}{20}, \end{aligned}$$

pois todo quadrado perfeito é não negativo. A igualdade ocorre apenas se $v = \dfrac{1}{10}$ e o valor mínimo é, portanto, $\dfrac{19}{20}$. Note que $\dfrac{1}{1+x^2} = v = \dfrac{1}{10}$ se, e somente se, $1+x^2 = 10$, ou seja, $x = \pm 3$. A resposta é $\dfrac{19}{20}$, que ocorre quando $x = \pm 3$.

21 *As listas de Bruno e Bernardo*

Bruno tem uma lista com todos os números naturais de 10 dígitos que se podem formar utilizando apenas os dígitos 1, 2, 3 e 4 e além disto que possuem igual quantidade de algarismos 1 e 2, por exemplo, 3333333333, 1111342222 etc. Bernardo tem a lista de todos os números naturais de 20 dígitos formados por 10 dígitos 1 e 10 dígitos 2. Demonstre que a lista de Bruno tem a mesma quantidade de dígitos da lista de Bernardo.

21 *As listas de Bruno e Bernardo – Solução*

Abordemos inicialmente uma versão simplificada do problema. Suponha que Bruno quisesse listar todos os números de dois dígitos utilizando os mesmos quatro dígitos e também possuindo iguais quantidades de algarismos 1 e 2. Ele obteria a seguinte lista:

$$12, 21, 33, 44, 34, 43.$$

Suponha agora que Bernardo quisesse listar todos os números naturais de 4 dígitos formados por dois algarismos 1 e dois algarismos 2. Ele obteria a seguinte lista:

$$1122, 2211, 1212, 2121, 1221, 2112.$$

A comparação entre as duas listas nos sugere que pode existir alguma correspondência direta entre os elementos de cada lista. Considere a seguinte tabela de conversão:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & 11 \\ 2 & \rightarrow & 22 \\ 3 & \rightarrow & 12 \\ 4 & \rightarrow & 21. \end{array}$$

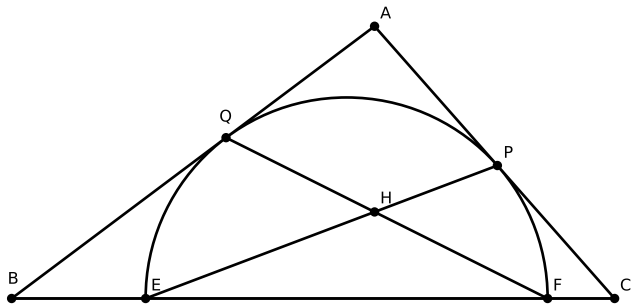
Veja que a troca de cada dígito de um número na primeira lista, seguindo a tabela de conversão, produz exatamente um número da segunda lista. Precisamos verificar que isso realmente ocorre com as listas originais de Bruno e Bernardo. Considere um número qualquer de 10 dígitos na lista de Bruno:

$$a_1 a_2 \ldots a_{10}.$$

Suponha que o número acima possui k dígitos iguais a 1, l dígitos iguais a 3 e m dígitos iguais a 4. Como as quantidades de dígitos 1 e 2 é a mesma, temos $2k + l + m = 10$. Se trocarmos cada dígito 3 pela sequência 12, cada dígito 4 por 21, cada dígito 1 por 11 e cada dígito 2 por 22 teremos um número com o dobro de dígitos, ou seja, com 20 dígitos e, além disto, com $2k + l + m = 10$ dígitos iguais a 1 e também $2k + l + m = 10$ dígitos iguais a 2. Reciprocamente, cada número com 20 dígitos possuindo a mesma quantidade de dígitos 1 e 2 pode ser convertido a um único número da lista de Bernardo simplesmente agrupando-se seus dígitos de dois em dois e convertendo os 10 pares de dígitos consecutivos assim formado no sentido inverso da tabela anterior. Esta correspondência biunívoca entre as duas listas nos permite concluir que elas possuem a mesma quantidade de elementos.

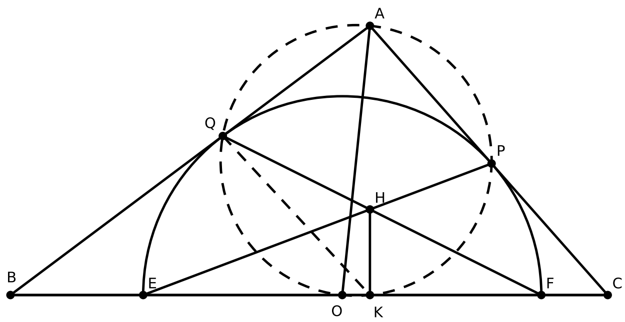
22 *A altura e o semicírculo*

Um semicírculo de diâmetro EF, situado no lado BC do triângulo ABC, é tangente aos lados AB e AC em Q e P, respectivamente. As retas EP e FQ se encontram em H. Mostre que AH é a altura do triângulo.



22 *A altura e o semicírculo – Solução*

Sejam K o pé da perpendicular de H ao segmento BC e O o centro do semicírculo. Suponha sem perda de generalidade que K está no segmento OC.



Como EF é um diâmetro, segue que $\angle EQF = \angle HKE = 90^\circ$ e consequentemente $EQHK$ é um quadrilátero inscritível em um círculo de diâmetro EH. Daí segue que

$$\angle HKQ = \angle QEH = \angle QEP = \frac{\angle QOP}{2}.$$

Analisando os triângulos AQO e AOP, temos

$$QA = AP,\ QO = OP \text{ e } AO = AO.$$

Portanto, pelo caso de congruência LLL, os triângulos AQO e APO são congruentes. Assim $\frac{\angle QOP}{2} = \angle QOA$ e

$$\angle QKO = 90^\circ - \angle HKQ = 90^\circ - \frac{\angle QOP}{2} = 90^\circ - \angle QOA = \angle QAO,$$

pois $\angle OQA = 90^\circ$. Consequentemente, $QAKO$ é um quadrilátero inscritível. Lembrando que $\angle OQA = 90^\circ$, o diâmetro de tal círculo é AO. Daí, $\angle AKO = 90^\circ$ e tanto AK quanto HK são perpendiculares a BC. Portanto, A, H e K são colineares e, finalmente, AH é altura do triângulo.

23 *A disputa de pingue-pongue*

Alguns alunos do sétimo e oitavo ano de uma escola participam de um torneio de pingue-pongue, onde cada aluno joga contra todos os outros exatamente uma vez recebendo 1 por vitória e 0 ponto por derrota. Existem dez vezes mais alunos do oitavo ano do que do sétimo ano. A pontuação total dos alunos do oitavo ano é 4.5 vezes a pontuação total dos alunos do sétimo ano.

a) Verifique que se no torneio existem k alunos, então o número de jogos é $\dfrac{k(k-1)}{2}$.

b) Qual é a soma das pontuações obtidas por todos os alunos do sétimo ano?

23 *A disputa de pingue-pongue – Solução*

a) Cada um dos k alunos irá jogar $k-1$ vezes. Somando-se a quantidade de jogos de cada um, obtemos $k(k-1)$. Entretanto, teremos contado cada jogo duas vezes, uma para cada um dos participantes da partida. Logo, o número de jogos é $\dfrac{k(k-1)}{2}$.

b) Seja n o número de alunos do sétimo ano e suponha que este conjunto de alunos obteve m pontos. Então o número de alunos do oitavo ano é $10n$ e a pontuação obtida por eles é $4.5m$. Como o número total de participantes do torneio é $n+10n=11n$ e cada partida vale exatamente 1 ponto, o número de pontos disputados é $\dfrac{11n(11n-1)}{2}$. Por outro lado, sabemos que $m+4.5m$ correspondem a todos os pontos disputados, daí

$$\begin{aligned} \frac{11n(11n-1)}{2} &= 5.5m \\ n(11n-1) &= m. \end{aligned}$$

Como cada participante disputou $11n-1$ jogos e cada um deles vale 1 ponto, a soma dos pontos obtidos pelos alunos do sétimo ano é no máximo $n(11n-1)$. Como este número coincide com a pontuação obtida por tal conjunto de participantes, podemos concluir que não existem dois alunos do sétimo ano que jogaram entre si, pois caso contrário devemos diminuir de $n(11n-1)$ a contagem dupla de tal partida. Isto só é possível se existir apenas um aluno do sétimo ano. Portanto, $n=1$ e $m=1\cdot 10=10$.

24 *Uma equação muito radical*

Resolva a equação

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

24 *Uma equação muito radical – Solução*

Temos

$$\begin{aligned}\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} &= \sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}\\ &= |\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|.\end{aligned}$$

Como a distância entre 2 e 3 é 1, só podemos ter $|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1$ quando $\sqrt{x-1}$ se situa entre estes dois números, ou seja,

$$2 \le \sqrt{x-1} \le 3.$$

Isto é equivalente a $4 \le x-1 \le 9$. Portanto, o conjunto solução é $\{x \in \mathbb{R} | 5 \le x \le 10\}$.

25 *As pontuações do torneio*

Em um torneio, quaisquer dois jogadores jogam entre si. Cada jogador obtém um ponto por vitória, $1/2$ por empate e 0 ponto por derrota. Seja S o conjunto das 10 menores pontuações. Sabemos que cada jogador obteve metade da sua pontuação jogando contra jogadores de S.

a) Qual a soma das pontuações dos jogadores de S?

b) Determine quantos participantes tem o torneio.

Observação: Cada jogagor joga apenas uma vez com cada adversário.

25 *As pontuações do torneio – Solução*

a) Os jogadores de S, em partidas disputadas apenas entre si, obtiveram $\dfrac{10(10-1)}{2}=45$ pontos. Como os que eles obtiveram jogando entre si correspondem a metade dos pontos que cada um obteve no torneio, podemos concluir que a soma dos pontos dos jogadores de S é $45+45=90$.

b) Sejam n o número de jogadores do torneio e T o conjunto dos outros $n-10$ jogadores. Jogando apenas entre si, os jogadores de T obtiveram $\dfrac{(n-10)(n-11)}{2}$ pontos. Como eles obtiveram metades de seus pontos jogando com jogadores de S, podemos concluir que eles obtiveram a outra metade jogando entre si. Consequentemente, a soma das pontuações de todos os jogadores de T é $(n-10)(n-11)$. Como a soma das pontuações de todos os jogadores corresponde ao total de jogos, temos

$$\begin{aligned}90+(n-10)(n-11) &= \frac{n(n-1)}{2}\\ n^2-41n+400 &= 0.\end{aligned}$$

As raízes desta equação do segundo grau são 16 e 25. Se $n=16$, os $16-10=6$ melhores jogadores que obtiveram, em conjunto, $(16-10)(16-11)=30$ pontos. Como cada jogador entre os 6 melhores fez pelo menos tantos pontos quanto os 10 piores, a média de pontos em T é pelo menos a média de pontos de S, ou seja,

$$5 = \frac{30}{6} \geq \frac{90}{10} = 9.$$

Isto é um absurdo. Logo, só nos resta $n = 25$. Resta apenas mostrar que é possível cumprirmos as exigências do torneio com 25 jogadores.

Considere a divisão das 25 pessoas em três grupos:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6\} \\ G_2 &= \{J_7, J_8, J_9, J_{10}, J_{11}, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{15}\} \\ G_3 &= \{J_{16}, J_{17}, J_{18}, J_{19}, J_{20}, J_{21}, J_{22}, J_{23}, J_{24}, J_{25}\}. \end{aligned}$$

Todos os jogos entre elementos de $G_2 \cup G_3$ terminarão empatados. Vamos agora definir o resultado entre as partidas dos elementos de G_1 contra os outros competidores:

i) Os elementos de G_1 vão ganhar todas as partidas contra elementos de G_3.

ii) Todos os jogos entre dois elementos de G_1 terminarão empatados.

iii) Cada elemento de G_1 irá vencer exatamente seis elementos de G_2 e empatará com os outros 3 restantes. Para isto, representando uma vitória por meio de uma seta ($\rightarrow$), estabeleceremos:

$$\begin{aligned} J_1 &\rightarrow J_{10}, J_{11}, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{15} \\ J_2 &\rightarrow J_{10}, J_{11}, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{15} \\ J_3 &\rightarrow J_7, J_8, J_9, J_{13}, J_{14}, J_{15} \\ J_4 &\rightarrow J_7, J_8, J_9, J_{13}, J_{14}, J_{15} \\ J_5 &\rightarrow J_7, J_8, J_9, J_{10}, J_{11}, J_{12} \\ J_6 &\rightarrow J_7, J_8, J_9, J_{10}, J_{11}, J_{12}. \end{aligned}$$

Com esta distribuição, os jogadores de G_1, G_2 e G_3, obterão 20, 10 e 9 pontos, respectivamente. Além disto, cada elemento destes três grupos terá obtido metade de seus pontos contra os elementos de G_3.

26 *Quem é o maior?*

Se n e k são inteiros positivos, então

$$(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k) < (n+k)^k.$$

Use isto para determinar qual dos dois números a seguir é maior que o outro:

$$(100!)! \text{ e } 99!^{100!}\cdot 100!^{99!}.$$

26 *Quem é o maior? – Solução*

Se a é um inteiro arbitrário, usando a dica do enunciado e multplicando as 100 desigualdades a seguir

$$\begin{array}{rcl}
1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot a & < & a^a \\
(a+1)(a+2)(a+3)\cdot\ldots\cdot(2a) & < & (2a)^a \\
(2a+1)(2a+2)(2a+3)\cdot\ldots\cdot(3a) & < & (3a)^a \\
 & \cdots & \\
(99a+1)(99a+2)(99a+3)\cdot\ldots\cdot(100a) & < & (100a)^a,
\end{array}$$

temos:

$$(100a)! < (100!\cdot a^{100})^a.$$

Basta agora substituirmos $a = 99!$ para obtermos

$$\begin{array}{rcl}
(100!)! & < & (100!\cdot(99!)^{100})^{99!} \\
 & = & (100!)^{99!}\cdot(99!)^{100!}.
\end{array}$$

27 *Qual o máximo de triângulos?*

São dadas 2017 retas separadas em três conjuntos de modo que retas em um mesmo conjunto são paralelas entre si. Qual é o maior número possível de triângulos que podemos formar com vértices nestas retas?

27 *Qual o máximo de triângulos? – Solução*

Sejam $a \geq b \geq c$ as quantidades de retas nos três conjuntos. Então $a+b+c = 2017$ e o número de triângulos que podem ser formados é $a \cdot b \cdot c$, pois retas em um mesmo conjunto não se intersectam. Assim, queremos maximizar o produto anterior. Se $a > c+1$, podemos diminuir uma reta do conjunto com a e aumentar uma reta no conjunto com c, mantendo assim a quantidade total de retas, mas aumentando o produto:

$$\begin{aligned} a \cdot b \cdot c &< b \cdot (a \cdot c + a - c - 1) \\ &= b \cdot (a-1) \cdot (c+1). \end{aligned}$$

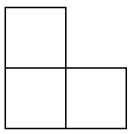
Portanto, para ocorrer o produto máximo, $a = c$ ou $a = c+1$. Se tivermos $a = c$, teremos também $b = c$ e $3c = a+b+c = 2017$. Como 2017 não é múltiplo de 3, isto não ocorre. Logo, $a = c+1$ e $b = c+1$ ou $b = c$. Assim, ou $a+b+c$ é $3c+1$ ou $3c+2$. O resto de 2017 por 3 é 1 e isto nos permite concluir que $a+b+c = 3c+1$. Logo, $c = 672$ e $a \cdot b \cdot c = 673 \cdot 672^2$.

28 *Retângulos nos quadradinhos*

Seja n um inteiro positivo.

a) Um quadrado de lado n é dividido em n^2 quadradinhos de lados unitários por retas paralelas aos seus lados. Determine o número de retângulos cujos vértices são vértices de quadradinhos e que possuem lados paralelos aos lados do quadrado original.

b) Três quadrados de lado n são arranjados como na figura a seguir e cada um deles é dividido em n^2 quadrados de lados unitários por retas paralelas aos seus lados. Determine o número de retângulos cujos vértices são vértices de quadradinhos e que possuem lados paralelos aos lados dos três quadrados originais.



28 *Retângulos nos quadradinhos – Solução*

a) Os vértices dos retângulos são unicamente determinados pelas interseções de duas das $n+1$ retas verticais e paralelas com duas das $n+1$ retas horizontais paralelas aos lados do quadrado que delimitam os quadradinhos unitários. Podemos escolher a primeira reta vertical de $n+1$ maneiras e a segunda de $n+1-1 = n$ maneiras. Além disto, escolher uma reta r e depois uma reta s é o mesmo que escoher s e depois r. Assim, o total de escolhas de pares de retas verticais é $\dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$. De forma semelhante, o total de escolhas de retas horizontais é $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Portanto, o número procurado de retângulos é

$$\left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2.$$

b) Completemos a figura dada de modo a obtermos um quadrado de lado $2n$ subdividido em $(2n)^2$ quadradinhos de lados unitários. Já sabemos que em tal configuração existem

$$\left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right)^2 = n^2 \cdot (2n+1)^2$$

retângulos com vértices nos quadradinhos unitários e lados paralelos aos lados do quadrado. Queremos remover desta contagem, retângulos que tenham pelo menos um vértice na nova região inserida na figura dada. Estes retângulos indesejados podem possuir um, dois ou quatro vértices dentro do quadrado de lado n acrescentado à figura. Vejamos a quantidade de tais retângulos em cada caso:

i) Para contar os retângulos com quatro vértices no novo quadrado, basta apelar novamente para o item a) e obter
$$\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$$
retângulos.

ii) Para contar os retângulos com dois vértices no novo quadrado, note que eles ou estarão em uma reta vertical ou horizontal. Suponha inicialmente que os dois vértices na região nova estão numa reta vertical. Podemos escolhê-la de n formas, correspondendo exatamente às n últimas retas verticais da direita. A outra reta vertical que contém os outros vértices fora da nova região, pode ser escolhida de n formas, correspondendo exatamente às n primeiras retas verticais da esquerda. Assim, temos $n\cdot n = n^2$ escolhas para as retas verticais. Para escolhermos as retas horizontais, como estamos supondo que existem exatamente dois vértices na região nova, eles deve ser escolhidos entre as $n+1$ primeiras retas horizontais de cima. Como a ordem de escolha delas não importa, temos $\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$ possíveis escolhas de retas verticais. A outra possibilidade, em que os dois vértices estão numa reta horinzontal, é análoga e basta apenas dobrar a contagem que fizemos anteriormente para incluí-los. Consequentemente, o total de retângulos indesejados neste caso é

$$2\cdot n\cdot n\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} = n^3(n+1).$$

iii) Finalmente, para contar os retângulos com apenas um vértice na nova região, note que ele é a interseção de uma das n últimas retas verticais com uma das n primeiras retas horizontais. Portanto, podemos escolher estas retas de $n\cdot n = n^2$ maneiras. Para escolher as outras retas que determinarão os outros vértices do retângulo, devemos escolher uma reta vertical dentre as n primeiras e uma reta horizontal dentre as n últimas. Portanto, o total de retângulos neste caso é

$$n\cdot n\cdot n^2 = n^4.$$

Para finalizar a contagem, basta eliminarmos os retângulos indesejados que acabamos de calcular e assim obtemos como resposta o número:

$$n^2\cdot(2n+1)^2 - n^4 - n^3(n+1) - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

29 *Separando quatro números em grupos de mesma soma*

Considere cinco números reais positivos ordenados por $0 < a \le b \le c \le d \le e$. Sabe-se que sempre que tiramos um destes números, podemos separar os outros quatro em dois grupos tais que a soma dos números de um grupo é igual à soma dos números do outro grupo. Se uma sequência (a, b, c, d, e) satisfaz esta condição, dizemos que ela é **quase-equilibrada**. Existem sequências que atendem a uma condição mais restrita: se retirarmos um número podemos separar os quatro números restantes em dois grupos **com a mesma quantidade de números** tais que a soma dos números de um grupo é igual à soma dos números do outro grupo. Se uma sequência de números reais positivos (a, b, c, d, e) satisfaz esta condição mais restrita, dizemos que essa sequência é **equilibrada**.

(a) Mostre um exemplo de cinco números reais positivos ordenados por $0 < a \le b \le c \le d \le e$, com $a < e$, que formam uma sequência quase-equilibrada. Veja que podemos fazer alguns deles iguais se isto for conveniente.

(b) Se uma sequência equilibrada possui três termos iguais, mostre que os cinco números são obrigatoriamente iguais.

(c) Considere uma sequência equilibrada (a, b, c, d, e) com $0 < a \le b \le c \le d \le e$. Sabe-se ainda que $(e + c) = (b + d)$ e que $(e + a) = (c + d)$. Prove que os cinco números são iguais.

29 *Separando quatro números em grupos de mesma soma – Solução*

(a) Considere os números $0 < 1 \le 1 \le 1 \le 3 \le 3$. Veja que se tirarmos um dos números iguais a 1, podemos separar os restantes em dois grupos iguais a $(1, 3)$. Se tirarmos um 3, então podemos separar os restantes nos grupos $(1, 1, 1)$ e (3).

(b) Suponha que temos três números iguais a x e dois restantes y e z. Se retirarmos o z, teremos $x + x = x + y$, ou seja, $x = y$. Se separarmos o y, teremos $x + x = x + z$, ou seja, $x = z$. Concluímos assim que os cinco números são obrigatoriamente iguais a x.

(c) Veja que $e \ge d$ e $c \ge b$, logo:

$$b + d = e + c \ge d + b.$$

Assim, segue que $e = d$ e $b = c$, pois caso contrário chegaríamos a uma contradição. Como $e = d$ e $e + a = c + d$, temos $a = c$. Deste modo, $a = b = c$ e, usando o item anterior, podemos concluir que os cinco números são iguais.

30 *Resolvendo uma equação diofantina com cubos*

Neste problema desejamos achar todos os inteiros m e n que satisfazem a condição $mn \geq 0$ e a equação:

$$m^3 + n^3 + 99mn = 33^3.$$

Sejam $s = m + n$ e $p = mn$. É possível expressar $m^3 + n^3$ em termos de s e p, usando a fatoração

$$\begin{aligned} m^3 + n^3 &= (m+n)(m^2 - mn + n^2) \\ &= s(m^2 + 2mn + n^2 - 3mn) \\ &= s(s^2 - 3p) \\ &= s^3 - 3sp. \end{aligned}$$

(a) Substitua o resultado da expressão dada em termos de s e p na equação que queremos solucionar. Em seguida, escreva-a como um produto de fatores iguais a zero.

(b) O produto de fatores é zero apenas quando algum deles for zero. Mostre que um dos fatores igual a zero implica 34 soluções com m e n inteiros não negativos.

(c) Para o outro fator, mostre que ele ser nulo equivale a

$$(m-n)^2 + (m+33)^2 + (n+33)^2 = 0.$$

Neste caso, a única solução será $m = n = -33$.

30 *Resolvendo uma equação diofantina com cubos – Solução*

(a) Desenvolvendo a equação, temos

$$\begin{aligned} m^3 + n^3 + 99mn - 33^3 &= 0 \\ s^3 - 3sp + 99p - 33^3 &= 0 \\ s^3 - 33^3 - 3p(s-33) &= 0 \\ (s-33)(s^2 + 33s + 33^2) - 3p(s-33) &= 0 \\ (s-33)(s^2 + 33s - 3p + 33^2) &= 0. \end{aligned}$$

(b) Se $s = 33$ o produto será zero. Então teremos as soluções

$$(m,n) = (0,33); (1,32); (2,31); \ldots ; (32,1); (33,0).$$

Obtemos assim, 34 soluções da equação.

(c) Agora vamos analisar quando o fator $s^2 + 33s - 3p + 33^2$ é igual a zero.

$$\begin{aligned}
s^2 + 33s - 3p + 33^2 &= 0 \\
2s^2 + 66s - 6p + 2 \cdot 33^2 &= 0 \\
2(m+n)^2 + 66(m+n) - 6mn + 2 \cdot 33^2 &= 0 \\
2m^2 + 4mn + 2n^2 + 66m + 66n - 6mn + 2 \cdot 33^2 &= 0 \\
(m^2 - 2mn + n^2) + (m^2 + 66m + 33^2) + (n^2 + 66n + 33^2) &= 0 \\
(m-n)^2 + (m+33)^2 + (n+33)^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Como o quadrado de um número real é sempre não negativo, a soma de quadrados igual a zero implica que cada um deles deve ser zero. Assim,

$$\begin{aligned}
m - n &= 0; \\
m + 33 &= 0; \\
n + 33 &= 0.
\end{aligned}$$

A única solução que atende a estas três condições é $m = n = -33$. Vale lembrar que esta solução também atende a condição $mn \geq 0$.

31 *Distribuindo no máximo dois chocolates para cada criança*

Defina $f(n,k)$ como o número de maneiras de distribuir k chocolates para n crianças em que cada criança recebe 0, 1 ou 2 chocolates. Por exemplo, $f(3,4) = 6$, $f(3,6) = 1$ e $f(3,7) = 0$.

(a) Exiba todas as 6 maneiras de distribuir 4 chocolates para 3 crianças com cada uma ganhando no máximo dois chocolates.

(b) Considerando 2015 crianças, verifique que $f(2015,k) = 0$ para todo k maior ou igual a um valor apropriado.

(c) Mostre que a equação

$$f(2016,k) = f(2015,k) + f(2015,k-1) + f(2015,k-2)$$

é verdadeira para todo k inteiro positivo maior ou igual a 2.

(d) Calcule o valor da expressão

$$f(2016,1) + f(2016,4) + f(2016,7) + \ldots + f(2016,4027) + f(2016,4030).$$

31 *Distribuindo no máximo dois chocolates para cada criança – Solução*

(a) Vamos representar cada distribuição por uma tripla ordenada de números (a,b,c) em que cada número representa a quantia de chocolates que cada criança receberá. As seis possibilidade são:

$$(2,2,0); (2,0,2); (0,2,2); (2,1,1); (1,2,1); (1,1,2).$$

(b) Se $k \geq 2 \cdot 2015 + 1 = 4031$, então pelo Princípio da Casa dos Pombos, se forem distribuídos k chocolates para 2015 crianças, pelo menos uma delas ganhará mais que 2 chocolates. Em outras palavras, é impossível que cada uma ganhe no máximo dois chocolates. Então, para $k \geq 4031$, temos $f(2015,k) = 0$.

(c) Vamos considerar as possibilidades de chocolates para a primeira criança. Se ela ganhar 0, então restam k chocolates para as outras 2015. Se ela ganhar 1, restam $k-1$ para as outras. E se ela ganhar 2, então restam $k-2$ para as demais. Esta contagem em três casos corresponde à seguinte equação:

$$f(2016,k) = f(2015,k) + f(2015,k-1) + f(2015,k-2).$$

(d) Chamaremos esta soma de S. Usando o item anterior, temos

$$\begin{array}{rcl}
f(2016,1) & = & f(2015,1) + f(2015,0) \\
f(2016,4) & = & f(2015,4) + f(2015,3) + f(2015,2) \\
f(2016,7) & = & f(2015,7) + f(2015,6) + f(2015,5) \\
 & \ldots & \\
f(2016,4027) & = & f(2015,4027) + f(2015,4026) + f(2015,4025) \\
f(2016,4030) & = & f(2015,4030) + f(2015,4029) + f(2015,4028).
\end{array}$$

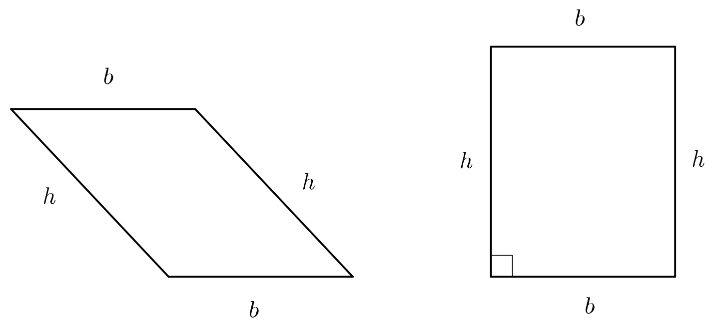
Somando tudo, teremos

$$S = f(2015,0) + f(2015,1) + \ldots + f(2015,4029) + f(2015,4030).$$

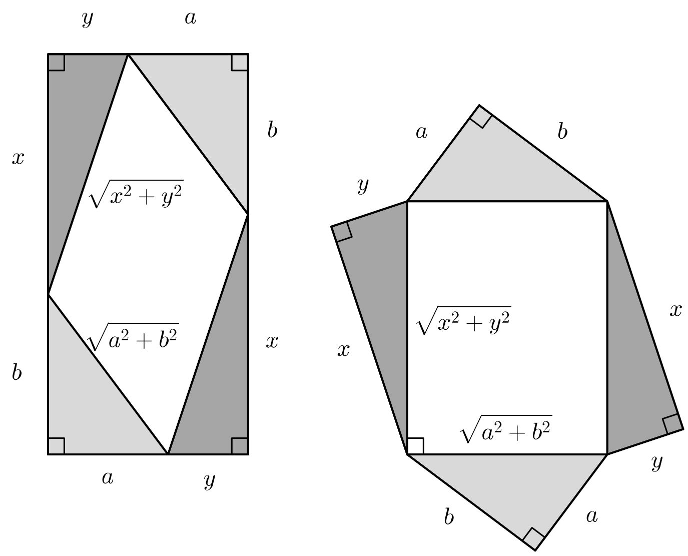
Veja que a segunda parcela representa todas as maneiras de distribuirmos 0, 1 ou 2 chocolates para cada criança de um grupo de 2015 crianças. Portanto, usando o princípio multiplicativo, esta soma é igual a 3^{2015}.

32 *Desigualdade de Cauchy-Schwarz para dois termos via geometria*

(a) Um quadrilátero com lados opostos iguais é um paralelogramo. As figuras a seguir mostram dois paralelogramos com os mesmos lados, sendo o segundo um retângulo. Determine a maior área possível de um paralelogramo de lados b e h.



(b) Considere as duas figuras a seguir, onde a, b, x e y são números reais positivos. Mostre que a segunda figura possui maior área.

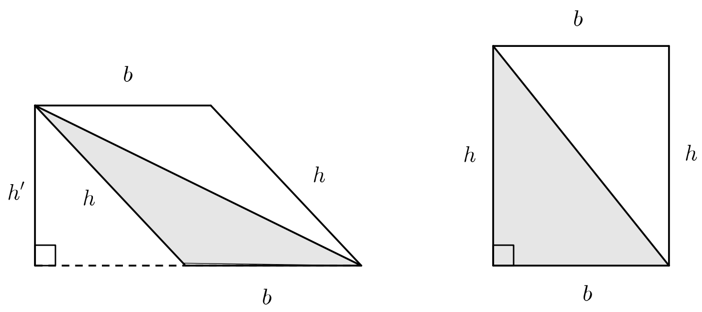


(c) Usando o resultado do item anterior, prove a desigualdade de Cauchy-Schwarz para dois termos, descrita pela desigualdade a seguir:

$$ax + by \leq \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}.$$

32 *Desigualdade de Cauchy-Schwarz para dois termos via geometria – Solução*

(a) Considerando todos os paralelogramos com lados b e h, observe que o retângulo é o que possui maior altura em relação à base fixa b. Na figura a seguir, pela Desigualdade Triangular, temos $h' < h$.



Como cada triângulo representa metade do paralelogramo, então $h' < h$ implica

$$\frac{b \cdot h'}{2} < \frac{b \cdot h}{2},$$

logo o retângulo possui maior área.

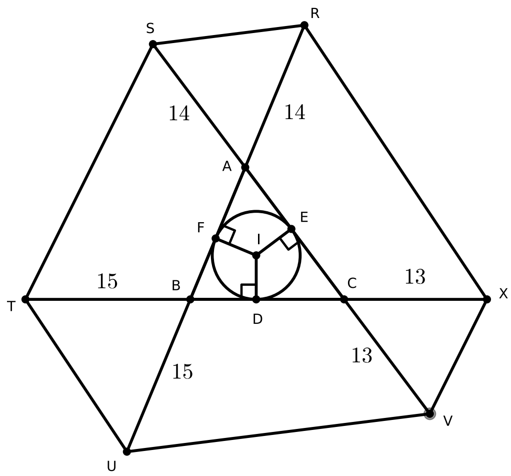
(b) O resultado é consequência do item anterior. A diferença entre as duas figuras é dada pelos quadriláteros. Na segunda figura, temos um retângulo com mesmos lados que o paralelogramo da primeira figura, então a área da segunda figura é maior.

(c) Comparando as áreas das duas figuras do item anterior, temos:

$$\begin{aligned}
(a+y)(b+x) &\leq 2 \cdot \frac{ab}{2} + 2 \cdot \frac{xy}{2} + \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2} \\
ab + ax + by + xy &\leq ab + xy + \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2} \\
ax + by &\leq \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

33 *Um hexágono inscritível*

A figura a seguir mostra um triângulo ABC com lados $AB = 13cm$, $BC = 14cm$ e $CA = 15cm$. A circunferência de centro I tangencia os lados AB, BC e CA nos pontos F, D e E, respectivamente. Os pontos R, S, T, U, V e X são marcados nos prolongamentos dos lados do triângulo ABC tal que $AR = AS = 14cm$, $BT = BU = 15cm$ e $CV = CX = 13cm$.



(a) Prove que $AE = AF$.

(b) Determine a medida do segmento BF.

(c) Prove que o hexágono $RSTUVX$ é inscritível, ou seja, mostre que existe uma circunferência passando pelos seus seis vértices.

33 *Um hexágono inscritível – Solução*

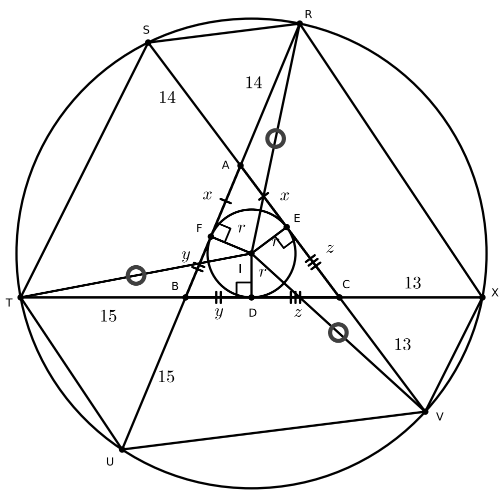
(a) O Teorema do Bico diz que as distâncias de um ponto exterior a uma circunferência aos pontos onde suas tangentes tocam a circunferência são iguais. Aplicando este resultado aos pontos A, B e C na circunferência que tangencia os três lados do triângulo ABC, temos

$$AE = AF = x;$$

$$BF = BD = y;$$

$$CD = CE = z.$$

(b)



Em virtude do item anterior, temos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} x+y &= 13; \\ y+z &= 14; \\ z+x &= 15. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, temos $x = 7$, $y = 6$ e $z = 8$. Portanto, $BF = 6$.

(c) Seja r o raio da circunferência que tangencia os três lados do triângulo. Usando o Teorema de Pitágoras, podemos calcular os quadrados das distâncias do ponto I até os pontos R, T e V:

$$\begin{aligned} IR^2 &= r^2 + (14+x)^2 \\ &= r^2 + 21^2 \\ IT^2 &= r^2 + (15+y)^2 \\ &= r^2 + 21^2 \\ IV^2 &= r^2 + (13+z)^2 \\ &= r^2 + 21^2. \end{aligned}$$

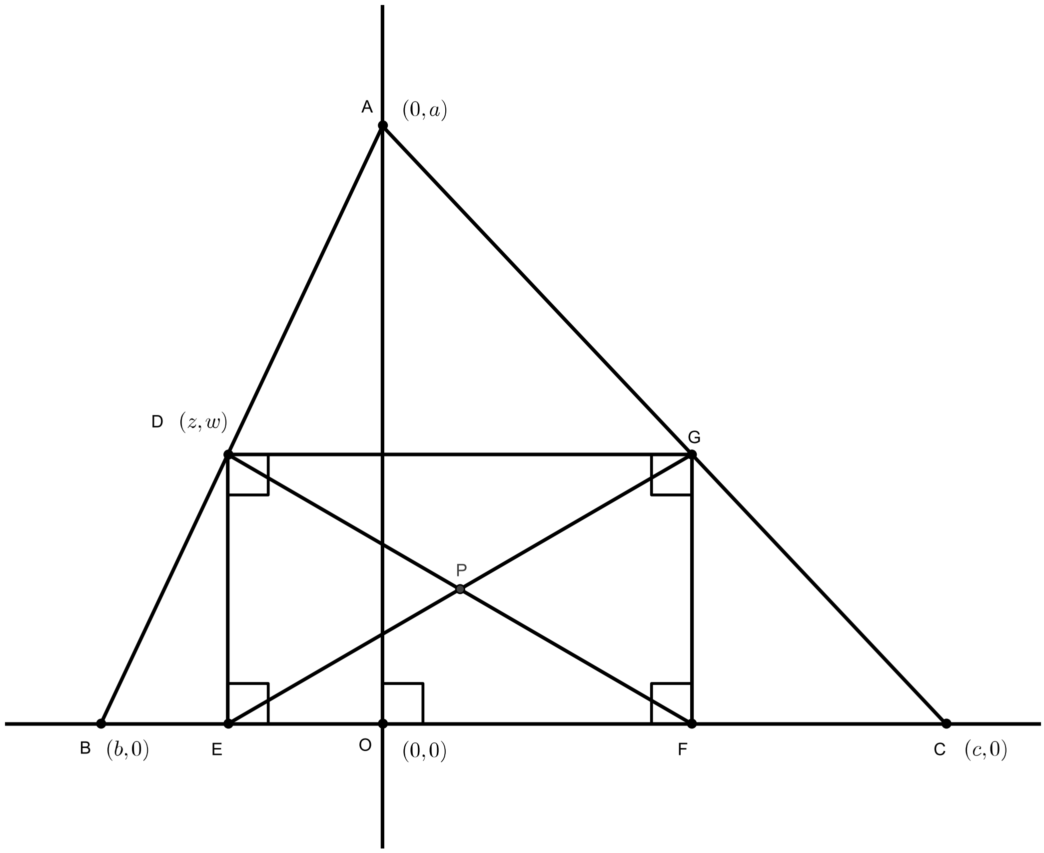
O mesmo pode ser feito para os pontos S, U e X. Logo,

$$IR = IS = IT = IU = IV = IX = \sqrt{r^2 + 21^2}.$$

Concluímos que o hexágono $RSTUVX$ é inscritível, pois os seis pontos estão sobre uma circunferência de centro I e raio $\sqrt{r^2 + 21^2}$.

34 *Lugar geométrico dos centros dos retângulos*

Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB \neq AC$. Considere todos os retângulos com dois vértices sobre o lado BC, um sobre o lado AB e um sobre o lado AC. Chamaremos de centro do retângulo o ponto de encontro das diagonais. Na figura a seguir, o centro do retângulo $DEFG$ é o ponto P.



Deseja-se determinar qual o lugar geométrico determinado pelos centros destes retângulos, ou seja, se fossem marcados todos os centros possíveis, qual figura seria formada pela união destes pontos. Para resolver este problema, usaremos geometria analítica. Seja O o pé da altura por A ao lado BC. Considere o sistema de coordenadas com origem em O, eixo x sobre a reta BC e eixo y sobre a reta OA. Então podemos marcar os pontos $O = (0,0)$, $A = (0,a)$, $B = (b,0)$ e $C = (c,0)$. Vale ressaltar que de $AB \neq AC$ podemos afirmar que $b \neq -c$, ou seja, $b + c \neq 0$.

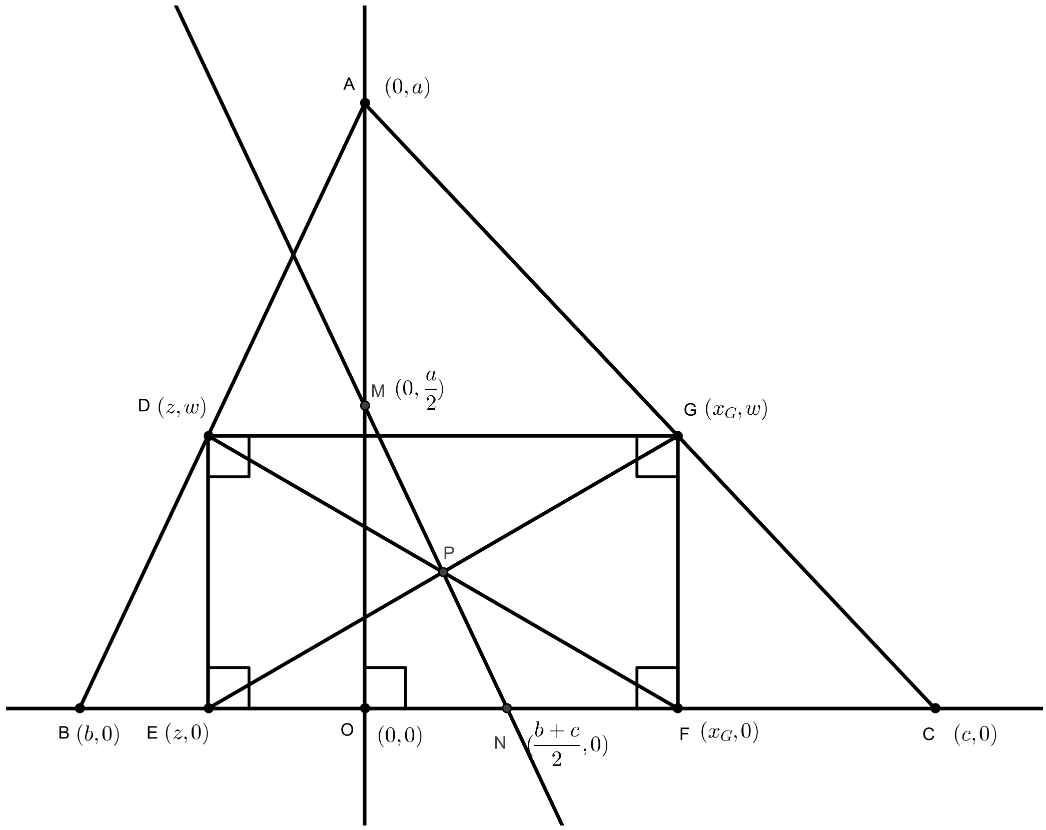
(a) Determine as coordenadas dos pontos médios M e N dos segmentos OA e BC, respectivamente. Em seguida, determine a equação da reta MN.

(b) Se considerarmos as coordenadas do ponto $D = (z, w)$, quais as coordenadas dos pontos E, F e G?

(c) O centro do retângulo é o encontro das diagonais e, como todo retângulo é um paralelogramo, ele coincide com o ponto médio da diagonal DF. Determine as coordenadas deste ponto e conclua que ele está sobre a reta MN.

34 *Lugar geométrico dos centros dos retângulos – Solução*

(a) Escrevendo as coordenadas de todos os pontos mencionados, temos a seguinte figura:



Como as coordenadas do ponto médio de um segmento são as médias aritméticas das coordenadas de seus extremos, obtemos:

$$\begin{aligned} M &= \left(0,\frac{a}{2}\right); \\ N &= \left(\frac{b+c}{2},0\right). \end{aligned}$$

Para determinar a equação da reta MN, devemos determinar os números reais m e n tais que as coordenadas dos pontos M e N satisfazem $y = m\cdot x+n$. Para isto, basta resolver o sistema a seguir:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2} = m\cdot 0+n \\ 0 = m\cdot\dfrac{b+c}{2}+n \end{cases}$$

cuja solução é $(n,m) = \left(a/2,-\dfrac{a}{b+c}\right)$.

Portanto, a equação da reta MN é

$$y = -\frac{a}{b+c}\cdot x+\frac{a}{2}.$$

(b) Como os pontos E e F estão sobre o eixo x, suas ordenadas são nulas. Sabendo que os segmentos DE e GF são perpendiculares ao eixo x, temos $x_E = x_D = z$ e $x_G = x_F$. Como o segmento DG é perpendicular ao eixo y, temos $y_G = y_D = w$. Para determinar x_G, basta estudar as equações das retas AC e GF. A equação da reta AC é $y = -\frac{a}{c} \cdot x + a$. O ponto G está sobre esta reta e possui $y_G = w$, então

$$w = -\frac{a}{c} \cdot x_G + a \Rightarrow x_G = \frac{c}{a} \cdot (a - w).$$

As coordenadas dos pontos E, F e G são:

$$\begin{aligned} E &= (z, 0); \\ F &= \left(\frac{c}{a} \cdot (a-w), 0\right); \\ G &= \left(\frac{c}{a} \cdot (a-w), w\right). \end{aligned}$$

(c) O ponto médio de DF possui coordenadas

$$P = \left(\frac{1}{2}(z + \frac{c}{a} \cdot (a-w)), \frac{1}{2}(w+0)\right) = \left(\frac{za + ca - wc}{2a}, \frac{w}{2}\right).$$

Como o ponto D está sobre a reta AB, temos, por semelhança de triângulos, que

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{b-z}{w} \\ wb &= a(b-z). \end{aligned}$$

Agora, devemos provar que as coordenadas do ponto P satisfazem a equação da reta MN encontrada no primeiro item deste problema. Ou seja,

$$\begin{aligned} m \cdot x_P + n &= -\frac{a}{b+c} \cdot \frac{za + ca - wc}{2a} + \frac{a}{2} \\ &= \frac{-za - ca + wc}{2(b+c)} + \frac{a}{2} \\ &= \frac{-za - ca + wc + ab + ac}{2(b+c)} \\ &= \frac{wc + a(b-z)}{2(b+c)} \\ &= \frac{wc + wb}{2(b+c)} \\ &= \frac{w}{2} \\ &= y_P. \end{aligned}$$

Concluímos assim que o ponto P está sobre a reta MN. É imediato verificar que todo ponto do segmento MN pode ser o centro de algum retângulo. Portanto, o lugar geométrico dos centros dos retângulos é o segmento MN.

ÍNDICE DE PROBLEMAS