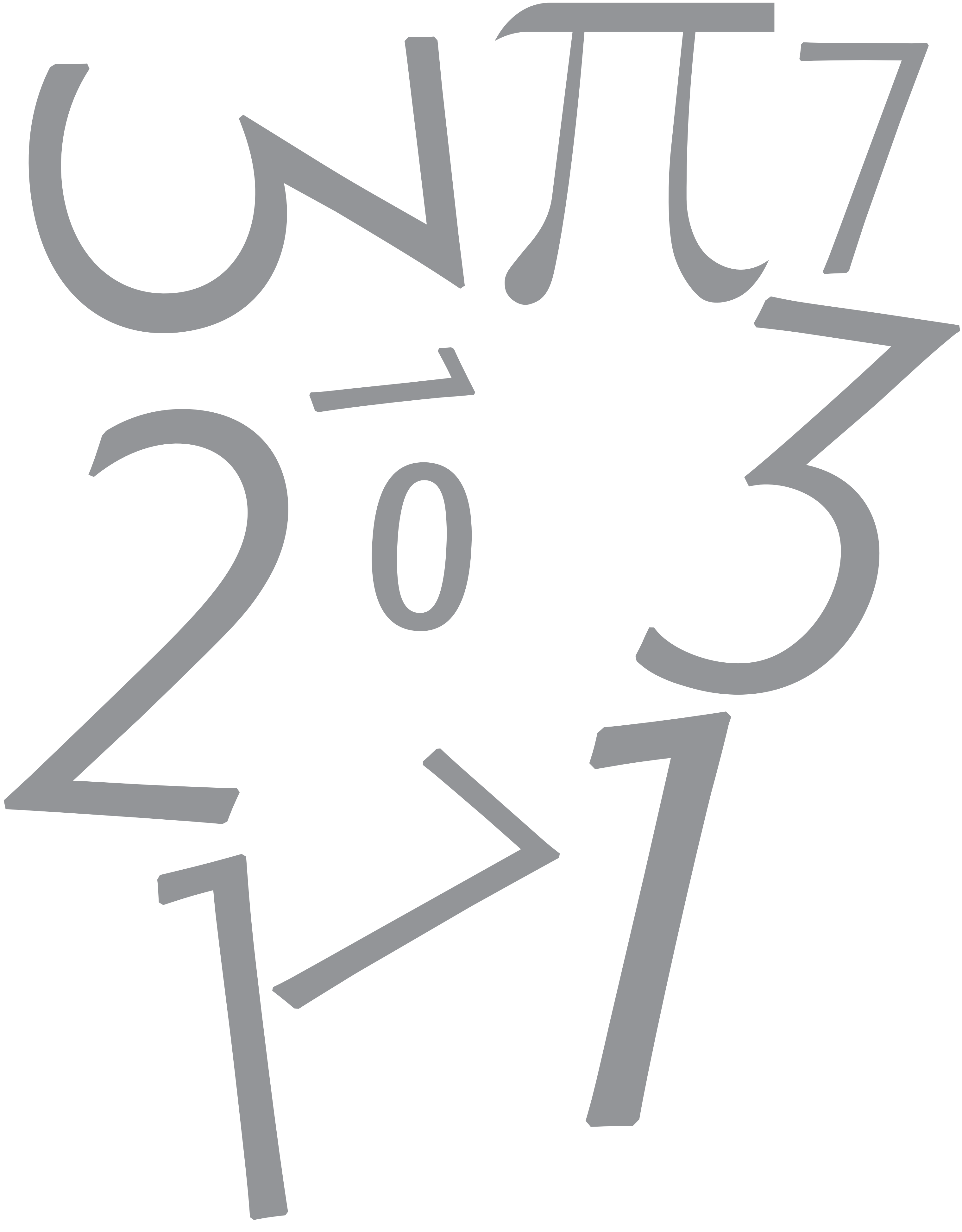


OBMEP - Banco de Questões 2015

Cleber Assis, Régis Barbosa, Samuel Feitosa e
Tiago Miranda

Banco de Questões 2015

Estrada Dona Castorina, 110 – Rio de Janeiro
22460-320

Impresso no Brasil/Printed in Brazil
Primeira edição e impressão

Texto e diagramação: Cleber Assis, Régis Barbosa, Samuel Feitosa e Tiago Miranda

Este livro foi escrito usando o sistema LaTeX.

Capa: Ampersand Comunicações Gráfica

IMPA/OBMEP
Banco de Questões 2015
Rio de Janeiro, IMPA, 2015
174 páginas
ISBN 978-85-244-0397-2

Distribuição
IMPA/OBMEP
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: contato@obmep.org.br
www.obmep.org.br

CONTEÚDO

APRESENTAÇÃO

Desde da sua primeira edição em 2005, a OBMEP oferece a todas as escolas públicas do país um Banco de Questões com problemas e desafios de Matemática para alunos e professores. O Banco pretende despertar o prazer pela Matemática, estimular o aluno interessado com perguntas instigantes e proporcionar um treinamento para as provas da OBMEP.

Os problemas apresentados, este ano, foram concebidos pelos professores Cleber Assis, Régis Barbosa, Samuel Feitosa e Tiago Miranda. A eles o nosso agradecimento.

Foram escolhidos problemas que requerem, mais do que qualquer conhecimento prévio em Matemática, imaginação e raciocínio. Tentou-se ao máximo apresentá-los em uma ordem crescente de dificuldade.

A edição deste ano do Banco de Questões e todas as edições anteriores estão disponíveis na página `www.obmep.org.br`, assim como as apostilas e o material didático utilizado no Programa de Iniciação Científica Junior.

Se você, leitor, encontrar uma solução para algum problema diferente da solução apresentada ao final do Banco de Questões, não deixe de mandá-la para

`bancodequestoes@obmep.org.br`,

pois ela poderá ser publicada na página da OBMEP.

Boa diversão!
Claudio Landim
Coordenador Geral da OBMEP

PREFÁCIO

Querido leitor/leitora,

O Banco de Questões deste ano da OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas –, segue o mesmo padrão do banco do ano passado. Para facilitar a busca de questões em meio ao livro, há um sumário no início e um índice remissivo no final com os nomes dos problemas e respectivas páginas onde aparecem seus enunciados e soluções. Além disso, as questões do Nível 1 são numeradas como $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, etc. As questões do Nível 2 são numeradas como $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, etc. E as questões do Nível 3 são numeradas como $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, etc.

Muitos dos problemas podem resistir às primeiras investidas do leitor e isso não deve ser motivo de desânimo. Um bom conselho é discuti-los com outras pessoas. Isso certamente tornará a experiência de resolvê-los ainda mais prazerosa. Além disso, durante a leitura das soluções, o uso do papel e da caneta podem ser bons instrumentos para a compreensão de todos os detalhes envolvidos.

Não podemos deixar de manifestar um enorme agradecimento a todos os professores que já estiveram ou que ainda estão envolvidos neste projeto.

Bom proveito!

Cleber Assis, Régis Barbosa, Samuel Feitosa e Tiago Miranda

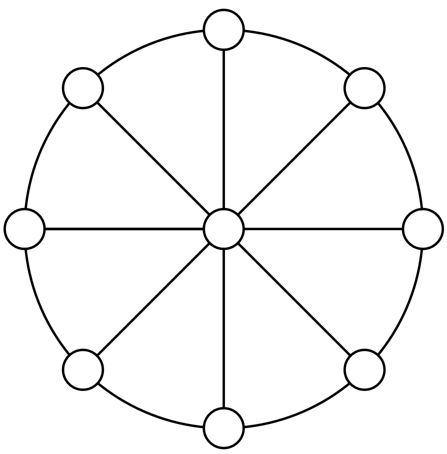
“Sempre faço o que não consigo fazer para aprender
o que não sei.”

Pablo Picasso

NÍVEL 1

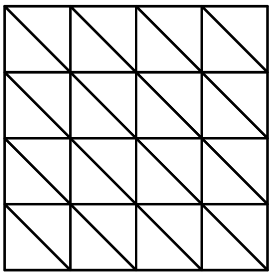
1 *Escrevendo números em círculos*

Na figura abaixo, temos uma circunferência cortada por 4 segmentos. Escreva os números de 1 até 9 nos círculos de modo que a soma dos números escritos em cada segmento seja sempre a mesma.



2 *Contando triângulos*

Quantos triângulos existem na figura abaixo?



3 *Dividindo chocolates*

Maria acaba de ganhar uma barra enorme de chocolate como presente de Páscoa. Ela decide dividi-la em pedaços para comê-la aos poucos. No primeiro dia, ela a divide em 10 pedaços e come apenas um deles. No segundo dia, ela divide um dos pedaços que sobraram do dia anterior em mais 10 pedaços e come apenas um deles. No terceiro dia, ela faz o mesmo, ou seja, divide um dos pedaços que sobraram do dia anterior em 10 outros e come apenas um deles. Ela continua repetindo esse procedimento até a Páscoa do ano seguinte.

a) Quantos pedaços ela terá no final do terceiro dia?

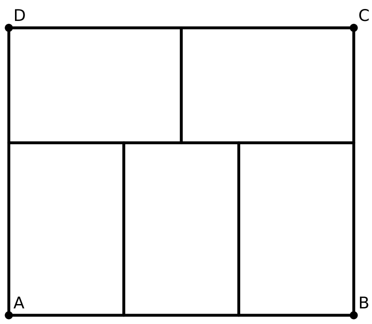
b) É possível que ela obtenha exatamente 2014 pedaços em algum dia?

4 *Números bacanas*

Um número natural é bacana quando cada um de seus algarismos é maior que qualquer um dos outros algarismos que estão à sua esquerda. Por exemplo, 3479 é bacana, enquanto que 2231 não é. Quantos números bacanas existem entre 3000 e 8000?

5 *Calculando áreas*

O retângulo $ABCD$ está dividido em cinco retângulos iguais. Se o perímetro de $ABCD$ é 20cm, determine a sua área.

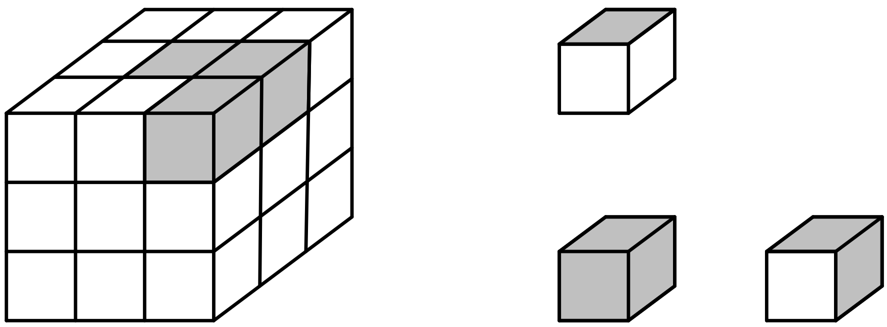


6 *Pintando cubinhos*

a) Na figura abaixo, João pintou algumas faces de cubinhos de um cubo $3 \times 3 \times 3$ de cinza. Ao desmontar o cubo em cubos menores de tamanho $1 \times 1 \times 1$, ele percebeu que um deles possuía três, outro possuía duas e o terceiro possuía apenas uma face cinza. Se ele tivesse pintado todas as faces do cubo maior de cinza, quantos cubinhos $1 \times 1 \times 1$ teriam exatamente uma face cinza? Quantos cubinhos teriam exatamente duas faces cinzas?

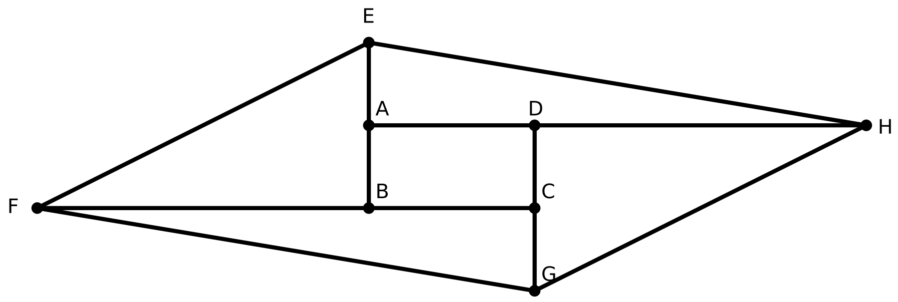
b) Se ele tivesse pintado todas as faces de um cubo $5 \times 5 \times 5$ de cinza, após dividi-lo em cubinhos $1 \times 1 \times 1$, quantos deles teriam exatamente uma face pintada de cinza?

c) Ainda considerando o cubo $5 \times 5 \times 5$, quantos cubinhos $1 \times 1 \times 1$ não teriam faces pintadas?



7 *Prolongando segmentos*

Na figura abaixo, os lados do retângulo $ABCD$ foram prolongados de modo que $EB = 2AB$, $AH = 3AD$, $DG = 2DC$ e $FC = 3BC$. Encontre a razão entre as áreas do quadrilátero $EHGF$ e do retângulo $ABCD$.



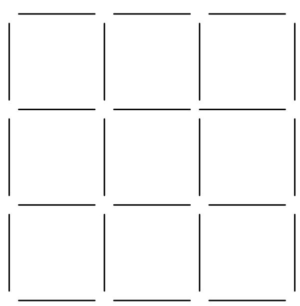
8 *Número de segmentos*

a) Dados quatro pontos distintos A, B, C e D, todos sobre uma mesma reta, como indica a figura abaixo, determine o número de segmentos distintos que podem ser formados com vértices em tais pontos.

b) Com 10 pontos distintos em um segmento, qual seria a nova resposta?

9 *Palitos formando quadrados*

Na figura abaixo, Maria arrumou 24 palitos e formou um quadrado 3×3.



a) Quantos palitos ela precisaria usar para formar um quadrado 4×4?

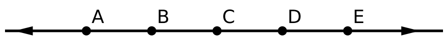
b) Qual o lado do maior quadrado que ela conseguiria formar com 100 palitos? Se sobrarem palitos, determine quantos.

10 *Formando números usando dígitos*

São dados 5 dígitos distintos de 1 a 9. Arnaldo forma o maior número possível usando três desses 5 dígitos. Em seguida, Bernaldo escreve o menor número possível usando três desses 5 dígitos. Qual o dígito da unidade da diferença entre o número de Arnaldo e o número de Bernaldo?

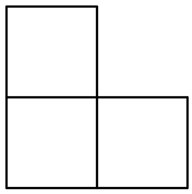
11 *Quantas semirretas?*

Abaixo estão representados cinco pontos distintos sobre uma mesma reta. Quantas semirretas possuem origem em algum desses cinco pontos e não contêm o ponto B?



12 *A pintura de Paladino*

Paladino deve pintar de preto algumas casas de um tabuleiro 4×4 de modo que quaisquer três quadradinhos que formem uma figura congruente ao desenho abaixo tenham pelo menos um de seus quadradinhos pintados. Qual o menor número de quadradinhos que devem ser pintados por Paladino?



13 *Trilhos do trem*

João deseja construir um circuito para o seu trem de brinquedo usando trilhos no formato de segmentos de reta de comprimento fixo. Na interseção de dois trilhos, ele precisa colocar uma estação de trem. É possível João construir um circuito fechado com exatamente 10 estações, de forma que cada trilho possua exatamente 4 delas?

14 *Um jogo aritmético*

João está brincando com um jogo em que a única operação permitida é substituir o natural n pelo natural $a \cdot b$ se $a + b = n$, com a e b números naturais. Por exemplo, se o último número obtido foi 15, ele pode trocá-lo por $56 = 7 \cdot 8$, pois $7 + 8 = 15$ e ambos são números naturais.

a) Começando com o número 7, mostre uma sequência de operações que produza o número 48.

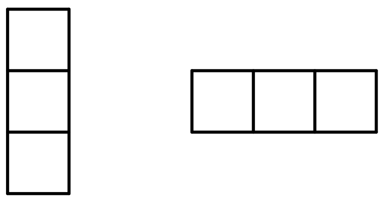
b) Começando com o número 7, mostre uma sequência de operações que produza o número 2014.

15 *Soma constante*

a) João preencheu os quadrados da figura abaixo com números naturais, de modo que a soma de quaisquer três números de quadrados vizinhos fosse sempre 30. Determine o valor de x.

2				x				3		

b) Um triminó é uma peça formada por três quadradinhos em linha, como indicado nas figuras abaixo.

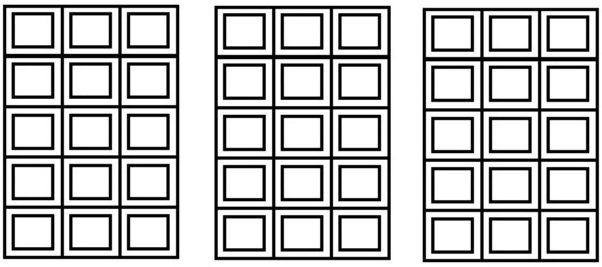


No tabuleiro abaixo, a soma de quaisquer três números formando um triminó é sempre igual a 30. Determine o valor de x.

4							
						x	
			7				

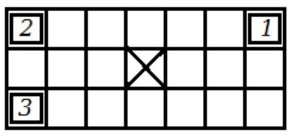
16 *Jogando com as barras de chocolate*

João e Maria ganharam 3 barras de chocolate de 5×3 divididas em quadradinhos 1×1. Então eles decidem disputar um jogo. João pega uma das barras e a divide em duas barras retangulares menores cortando-a através de uma das linhas divisórias marcadas entre os quadradinhos da barra. Em seguida, Maria pega qualquer uma das barras e a divide também usando uma das linhas divisórias já marcadas nela. Eles seguem dividindo as barras alternadamente e o vencedor é aquele que, após sua jogada, deixar apenas quadradinhos 1×1 como pedaços. Quem vence o jogo?



17 *Empurrando bloquinhos*

Um jogo de computador consiste de uma tela em forma de tabuleiro 3×7 no qual há três bloquinhos deslizantes 1, 2 e 3, ocupando quadradinhos 1×1. O jogo começa conforme a figura abaixo e cada jogada consiste em escolher um bloquinho e "empurrá-lo" na linha ou coluna. Após ser empurrado, um bloquinho irá parar apenas quando encontrar a borda do tabuleiro ou outro bloquinho. Por exemplo, se escolhermos o bloquinho 3, poderemos mandá-lo para o canto inferior direito ou para cima encontrando o bloquinho 2. Dois bloquinhos não podem ocupar o mesmo quadradinho e quando dois bloquinhos se chocam eles não continuam a se mover. O objetivo é fazer com que algum dos bloquinhos fique parado sobre a casinha marcada no centro do tabuleiro. Mostre como isso pode ser feito.



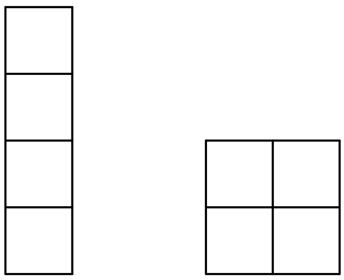
18 *Pontos na copa do mundo*

Durante a Copa do Mundo de Futebol, vários matemáticos foram acionados para falar sobre as chances de classificação das equipes. Na primeira fase, cada grupo é formado por quatro equipes e cada equipe enfrenta cada uma das outras equipes exatamente uma vez. Em caso de vitória a equipe ganha 3 pontos, em caso de empate 1 ponto e, finalmente, em caso de derrota 0 ponto. Sabe-se que os dois primeiros classificam-se para a fase seguinte. Se dois times empatam com a mesma quantidade de pontos, o desempate é feito através do saldo de gols. Qual o número mínimo de pontos para que uma equipe se classsifique sem depender dos resultados das outras equipes?

Observação: Lembre-se que para mostrar que o número k encontrado é realmente o mínimo, além de mostrar que tal quantidade é suficiente para garantir a vitória, você deve garantir também que existam exemplos de pontuações onde times podem totalizar não mais que $k-1$ pontos e não passarem para a próxima fase.

19 *Cobrindo tabuleiros*

Considere a figura abaixo.



1×4 2×2

a) É possível cobrir totalmente um tabuleiro 6×6 sem sobreposição e sem que pedaços de peças fiquem "fora" usando apenas peças 1×4?

b) É possível cobrir totalmente um tabuleiro 12×9 sem sobreposição e sem que pedaços de peças fiquem "fora" usando apenas peças 2×2?

20 *Contando Chocolates*

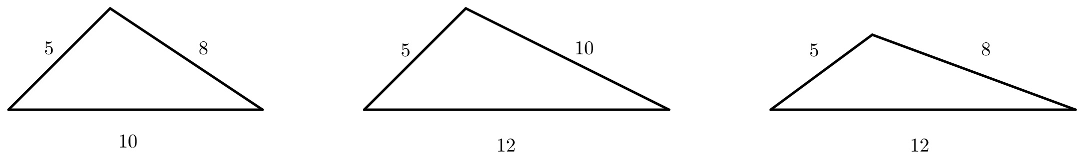
João possui mais que 30 e menos que 100 chocolates. Se ele organizar os chocolates em linhas de 7, sobrará um. Caso ele os organize em linhas de 10, sobrarão 2. Quantos chocolates ele possui?

21 *Números no círculo com dígitos em comum*

Ao redor de um círculo são escritos os números naturais de 1 a N com $N > 2$, uma única vez cada, de tal forma que dois vizinhos possuem pelo menos um dígito em comum. Ache o menor $N > 2$ para qual isso é possível.

22 *Formando figuras com triângulos*

Pedrinho está brincando com três peças triangulares de lados $(5,8,10)$, $(5,10,12)$ e $(5,8,12)$ como mostra o desenho abaixo. Ele pode juntar duas peças se colar exatamente os lados de mesmo tamanho delas. Por exemplo, ele pode juntar o lado 10 da primeira peça com o lado 10 da segunda, mas não pode juntar o lado 10 da primeira peça com o lado 8 da terceira, pois não possuem mesmo tamanho. Qual é o maior perímetro que Pedrinho pode obter juntando as três peças?



23 *Cozinhando arroz instantâneo no tempo certo*

Para fazer macarrão instantâneo é necessário colocar o macarrão para cozinhar exatamente por 3 minutos. Marcar exatamente 3 minutos é muito complicado sem um relógio, mas é possível se você tiver certas ampulhetas de areia que marcam tempos exatos em minutos. Por exemplo, suponha que você tem duas ampulhetas, uma que marca exatamente 7 minutos e outra que marca exatamente 4 minutos. Basta virá-las ao mesmo tempo e, quando a de 4 acabar, colocar o macarrão. Você deve retirá-lo da panela quando a de 7 minutos terminar. Assim, o macarrão terá cozinhado exatamente por $7-4=3$ minutos.

a) Certo tipo de arroz instantâneo precisa cozinhar por exatamente 4 minutos. Mostre que é possível marcar o tempo para esse arroz cozinhar usando apenas ampulhetas de 9 minutos e de 7 minutos. Qual o menor tempo total necessário para realizar essa tarefa?

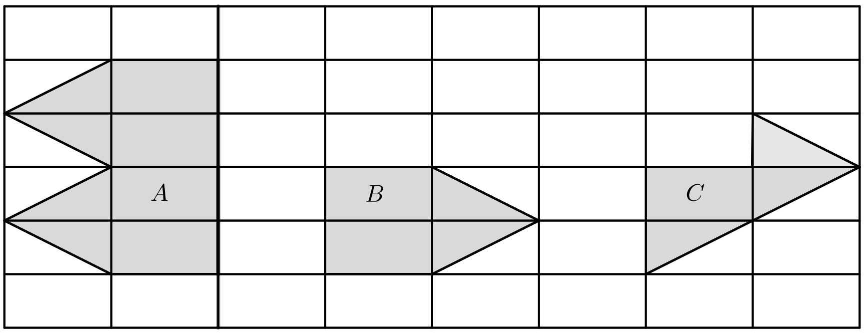
b) Seria possível marcarmos 9 minutos se tivéssemos apenas ampulhetas de 6 e de 10 minutos?

24 *Pulos do grilo sem cair do penhasco*

Um grilo pode dar pulos de duas distâncias: 9 e 8 metros. Ele disputa uma corrida de 100 metros que vai até a beira de um penhasco. Quantos pulos o grilo deve dar para chegar ao fim da corrida, mas sem passar do ponto final e cair do penhasco?

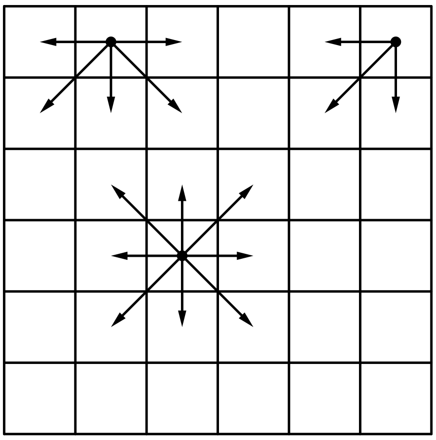
25 *Perímetros de prédios*

No desenho abaixo, três prédios foram construídos em um terreno dividido em lotes retangulares. Os perímetros dos prédios A e B valem 400m e 240m, respectivamente. Quanto mede o perímetro do prédio C?



26 *Reis dominando o tabuleiro 6 por 6*

O rei é uma peça do xadrez que pode se mover apenas uma casa na vertical, uma na horizontal ou uma na diagonal. Dizemos que um rei *ataca* uma casa se ele pode ocupá-la com um único movimento. Por exemplo, um rei situado nas casas centrais de um tabuleiro 6×6 ataca 8 casas, um rei situado nas casas laterais ataca 5 casas e um rei posicionado em um dos quatro cantos do tabuleiro ataca apenas 3 casas.



a) Considere um tabuleiro 6×6, qual o menor número de reis que podem ser colocados no tabuleiro de modo que todas as casas do tabuleiro estejam ocupadas ou sejam casas atacadas por algum dos reis?

b) Ainda considerando o tabuleiro 6×6, qual o maior número de reis que podemos colocar no tabuleiro de modo que eles não se ataquem?

27 *Quadrados mágicos*

a) João descobriu uma maneira de arrranjar os números $\{1,2,3,\ldots,16\}$ em um tabuleiro 4×4 de modo que a soma dos números em cada linha, em cada coluna e em cada diagonal são sempre as mesmas. Uma das possibilidades está no exemplo abaixo.

4	6	9	15
13	11	8	2
16	10	5	3
1	7	12	14

Encontre outro exemplo de distribuição desses 16 números satisfazendo as mesmas condições.

b) Verifique que em qualquer distribuição possível, sempre a soma dos números de cada linha e coluna é 34.

c) João fez agora um novo tipo de tabuleiro com outros números positivos. O produto dos números em cada linha, em cada coluna e em cada diagonal são sempre os mesmos. Quanto vale o número $4H$?

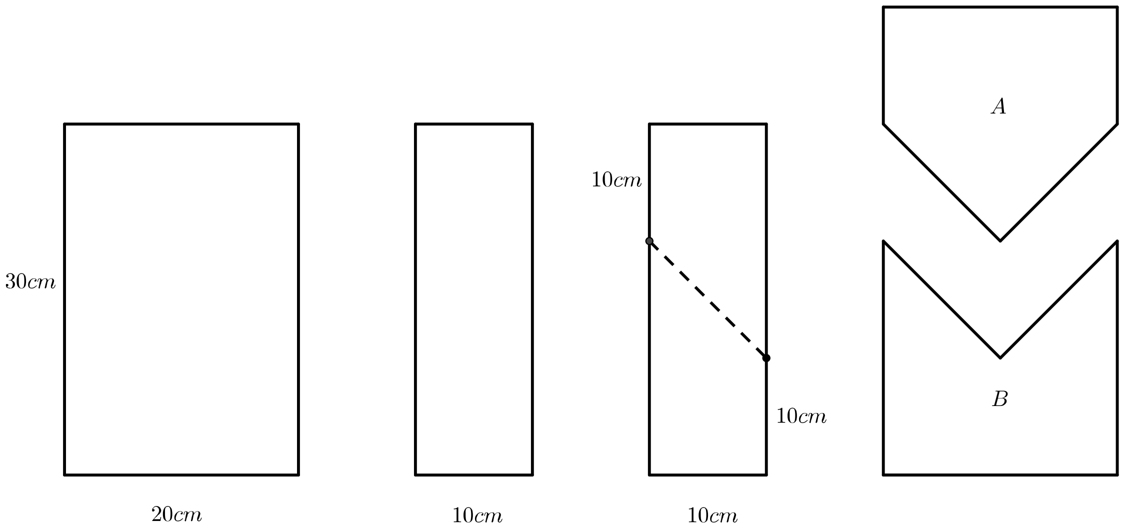
$1/2$	32	A	B
C	2	8	2
4	1	D	E
F	G	H	16

28 *Botões no tabuleiro 6 por 6*

Em um tabuleiro de brinquedo 6×6, cada casa representa um botão luminoso. Quando alguém aperta um botão, ele acende se estiver apagado e apaga se estiver aceso. Além disso, todos os botões que compartilham um lado com um botão apertado também mudam de estado: de aceso para apagado ou de apagado para aceso. Começando com todos os botões apagados e apertando uma única vez todos os botões do tabuleiro, um de cada vez e em qualquer ordem, quantos botões estarão acesos no final?

29 *Cortando bandeirinhas de São João*

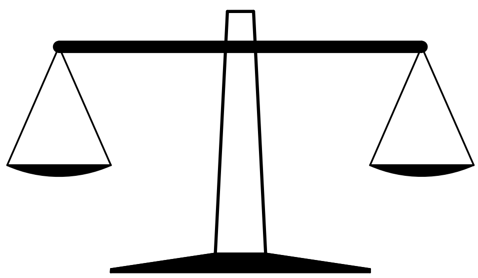
Certa festa possui bandeirinhas de São João nos formatos A e B. Elas podem ser formadas dobrando-se uma folha 30cm × 20cm ao meio e cortando-se ao longo de um segmento que une dois pontos em lados opostos, um deles distando 10cm do lado superior e o outro distando 10cm do lado inferior, conforme a figura abaixo.



a) Qual o número máximo de bandeirinhas que podemos cortar de uma folha 30cm × 60cm? Em seguida, mostre como obter tal número.

b) Qual o número máximo de bandeirinhas do tipo B que podemos cortar de uma folha 30cm × 60cm? Em seguida, mostre como obter tal número.

30 *Pesando moedas*



a) João possui três moedas e uma balança de dois pratos. Ele sabe que exatamente uma das moedas é mais leve que as demais, sendo que as outras duas possuem o mesmo peso. Como ele pode descobrir qual é a moeda mais leve com uma única pesagem?

b) João agora possui nove moedas e ele sabe novamente que exatamente uma delas é mais leve que as demais. Como ele pode descobrir a moeda mais leve com exatamente duas pesagens, se as demais possuem o mesmo peso?

c) João juntou mais duas moedas normais à sua coleção e passou a ter 11 moedas. Depois de juntá-las, ele não conseguiu lembrar quais eram as moedas novas. Como ele poderá agora descobrir a mais leve com três pesagens?

31 *Frações irredutíveis*

Uma fração irredutível é uma fração onde o numerador e o denominador não possuem fatores primos em comum. Por exemplo, $\frac{11}{7}$ é irredutível enquanto que $\frac{12}{14}$ não é, pois ainda podemos reduzi-la efetuando o cancelamento do número 2:

$$\frac{12}{14} = \frac{\cancel{2} \cdot 6}{\cancel{2} \cdot 7} = \frac{6}{7}.$$

Assim, $\frac{12}{14}$ é igual à fração irredutível $\frac{6}{7}$.

a) Determine uma fração irredutível igual a $\frac{111111}{14}$.

b) Determine uma fração irredutível igual a $\frac{111111111}{18}$.

c) Determine uma fração irredutível igual a $\frac{111\ldots111}{15}$ onde o dígito 1 se repete 2013 vezes no numerador.

d) Determine a soma do numerador e do denominador da fração irredutível que é igual à:

$$\frac{111\ldots111}{2020\ldots0202};$$

na fração anterior o numerador representa um número com 2014 algarismos iguais a 1 e no denominador existem 1007 algarismos 2 alternados por algarismos 0.

32 *Grupos de quatro números com mesma soma*

a) Mostre uma maneira de separar todos os números de 1 a 16 em quatro conjuntos com quatro números cada, de modo que cada conjunto tenha a mesma soma.

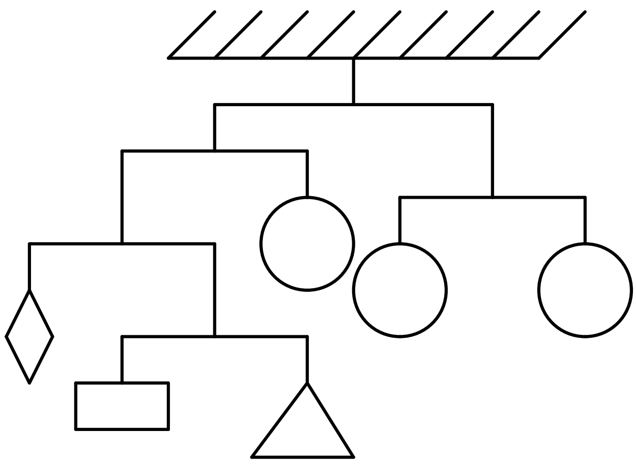
b) Mostre que existem pelo menos 1024 maneiras de escrever os números de 1 até 16 em cada uma das casinhas de um tabuleiro 4×4 de modo que a soma dos números de cada linha seja igual.

NÍVEL 2

1 *Conjunto de pesos suspensos*

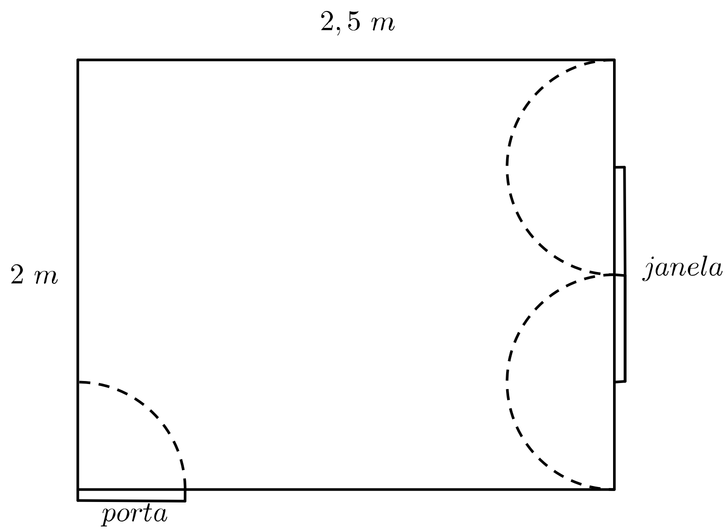
A figura representa um conjunto de pesos suspensos em equilíbrio. Se o círculo pesa $40g$, quanto pesa o retângulo?

Observação: Você deve desconsiderar o peso das barras horizontais e dos fios.



2 *Espaço útil do quarto*

Pedro acabou de se mudar para sua nova casa e ganhou um novo quarto. A figura a seguir mostra uma vista superior simplificada de seu novo quarto que possui 2m de largura por $2,5$m de comprimento.



A porta indicada na figura tem 50cm de comprimento e pode ser aberta até encontrar a parede lateral. A janela é dividida em duas portas de mesmo comprimento que quando abertas encostam nas paredes vizinhas. Os arcos da figura mostram as aberturas da porta e da janela. A mãe de Pedro disse que ele deve colocar seus móveis no quarto de modo que não fiquem nos caminhos de abertura da porta nem da janela. Quantos metros quadrados Pedro tem em seu quarto para colocar os seus móveis?

3 *Formando frações com dominós*

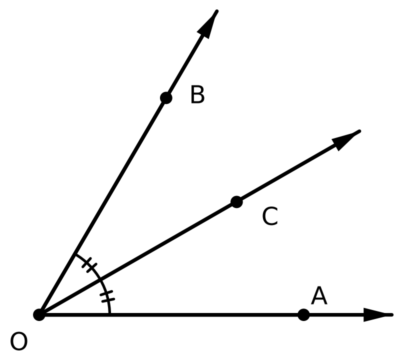
Um jogo comum de dominó é composto por 28 peças. Cada peça é formada por dois números inteiros que variam de 0 a 6, inclusive. Todas as possibilidades de combinações possíveis (a, b), com $a \leq b$, são listadas exatamente uma vez. Note que a peça $(4, 2)$ é listada como a peça $(2, 4)$, pois $2 \leq 4$. Excluindo a peça $(0, 0)$, para cada uma das outras 27 peças (a, b), com $a \leq b$, escrevemos num quadro a fração $\frac{a}{b}$.

a) Quantos valores distintos estão escritos nas formas de frações no quadro? (Veja que as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ têm o mesmo valor e devem ser contadas apenas uma vez.)

b) Qual a soma dos valores distintos encontrados no item anterior?

4 *Bissetrizes*

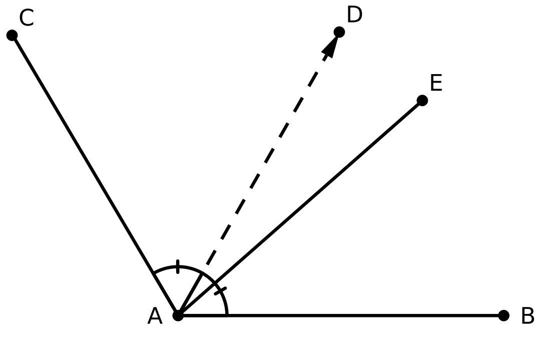
A bissetriz de um ângulo é uma semirreta com origem no vértice de um ângulo que o divide em dois outros ângulos congruentes. Por exemplo, no desenho abaixo, a semirreta OC é bissetriz do ângulo $\angle AOB$.



a) A diferença entre dois ângulos consecutivos mas não adjacentes é 100°. Determine o ângulo formado por suas bissetrizes.

   Observação: Lembre-se que dois ângulos são *consecutivos* se possuírem o mesmo vértice e pelo menos um lado em comum e que dois ângulos são *adjacentes* se não possuírem pontos interiores em comum.

b) No desenho abaixo, DA é bissetriz do ângulo $\angle CAB$. Determine o valor do ângulo $\angle DAE$ sabendo que $\angle CAB + \angle EAB = 120^\circ$ e $\angle CAB - \angle EAB = 80^\circ$.

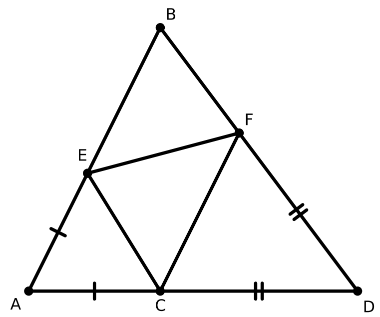


5 *Abandono do grupo*

Em um grupo de 200 pessoas, apenas 1% é mulher. Determine o número de homens que devem abandonar o grupo para que 98% das pessoas restantes sejam do sexo masculino.

6 *Ângulos no triângulo*

No desenho abaixo, os pontos E e F pertencem aos lados AB e BD do triângulo $\triangle ABD$ de modo que $AE = AC$ e $CD = FD$. Se $\angle ABD = 60^\circ$, determine a medida do ângulo $\angle ECF$.



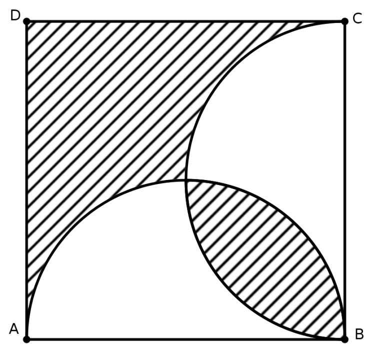
7 *Soluções do sistema*

Encontre todas as soluções, no conjunto dos números reais positivos, do sistema de equações:

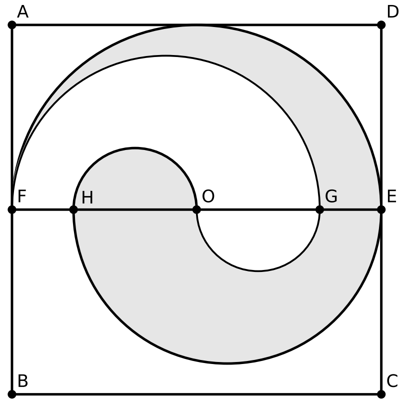
$$\begin{cases} x(x+y+z) &= 26 \\ y(x+y+z) &= 27 \\ z(x+y+z) &= 28. \end{cases}$$

8 *Áreas entre círculos*

a) No desenho abaixo, $ABCD$ é um quadrado de lado 4cm e as regiões hachuradas foram delimitadas por dois semicírculos de diâmetros AB e BC. Calcule a área da região hachurada.



b) Dado o quadrado $ABCD$ de lado 2. Sejam O o centro do quadrado e E e F os pontos médios dos lados CD e AB. Se os segmentos FH e GE têm mesma medida e os arcos FE, EH, HO, OG, FG são semicircunferências, encontre a área sombreada.



9 *Distribuindo os pontos entre os itens*

O professor Carlão decidiu fazer uma questão de matemática que vale no total 10 pontos e possui três itens: a, b e c. Após elaborar os itens, ele ficou na dúvida sobre qual a melhor maneira de distribuir os 10 pontos entre os itens de modo que cada um valha um número inteiro positivo de pontos.

a) Joana, uma professora amiga de Carlão, sugeriu que o item c deveria valer o mesmo tanto de pontos que a soma dos itens a e b pois, segundo ela, o item c é mais difícil. Se Carlão seguir a sugestão de Joana, de quantos modos diferentes ele pode distribuir os pontos?

b) Desconsiderando a sugestão de Joana, ou seja, considerando que Carlão vai distribuir os pontos de uma maneira qualquer, de quantos modos diferentes ele pode distribuir os 10 pontos da questão entre os três itens?

10 *Eliminando radicais*

Encontre dois inteiros positivos x e y tais que:

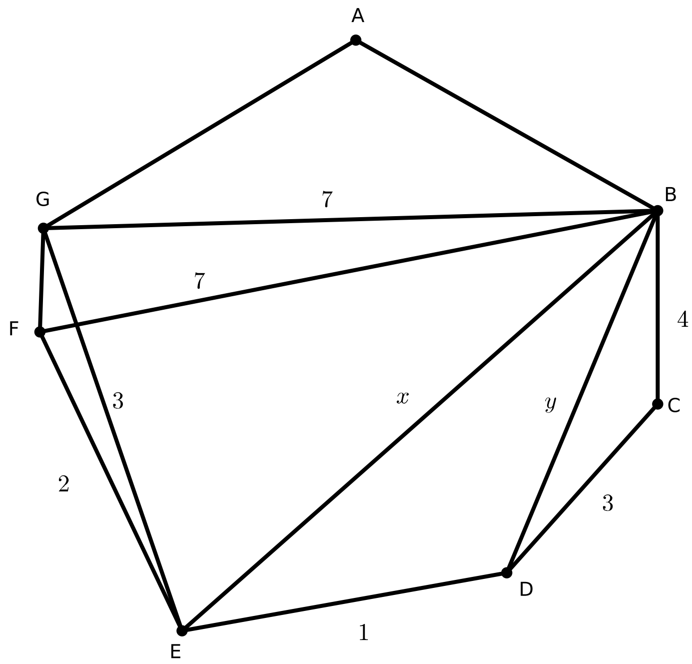
$$\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}.$$

11 *Desigualdade triangular*

João acaba de aprender a desigualdade triangular que diz que, em qualquer triângulo, um lado é sempre menor que a soma dos outros dois e também é maior que a diferença entre eles.

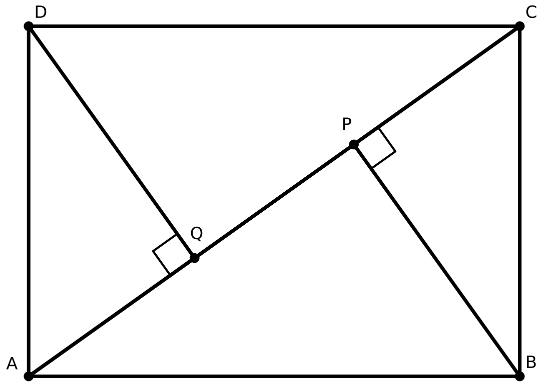
a) O lado AC do triângulo ABC tem comprimento $3,8$cm e o lado AB tem comprimento $0,6$cm. Se o comprimento do lado BC é um inteiro, qual é o seu valor?

b) Determine os valores de x e y na figura abaixo, sabendo que eles são números inteiros.



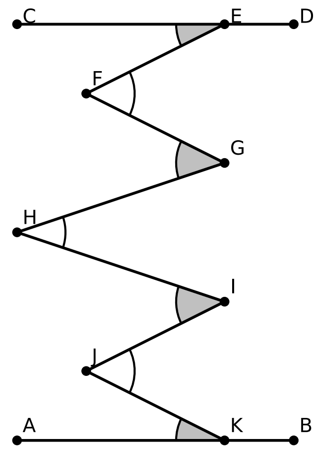
12 *Área do retângulo*

No desenho abaixo, $ABCD$ é um retângulo e os pontos P e Q pertencem à diagonal AC de modo que $AQ = PQ = PC = 1$ e $\angle AQD = \angle BPC = 90°$. Encontre a área do retângulo $ABCD$.

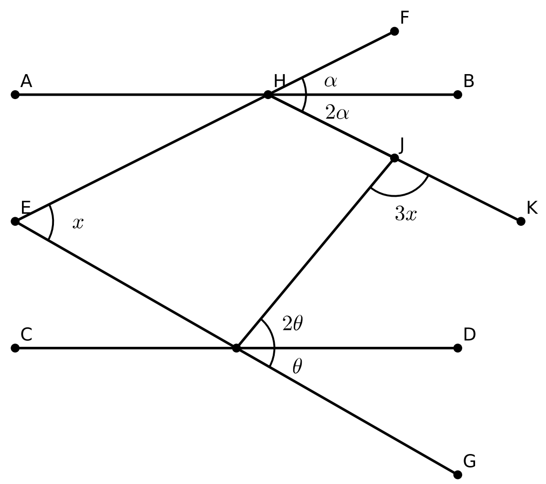


13 *Ângulos em bicos*

a) No desenho abaixo, onde AB é paralelo a CD, mostre que a soma dos ângulos brancos é igual à soma das medidas dos ângulos cinzas. Tal resultado vale para qualquer quantidade de "bicos" no desenho e o chamamos popularmente como Teorema dos Bicos.



b) Sabendo que AB é paralelo a CD, determine a medida do ângulo x.



14 *Transportando líquidos em tambores*

Considere dois tambores de capacidade suficientemente grande, um deles vazio e o outro cheio de líquido.

a) Determine se é possível colocar exatamente um litro do líquido do tambor cheio, no vazio, usando dois baldes, um com capacidade de 5 litros e o outro com capacidade de 7 litros.

b) Determine se é possível colocar exatamente um litro do líquido de um dos tambores no outro usando dois baldes, um com capacidade de $2-\sqrt{2}$ litros e o outro com capacidade de $\sqrt{2}$ litros.

$\boxed{15}$ *As diagonais de Carlitos*

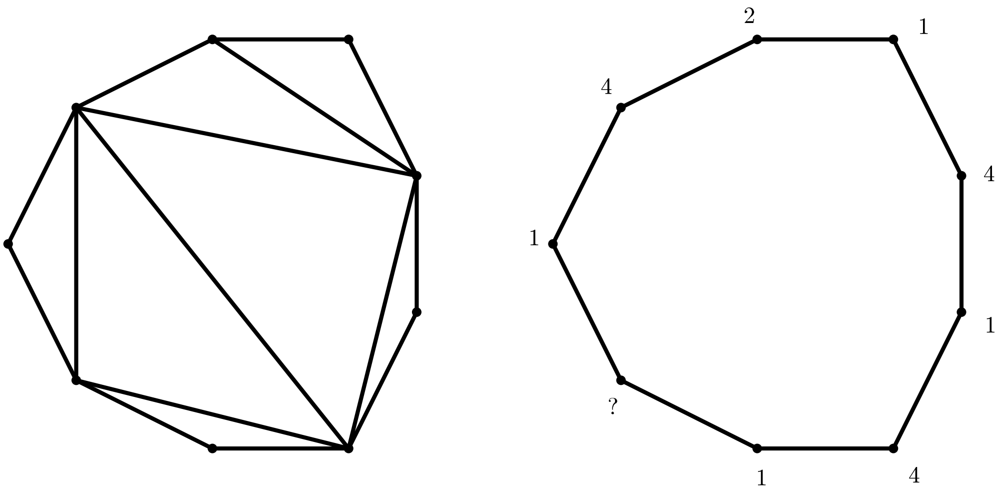
Carlitos desenhou em uma folha de papel um polígono convexo de n lados, conforme a figura abaixo, e traçou algumas de suas diagonais (que não se cortavam), dividindo a região interior do polígono em triângulos. Esse tipo de divisão é conhecido como triangulação. Em cada vértice ele escreveu o número de triângulos da triangulação dos quais ele era membro.

Uma semana depois, Carlitos não se lembrava quais diagonais tinham sido traçadas e percebeu que um dos números estava apagado. Sua professora de matemática explicou que ainda assim seria possível descobrir as diagonais apagadas e Carlitos começou a buscar informações que pudessem ajudá-lo nessa tarefa.

a) Verifique que o número de triângulos em que o polígono foi dividido é sempre o mesmo, não importando como ele tenha escolhido as diagonais.

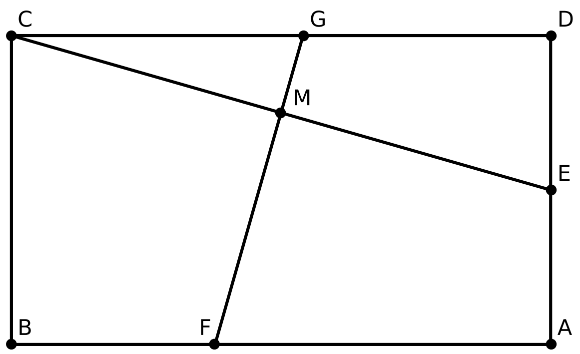
b) Verifique que sempre um dos vértices terá o número 1 escrito.

c) Usando o item anterior, descubra um método que pode ser usado por Carlitos para desenhar as diagonais que foram traçadas.



16 *Razão entre segmentos*

Na figura abaixo, $ABCD$ é um retângulo e E é o ponto médio de AD. O segmento FG passa pelo ponto médio M de CE. Determine a razão entre os comprimentos de GM e MF.



17 *Previsões astrológicas*

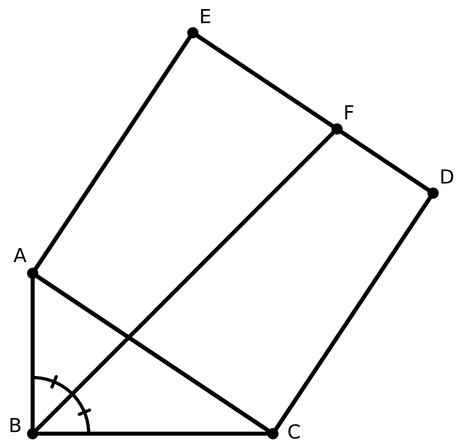
João trabalha vendendo pacotes de previsão astrológica. Para incrementar as vendas de suas previsões, ele oferece descontos caso pessoas de um mesmo signo queiram contratar seus serviços. No Horóscopo Grego, como existem exatamente 12 signos, portanto, em um grupo de 13 pessoas, sempre duas delas terão o mesmo signo e poderão se interessar pelo pacote promocional.

a) Qual o número mínimo de pessoas que um grupo deve possuir para ele ter certeza de que existirão pelo menos 3 pessoas de um mesmo signo do Horóscopo Grego?

b) No Horóscopo Chinês, também existem exatamente 12 signos. Se João quiser ter certeza de que, em determinado grupo de pessoas existirão duas possuindo exatamente os mesmos signos, tanto no Horóscopo Grego quanto no Horóscopo Chinês, qual o número mínimo de pessoas que tal grupo deve ter?

18 *Quadrado inclinado*

Na figura abaixo, $\angle ABF = \angle FBC = 45°$ e $ACDE$ é um quadrado. Se $AB = 2/3 \cdot BC$, determine a razão $\dfrac{EF}{FD}$.

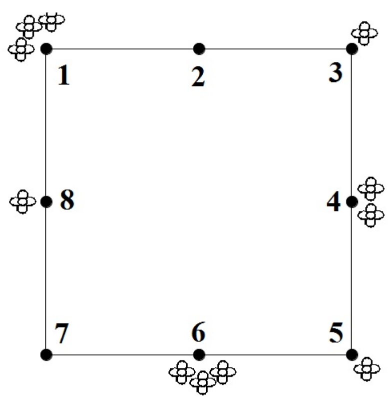


19 *Arranjos de flores no quadrado*

Um decorador distribuirá flores em oito pontos ao redor de um arranjo quadrado de flores, como indicado na figura abaixo. Ele quer fazer isso de modo tal que, em cada lado do arranjo, as pessoas vejam sempre a mesma quantidade de flores. No exemplo abaixo, temos o total de 11 flores e em cada um dos 4 lados do quadrado são vistas exatamente 4 delas.

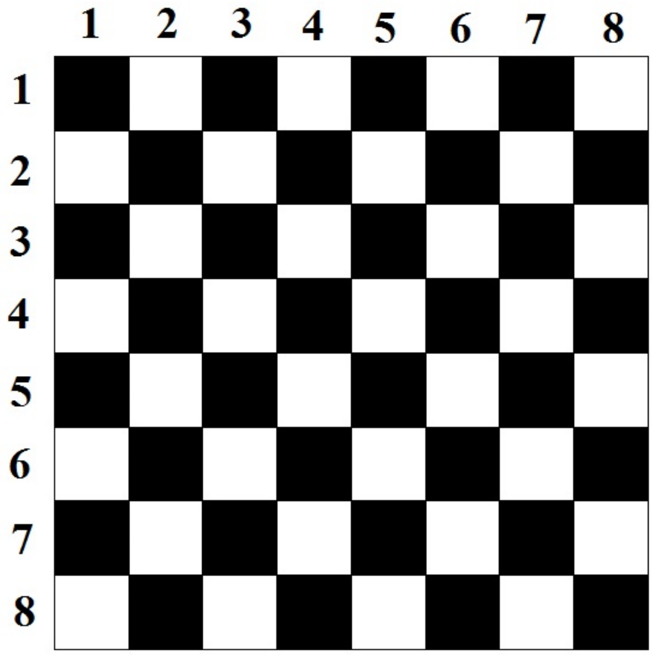
a) Qual o número **máximo** de flores que podem ser usadas, considerando que em cada lado do quadrado devem ser vistas exatamente 9 flores?

b) Qual o número **mínimo** de flores que podem ser usadas, considerando que em cada lado do quadrado devem ser vistas exatamente 12 flores?



20 *Somando no tabuleiro de Xadrez*

Um tabuleiro de Xadrez tem suas linhas e colunas numeradas conforme a figura a seguir. Em cada casa é escrito o número que é a soma dos números da linha e da coluna dessa casa. Por exemplo, na casa que está na linha 4 e na coluna 5 é escrito o número $4+5=9$.



a) Qual a soma dos números escritos em todas as casas do tabuleiro?

b) Sejam S_{pretas} a soma de todos os números escritos nas casas pretas e $S_{brancas}$ a soma de todos os números escritos em casas brancas. Quanto vale a diferença $S_{pretas} - S_{brancas}$?

c) Quanto vale S_{pretas}?

21 *Inteiros positivos espertinhos*

Dizemos que um número inteiro positivo n é *espertinho* se existirem números inteiros positivos a, b, c e d, não necessariamente distintos, tais que:

$$n = \frac{a^2 - b^2}{c^2 + d^2}$$

Por exemplo, 12 é espertinho, pois:

$$12 = \frac{16^2 - 4^2}{4^2 + 2^2}$$

Mostre que todos os números inteiros positivos são espertinhos.

22 *Crianças dando voltas no lago*

Dez crianças decidem correr ao redor de um lago circular com 200m de perímetro. No início da corrida, as dez crianças estão paradas ocupando posições distintas e cada uma delas correrá no sentido horário ou anti-horário, a depender de sua vontade, com velocidade de $\frac{200}{k}$ m/min, onde k é um inteiro positivo. Mostre que depois de certo tempo, existirá um instante em que todas as crianças estarão exatamente sobre as suas mesmas posições iniciais.

23 *Somando e multiplicando os números das cinco crianças*

Cinco crianças sentam-se ao redor de uma mesa circular. Cada criança escolhe um número inteiro positivo e o relata para as outras. Em seguida, cada criança faz a seguinte conta: soma os números das duas crianças à sua esquerda, subtrai a soma dos números das outras duas crianças à sua direita e multiplica essa diferença pelo seu próprio número, chegando assim ao seu resultado final.

Prove que a soma dos resultados finais de todas as crianças é um valor fixo que não depende dos números que as crianças escolheram inicialmente e, em seguida, determine esse valor.

24 *Descobrindo os números curiosos*

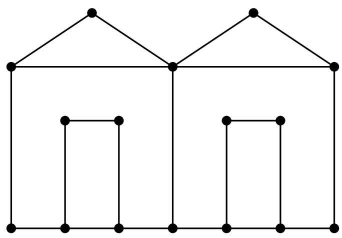
Sejam a e b dois dígitos diferentes de zero não necessariamente diferentes. O número de dois dígitos $\overline{ab}$ é chamado de curioso, se ele for um divisor do número $\overline{ba}$, que é formado pela troca da ordem dos dígitos de $\overline{ab}$. Ache todos os números curiosos.

Observação: O traço sobre os números serve para distinguir o produto $a \cdot b$ do número de dois dígitos $\overline{ab}$.

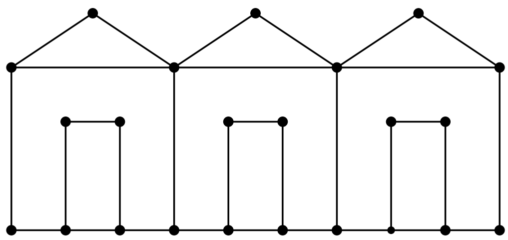
25 *Mudando de cor com fios mágicos*

Algumas lâmpadas de Natal são arranjadas usando fios mágicos. Cada lâmpada pode ser da cor verde ou amarela. Cada fio está ligado a duas lâmpadas e tem uma propriedade mágica: quando alguém toca em um fio unindo duas lâmpadas, cada uma delas troca de cor passando de verde para amarela ou de amarela para verde.

a) No arranjo a seguir, cada ponto representa uma lâmpada e os segmentos representam os fios mágicos. No começo todas elas são amarelas. Qual o menor número de fios que devemos tocar para que todas as lâmpadas se tornem verdes? Mostre um exemplo de como fazer essa mudança com esse número mínimo de fios.



b) Considere o arranjo da figura a seguir onde todas as lâmpadas estão com a cor amarela. Mostre que não é possível tocar em alguns fios mágicos e mudar a cor de todas as lâmpadas para o verde.



26 *Marcando casinhas do tabuleiro 8 por 8*

É dado um tabuleiro 8×8.

a) Qual o número mínimo de casinhas que devemos marcar nesse tabuleiro, de modo que cada um de seus subtabuleiros 3×3 possua pelo menos uma casinha marcada?

b) Qual o número mínimo de casinhas que devemos marcar nesse tabuleiro, de modo que cada um de seus subtabuleiros 3×3 possua pelo menos três casinhas marcadas?

$\boxed{27}$ *Jogando com dominós*

Umberto e Doisberto jogam em um tabuleiro $3 \times n$ colocando dominós sempre cobrindo duas casas adjacentes (com lado em comum) do tabuleiro. Umberto faz a primeira jogada, Doisberto faz a segunda e eles seguem jogando alternadamente. Perde o jogador que não conseguir jogar. Para cada um dos casos abaixo, diga quais dos jogadores pode bolar uma estratégia e sempre garantir a vitória independentemente de como o outro jogue.

a) $n = 3$

b) $n = 4$

$\boxed{28}$ *Separando em conjuntos de mesmo produto*

a) Mostre que não é possível separar os números do conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ em dois conjuntos em que o produto dos números em cada um deles é o mesmo.

b) Qual o menor número de elementos que precisamos retirar do conjunto A de modo que os elementos restantes possam ser divididos em dois conjuntos cujo produto de seus elementos sejam iguais? Mostre que números devem ser retirados e como separar os dois conjuntos.

$\boxed{29}$ *Somando e subtraindo em um quadrado 3 por 3*

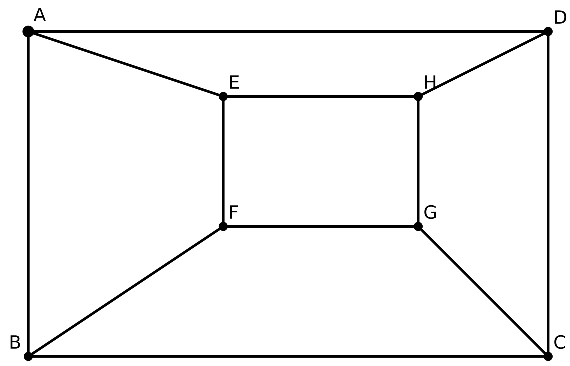
É dado um quadrado 3×3 com números escritos em cada casinha 1×1. As jogadas permitidas são escolher uma linha, uma coluna ou uma diagonal e somar ou subtrair 1 dos três números que estiverem nela. Prove que não é possível começar com os números na configuração da esquerda e chegar aos números na configuração da direita após algumas operações.

0	1	0
1	0	1
0	1	0

1	0	1
0	1	0
1	0	1

30 *Retângulos encaixados*

Na figura abaixo, $ABCD$ e $EFGH$ são retângulos de lados paralelos. Sabendo que $AE = 10$, $BF = 20$ e $DH = 30$, determine o comprimento do segmento CG.



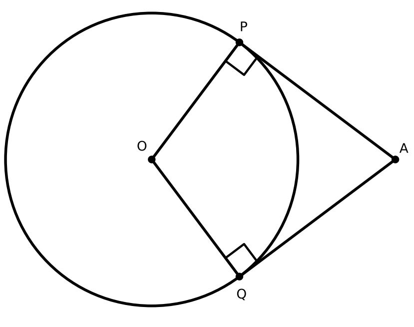
31 *Pintando de preto e branco*

João conseguiu pintar de preto e branco os quadrados de um tabuleiro $n \times n$ de modo que as interseções de quaisquer duas linhas e de quaisquer duas colunas não eram constituídas por quadrados com a mesma cor. Qual o valor máximo de n?

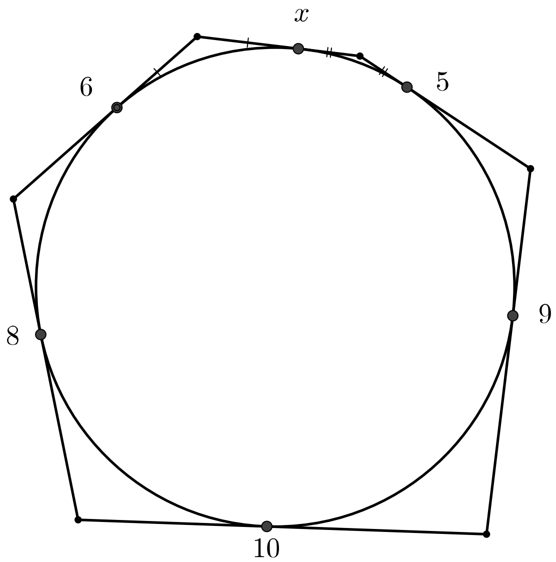
32 *Formando figuras com triângulos*

Nesse problema, vamos aprender e utilizar o famoso Teorema do Bico, que tem esse nome porque a figura formada parece realmente a cabeça e o bico de um pássaro.

a) O Teorema do Bico diz que as distâncias de um ponto exterior a uma circunferência aos pontos onde suas tangentes tocam a circunferência são iguais. Na figura a seguir, AP e AQ são tangentes à circunferência. Mostre que $AP = AQ$.



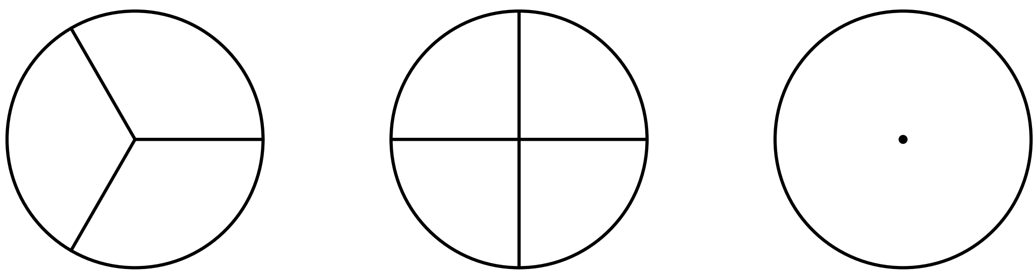
b) Considere o hexágono da figura a seguir, no qual todos os lados tangenciam a circunferência. Determine o valor do lado desconhecido x.



Observação: Não confunda com o Teorema dos Bicos do problema 13. Em ambos os casos, trata-se do nome popular dos resultados mencionados.

33 *Cortando um bolo usando o compasso*

Certo matemático adora pensar em problemas e cozinhar bolos. Após cozinhar seus bolos, ele os corta em pedaços iguais. As três figuras a seguir mostram bolos circulares de mesmo raio em que os dois primeiros foram cortados em 3 e 4 pedaços iguais, respectivamente. Ele deseja cortar o terceiro bolo, mas a única marcação conhecida é o centro do bolo. Mostre que usando um compasso e uma faca, de tamanhos suficientemente grandes, e os dois primeiros bolos é possível cortar o terceiro em 12 pedaços iguais.



34 *Quadriláteros com todos os lados iguais não são congruentes*

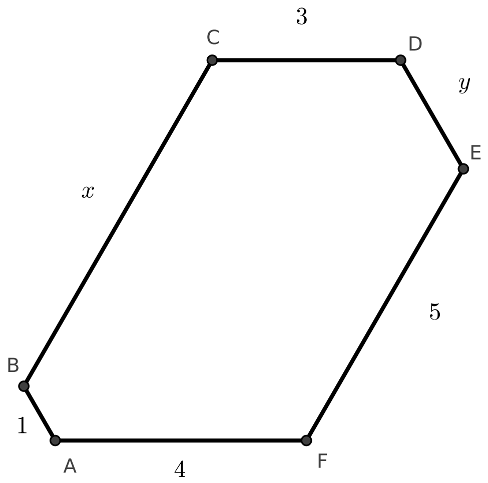
Um erro que muitos alunos cometem é pensar que dois quadriláteros são congruentes se tiverem os seus respectivos lados iguais. Isso não é verdade. Nesse problema, veremos que quadriláteros podem ter lados correspondentes iguais, mas áreas distintas.

a) Mostre que a maior área possível para um quadrilátero que possui dois lados de comprimento 3 e dois de comprimento 4 é 12.

b) Mostre que, nos quadriláteros em que isso acontece, a soma dos ângulos opostos é 180°.

35 *Lados desconhecidos do hexágono equiângulo*

Um hexágono é chamado equiângulo quando possui os seis ângulos internos iguais. Considere o hexágono equiângulo $ABCDEF$ com lados 3, y, 5, 4, 1 e x, da figura a seguir. Determine os comprimentos x e y desconhecidos.



36 *Formigas no retângulo*

Três formigas estão posicionadas nos vértices de um retângulo. Uma formiga se movimenta apenas quando as duas outras estão paradas e sempre em uma direção paralela à reta determinada pelas outras duas formigas. É possível que após algumas movimentações as três formigas fiquem posicionadas em três dos pontos médios dos lados do retângulo?

NÍVEL 3

1 *Polígono no relógio*

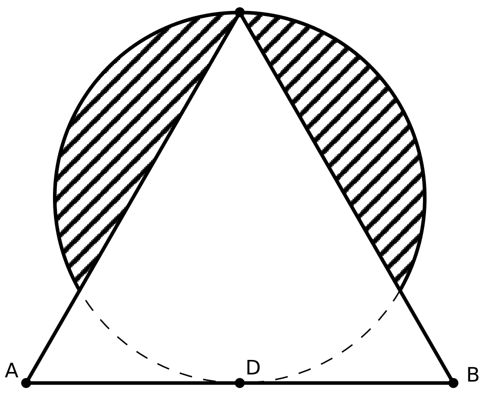
A partir do meio-dia, João faz, a cada 80 minutos, uma marca na posição do ponteiro das horas do seu relógio.

a) Depois de quanto tempo não será mais necessário fazer novas marcas no relógio?

b) Qual a soma dos ângulos internos do polígono formado pelas marcas?

2 *Um diâmetro que também é altura*

No desenho abaixo, o $\triangle ABC$ é um triângulo equilátero e CD é tanto uma altura do triângulo quanto um diâmetro do círculo. Se $AB = 10$cm, determine a área sombreada.



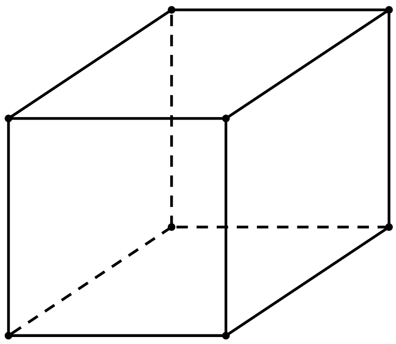
3 *Cubo cortado*

Francisco acaba de aprender em sua aula de geometria espacial a *Relação de Euler* para poliedros convexos:

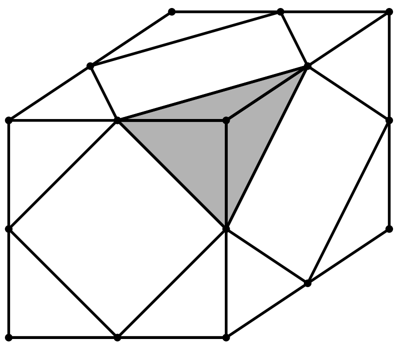
$$V + F = A + 2.$$

Na equação acima, V, A e F representam o número de vértices, de arestas e de faces do poliedro, respectivamente. Podemos verificar que a Relação de Euler é válida no cubo abaixo, pois existem 6 faces, 12 arestas, 8 vértices e

$$V + F = 8 + 6 = 12 + 2 = A + 2.$$



João decidiu verificar a Relação de Euler em outro poliedro obtido de um cubo de madeira. Ele marcou os pontos médios de cada aresta e, em cada face, os uniu formando quadrados, como mostra a figura abaixo. Em seguida, ele cortou as 8 pirâmides formadas em torno de cada vértice, obtendo um novo poliedro. Determine:



a) o novo número de vértices;

b) o novo número de arestas;

c) o novo número de faces.

4 *Tecla da calculadora*

A calculadora científica de João possui uma tecla especial que transforma qualquer número x escrito na tela e que seja diferente de 1 no número $\frac{1}{1-x}$.

a) O que acontece se o número 2 estiver escrito na tela e apertarmos a tecla especial três vezes?

b) O que acontece se o número 2 estiver escrito na tela e apertarmos a tecla especial dez vezes?

c) Finalmente, o que acontece se o número 2 estiver escrito na tela e apertarmos a tecla especial 2015 vezes?

5 *Uma fatoração esperta*

a) José aprendeu um método para calcular produtos de dois números de uma forma mais rápida baseado na fatoração:

$$(n-k)(n+k) = n^2 - k^2.$$

Para calcular $23 \cdot 17$, ele escolhe $n = 20$, $k = 3$ e calcula:

$$23 \cdot 17 = 20^2 - 3^2 = 400 - 9 = 391.$$

Determine, sem usar a calculadora, o valor de $\sqrt{1001 \cdot 1003 + 1}$.

b) Verifique que $(n(n+3)+1)^2 = n(n+1)(n+2)(n+3)+1$.

c) Determine, sem usar a calculadora, o valor de:

$$\sqrt{(2014)(2015)(2016)(2017)+1}.$$

6 *Termos esquecidos da P.A.*

Uma *progressão aritmética*, costumeiramente chamada de *P.A.*, é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com um valor fixo r chamado de diferença comum ou razão da progressão. Por exemplo, a sequência abaixo é uma progressão aritmética com termo inicial 3 e diferença comum 4.

$$a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = 11, a_4 = 15, a_5 = 19, a_6 = 23, a_7 = 27, a_8 = 31, a_9 = 35, \ldots$$

Veja que estamos denotando o número da posição i pelo símbolo a_i.

a) Se o primeiro termo de uma progressão aritmética é 2 e sua diferença comum é 3, qual é o valor do quarto termo?

b) A professora de João pediu que ele calculasse o décimo primeiro termo de uma progressão aritmética. Infelizmente ele esqueceu qual era o termo inicial e a diferença comum. As únicas informações das quais ele lembrava eram:

$$\begin{aligned} a_4 + a_7 + a_{10} &= 207 \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} &= 553. \end{aligned}$$

Quanto vale o décimo primeiro termo?

7 *Mágica com números de 1 a 50*

O mágico Magimático chama três pessoas da plateia: Ana, Beto e Caio, para ajudarem em sua matemágica. Ele diz para cada um pensar em um número de 1 a 50, sem revelá-lo ao mágico, e contá-lo para cada um dos outros dois participantes. Em seguida, cada um deles deve simultaneamente trocar o seu número pela soma dos números dos outros dois. Por exemplo, Ana passa a ter a soma dos números de Beto e Caio. Magimático pede então que eles repitam esse processo mais uma vez. Após concluir a segunda troca, ele pede que falem os seus números. Ana responde 104, Beto 123 e Caio 137. Para a surpresa de todos, Magimático acerta os números iniciais escolhidos pelos três. Quais foram os números escolhidos incialmente?

8 *Formando triângulos obtusângulos*

Dado um triângulo de lados $a \le b \le c$, pela lei dos cossenos temos:

$$\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Se o ângulo $\hat{C}$ é obtuso, $\cos \hat{C} < 0$. Como $2ab$ é positivo, isso é o mesmo que $a^2 + b^2 - c^2 < 0$. Portanto, para um triângulo ser obtusângulo, o maior lado elevado ao quadrado é maior que a soma dos quadrados dos outros dois lados. Além disso, pela desigualdade triangular, sabemos que o maior lado é menor que a soma dos outros dois. Podemos resumir essas duas informações através das desigualdades

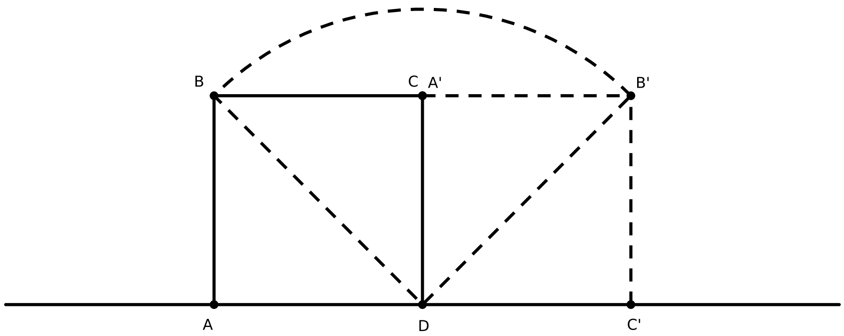
$$a^2 + b^2 < c^2 < (a + b)^2.$$

Quantos triângulos obtusângulos podemos formar com lados inteiros positivos menores que 7?

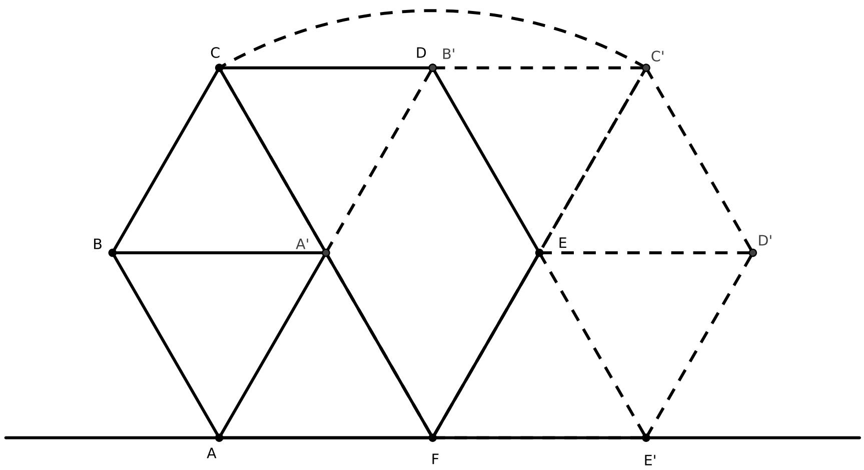
Observação: Considere que dois triângulos com os mesmos comprimentos de lado mas em ordens diferentes representam o mesmo triângulo.

9 *Polígonos tombados*

a) O quadrado $ABCD$ de lado 1cm é "tombado" em torno do ponto D conforme a figura a seguir. Os traços pontilhados indicam a área ocupada pelo quadrado durante o seu movimento de tombamento. Qual a área total ocupada pelo quadrado do início até o final de seu tombamento?



b) Assim, como no caso do quadrado do item anterior, um hexágono regular $ABCDEF$ de lado 1cm é "tombado" em torno do ponto F conforme a figura a seguir. Qual a área total ocupada pelo hexágono do início até o final do seu tombamento?



10 *Meninos e meninas na sorveteria Sorvete Matemático*

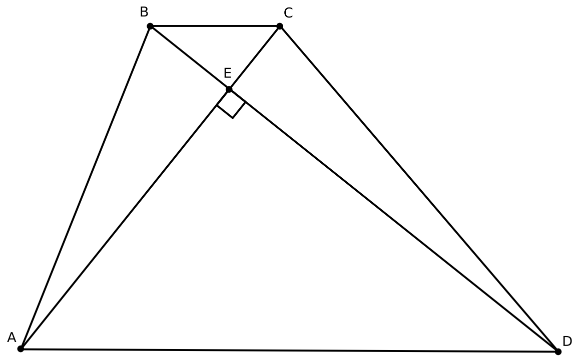
Pedro decidiu levar todos os seus filhos, meninos e meninas, para tomar sorvete na sorveteria *Sorvete Matemático*. Na sorveteria, há 12 sabores diferentes de sorvete e cada criança pediu um combo com 3 bolas de sorvete. Depois de sair da sorveteria, Pedro percebeu que, no total, foram pedidas exatamente duas bolas de cada sabor disponível na sorveteria.

a) Sabendo que Pedro não tomou sorvete, qual o número total de seus filhos (meninas e meninos)?

b) Pedro olhou com mais atenção os sabores que cada um pediu e notou que nenhum sabor foi pedido por um menino e por uma menina, ou seja, se um menino escolheu um sabor, nenhuma menina escolheu aquele mesmo sabor. Sabendo que pelo menos um de seus filhos é menino e que ele possui mais filhas do que filhos, determine o número de suas filhas.

11 *Trapézio com diagonais perpendiculares*

No desenho abaixo, $ABCD$ é um trapézio e suas diagonais AC e BD são perpendiculares. Além disso, $BC = 10$ e $AD = 30$.



a) Determine a razão entre os segmetos BE e ED.

b) Encontre o valor do comprimento dos segmentos EC, AE e ED em função do comprimento de $BE = x$.

c) Se $AE \cdot EC = 108$, determine o valor de $BE \cdot ED$.

12 *Somando os números ímpares de 1000 a 2014*

Uma técnica muito usada para calcular somatórios é a *Soma Telescópica*. Ela consiste em "decompor" as parcelas de uma soma em partes que se cancelem. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5} &= \\
\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{1}{5}\right) &= \\
\frac{1}{1}-\frac{1}{5} &= \\
\frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Com esta técnica, podemos achar uma forma de somar números ímpares consecutivos. Vejamos:

a) Contando os números ímpares de um por um e começando pelo 1, verifique que o número na posição m é igual a $m^2 - (m-1)^2$.

b) Calcule a soma de todos os números ímpares entre 1000 e 2014.

13 *Mágica com dominós*

O mágico Magimático diz para uma pessoa da plateia escolher uma peça qualquer de um dominó comum. Tal peça é formada por um par de números de 0 a 6. Em seguida, ele diz para a pessoa escolher um dos números da peça e realizar a seguinte sequência de operações:

1. multiplicá-lo por 5;
2. somar o resultado anterior com 15;
3. multiplicar o último resultado por 2 e, finalmente,
4. somar o último resultado com o outro número da peça.

Realizadas tais operações, o resultado é divulgado e Magimático impressiona a plateia dizendo exatamente os números escritos no dominó escolhido.

a) Sabendo que o resultado foi 62, como o mágico descobriu o número escolhido pelo membro da plateia?

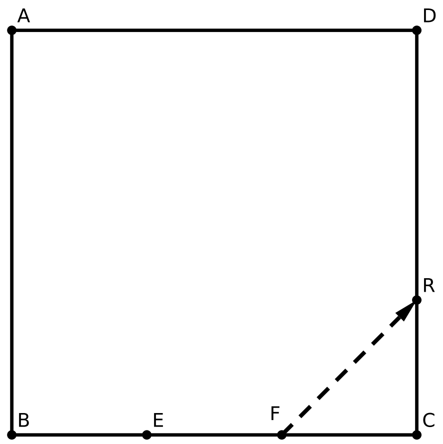
b) Se o resultado tivesse sido n, como descobrir os números da peça escolhida?

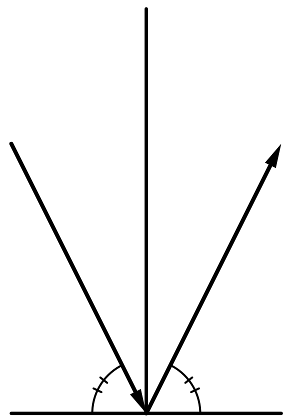
14 *Quantos dígitos tem um número muito grande?*

Quantos dígitos possui o número 3^{100}? Bom, podemos dar uma resposta aproximada para esta pergunta, sem usar a calculadora, simplesmente comparando-o com potências de 10. Veja que $3^2 < 10$ nos permite concluir que $(3^2)^{50} = 3^{100} < 10^{50}$. Então, 3^{100} tem no máximo 50 dígitos pois, 10^{50} é o primeiro número com 51 dígitos. O número 3^{100} tem de fato 48 dígitos! Agora é a sua vez. Seja N a quantidade de dígitos do número 2^{100}, determine um inteiro positivo k tal que $k \leq N \leq k+5$.

15 *O poderoso Raio Reflexivo*

O herói de um desenho animado enfrenta mais uma vez seu arqui-inimigo e precisa desferir seu famoso golpe do Raio Reflexivo. No quadrado da figura abaixo, o raio deverá, partindo de F ricochetear, exatamente uma vez nos lados CD, AD e AB, nesta ordem, antes de atingir o inimigo na posição E. Sempre que o raio ricocheteia em um dos lados do quadrado, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de saída como mostra a figura da direita. Sabendo que $BE = EF = FC = 2$m e que o raio viaja a $1m/s$, determine o tempo decorrido entre o disparo do raio em F e sua chegada ao ponto E.





16 *O valor da expressão*

Sejam a e b números reais positivos quaisquer. Determine o valor da expressão

$$\frac{\sqrt{\dfrac{ab}{2}}+\sqrt{8}}{\sqrt{\dfrac{ab+16}{8}+\sqrt{ab}}}.$$

17 *Produto de dígitos*

Observe a equação:

$$\begin{aligned}(1+2+3+4)^2 &= (1+2+3+4)(1+2+3+4)\\ &= 1\cdot1+1\cdot2+1\cdot3+1\cdot4+2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4+\\ &+\ 3\cdot1+3\cdot2+3\cdot3+3\cdot4+4\cdot1+4\cdot2+4\cdot3+4\cdot4.\end{aligned}$$

Note que são formados $4\times4=16$ produtos ao calcularmos $(1+2+3+4)^2$ usando a propriedade distributiva.

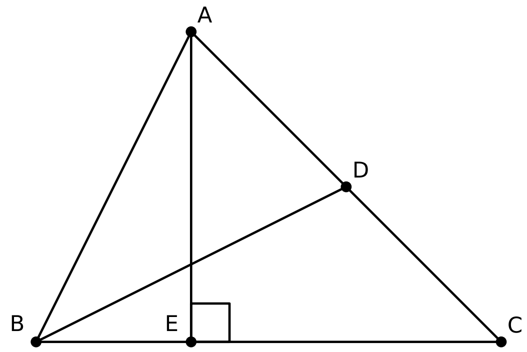
a) Quantos produtos serão formados ao calcularmos $(1+2+3+4)^3$ também usando a propriedade distributiva?

b) Qual a quantidade de números de dois algarismos que usam apenas os dígitos 1, 2, 3 e 4?

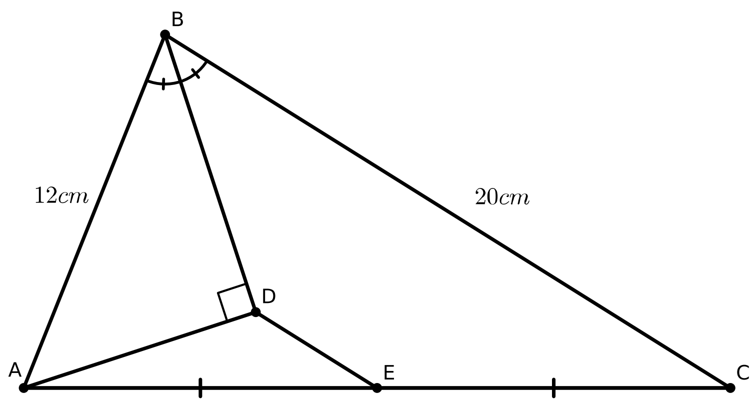
c) Qual a soma dos produtos dos dígitos de todos os números com quatro algarismos formados apenas pelos dígitos 1, 2, 3 e 4?

18 *Ponto médio lembra base média*

a) Na figura abaixo, $AD = DC$, $AE = BD$, $\angle AEC = 90°$. Determine o valor do ângulo $\angle CBD$.



b) No triângulo $\triangle ABC$ abaixo, BD é bissetriz do ângulo $\angle ABC$, E é o ponto médio de AC e $\angle ADB = 90°$. Se $AB = 12$cm e $BC = 20$cm, calcule o comprimento do segmento DE.



19 *Números bacanas*

Um número natural é bacana se a soma de todos os seus divisores positivos (incluindo 1 e n) é maior ou igual ao dobro do número. Por exemplo, 12 é bacana pois $1+2+3+4+6+12 = 28 \geq 24 = 2 \cdot 12$ enquanto que 4 não é bacana pois $1+2+4 < 8 = 2 \cdot 4$. Demonstre que existem infinitos números que são bacanas e infinitos números que não são bacanas.

20 *Jogando com o resto na divisão por 3*

Arnaldo e Bernaldo decidem jogar um jogo que possui um número limitado de jogadas. Arnaldo escreve o número 1 no quadro em sua primeira jogada. Em seguida, Bernaldo escreve 2 ou 4 no quadro. Depois disso, Arnaldo escreve 3 ou 9 no quadro. Os dois continuam jogando alternadamente mantendo a regra de que na jogada n o jogador escreve n ou n^2 no quadro. Arnaldo vence o jogo se, após a última jogada, a soma dos números no quadro for divisível por 3. Se a soma não for divisível por 3, então Bernaldo vence.

a) Suponha que o jogo acabe na jogada de número 15. Mostre que Bernaldo pode garantir a vitória.

b) Suponha que o jogo acabe na jogada de número 7. Nesse caso, qual dos dois jogadores poderá sempre garantir a vitória independentemente de como o seu adversário jogue? Como ele deverá jogar para vencer?

21 *Teoremas de Quadradágoras*

Quadradágoras era um enorme admirador de Pitágoras. Em suas investigações, ele descobriu dois teoremas sobre quadriláteros:

a) "Se um quadrilátero $ABCD$ é tal que $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, então $AB^2 - CD^2 = AD^2 - BC^2$."

b) "Se um quadrilátero $ABCD$ é tal que $\angle ACB = \angle ADC = 90°$, então $AB^2 = BC^2 + CD^2 + AD^2$."

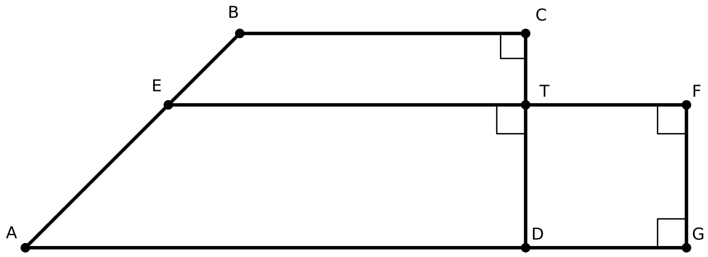
Prove esses resultados.

22 *Número de divisores de um livre de quadrados*

Seja n um número inteiro positivo. Se, para cada divisor primo p de n, o número p^2 não divide n, dizemos então que n é livre de quadrados. Mostre que todo número livre de quadrados tem uma quantidade de divisores que é igual a uma potência de 2.

23 *Quadriláteros de mesma área não são congruentes*

Na figura abaixo, os trapézios retângulos $ABCD$ e $AEFG$, com $BC \parallel EF$ e $CD \parallel FG$, possuem a mesma área. Sabendo que $BC = 4$, $AD = 7$, $CT = 1$ e $TD = 2$, determine a medida do segmento DG.



24 *Produto de tangentes*

a) Verifique que $(1 + \operatorname{tg} k)(1 + \operatorname{tg}(45^\circ - k)) = 2$.

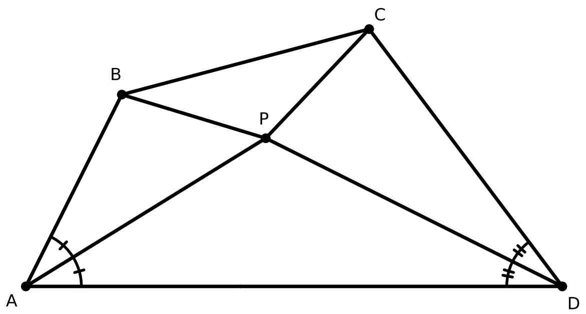
b) Dado que

$$(1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 2^\circ) \cdot \ldots \cdot (1 + \operatorname{tg} 45^\circ) = 2^n,$$

encontre n.

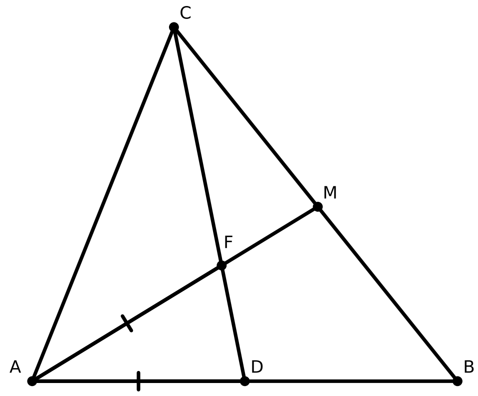
25 *Bissetrizes no quadrilátero*

No quadrilátero $ABCD$, o lado AD é tal que $AD = AB + CD$. Se P é o ponto de encontro das bissetrizes de $\angle BAD$ e $\angle CDA$, mostre que $BP = PC$.



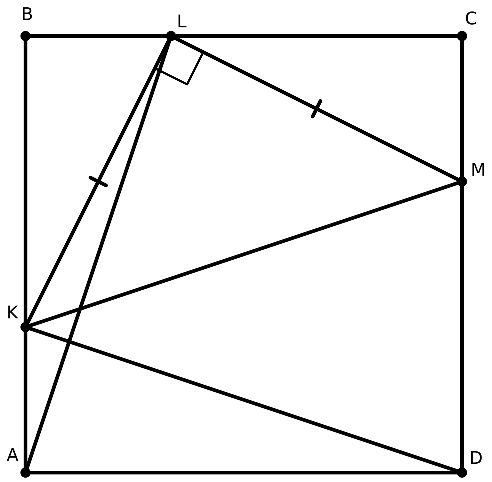
26 *Razão entre segmentos e ponto médio*

Sejam D um ponto no lado AB do triângulo $\triangle ABC$ e F a interseção de CD e da mediana AM. Se $AF = AD$, encontre a razão entre BD e FM.



27 *Segmentos perpendiculares*

Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado e os pontos K, L e M estão sobre os lados AB, BC e CD de modo que $\triangle KLM$ é um triângulo isósceles retângulo em L. Prove que AL e DK são perpendiculares.

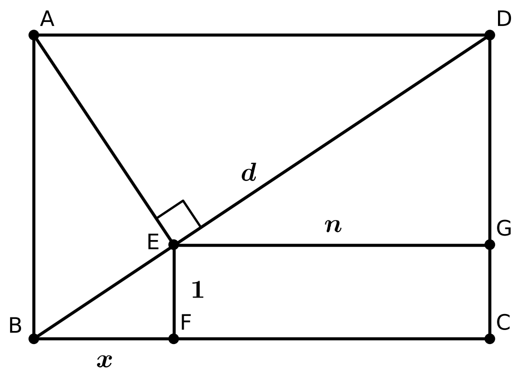


28 *Trocando números usando MDC e MMC*

Em uma lousa são escritos os 2014 inteiros positivos de 1 até 2014. A operação permitida é escolher dois números a e b, apagá-los e escrever em seus lugares os números $mdc(a, b)$(Máximo Divisor Comum) e $mmc(a, b)$(Mínimo Múltiplo Comum). Essa operação pode ser feita com quaisquer dois números que estão na lousa, incluindo os números que resultaram de operações anteriores. Determine qual a maior quantidade de números 1 que podemos deixar na lousa.

29 *A diagonal de um retângulo*

No desenho abaixo, $ABCD$ é um retângulo e E é o pé da perpendicular traçada de A até a diagonal BD. As distâncias do ponto E aos lados DC, BC e AB são n, 1 e x, respectivamente. Seja ainda d o comprimento da diagonal BD.



a) Verifique que $DE = x^2\sqrt{1+x^2}$.

b) Verifique que $n = x^3$.

c) Verifique que $d^{2/3} - x^{2/3} = 1$.

30 *Dígitos repetidos*

a) Usando que $\dfrac{10^n - 1}{9} = \underbrace{111\ldots111}_{n}$, verifique que:

$$\underbrace{111\ldots111}_{4028} = \underbrace{222\ldots222}_{2014} + (\underbrace{333\ldots333}_{2014})^2.$$

b) Considere o número de 4028 dígitos

$$X = \underbrace{111\ldots111}_{2013}2\underbrace{888\ldots888}_{2012}96.$$

Calcule $\sqrt{X}$.

c) Mostre que o número $\underbrace{444\ldots444}_{n\ vezes}\underbrace{888\ldots888}_{(n-1)\ vezes}9$ é um quadrado perfeito.

d) Mostre que o número

$$\underbrace{111\ldots111}_{4028}-\underbrace{222\ldots222}_{2014}$$

é um quadrado perfeito.

31 *Radicais sucessivos*

Encontre as soluções da equação

$$\sqrt{x+\sqrt{4x+\sqrt{16x+\sqrt{\ldots+\sqrt{4^n x+3}}}}}=1+\sqrt{x}.$$

32 *Valores possíveis das raízes*

Na equação $x^2+px+q=0$, os coeficientes p e q podem assumir quaisquer valores do intervalo $[-1,1]$. Quais são os possíveis valores das raízes de tal equação?

33 *Ímpares que de 5 em 5 e 9 em 9 somam quadrados perfeitos*

Os números que são inteiros positivos elevados ao quadrado são chamados *quadrados perfeitos*, por exemplo, 16 é um quadrado perfeito pois é igual a 4^2. Um fato curioso é que números que são quadrados perfeitos deixam apenas restos 0 ou 1 na divisão por 4. Com isso podemos provar, por exemplo, que 2014 não é um quadrado perfeito pois 2014 deixa resto 2 na divisão por 4.

a) Sabendo que todo número inteiro ímpar é da forma $2k+1$, mostre que os quadrados perfeitos ímpares deixam resto 1 na divisão por 8.

b) É possível colocar 45 números inteiros ímpares em sequência de modo que a soma de quaisquer 5 consecutivos e de quaisquer 9 consecutivos sejam quadrados perfeitos?

34 *Soma de dois primos é múltiplo de seis*

Sejam p, q e r três números primos maiores que 3. Sabe-se que o número $p+q+r$ também é primo. Mostre que $p+q$, $p+r$ ou $q+r$ é um múltiplo de 6.

35 *Pontuações em um torneio de Xadrez*

Em um torneio de xadrez, todos os jogadores enfrentaram todos os outros exatamente uma vez. Em cada partida, o jogador ganha 1 ponto se vencer, $1/2$ se empatar e 0 ponto se perder. Ao final do torneio, um repórter somou as pontuações de todos os jogadores e obteve 190 pontos. Nesse tipo de torneio, o vencedor é aquele que faz mais pontos.

a) Quantos jogadores participaram do torneio?

b) André participou do torneio e fez 9 pontos. Mostre que, mesmo sem saber as outras pontuações, André não foi o vencedor do torneio.

36 *Equação com radicais*

Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-6x+10}=5$.

37 *Números em sequência que se repetem*

Uma propriedade interessante do número 2013 é que 3 é o último dígito da soma $2+0+1$. Repetindo-se esse processo, isto é, escrevendo-se à direita o último dígito da soma dos três dígitos anteriores, teremos uma sequência:

$$2,0,1,3,4,8,5,7...$$

a) Prove que começando com a sequência $2,0,1$, nessa ordem, podemos também encontrar os três números consecutivos $1,2,2$, nessa ordem.

b) Observe que se uma sequência de três números consecutivos aparecer novamente na mesma ordem, então toda a sequência se "repetirá" sucessivamente. Por exemplo, a sequência abaixo **não é a sequência do enunciado**, mas se repete a cada quatro números

$$\ldots\underline{1243}12431243\ldots12431243\ldots$$

Verifique que alguma sequência de três dígitos se repete na sequência do enunciado.

c) Suponha que na primeira aparição de "a,b,c" na sequência, o número imediatamente anterior seja x, e que na sua segunda aparição seja y, ou seja, na sequência iremos encontrar os números na seguinte ordem:

$$\ldots,x,a,b,c,\ldots,y,a,b,c\ldots$$

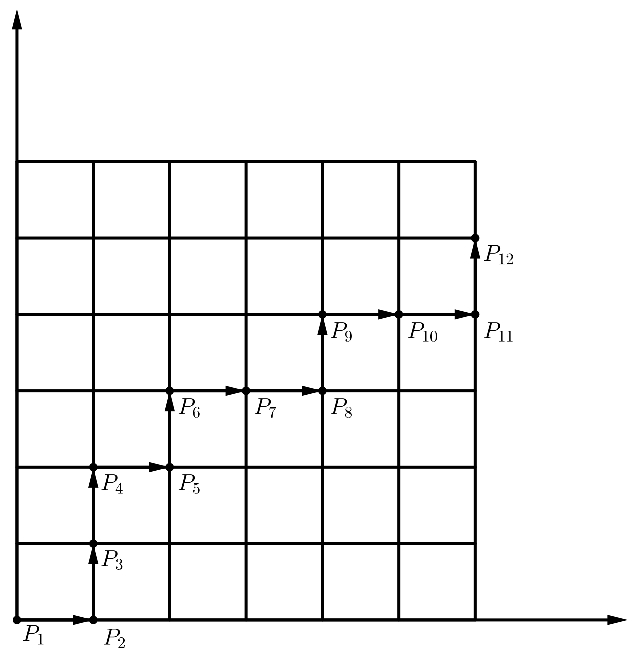
Mostre que $x=y$.

d) Dado que $1,2,2$ apareceu na sequência, nessa ordem, mostre que eventualmente aparecerá novamente a sequência de dígitos $2,0,1$, também nessa ordem.

38 *Somando e subtraindo números de cobrinhas*

A folha do caderno de desenho de João é um enorme plano cartesiano quadriculado. Um dos seus desenhos preferidos é a criação de cobrinhas cobrindo os lados dos quadradinhos com sua caneta. Basicamente uma *cobrinha* é uma sequência de $2n$ pontos distintos P_1, P_2, ..., P_{2n} escolhidos nos vértices dos quadradinhos dos tabuleiros de modo que pontos com índices consecutivos estão no lado de um mesmo quadradinho do tabuleiro. Por exemplo, na figura abaixo, temos uma cobrinha unindo os seguintes pontos do plano cartesiano:

$$\begin{aligned} P_1 &= (0,0), \quad P_2 = (1,0), \quad P_3 = (1,1), \quad P_4 = (1,2), \quad P_5 = (2,2), \quad P_6 = (2,3) \\ P_7 &= (3,3), \quad P_8 = (4,3), \quad P_9 = (4,4), \quad P_{10} = (5,4), \quad P_{11} = (6,4), \quad P_{12} = (6,5). \end{aligned}$$



Depois de desenhar cobrinhas no tabuleiro, João gosta de calcular a soma das coordenadas dos pontos de índices ímpares, isto é, dos pontos P_1, P_3, ..., P_{2n-1} , e subtrair desse número o resultado da soma das coordenadas dos pontos de índices pares, isto é, dos pontos P_2, P_4, ..., P_{2n}.

a) Para $n = 3$, ou seja, com 6 pontos, desenhe "cobrinhas" em que o resultado obtido por João seja -1, -3, 1 e 3.

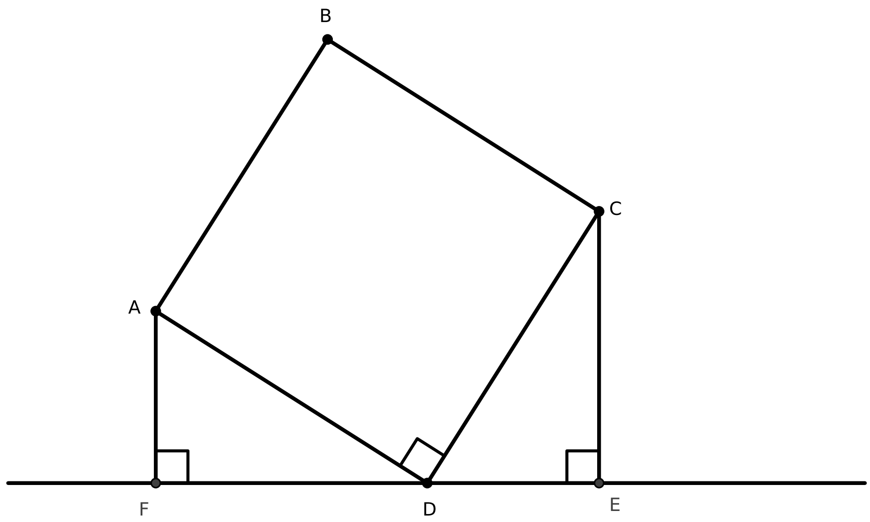
b) Dependendo de n, quais os possíveis valores que João pode obter?

Observação: A "cobrinha" pode também conter pontos com coordenadas negativas, basta que ela "se mova" para a esquerda do eixo y ou para baixo do eixo x.

39 *Quadrado encostando na reta*

a) Todo número real ao quadrado é maior ou igual a 0, sendo 0 apenas se o número elevado ao quadrado for o próprio 0. Consequentemente, para quaisquer números reais a e b temos $(a-b)^2 \geq 0$. Prove que
$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$$
com igualdade ocorrendo somente quando $a = b$.

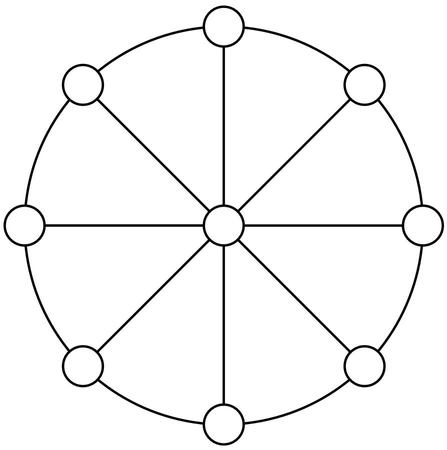
b) A figura a seguir mostra um quadrado de lado 1 com um vértice em comum com uma reta horizontal. Considerando todas as posições em que o quadrado "encosta" apenas um de seus vértices na reta, qual a maior área possível do pentágono $ABCEF$ onde E e F são as projeções ortogonais dos vértices A e C na reta horizontal?



SOLUÇÕES DO NÍVEL 1

1 *Escrevendo números em círculos*

Na figura abaixo, temos uma circunferência cortada por 4 segmentos. Escreva os números de 1 até 9 nos círculos de modo que a soma dos números escritos em cada segmento seja sempre a mesma.



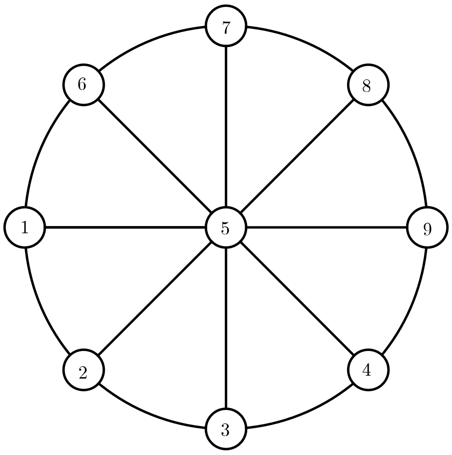
1 *Escrevendo números em círculos – Solução*

Observe que as somas dos números em círculos diametralmente opostos devem ser iguais, pois todos os segmentos compartilham o círculo central. Desconsiderando-se o centro, a soma dos oito números escritos na circunferência deve ser divisível por 4, pois eles podem ser distribuídos em 4 pares de mesma soma. A soma total é

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.$$

Escolhendo-se o 5 como número central, os outros números podem ser distribuídos nos seguintes pares de soma 10: $(1,9)$, $(2,8)$, $(3,7)$ e $(4,6)$.

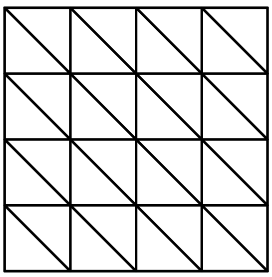
Uma possível distribuição seria:



Observação: Além do 5, os números 9 e 1 também poderiam ocupar o centro, pois $45-9=36$ e $45-1=44$ também são múltiplos de 4. Para colocarmos o 9 no centro, bastaria dividirmos os números restantes nos pares de soma $36/4=9$: $(1,8)$, $(2,7)$, $(3,6)$ e $(4,5)$. Para colocarmos o 1 no centro, bastaria dividirmos os números restantes nos pares de soma $44/4=11$: $(2,9)$, $(3,8)$, $(4,7)$ e $(5,6)$.

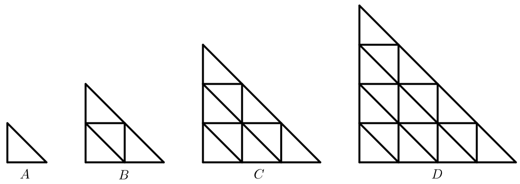
2 *Contando triângulos*

Quantos triângulos existem na figura abaixo?



2 *Contando triângulos – Solução*

Como todos os segmentos traçados são paralelos aos lados do quadrado ou à diagonal, os triângulos formados também possuem essas características.
Assim, existem apenas quatro tipos de triângulos:



Os quatro tipos de triângulos foram definidos de acordo com a quantidade de triângulos menores: 1 na figura A, 4 na figura B, 9 na figura C e 16 na figura D. Na contagem, também devemos considerar suas cópias "viradas de cabeça para baixo". Como existem 32 triângulos do tipo A, 18 do tipo B, 8 do tipo C e 2 do tipo D, o total de triângulos é $32+18+8+2=60$.

3 *Dividindo chocolates*

Maria acaba de ganhar uma barra enorme de chocolate como presente de Páscoa. Ela decide dividi-la em pedaços para comê-la aos poucos. No primeiro dia, ela a divide em 10 pedaços e come apenas um deles. No segundo dia, ela divide um dos pedaços que sobraram do dia anterior em mais 10 pedaços e come apenas um deles. No terceiro dia, ela faz o mesmo, ou seja, divide um dos pedaços que sobraram do dia anterior em 10 outros e come apenas um deles. Ela continua repetindo esse procedimento até a Páscoa do ano seguinte.

a) Quantos pedaços ela terá no final do terceiro dia?

b) É possível que ela obtenha exatamente 2014 pedaços em algum dia?

3 *Dividindo chocolates – Solução*

a) No final do primeiro dia, ela terá $10-1=9$ pedaços. No final do dia seguinte, ela terá $9-1+10-1=17$ pedaços. Do ponto de vista prático, é como se ela tivesse acrescentado $10-1-1=8$ pedaços novos, pois um pedaço sempre é perdido para a divisão em 10 e outro sempre é comido. No final do terceiro dia ela acrescenta mais oito novos pedaços e passa a ter 25.

b) Como a soma sempre aumenta de 8 em 8, após n dias, a partir do dia inicial, ela terá $9+8n$ pedaços. Se for possível obter exatamente 2014 pedaços, devemos ter:

$$\begin{aligned} 9+8n &= 2014 \\ n &= \frac{2005}{8}. \end{aligned}$$

Como $\dfrac{2005}{8}$ não é inteiro, tal dia nunca acontecerá.

4 *Números bacanas*

Um número natural é bacana quando cada um de seus algarismos é maior que qualquer um dos outros algarismos que estão à sua esquerda. Por exemplo, 3479 é bacana, enquanto que 2231 não é. Quantos números bacanas existem entre 3000 e 8000?

4 *Números bacanas – Solução*

Um número nesse intervalo deve possuir como primeiro dígito um dos seguintes números: 3, 4, 5 e 6. Não pode existir um número bacana começado em 7 porque não existem três algarismos distintos maiores que 7. Podemos assim dividir nossa busca pelos números bacanas:

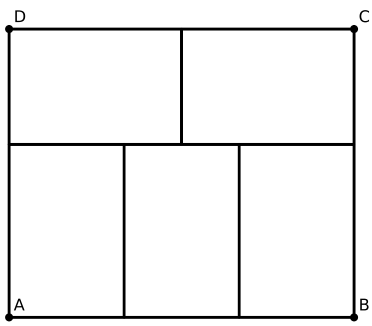
1. números começados em 3: 3456, 3457, 3458, 3459, 3467, 3468, 3469, 3478, 3479, 3489, 3567, 3568, 3569, 3578, 3579, 3589, 3678, 3679, 3689 e 3789;
2. números começados em 4: 4567, 4568, 4569, 4578, 4579, 4589, 4678, 4679, 4689 e 4789;
3. números começados em 5: 5678, 5679, 5689 e 5789;
4. números começados em 6: 6789.

Portanto, existem $20 + 10 + 4 + 1 = 35$ números bacanas.

Observação: Além da divisão em grupos, observando o primeiro algarismo, é interessante organizar a contagem dentro dos grupos, que pode ser através da listagem em ordem crescente (como foi feita) ou utilizando o diagrama da árvore (ótima pesquisa!).

5 *Calculando áreas*

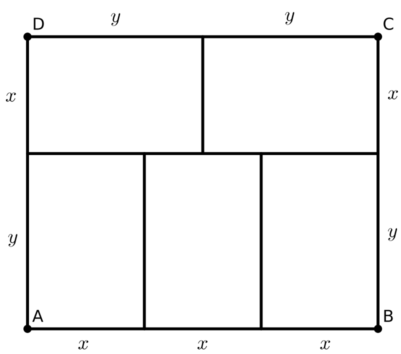
O retângulo $ABCD$ está dividido em cinco retângulos iguais. Se o perímetro de $ABCD$ é 20cm, determine a sua área.



5 *Calculando áreas – Solução*

Sejam x e y, com $x < y$, as dimensões de cada um dos retângulos menores. Assim, o perímetro do retângulo $ABCD$ é $5x + 4y = 20$cm. Além disso, comparando as dimensões dos lados dos retângulos menores, temos $3x = 2y$. Portanto, $20 = 5x + 6x$ e $x = 20/11$cm. Consequentemente, $y = \frac{3x}{2} = \frac{30}{11}$cm e

$$A_{ABCD} = 3x(x+y) = 3 \cdot \frac{20}{11} \cdot \frac{50}{11} = \frac{3000}{121}\text{cm}^2.$$

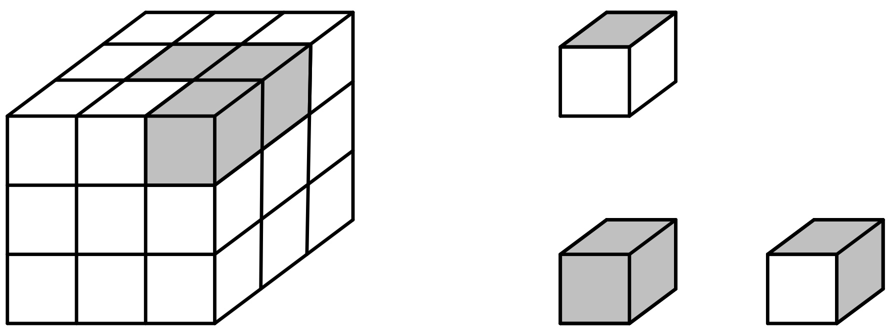


6 *Pintando cubinhos*

a) Na figura abaixo, João pintou algumas faces de cubinhos de um cubo $3 \times 3 \times 3$ de cinza. Ao desmontar o cubo em cubos menores de tamanho $1 \times 1 \times 1$, ele percebeu que um deles possuía três, outro possuía duas e o terceiro possuía apenas uma face cinza. Se ele tivesse pintado todas as faces do cubo maior de cinza, quantos cubinhos $1 \times 1 \times 1$ teriam exatamente uma face cinza? Quantos cubinhos teriam exatamente duas faces cinzas?

b) Se ele tivesse pintado todas as faces de um cubo $5 \times 5 \times 5$ de cinza, após dividi-lo em cubinhos $1 \times 1 \times 1$, quantos deles teriam exatamente uma face pintada de cinza?

c) Ainda considerando o cubo $5 \times 5 \times 5$, quantos cubinhos $1 \times 1 \times 1$ não teriam faces pintadas?



6 *Pintando cubinhos – Solução*

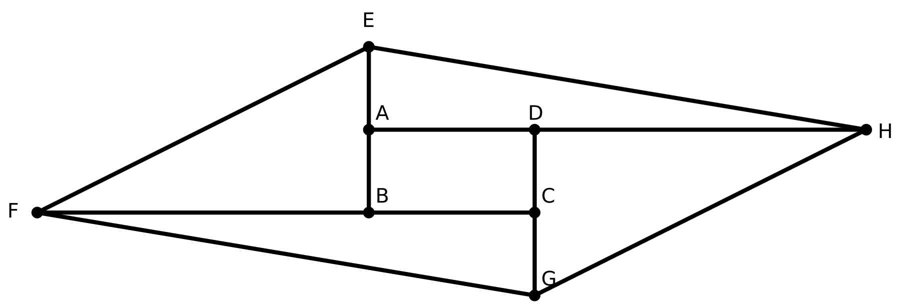
a) Como apenas os cubos pintados nos centros das 6 faces possuiriam exatamente uma face cinza, a resposta da primeira pergunta é 6. Os cubinhos com duas faces cinzas são aqueles que estão em duas faces do cubo maior mas que não são cantos. Existem 12 desses cubinhos.

b) Em cada face, o quadrado central 3×3 conteria os cubinhos com apenas uma face pintada de cinza. Como temos 6 faces, o total é $9\cdot6=54$.

c) No centro do cubo $5\times5\times5$ existe um cubo $3\times3\times3$ em que nenhuma das faces de seus cubinhos está visível. Como apenas os cubinhos visíveis receberam pelo menos uma face com pintura cinza, o total de cubos não pintados foi $3\times3\times3=27$.

7 *Prolongando segmentos*

Na figura abaixo, os lados do retângulo $ABCD$ foram prolongados de modo que $EB=2AB$, $AH=3AD$, $DG=2DC$ e $FC=3BC$. Encontre a razão entre as áreas do quadrilátero $EHGF$ e do retângulo $ABCD$.



7 *Prolongando segmentos – Solução*

A área do quadrilátero $EFGH$ pode ser decomposta em quatro triângulos e um retângulo. Se $S = A_{ABCD}$, temos

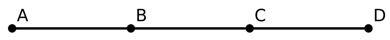
$$\begin{aligned}
A_{EAH} &= (EA \cdot AH)/2 \\
&= (AB \cdot 3AD)/2 \\
&= 3S/2. \\
A_{DHG} &= (DH \cdot DG)/2 \\
&= (2AD \cdot 2DC)/2 \\
&= 2S \\
A_{FCG} &= (FC \cdot CG)/2 \\
&= (3BC \cdot DC)/2 \\
&= 3S/2 \\
A_{FBE} &= (FB \cdot BE)/2 \\
&= (2BC \cdot 2AB)/2 \\
&= 2S.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{A_{EFGH}}{A_{ABCD}} &= \frac{3S/2 + 2S + 3S/2 + 2S + S}{S} \\
&= 8.
\end{aligned}$$

8 *Número de segmentos*

a) Dados quatro pontos distintos A, B, C e D, todos sobre uma mesma reta, como indica a figura abaixo, determine o número de segmentos distintos que podem ser formados com vértices em tais pontos.



b) Com 10 pontos distintos em um segmento, qual seria a nova resposta?

8 *Número de segmentos – Solução*

a) Existem 6 segmentos de reta com vértices nesses 4 pontos: AB, AC, AD, BC, BD e CD. Veja que a resposta não seria diferente se os pontos não fossem colineares.

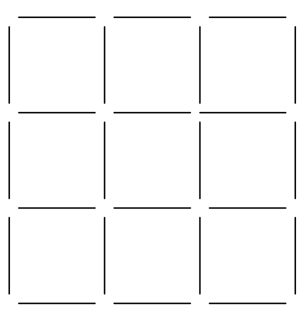
b) Chamemos os 10 pontos de: A, B, C, D, E, F, G, H, I e J. Observando a solução do item *a*), podemos organizar nossa contagem listando inicialmente todos os segmentos com vértice A e, em seguida, todos os que possuem vértice B e que ainda não foram contados na nossa lista. Feito a contagem para o vértice B, repetimos esse procedimento para os outros vértices.

Com 10 pontos, exitem 9 segmentos em que um de seus vértices é o ponto A, pois basta unir A a cada um dos outros 9 pontos. Com vértice B, existem também 9 segmentos mas um deles já foi contado, pois possui também vértice A. Assim, basta acrescentarmos apenas mais 8 novos segmentos. Com vértice C, existem $9-1-1=7$ novos segmentos porque já contamos os segmentos AC e BC. A cada novo vértice a quantidade de novos segmentos é reduzida em uma unidade. Assim, a quantidade total de segmentos é

$$9+8+7+6+5+4+3+2+1=45.$$

9 *Palitos formando quadrados*

Na figura abaixo, Maria arrumou 24 palitos e formou um quadrado 3×3.

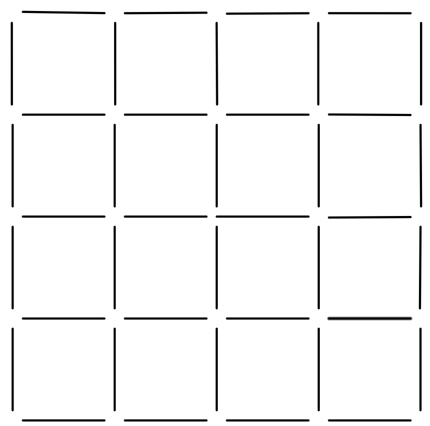


a) Quantos palitos ela precisaria usar para formar um quadrado 4×4?

b) Qual o lado do maior quadrado que ela conseguiria formar com 100 palitos? Se sobrarem palitos, determine quantos.

9 *Palitos formando quadrados – Solução*

a) A figura abaixo mostra que ela precisará usar 40 palitos



b) Se quisermos formar um quadrado com o lado composto por n palitos, precisaremos de $n+1$ linhas de n palitos e $n+1$ colunas também de n palitos. Isso totaliza $n(n+1)+n(n+1) = 2n(n+1)$ palitos. Então, se

$$\begin{aligned} n = 5 &\quad\Rightarrow\quad 2n(n+1) = 60; \\ n = 6 &\quad\Rightarrow\quad 2n(n+1) = 84; \\ n = 7 &\quad\Rightarrow\quad 2n(n+1) = 112. \end{aligned}$$

Portanto, com 100 palitos, podemos formar no máximo um quadrado com lado 6 e sobrarão $100-84 = 16$ palitos.

10 *Formando números usando dígitos*

São dados 5 dígitos distintos de 1 a 9. Arnaldo forma o maior número possível usando três desses 5 dígitos. Em seguida, Bernaldo escreve o menor número possível usando três desses 5 dígitos. Qual o dígito da unidade da diferença entre o número de Arnaldo e o número de Bernaldo?

10 *Formando números usando dígitos – Solução*

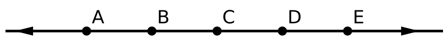
Sejam a, b, c, d, e os dígitos dados em ordem crescente. Como qualquer número com e como dígito das centenas é maior que qualquer número em que o dígito das centenas é um dos outros quatro dígitos, então o número de Arnaldo deve começar com e. Da mesma forma, ele deve usar o segundo maior dígito nas dezenas e o terceiro maior nas unidades. Logo, o número de Arnaldo é $\overline{edc}$.

O mesmo argumento também se aplica ao número escrito por Bernaldo, pois qualquer número com o dígito a nas centenas é menor que qualquer número em que o dígito das centenas é um dos outros quatro dígitos. Ele deve usar os menores dígitos na ordem decrescente, ou seja, o número de Bernaldo é $\overline{abc}$. Como os dois números têm o mesmo dígito das unidades, ao subtraí-los obteremos um número que tem zero como dígito das unidades.

Observação: O traço sobre os números serve para distinguir o produto de dígitos do número formado por eles. Por exemplo, $a \cdot b$ denota o produto de a e b enquanto que $\overline{ab}$ denota o número cujo algarismo das unidades é b e o das dezenas é a.

11 *Quantas semirretas?*

Abaixo estão representados cinco pontos distintos sobre uma mesma reta. Quantas semirretas possuem origem em algum desses cinco pontos e não contêm o ponto B?

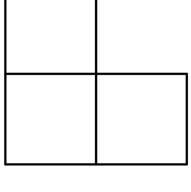


11 *Quantas semirretas? – Solução*

Com a exceção do ponto B, por qualquer um dos outros pontos, existe exatamente uma semirreta que satisfaz a condição do enunciado. Portanto, como existem 4 outros pontos diferentes de B, existem 4 semirretas.

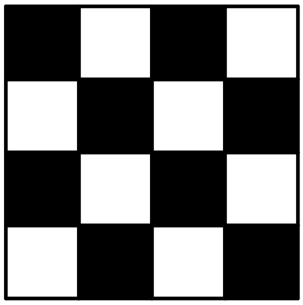
12 *A pintura de Paladino*

Paladino deve pintar de preto algumas casas de um tabuleiro 4×4 de modo que quaisquer três quadradinhos que formem uma figura congruente ao desenho abaixo tenham pelo menos um de seus quadradinhos pintados. Qual o menor número de quadradinhos que devem ser pintados por Paladino?



12 *A pintura de Paladino – Solução*

Pintando de preto metade das casas do tabuleiro 4×4 como um tabuleiro de xadrez, podemos construir um exemplo de pintura satisfazendo o enunciado. Para mostrar que esse é o mínimo, divida o tabuleiro em quatro subtabuleiros 2×2. Se qualquer um deles tiver menos que dois quadrados pintados, será possível encontrarmos três quadrados não pintados formando a figura do enunciado. Portanto, precisamos pintar pelo menos $4 \cdot 2 = 8$ quadradinhos de preto.

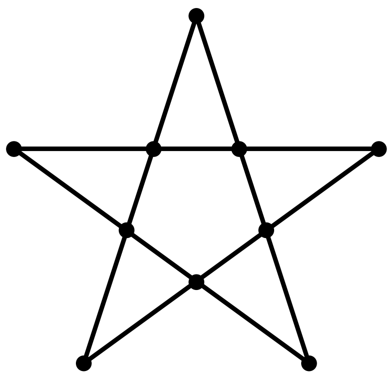


13 *Trilhos do trem*

João deseja construir um circuito para o seu trem de brinquedo usando trilhos no formato de segmentos de reta de comprimento fixo. Na interseção de dois trilhos, ele precisa colocar uma estação de trem. É possível João construir um circuito fechado com exatamente 10 estações, de forma que cada trilho possua exatamente 4 delas?

13 *Trilhos do trem – Solução*

Sim, é possível. No exemplo abaixo, os pontos pretos simbolizam as estações e os segmentos, os trilhos.



14 *Um jogo aritmético*

João está brincando com um jogo em que a única operação permitida é substituir o natural n pelo natural $a \cdot b$ se $a + b = n$, com a e b números naturais. Por exemplo, se o último número obtido foi 15, ele pode trocá-lo por $56 = 7 \cdot 8$, pois $7 + 8 = 15$ e ambos são números naturais.

a) Começando com o número 7, mostre uma sequência de operações que produza o número 48.

b) Começando com o número 7, mostre uma sequência de operações que produza o número 2014.

14 *Um jogo aritmético – Solução*

a) Indiquemos as operações de trocas com uma seta ($\rightarrow$). Uma maneira seria:

$$7 = 2 + 5 \rightarrow 10 = 2 + 8 \rightarrow 16 = 12 + 4 \rightarrow 48.$$

b) Como $n = (n-1) + 1$, é possível decrescer uma unidade de n, transformado-o em $1 \cdot (n-1) = n - 1$. Assim, uma boa estratégia seria criarmos um número maior que 2014 e depois usarmos a operação anterior para decrescermos uma unidade de cada vez até obtermos o número 2014. Para obter um número maior que 2014, faça:

$$7 = 2 + 5 \rightarrow 10 = 5 + 5 \rightarrow 25 = 12 + 13 \rightarrow 156 = 100 + 56 \rightarrow 5600.$$

Basta agora decrescermos uma unidade $5600 - 2014 = 3586$ vezes.

Certamente existem maneiras mais rápidas que usam menos vezes a operação descrita. Uma delas seria:

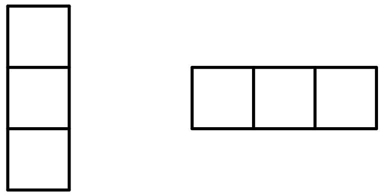
$$7 = 2 + 5 \rightarrow 10 = 9 + 1 \rightarrow 9 = 4 + 5 \rightarrow 20 = 7 + 13 \rightarrow 91 = 38 + 53 \rightarrow 2014.$$

15 *Soma constante*

a) João preencheu os quadrados da figura abaixo com números naturais, de modo que a soma de quaisquer três números de quadrados vizinhos fosse sempre 30. Determine o valor de x.

2				x				3		

b) Um triminó é uma peça formada por três quadradinhos em linha, como indicado nas figuras abaixo.



No tabuleiro abaixo, a soma de quaisquer três números formando um triminó é sempre igual a 30. Determine o valor de x.

4							
						x	
			7				

15 *Soma constante – Solução*

a) Como a soma de três números consecutivos é sempre a mesma, se a, b, c e y estão escritos nessa ordem na fila, devemos ter $a = y$ pois:

...	a	b	c	y	...

$$\begin{aligned} a + \cancel{b} + \cancel{c} &= \cancel{b} + \cancel{c} + y \\ a &= y. \end{aligned}$$

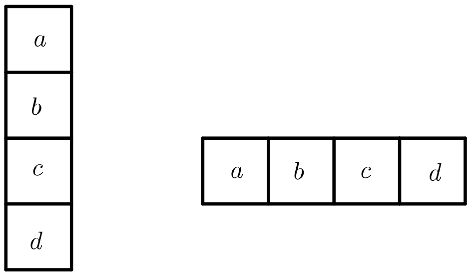
Assim, seguindo esse padrão de repetição a cada três quadrados, os vizinhos do número x devem ser 2 e 3 como indica a figura abaixo.

2		3	2	x	3	2		3	2	

Como $2 + x + 3 = 30$, segue que $x = 25$.

b) Repetindo o argumento do item anterior, na figura abaixo, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} a+\cancel{b}+\cancel{c} &= \cancel{b}+\cancel{c}+d \\ a &= d. \end{aligned}$$



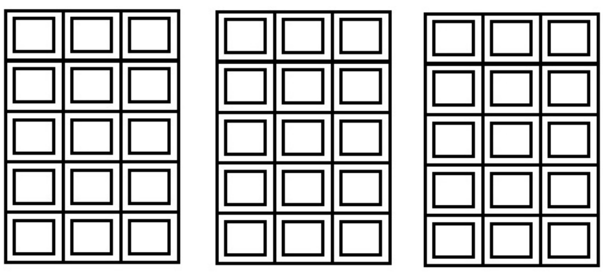
Consequentemente, quaisquer dois quadradinhos, separados por outros dois em uma mesma linha ou coluna, são iguais. Podemos então preencher dois vizinhos de x com os números sublinhados abaixo:

4			$\underline{4}$			$\underline{4}$	
						x	
						$\underline{7}$	
			7			$\underline{7}$	

Finalmente, analisando a soma de um triminó com x no meio, temos $4+7+x=30$ e $x=19$.

16 *Jogando com as barras de chocolate*

João e Maria ganharam 3 barras de chocolate de 5×3 divididas em quadradinhos 1×1. Então eles decidem disputar um jogo. João pega uma das barras e a divide em duas barras retangulares menores cortando-a através de uma das linhas divisórias marcadas entre os quadradinhos da barra. Em seguida, Maria pega qualquer uma das barras e a divide também usando uma das linhas divisórias já marcadas nela. Eles seguem dividindo as barras alternadamente e o vencedor é aquele que, após sua jogada, deixar apenas quadradinhos 1×1 como pedaços. Quem vence o jogo?

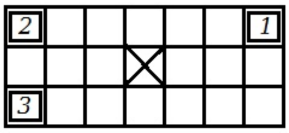


16 *Jogando com as barras de chocolate – Solução*

Observe que o número de pedaços sobre a mesa aumenta em uma unidade após cada jogada. Desse modo, após a primeira jogada de João, haverá 4 pedaços sobre a mesa e, após a primeira jogada de Maria, haverá 5 pedaços. Após a segunda jogada de João, haverá 6 pedaços e assim por diante. Perceba que João sempre deixa a quantidade de pedaços par e Maria sempre deixa a quantidade ímpar. Como são 3 barras de 5×3, ao final do jogo sobrarão $3 \times 3 \times 5 = 45$ quadradinhos 1×1. Como 45 é ímpar, Maria vencerá o jogo.

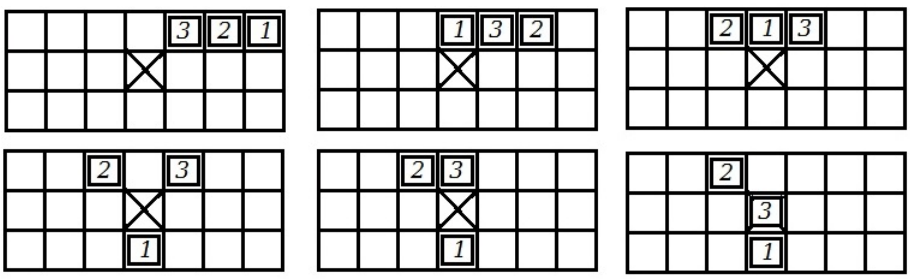
17 *Empurrando bloquinhos*

Um jogo de computador consiste de uma tela em forma de tabuleiro 3×7 no qual há três bloquinhos deslizantes 1, 2 e 3, ocupando quadradinhos 1×1. O jogo começa conforme a figura abaixo e cada jogada consiste em escolher um bloquinho e "empurrá-lo" na linha ou coluna. Após ser empurrado, um bloquinho irá parar apenas quando encontrar a borda do tabuleiro ou outro bloquinho. Por exemplo, se escolhermos o bloquinho 3, poderemos mandá-lo para o canto inferior direito ou para cima encontrando o bloquinho 2. Dois bloquinhos não podem ocupar o mesmo quadradinho e quando dois bloquinhos se chocam eles não continuam a se mover. O objetivo é fazer com que algum dos bloquinhos fique parado sobre a casinha marcada no centro do tabuleiro. Mostre como isso pode ser feito.



17 *Empurrando bloquinhos – Solução*

Note que para colocar um bloquinho na casa marcada é necessário colocar outro bloquinho que impeça a continuação do deslizamento depois de passar por tal casa. Para obter uma solução, mova o bloquinho 2 na direção do bloquinho 1 e, em seguida, mova o bloquinho 3 para ficar ao lado do bloquinho 2 com dois movimentos. Perceba que podemos mover o bloquinho 1 para posicioná-lo à esquerda do bloquinho 3 movendo-o para baixo, para a esquerda, para cima e, por fim, para a direita. Do mesmo modo, podemos mover o bloquinho 2 para para posicioná-lo à esquerda do bloquinho 1. Para acabar, movemos o bloquinho 1 para baixo, movemos o 3 para a esquerda e, finalmente, para baixo atingindo a casinha marcada. A figura abaixo ilustra parte dos passos realizados.



18 *Pontos na copa do mundo*

Durante a Copa do Mundo de Futebol, vários matemáticos foram acionados para falar sobre as chances de classificação das equipes. Na primeira fase, cada grupo é formado por quatro equipes e cada equipe enfrenta cada uma das outras equipes exatamente uma vez. Em caso de vitória a equipe ganha 3 pontos, em caso de empate 1 ponto e, finalmente, em caso de derrota 0 ponto. Sabe-se que os dois primeiros classificam-se para a fase seguinte. Se dois times empatam com a mesma quantidade de pontos, o desempate é feito através do saldo de gols. Qual o número mínimo de pontos para que uma equipe se classsifique sem depender dos resultados das outras equipes?

Observação: Lembre-se que para mostrar que o número k encontrado é realmente o mínimo, além de mostrar que tal quantidade é suficiente para garantir a vitória, você deve garantir também que existam exemplos de pontuações onde times podem totalizar não mais que $k-1$ pontos e não passarem para a próxima fase.

18 *Pontos na copa do mundo – Solução*

O número mínimo de pontos é 7 pontos. Primeiro vejamos que com 6 pontos uma equipe pode não se classificar. Sejam A, B, C e D as equipes de um certo grupo e considere a seguinte tabela de resultados:

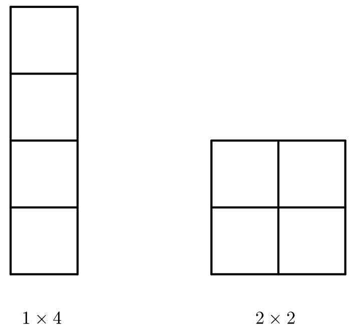
Vencedor	Resultado	Perdedor
A	2×0	D
B	1×0	D
C	1×0	D
A	2×0	B
B	2×0	C
C	1×0	A

Note que C fez 6 pontos e ficou em terceiro pois seu saldo de gols é 0 e isso o deixa atrás de A e B que possuem a mesma pontuação mas saldos de 3 e 1, respectivamente. Portanto, com 6 pontos um time pode não se classificar.

Se um time A faz 7 pontos, então ele venceu duas equipes. Essas duas equipes só podem chegar a no máximo 6 pontos pois perderam pelo menos um jogo. Então A fica, no pior dos casos, à frente dessas duas equipes e sua classificação está garantida.

19 *Cobrindo tabuleiros*

Considere a figura abaixo.

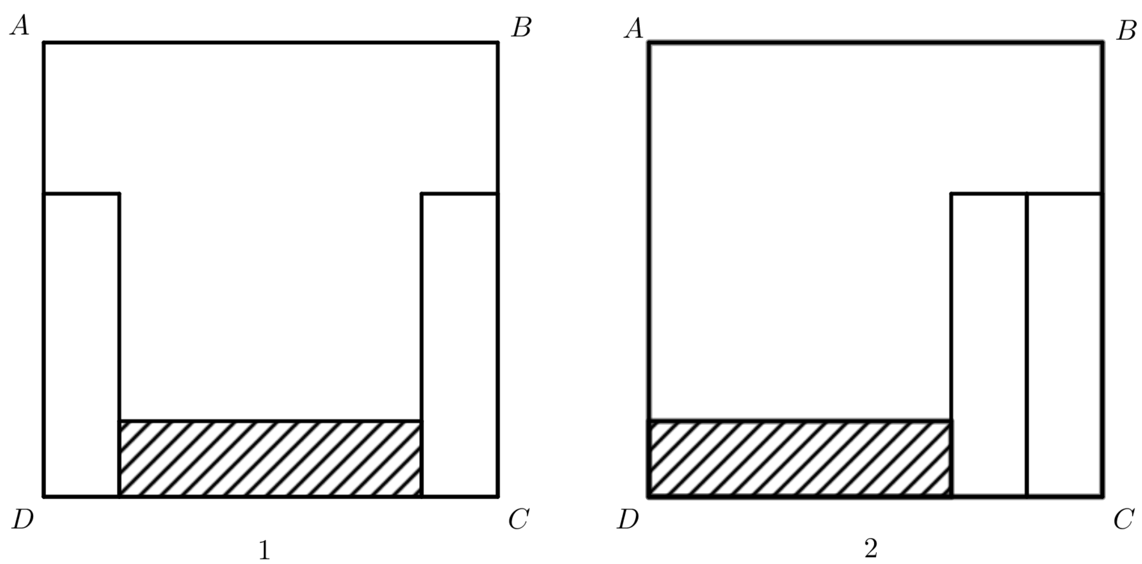


a) É possível cobrir totalmente um tabuleiro 6×6 sem sobreposição e sem que pedaços de peças fiquem "fora" usando apenas peças 1×4?

b) É possível cobrir totalmente um tabuleiro 12×9 sem sobreposição e sem que pedaços de peças fiquem "fora" usando apenas peças 2×2?

19 *Cobrindo tabuleiros – Solução*

a) Não é possível. Caso fosse possível cobri-lo, um dos lados que contém um dos quadrados 1×1 dos cantos deveria conter inteiramente uma peça 1×4. Suponha que DC seja tal lado. Temos duas situações possíveis como ilustra a figura abaixo.



Ou a peça está no meio do lado como na primeira figura ou ela cobre um dos quadrados do canto.

Na primeira situação, somos forçados a colocar outras duas peças verticais para cobrir os cantos. Se continuarmos a cobertura não conseguiremos cobrir simultaneamente os quadrados dos cantos associados aos vértices A e B.

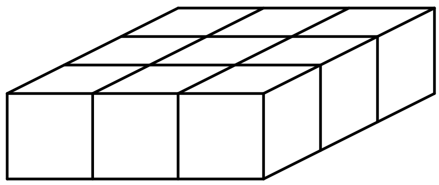
Na segunda situação, para cobrirmos o quadrado 2×2 com vértice B, precisaremos colocar duas peças horizontais. Tais peças nos forçarão a colocar peças verticais no quadrado 2×2 com vértice A e isso nos impedirá de cobrir o centro do tabuleiro 6×6.

Observação: Embora o número de quadrados do tabuleiro 6×6 seja divisível por 4, não é possível cobri-lo com peças 1×4. É possível mostrarmos que um tabuleiro $m \times n$ pode ser coberto com peças $1 \times k$ apenas se k divide um dos lados do retângulo.

b) Não é possível. O quadrado 2×2 só consegue cobrir um número par de quadrados de qualquer um dos lados de tamanho 9 e assim sempre sobrará algum quadrado não coberto em tais lados.

Observação: Um problema relacionado que admitiria uma solução semelhante seria:

É possível cobrir sem sobreposição um paralelepípedo $9 \times 7 \times 11$ com peças $3 \times 3 \times 1$?



$3 \times 3 \times 1$

A resposta desse novo problema também é não. Considere alguma das faces de tamanho 7×11. As peças $3 \times 3 \times 1$ só podem intersectar tal lado em uma quantidade múltipla de 3 de quadrados. Como $7 \cdot 11 = 77$ não é múltiplo de 3, sempre sobrará algum quadrado não coberto por tais peças.

20 *Contando Chocolates*

João possui mais que 30 e menos que 100 chocolates. Se ele organizar os chocolates em linhas de 7, sobrará um. Caso ele os organize em linhas de 10, sobrarão 2. Quantos chocolates ele possui?

20 *Contando Chocolates - Solução*

Na primeira organização, sendo x o número de linhas, o número de chocolates de João é da forma $7x+1$. Na segunda organização, sendo y o número de linhas, o número de chocolates de João será $10y+2$. Ou seja, o número de chocolates de João deixa resto 1 na divisão por 7 e resto 2 na divisão por 10. No intervalo entre 30 e 100, existem 7 números que deixam resto 2 por 10: 32, 42, 52, 62, 72, 82 e 92. Dentre esses números, apenas um deixa resto 1 na divisão por 7: 92. Portanto, o número de chocolates de João é 92.

21 *Números no círculo com dígitos em comum*

Ao redor de um círculo são escritos os números naturais de 1 a N com $N > 2$, uma única vez cada, de tal forma que dois vizinhos possuem pelo menos um dígito em comum. Ache o menor $N > 2$ para qual isso é possível.

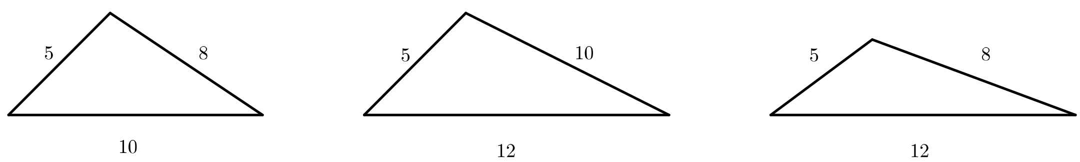
21 *Números no círculo com dígitos em comum – Solução*

Como o 3 irá aparecer, devemos usar o 13 e o 23. Assim, como $9 < 23$, 9 deve estar no círculo. Seus dois vizinhos devem possuir o dígito 9, os menores seriam 19 e 29, consequentemente N deve ser pelo menos 29. Agora, para provar que 29 é o mínimo, basta construir um exemplo:

$$1, 12, 2, 22, 20, 21, 23, 3, 13, 14, 4, 24, 25, 5, 15, 10, 11, 19, 9, 29, 28, 8, 18, 17, 7, 27, 26, 6, 16.$$

22 *Formando figuras com triângulos*

Pedrinho está brincando com três peças triangulares de lados $(5, 8, 10)$, $(5, 10, 12)$ e $(5, 8, 12)$ como mostra o desenho abaixo. Ele pode juntar duas peças se colar exatamente os lados de mesmo tamanho delas. Por exemplo, ele pode juntar o lado 10 da primeira peça com o lado 10 da segunda, mas não pode juntar o lado 10 da primeira peça com o lado 8 da terceira, pois não possuem mesmo tamanho. Qual é o maior perímetro que Pedrinho pode obter juntando as três peças?



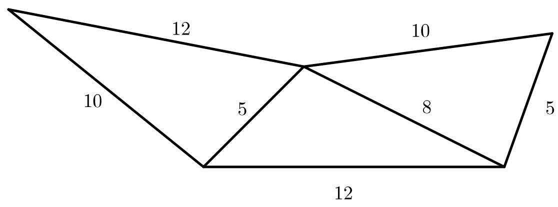
22 *Formando figuras com triângulos – Solução*

Somando os perímetros dos três triângulos temos:

$$(5 + 8 + 10) + (5 + 10 + 12) + (5 + 8 + 12) = 23 + 27 + 25 = 75.$$

Quando juntamos dois triângulos usando um determinado lado, o efeito prático na soma anterior é diminuirmos o dobro de tal lado pois ele deixa de contribuir em dois triângulos. Para maximizar a soma que produz o perímetro, devemos fazer junções que usam os menores lados possíveis. A menor junção possível é envolvendo o lado de comprimento 5 que só pode ser feita uma vez pois só há três lados 5 e precisamos de dois deles para tal junção. A segunda menor junção possível envolve os lados de comprimento 8.

Desse modo, devemos juntar o primeiro e o terceiro triângulos usando os lados 8. Em seguida, podemos juntar o lado 5 do segundo triângulo com qualquer um dos lados 5 da figura já formada. Assim, o maior perímetro é $75-2\cdot5-2\cdot8=49$. Abaixo temos um exemplo de figura formada com os triângulos.



23 *Cozinhando arroz instantâneo no tempo certo*

Para fazer macarrão instantâneo é necessário colocar o macarrão para cozinhar exatamente por 3 minutos. Marcar exatamente 3 minutos é muito complicado sem um relógio, mas é possível se você tiver certas ampulhetas de areia que marcam tempos exatos em minutos. Por exemplo, suponha que você tem duas ampulhetas, uma que marca exatamente 7 minutos e outra que marca exatamente 4 minutos. Basta virá-las ao mesmo tempo e, quando a de 4 acabar, colocar o macarrão. Você deve retirá-lo da panela quando a de 7 minutos terminar. Assim, o macarrão terá cozinhado exatamente por $7-4=3$ minutos.

a) Certo tipo de arroz instantâneo precisa cozinhar por exatamente 4 minutos. Mostre que é possível marcar o tempo para esse arroz cozinhar usando apenas ampulhetas de 9 minutos e de 7 minutos. Qual o menor tempo total necessário para realizar essa tarefa?

b) Seria possível marcarmos 9 minutos se tivéssemos apenas ampulhetas de 6 e de 10 minutos?

23 *Cozinhando arroz instantâneo no tempo certo – Solução*

a) Para marcarmos 4 minutos, devemos virar as ampulhetas de 9 e de 7 algumas vezes de modo que a diferença entre os tempos seja 4 minutos. Como $2\cdot9-2\cdot7=4$, um procedimento seria virar sucessivamente a ampulheta de 9 minutos por 2 vezes e a de 7 também por 2 vezes. Inicialmente as duas devem ser viradas ao mesmo tempo e, quando a de 7 minutos acabar pela segunda vez, iniciaremos a contagem dos 4 minutos. Quando a ampulheta de 9 minutos acabar pela segunda vez, teremos terminado a contagem do tempo desejado.

   Existem outras combinações, por exemplo, $7\cdot7-5\cdot9=4$. Isso quer dizer que poderíamos ter virado a ampulheta de 7 sete vezes e a de 9 cinco vezes. Nesse caso, teríamos gasto 49 minutos para marcar os 4 de cozimento do arroz!

Para determinarmos o tempo mínimo, veja que o tempo marcado é obtido pela subtração entre um múltiplo de 9 e um múltiplo de 7 ou entre um múltiplo de 7 e um de 9. Assim, o tempo total ou é um múltiplo de 7 somado com 4 ou um múltiplo de 9 também somado com 4. Analisando os múltiplos de 9: 9, 18, 27, ...; notamos que 18 é o primeiro deles que deixa resto 4 na divisão por 7 e de fato já mostramos no início que podemos marcar o tempo desejado em 18 minutos. Analisando agora os múltiplos de 7: 7, 14, 21, ...; podemos notar que o primeiro deles que deixa resto 4 na divisão por 9 é o 49. Como $49 > 18$, o tempo mínimo é 18 minutos.

Perceba ainda que a análise anterior nos permite ainda obter outras maneiras de marcarmos 4 minutos, por exemplo, como $9 \cdot 9 = 81$ deixa resto 4 por 7, podemos obter o múltiplo $11 \cdot 7$ de 7 e escrever $9 \cdot 9 - 11 \cdot 7 = 4$. Bastaria usarmos a ampulheta de 9 minutos 9 vezes e a de 7 minutos por 11 vezes. O tempo total gasto seria de 81 minutos!

b) Como 6 e 10 são pares, as diferenças de seus múltiplos são números pares e consequentemente só podem ser marcados tempos que representam números pares. Portanto, não é possível marcar 9 minutos pois 9 é ímpar.

24 *Pulos do grilo sem cair do penhasco*

Um grilo pode dar pulos de duas distâncias: 9 e 8 metros. Ele disputa uma corrida de 100 metros que vai até a beira de um penhasco. Quantos pulos o grilo deve dar para chegar ao fim da corrida, mas sem passar do ponto final e cair do penhasco?

24 *Pulos do grilo sem cair do penhasco – Solução*

Primeira solução: Suponha que o grilo desse apenas pulos de 9 metros. Em seu décimo segundo pulo ele cairia do penhasco, pois $9 \cdot 12 = 108$m. Como ele pode também dar pulos de 8 metros, basta "trocar" 8 pulos de 9 metros por pulos de 8 metros. Teríamos assim 4 pulos de 9 metros e 8 pulos de 8 metros, num total de $4 + 8 = 12$ pulos.

Essa é a única combinação de pulos possível, pois se o grilo der menos que 4 pulos de 9 metros, as distâncias máximas que ele poderá percorrer sem cair do penhasco são: $3 \cdot 9 + 9 \cdot 8 = 99$m, $2 \cdot 9 + 10 \cdot 8 = 98$m, $1 \cdot 9 + 11 \cdot 8 = 97$m e $0 \cdot 9 + 12 \cdot 8 = 96$m. Além disso, dando mais que 4 pulos de 9 metros, o grilo deve dar menos que 8 pulos de 8 metros e assim as distâncias máximas que ele poderá percorrer sem cair do penhasco são: $5 \cdot 9 + 6 \cdot 8 = 93$m, $6 \cdot 9 + 5 \cdot 8 = 94$m, $7 \cdot 9 + 4 \cdot 8 = 95$m, $8 \cdot 9 + 3 \cdot 8 = 96$m, $9 \cdot 9 + 2 \cdot 8 = 97$m, $10 \cdot 9 + 1 \cdot 8 = 98$m e $11 \cdot 9 + 0 \cdot 8 = 99$m. Como nenhuma dessas distâncias é igual a 100, não existe outra combinação.

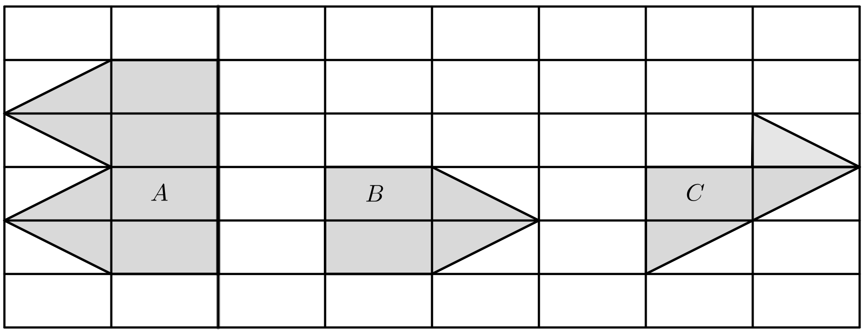
Segunda solução: Sejam x o número de pulos de 9m e y o número de pulos de 8m. Queremos determinar $x + y$, sabendo que:

$$\begin{aligned} 100 &= 9x + 8y \\ &= 8(x + y) + x. \end{aligned}$$

Como 100 deixa resto 4 na divisão por 8, o mesmo deve ocorrer com o número $8(x+y)+x$. Ou seja, x deve deixar resto 4 na divisão por 8 pois $8(x+y)$ já é múltiplo de 8. Se $x > 4$, saberemos que x é pelo menos $8 \cdot 1 + 4 = 12$ que é o próximo número que deixa resto 4 por 8 depois de 4. Se o grilo der 12 pulos de 9m, ele chegará a $9 \cdot 12 = 108$m e cairá do penhasco. Logo, $x = 4$ e após sua substituição na equação acima, podemos concluir que $y = (100 - 9 \cdot 4)/8 = 8$. Portanto, o grilo deve dar $4 + 8 = 12$ pulos.

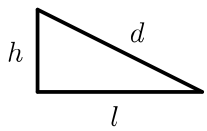
25 *Perímetros de prédios*

No desenho abaixo, três prédios foram construídos em um terreno dividido em lotes retangulares. Os perímetros dos prédios A e B valem 400m e 240m, respectivamente. Quanto mede o perímetro do prédio C?



25 *Perímetros de prédios – Solução*

Em um lote, temos três dimensões importantes: a largura l, a altura h e a diagonal d.



Vamos chamar os perímetros dos prédios A, B e C de P_A, P_B e P_C, respectivamente. Os seus valores são:

$$
\begin{aligned}
P_A &= 4d + 2l + 4h \\
&= 400 \\
P_B &= 2d + 2l + 2h \\
&= 240 \\
P_C &= 3d + l + 3h.
\end{aligned}
$$

Dividindo-se a primeira equação por 2, temos $2d + l + 2h = 200$. Subtraindo desse valor a segunda, obtemos

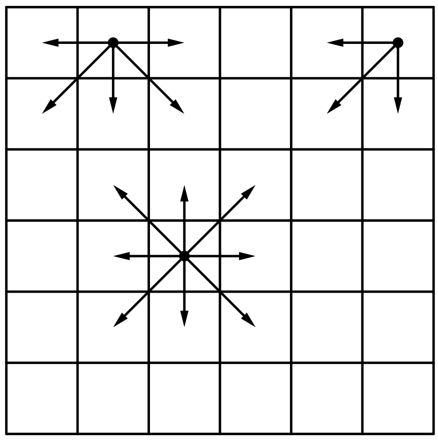
$$
\begin{aligned}
240 - 200 &= (2d + 2l + 2h) - (2d + l + 2h) \\
40 &= l.
\end{aligned}
$$

Analisando o perímetro P_B, temos $d+l+h=120$. Portanto, $d+h=120-l=80$ e finalmente

$$\begin{aligned} P_C &= 3(d+h)+l \\ &= 3\cdot 80+40 \\ &= 240. \end{aligned}$$

26 *Reis dominando o tabuleiro 6 por 6*

O rei é uma peça do xadrez que pode se mover apenas uma casa na vertical, uma na horizontal ou uma na diagonal. Dizemos que um rei *ataca* uma casa se ele pode ocupá-la com um único movimento. Por exemplo, um rei situado nas casas centrais de um tabuleiro 6×6 ataca 8 casas, um rei situado nas casas laterais ataca 5 casas e um rei posicionado em um dos quatro cantos do tabuleiro ataca apenas 3 casas.



a) Considere um tabuleiro 6×6, qual o menor número de reis que podem ser colocados no tabuleiro de modo que todas as casas do tabuleiro estejam ocupadas ou sejam casas atacadas por algum dos reis?

b) Ainda considerando o tabuleiro 6×6, qual o maior número de reis que podemos colocar no tabuleiro de modo que eles não se ataquem?

26 *Reis dominando o tabuleiro 6 por 6 – Solução*

a) Divida o tabuleiro 6×6 em 4 tabuleiros 3×3. Se uma dessas quatro regiões não tiver rei, a casa central de tal região não será ocupada e nem atacada por nenhum rei. Portanto, são necessários pelo menos 4 reis. Se colocarmos um rei em cada casa central dos tabuleiros 3×3, então todas as casas do tabuleiro serão atacadas. Logo, o menor número de reis é 4.

b) Divida o tabuleiro 6×6 em 9 tabuleiros 2×2. Se dois reis estiverem no mesmo 2×2, então eles estarão se atacando. Portanto, temos no máximo 9 reis. Se colocarmos um rei no canto superior esquerdo de cada um desses tabuleiros 2×2, teremos 9 reis que não se atacam mutuamente.

27 *Quadrados mágicos*

a) João descobriu uma maneira de arrranjar os números $\{1, 2, 3, \ldots, 16\}$ em um tabuleiro 4×4 de modo que a soma dos números em cada linha, em cada coluna e em cada diagonal são sempre as mesmas. Uma das possibilidades está no exemplo abaixo.

4	6	9	15
13	11	8	2
16	10	5	3
1	7	12	14

Encontre outro exemplo de distribuição desses 16 números satisfazendo as mesmas condições.

b) Verifique que em qualquer distribuição possível, sempre a soma dos números de cada linha e coluna é 34.

c) João fez agora um novo tipo de tabuleiro com outros números positivos. O produto dos números em cada linha, em cada coluna e em cada diagonal são sempre os mesmos. Quanto vale o número $4H$?

$1/2$	32	A	B
C	2	8	2
4	1	D	E
F	G	H	16

27 *Quadrados mágicos – Solução*

a) Outras distribuições possíveis seriam:

10	1	12	11
2	15	6	16
13	8	5	3
9	7	4	14

1	14	15	4
10	8	5	11
7	9	12	6
16	3	2	13

b) Seja l a soma dos números escritos em uma coluna. Somando os números das quatro colunas temos:

$$\begin{aligned} 4l &= 1+2+3+\ldots+16 \\ &= 136. \end{aligned}$$

Portanto, $l = 136/4 = 34$. O mesmo argumento pode ser aplicado às linhas.

c) Efetuando cancelamentos no produto de algumas linhas, colunas e diagonais, obtemos:

$$\begin{aligned} (A\cdot 8\cdot D\cdot H)(F\cdot 1\cdot 8\cdot B)(C\cdot 2\cdot 8\cdot 2) &= (1/2\cdot 2\cdot D\cdot 16)(1/2\cdot 32\cdot A\cdot B)(1/2\cdot C\cdot 4\cdot F) \\ 4H &= 1. \end{aligned}$$

28 *Botões no tabuleiro 6 por 6*

Em um tabuleiro de brinquedo 6×6, cada casa representa um botão luminoso. Quando alguém aperta um botão, ele acende se estiver apagado e apaga se estiver aceso. Além disso, todos os botões que compartilham um lado com um botão apertado também mudam de estado: de aceso para apagado ou de apagado para aceso. Começando com todos os botões apagados e apertando uma única vez todos os botões do tabuleiro, um de cada vez e em qualquer ordem, quantos botões estarão acesos no final?

28 *Botões no tabuleiro 6 por 6 – Solução*

Veja que um botão terminará aceso se ele mudar de estado um número ímpar de vezes e terminará apagado, caso contrário. Cada botão muda de estado quando ele ou um de seus vizinhos é apertado e, portanto, o número de vezes em que mudará de estado será igual ao seu número de vizinhos acrescido de uma unidade. Podemos assim analisar cada casa do tabuleiro de acordo com o seu número de vizinhos:

i) As quatro casas dos cantos possuem dois vizinhos cada e assim mudarão de estado $1+2=3$ vezes. Terminarão acesas.

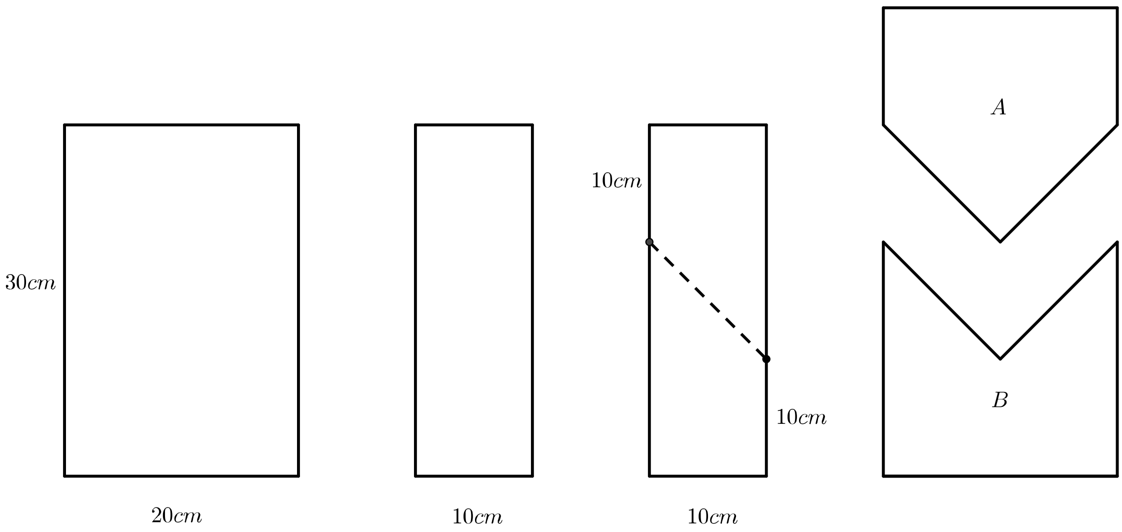
ii) As casas que estão nos lados e que não são cantos possuem três vizinhos e assim mudarão de estado $1+3=4$ vezes. Terminarão apagadas.

iii) Cada uma das outras casas que não são laterais possuem quatro vizinhos e assim mudarão de estado $1+4=5$ vezes. Terminarão acesas.

Por fim, como o tabuleiro 6×6 possui 16 casas laterais que não são cantos e estas são as únicas que terminarão apagadas, concluímos que $36-16=20$ botões estarão acesos ao final do processo.

29 *Cortando bandeirinhas de São João*

Certa festa possui bandeirinhas de São João nos formatos A e B. Elas podem ser formadas dobrando-se uma folha 30cm × 20cm ao meio e cortando-se ao longo de um segmento que une dois pontos em lados opostos, um deles distando 10cm do lado superior e o outro distando 10cm do lado inferior, conforme a figura abaixo.

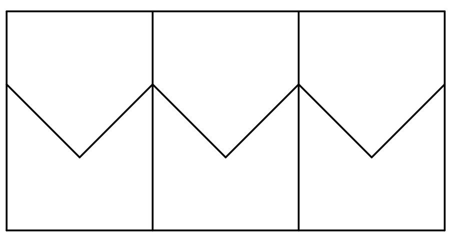


a) Qual o número máximo de bandeirinhas que podemos cortar de uma folha 30cm × 60cm? Em seguida, mostre como obter tal número.

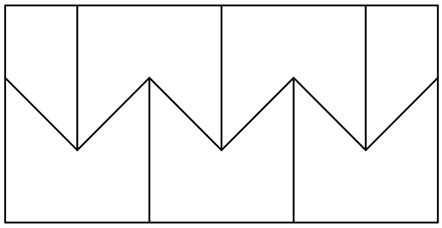
b) Qual o número máximo de bandeirinhas do tipo B que podemos cortar de uma folha 30cm × 60cm? Em seguida, mostre como obter tal número.

29 *Cortando bandeirinhas de São João – Solução*

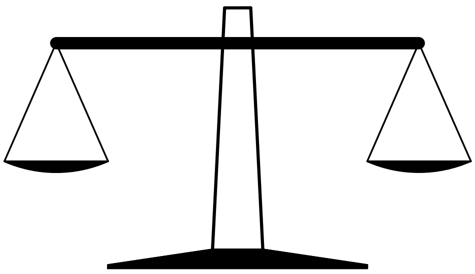
a) Note que as bandeirinhas do tipo A e B possuem a mesma área, pois quando dobradas ao meio, formam a mesma figura e a única diferença é o lugar da dobra. Assim, essa área é metade da área da folha 30 × 20, ou seja, $\dfrac{30 \cdot 20}{2} = 300\text{cm}^2$. Como a folha $30cm \times 60cm$ tem área 1800cm^2, é possível cortarmos no máximo $\dfrac{1800}{300} = 6$ bandeirinhas. A figura a seguir mostra um jeito de cortar 6 bandeirinhas.



b) Se cortarmos apenas bandeirinhas do tipo B, não é possível cortar 6 bandeirinhas. Veja que não é possível colocar duas bandeirinhas tipo B na horizontal, já que $2 \cdot 20 = 40 > 30$. Então, não é possível os dois cantos de um lado de 30 da folha 30×60 pertencerem a duas bandeirinhas do tipo B. Assim, no máximo poderemos cortar 5 bandeirinhas do tipo B e a figura a seguir mostra como isso pode ser feito.



30 *Pesando moedas*



a) João possui três moedas e uma balança de dois pratos. Ele sabe que exatamente uma das moedas é mais leve que as demais, sendo que as outras duas possuem o mesmo peso. Como ele pode descobrir qual é a moeda mais leve com uma única pesagem?

b) João agora possui nove moedas e ele sabe novamente que exatamente uma delas é mais leve que as demais. Como ele pode descobrir a moeda mais leve com exatamente duas pesagens, se as demais possuem o mesmo peso?

c) João juntou mais duas moedas normais à sua coleção e passou a ter 11 moedas. Depois de juntá-las, ele não conseguiu lembrar quais eram as moedas novas. Como ele poderá agora descobrir a mais leve com três pesagens?

30 *Pesando Moedas – Solução*

a) Ele deve escolher duas moedas quaisquer e colocar na balança. Se a balança ficar equilibrada, a moeda não escolhida é a leve. Se a balança não ficar equilibrada, então o prato mais alto indicará a moeda mais leve.

b) Basta ele dividir as 9 moedas em três grupos de três e pesar dois quaisquer desses grupos. Se a balança ficar equilibrada, ele saberá que a moeda mais leve está no grupo não escolhido. Se ela não ficar equilibrada, a moeda mais leve estará no prato mais alto. Em qualquer caso, ele pode restringir a busca para um grupo de três moedas. Pelo item anterior, com apenas mais uma pesagem ele descobrirá a moeda mais leve.

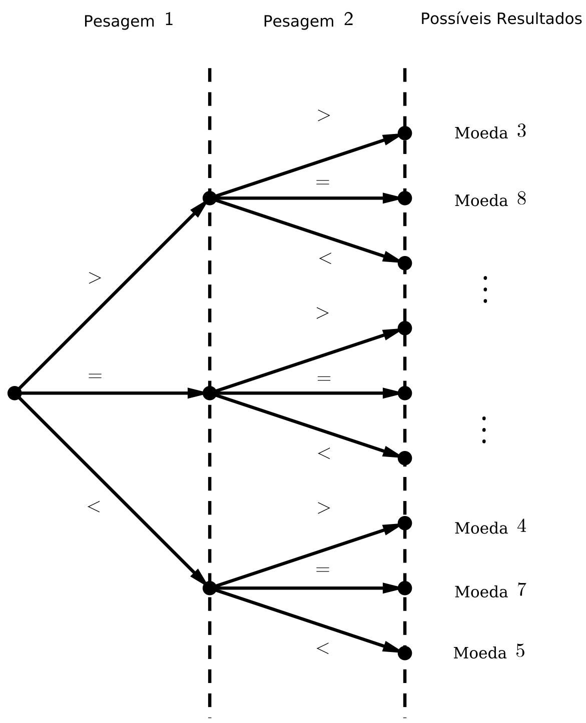
c) Uma maneira seria ele dividir as moedas em três grupos contendo as quantidades: 5, 5 e 1. Após realizar uma pesagem entre os primeiros dois grupos, caso a balança fique equilibrada, ele saberá que a moeda mais leve é a do último grupo. Caso contrário, ele deve agora dividir o grupo de 5 moedas do prato mais alto em três com as seguintes quantidades: 2, 2 e 1. Efetuando-se uma pesagem com os dois primeiros grupos, caso o prato fique equilibrado, ele saberá que a mais leve é a moeda do último grupo. Caso contrário, basta ele efetuar a última pesagem entre as moedas do prato mais alto.

   Existem ainda outras maneiras. Por exemplo, divida as moedas em quatro grupos com as quantidades: 3, 3, 3 e 2. Uma pesagem no último grupo, fornece de imediato a moeda mais leve caso a balança fique desequilibrada ou indica que as duas são normais possibilitando o descarte de tal grupo da busca. Assim, bastaria encontrar a moeda mais leve nos outros três grupos com duas pesagens repetindo o procedimento descrito no item *b*).

Observação: Uma pergunta que pode ser usada para instigar os alunos é questioná-los se com duas pesagens seria ainda possível resolver o item *c*).

Vejamos que não é possível com menos do que 3 pesagens. Cada pesagem pode ser codificada como uma dentre três informações: $>$, $<$ ou $=$. Uma vez realizada a primeira pesagem, a partir de um dos três possíveis resultados, a segunda pesagem produzirá outras três possibilidades.

As descobertas de moedas mais leves assim obtidas podem ser organizadas em um diagrama como ilustrado abaixo. As setas indicam as possibilidades de resultados após as pesagens e no final cada sequência deles deve indicar a moeda mais leve.



Como existem no máximo $3 \cdot 3 = 9$ pares de resultados envolvendo os símbolos $<$, $>$ e $=$, conseguiríamos identificar no máximo 9 moedas como resultados das pesagens. Daí, não é possível menos do que 3 pesagens indicarem a moeda mais leve dentre as 11.

31 *Frações irredutíveis*

Uma fração irredutível é uma fração onde o numerador e o denominador não possuem fatores primos em comum. Por exemplo, $\dfrac{11}{7}$ é irredutível enquanto que $\dfrac{12}{14}$ não é, pois ainda podemos reduzi-la efetuando o cancelamento do número 2:

$$\frac{12}{14} = \frac{\cancel{2} \cdot 6}{\cancel{2} \cdot 7} = \frac{6}{7}.$$

Assim, $\dfrac{12}{14}$ é igual à fração irredutível $\dfrac{6}{7}$.

a) Determine uma fração irredutível igual a $\dfrac{111111}{14}$.

b) Determine uma fração irredutível igual a $\dfrac{111111111}{18}$.

c) Determine uma fração irredutível igual a $\dfrac{111\ldots111}{15}$ onde o dígito 1 se repete 2013 vezes no numerador.

d) Determine a soma do numerador e do denominador da fração irredutível que é igual à:

$$\frac{111\ldots111}{2020\ldots0202};$$

na fração anterior o numerador representa um número com 2014 algarismos iguais a 1 e no denominador existem 1007 algarismos 2 alternados por algarismos 0.

31 *Frações irredutíveis – Solução*

a)

$$\frac{111111}{14} = \frac{\cancel{7}\cdot 15873}{\cancel{7}\cdot 2} = \frac{15873}{2}$$

Como 15873 não possui fator 2, a fração é irredutível.

b)

$$\frac{111111111}{18} = \frac{\cancel{9}\cdot 12345679}{\cancel{9}\cdot 2} = \frac{12345679}{2}.$$

Como 12345679 não possui fator 2, a fração é irredutível.

c) Como $111 = 3\cdot 37$, dividindo o numerador em grupos de três dígitos consecutivos, temos:

$$\underbrace{111\ldots111}_{2013\text{ vezes}} = 3\cdot\underbrace{37037\ldots037}_{671\text{ vezes}}$$

Portanto,

$$\frac{111\ldots111}{15} = \frac{\cancel{3}\cdot 37037\ldots037}{\cancel{3}\cdot 5} = \frac{37037\ldots037}{5}.$$

Como o numerador da fração anterior não é divisível por 5, ela é irredutível.

d) Note que $11\cdot 1010\ldots0101 = 111\ldots111$ e $2\cdot 1010\ldots0101 = 2020\ldots0202$. Portanto,

$$\frac{111\ldots111}{2020\ldots0202} = \frac{11\cdot\cancel{1010\ldots0101}}{2\cdot\cancel{1010\ldots0101}} = \frac{11}{2}.$$

Como $11/2$ é irredutível, a soma desejada é $11+2=13$.

32 *Grupos de quatro números com mesma soma*

a) Mostre uma maneira de separar todos os números de 1 a 16 em quatro conjuntos com quatro números cada, de modo que cada conjunto tenha a mesma soma.

b) Mostre que existem pelo menos 1024 maneiras de escrever os números de 1 até 16 em cada uma das casinhas de um tabuleiro 4×4 de modo que a soma dos números de cada linha seja igual.

32 *Grupos de quatro números com mesma soma – Solução*

a) Primeiramente formemos oito pares de números escolhendo números opostos ao "meio" da sequência, ou seja, $(1,16)$, $(2,15)$, ..., $(7,10)$ e $(8,9)$. Veja que cada par possui soma 17. Agora junte os pares em quatro grupos, cada um com soma 34, por exemplo: $(1,16,2,15)$, $(3,14,4,13)$, $(5,12,6,11)$ e $(7,10,8,9)$.

b) Veja que os números obtidos no item anterior fornecem um exemplo de como colocar os números em cada linha. Vamos mostrar que temos pelo menos 1024 variações distintas desse exemplo. Em cada linha podemos "rodar" os números quatro vezes para a esquerda obtendo as sequências: $(1,16,2,15)$, $(16,2,15,1)$, $(2,15,1,16)$ e $(15,1,16,2)$. Além disso, podemos "rodar" as linhas quatro vezes de cima para baixo. Então, apenas rodando o "exemplo" contruído temos pelo menos 4 variações dentro de cada linha e mais outras 4 para rotações entre as linhas. Assim, no total teremos

$$\underbrace{(4 \times 4 \times 4 \times 4)}_{variações\ dentro\ das\ linhas} \times \underbrace{4}_{rotações\ entre\ as\ linhas} = 1024$$

maneiras de realizar esta tarefa. A figura abaixo mostra alguns exemplos de tabuleiros que podem ser obtidos pelas operações de rotações descritas:

1	16	2	15
3	14	4	13
5	12	6	11
7	10	8	9

16	2	15	1
3	14	4	13
12	6	11	5
10	8	9	7

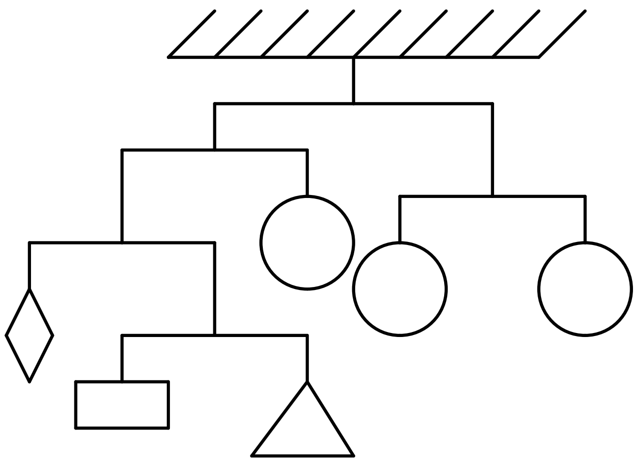
10	8	9	7
16	2	15	1
3	14	4	13
12	6	11	5

SOLUÇÕES DO NÍVEL 2

$\boxed{1}$ *Conjunto de pesos suspensos*

A figura representa um conjunto de pesos suspensos em equilíbrio. Se o círculo pesa $40g$, quanto pesa o retângulo?

Observação: Você deve desconsiderar o peso das barras horizontais e dos fios.

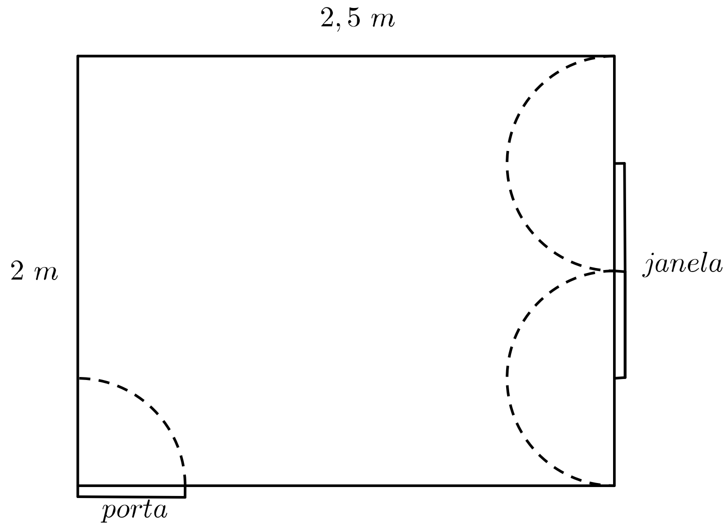


$\boxed{1}$ *Conjunto de pesos suspensos – Solução*

Seja x o peso do retângulo. Como o retângulo e o triângulo estão em equilíbrio, o peso do triângulo também é x. Analisando o equilíbrio do conjunto que envolve o losango, o retângulo e o triângulo, podemos concluir que o peso do losango é $x + x = 2x$. Como o peso do círculo deve ser igual ao peso do conjunto formado pelo losango, o retângulo e o triângulo, podemos concluir que o seu peso vale $x+x+2x = 4x$. Finalmente, dado que $4x = 40g$, temos $x = 10g$.

$\boxed{2}$ *Espaço útil do quarto*

Pedro acabou de se mudar para sua nova casa e ganhou um novo quarto. A figura a seguir mostra uma vista superior simplificada de seu novo quarto que possui 2m de largura por 2,5m de comprimento.



A porta indicada na figura tem 50cm de comprimento e pode ser aberta até encontrar a parede lateral. A janela é dividida em duas portas de mesmo comprimento que quando abertas encostam nas paredes vizinhas. Os arcos da figura mostram as aberturas da porta e da janela. A mãe de Pedro disse que ele deve colocar seus móveis no quarto de modo que não fiquem nos caminhos de abertura da porta nem da janela. Quantos metros quadrados Pedro tem em seu quarto para colocar os seus móveis?

$\boxed{2}$ *Espaço útil do quarto – Solução*

Seja L o comprimento de cada porta da janela. Considerando que, quando as duas portas se abrem elas encostam nas paredes dos lados, temos então: $4 \cdot L = 2$, ou seja, $L = 0,5m$.

Chamemos de A a área que Pedro tem para colocar seus móveis. Para determiná-la, basta considerar a área total e subtrair as áreas de abertura da porta e da janela. Sabendo que a porta abre $\frac{1}{4}$ de circunferência e que as janelas abrem, cada uma, meia circunferência, temos:

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot 2,5 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (0,5)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (0,5)^2 \\ &= 5 - \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{80 - 5\pi}{16}. \end{aligned}$$

Então, Pedro possui $\frac{80 - 5\pi}{16}$ metros quadrados para colocar seus móveis.

3 *Formando frações com dominós*

Um jogo comum de dominó é composto por 28 peças. Cada peça é formada por dois números inteiros que variam de 0 a 6, inclusive. Todas as possibilidades de combinações possíveis (a, b), com $a \leq b$, são listadas exatamente uma vez. Note que a peça $(4, 2)$ é listada como a peça $(2, 4)$, pois $2 \leq 4$. Excluindo a peça $(0, 0)$, para cada uma das outras 27 peças (a, b), com $a \leq b$, escrevemos num quadro a fração $\frac{a}{b}$.

a) Quantos valores distintos estão escritos nas formas de frações no quadro? (Veja que as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ têm o mesmo valor e devem ser contadas apenas uma vez.)

b) Qual a soma dos valores distintos encontrados no item anterior?

3 *Formando frações com dominós – Solução*

a) Basta começar contando pelos maiores denominadores e não repetir quando aparecerem os menores.

i) Para $b = 6$, temos
$$\left(\frac{0}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6}\right) = \left(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\right).$$

ii) Para $b = 5$, não devemos repetir $0 = 0/5$ e nem $1 = 5/5$, pois já foram contados, temos
$$\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

iii) Para $b = 4$, só podemos adicionar frações irredutíveis de denominador 4, pois já contamos as de denominador 1 e 2 quando $b = 6$, temos então
$$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

iv) Quando b for 1, 2 ou 3, teremos frações que já foram contadas no caso $b = 6$. Verifique!

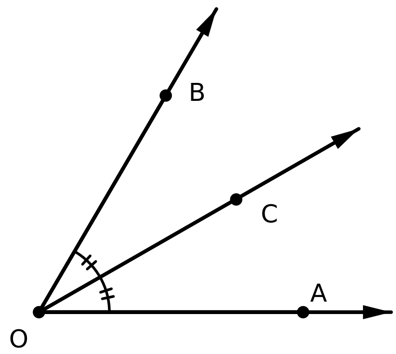
Logo, o número de valores distintos é $7 + 4 + 2 = 13$.

b) Um bom jeito de somarmos as 13 frações é considerarmos suas formas redutíveis vistas no item anterior, ou seja,
$$\begin{aligned}
\frac{0}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} &= \frac{21}{6} \\
&= \frac{7}{2}; \\
\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} &= \frac{10}{5} \\
&= 2; \\
\frac{1}{4} + \frac{3}{4} &= 1.
\end{aligned}$$

Então a soma total é $\frac{7}{2} + 2 + 1 = \frac{13}{2}$.

4 *Bissetrizes*

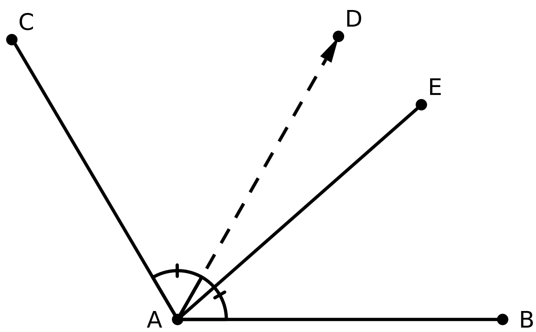
A bissetriz de um ângulo é uma semirreta com origem no vértice de um ângulo que o divide em dois outros ângulos congruentes. Por exemplo, no desenho abaixo, a semirreta OC é bissetriz do ângulo $\angle AOB$.



a) A diferença entre dois ângulos consecutivos mas não adjacentes é 100°. Determine o ângulo formado por suas bissetrizes.

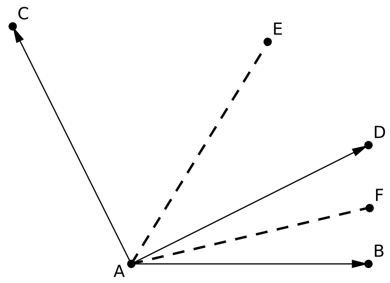
   Observação: Lembre-se que dois ângulos são *consecutivos* se possuírem o mesmo vértice e pelo menos um lado em comum e que dois ângulos são *adjacentes* se não possuírem pontos interiores em comum.

b) No desenho abaixo, DA é bissetriz do ângulo $\angle CAB$. Determine o valor do ângulo $\angle DAE$ sabendo que $\angle CAB + \angle EAB = 120°$ e $\angle CAB - \angle EAB = 80°$.



4 *Bissetrizes – Solução*

a) Sejam $\angle BAD = 2x$ e $\angle BAC = 2y$ os ângulos adjacentes.



O ângulo entre as bissetrizes é

$$\begin{aligned}
\angle EAF &= \angle EAB - \angle FAB \\
&= x - y \\
&= \frac{2x}{2} - \frac{2y}{2} \\
&= \frac{\angle CAB}{2} - \frac{\angle DAB}{2} \\
&= \frac{100^\circ}{2} \\
&= 50^\circ.
\end{aligned}$$

b) Sejam $x = \angle CAD = \angle DAB$ e $y = \angle EAB$. Então $2x + y = 120^\circ$ e $2x - y = 80^\circ$. Somando as duas equações, obtemos $4x = 200^\circ$, ou seja, $x = 50^\circ$. Substituindo esse valor em $2x + y = 120^\circ$, temos $y = 120^\circ - 2x = 120^\circ - 100^\circ = 20^\circ$. Portanto,

$$\angle DAE = x - y = 50^\circ - 20^\circ = 30^\circ.$$

5 *Abandono do grupo*

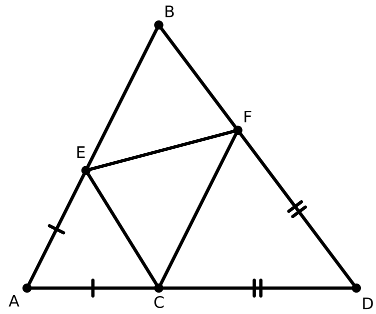
Em um grupo de 200 pessoas, apenas 1% é mulher. Determine o número de homens que devem abandonar o grupo para que 98% das pessoas restantes sejam do sexo masculino.

5 *Abandono do grupo – Solução*

O número de mulheres é $200 \cdot \frac{1}{100} = 2$. Para que tal número represente $2\% = 100\% - 98\%$ da nova quantidade total de pessoas x, devemos ter $2 = x \cdot \frac{2}{100}$, ou seja, $x = 100$. Assim, devem sair $198 - 98 = 100$ pessoas do sexo masculino do grupo.

6 *Ângulos no triângulo*

No desenho abaixo, os pontos E e F pertencem aos lados AB e BD do triângulo $\triangle ABD$ de modo que $AE = AC$ e $CD = FD$. Se $\angle ABD = 60°$, determine a medida do ângulo $\angle ECF$.



6 *Ângulos no triângulo – Solução*

Sejam $2\alpha = \angle EAC$ e $2\beta = \angle FDC$. Como os triângulos $\triangle EAC$ e $\triangle FDC$ são isósceles, segue que $\angle ACE = \angle AEC = 90° - \alpha$ e $\angle DCF = \angle CFD = 90° - \beta$. Consequentemente, $\angle ECF = \alpha + \beta$. Analisando agora a soma dos ângulos do triângulo $\triangle ABD$, temos $60° + 2\alpha + 2\beta = 180°$, ou seja, $60° = \alpha + \beta$. Como já sabemos que $\angle ECF = \alpha + \beta$, então $\angle ECF = 60°$.

7 *Soluções do sistema*

Encontre todas as soluções, no conjunto dos números reais positivos, do sistema de equações:

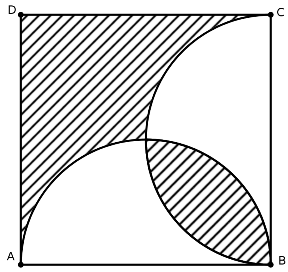
$$\begin{cases} x(x+y+z) &= 26 \\ y(x+y+z) &= 27 \\ z(x+y+z) &= 28. \end{cases}$$

7 *Soluções do sistema – Solução*

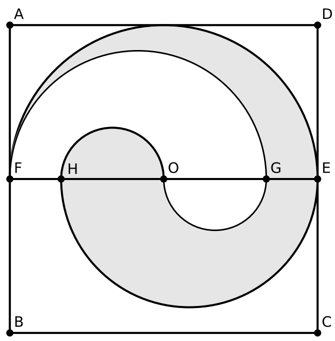
Somando as três equações, obtemos $(x+y+z)^2 = 81$, ou seja, $x+y+z = 9$, pois queremos soluções positivas. Substituindo tal valor em cada equação, temos: $x = 26/9$, $y = 27/9 = 3$ e $z = 28/9$. Assim, a única solução do sistema é $(x, y, z) = (27/9, 3, 28/9)$.

$\boxed{8}$ *Áreas entre círculos*

a) No desenho abaixo, $ABCD$ é um quadrado de lado 4cm e as regiões hachuradas foram delimitadas por dois semicírculos de diâmetros AB e BC. Calcule a área da região hachurada.

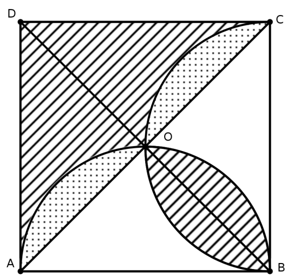


b) Dado o quadrado $ABCD$ de lado 2. Sejam O o centro do quadrado e E e F os pontos médios dos lados CD e AB. Se os segmentos FH e GE têm mesma medida e os arcos FE, EH, HO, OG, FG são semicircunferências, encontre a área sombreada.

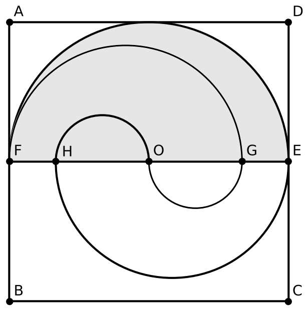


$\boxed{8}$ *Áreas entre círculos – Solução*

a) Traçando as diagonais AC e BD delimitamos quatro setores circulares com mesma área. A soma das áreas pontilhadas corresponde à área tracejada contida no interior do triângulo $\triangle ABC$. Assim, a área tracejada inicial vale metade da área do quadrado $ABCD$, ou seja, $4 \cdot 4/2 = 8\text{cm}^2$.



b) Como $FH = GE$, temos $HO = FO - FH = OE - GE = OG$. Consequentemente o semicírculo de diâmetro HO possui a mesma área do semicírculo de diâmetro OG. Além disso, a área entre os arcos FG e HO é igual à área entre os arcos GO e EH. Daí, a área procurada corresponde a área de um semicírculo de diâmetro FE. Como o raio do semicírculo de diâmetro FE mede 1, a área sombreada mede $\dfrac{\pi \cdot 1^2}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.



$\boxed{9}$ *Distribuindo os pontos entre os itens*

O professor Carlão decidiu fazer uma questão de matemática que vale no total 10 pontos e possui três itens: a, b e c. Após elaborar os itens, ele ficou na dúvida sobre qual a melhor maneira de distribuir os 10 pontos entre os itens de modo que cada um valha um número inteiro positivo de pontos.

a) Joana, uma professora amiga de Carlão, sugeriu que o item c deveria valer o mesmo tanto de pontos que a soma dos itens a e b pois, segundo ela, o item c é mais difícil. Se Carlão seguir a sugestão de Joana, de quantos modos diferentes ele pode distribuir os pontos?

b) Desconsiderando a sugestão de Joana, ou seja, considerando que Carlão vai distribuir os pontos de uma maneira qualquer, de quantos modos diferentes ele pode distribuir os 10 pontos da questão entre os três itens?

$\boxed{9}$ *Distribuindo os pontos entre os itens – Solução*

a) Se Carlão seguir a sugestão de Joana o item c valerá 5 pontos e os itens a e b devem somar outros 5 pontos. Teremos então quatro divisões possíveis de itens (a, b, c): $(1,4,5)$, $(2,3,5)$, $(3,2,5)$ e $(4,1,5)$.

b) Uma vez definidas as pontuações dos itens a e b, o item c valerá $10-a-b$ pontos e, portanto, bastará contarmos o número de maneiras de escolhermos a e b. Se os itens a e b valem juntos n pontos, então teremos $n-1$ possibilidades de pares de inteiros positivos (a,b):

$$(1,n-1),(2,n-2),(3,n-3),\ldots,(n-1,1).$$

Como a soma $a+b$ deve valer no máximo 9, quando c é mínimo e vale 1, e no mínimo $1+1=2$ pontos, quando a e b são mínimos, o total de maneiras de distribuirmos esses pontos é

$$\begin{aligned}(9-1)+(8-1)+(7-1)+(6-1)+(5-1)+(4-1)+(3-1)+(2-1) &=\\ 8+7+6+5+4+3+2+1 &=\\ 36.\end{aligned}$$

Assim, Carlão pode distribuir os 10 pontos de 36 modos diferentes.

$\boxed{10}$ *Eliminando radicais*

Encontre dois inteiros positivos x e y tais que:

$$\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}.$$

$\boxed{10}$ *Eliminando radicais – Solução*

$$\begin{aligned}\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} &= \frac{-2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}\\ &= \frac{-2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}\cdot\frac{2\sqrt{2}+2+2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+2+2\sqrt{3}}\\ &= \frac{-\sqrt{2}+(1+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+1)-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}+(1+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+1)+\sqrt{3}}\\ &= \frac{(1+\sqrt{3})^2-2}{(\sqrt{2}+1)^2-3}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}.\end{aligned}$$

Portanto, $x=2$ e $y=6$ satisfazem ao enunciado.

Observação: É possível mostrar que essas são as únicas soluções inteiras. De fato, foi mostrado que $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$. Assim,

$$\begin{aligned}(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 &= (\sqrt{2}+\sqrt{6})^2\\ x+y+2\sqrt{xy} &= 8+4\sqrt{3}\\ 2\sqrt{xy}-4\sqrt{3} &= 8-x-y.\end{aligned}$$

Se $2\sqrt{xy}-4\sqrt{3}\neq 0$, segue que:

$$\begin{aligned}2\sqrt{xy}+4\sqrt{3} &= \frac{(2\sqrt{xy})^2-(4\sqrt{3})^2}{2\sqrt{xy}-4\sqrt{3}}\\ &= \frac{4xy-48}{8-x-y}.\end{aligned}$$

Consequentemente, subtraindo esse resultado da última igualdade encontrada, temos

$$\begin{aligned}\left(\frac{4xy-48}{8-x-y}\right)-(8-x-y) &= (2\sqrt{xy}+4\sqrt{3})-(2\sqrt{xy}-4\sqrt{3})\\ &= 8\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Isso é um absurdo, pois $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$ e $\left(\frac{4xy-48}{8-x-y}\right)-(8-x-y)\in\mathbb{Q}$. Portanto, $2\sqrt{xy}-4\sqrt{3}=0$ e $\sqrt{xy}=\sqrt{12}$. Basta agora resolver o sistema:

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{2}+\sqrt{6}\\ \sqrt{xy} = \sqrt{12}.\end{cases}$$

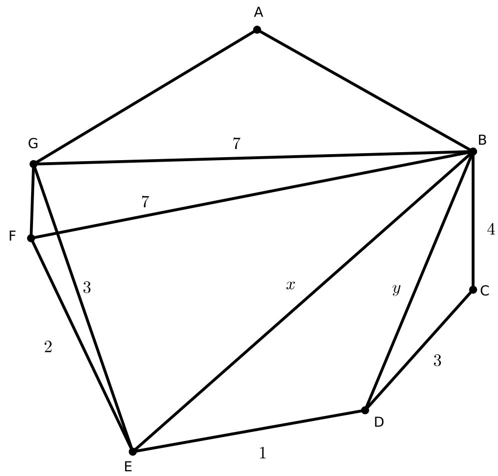
Elevando a primeira equação ao quadrado e usando que $\sqrt{xy}=\sqrt{12}$, obtemos que $x+y=8$ e $12=xy=x(8-x)=8x-x^2$. As raízes de $12=8x-x^2$ são $x=2$ e $x=6$. Logo, $(x,y)=(2,6)$ ou $(6,2)$.

$\boxed{11}$ *Desigualdade triangular*

João acaba de aprender a desigualdade triangular que diz que, em qualquer triângulo, um lado é sempre menor que a soma dos outros dois e também é maior que a diferença entre eles.

a) O lado AC do triângulo ABC tem comprimento $3{,}8$cm e o lado AB tem comprimento $0{,}6$cm. Se o comprimento do lado BC é um inteiro, qual é o seu valor?

b) Determine os valores de x e y na figura abaixo, sabendo que eles são números inteiros.



11 *Desigualdade triangular – Solução*

a) O comprimento do lado BC deve ser menor que $3,8+0,6 = 4,4$cm e maior que $3,8-0,6 = 3,2$cm. O lado BC corresponde ao único inteiro entre tais números, ou seja, $BC = 4$cm.

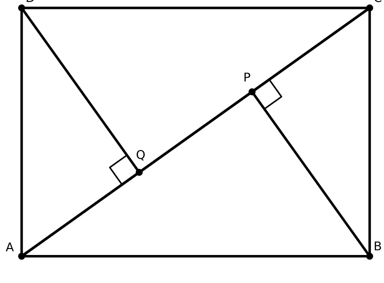
b) Pela desigualdade triangular aplicada aos triângulos $\triangle BDC$ e $\triangle BED$, temos:

$$\begin{array}{rcl} y & < & 3+4 \\ x & < & 1+y. \end{array}$$

Consequentemente, $x < 1+3+4 = 8$. Analisando o triângulo FBE, temos $x > 7-2 = 5$. Portanto, como x é um número inteiro, $x = 6$ ou $x = 7$. Analisando os triângulos $\triangle BED$ e $\triangle BCD$, teríamos $y > x-1$ e $y < 3+4 = 7$. Se $x = 7$, teríamos $6 < y < 7$, um absurdo. Portanto, $x = 6$ e como $5 = 6-1 < y < 7$, devemos ter $y = 6$.

12 *Área do retângulo*

No desenho abaixo, $ABCD$ é um retângulo e os pontos P e Q pertencem à diagonal AC de modo que $AQ = PQ = PC = 1$ e $\angle AQD = \angle BPC = 90°$. Encontre a área do retângulo $ABCD$.



12 *Área do retângulo – Solução*

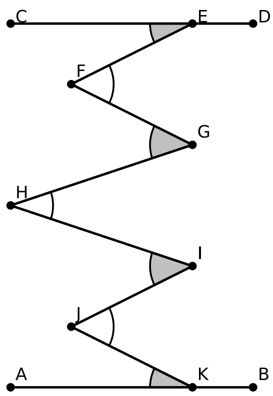
Pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos $DQ^2 = AQ \cdot QC = 2$. Pelo Teorema de Pitágoras nos triângulos $\triangle DAQ$ e $\triangle DQC$, temos:

$$\begin{aligned} AD^2 &= DQ^2 + AQ^2 \\ &= 2+1 \\ &= 3; \\ DC^2 &= DQ^2 + QC^2 \\ &= 2+4 \\ &= 6. \end{aligned}$$

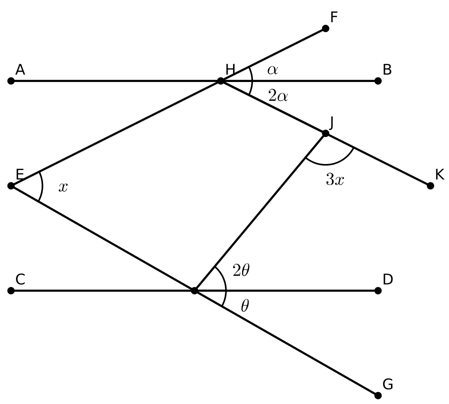
A área do retângulo $ABCD$ é $AD \cdot DC = \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{2}$.

13 *Ângulos em bicos*

a) No desenho abaixo, onde AB é paralelo a CD, mostre que a soma dos ângulos brancos é igual à soma das medidas dos ângulos cinzas. Tal resultado vale para qualquer quantidade de "bicos" no desenho e o chamamos popularmente como Teorema dos Bicos.

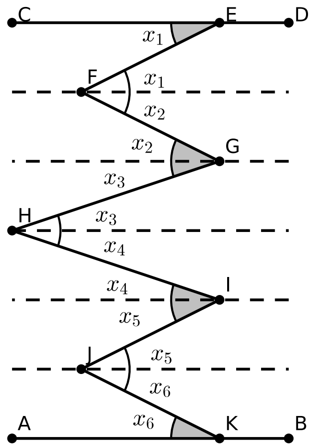


b) Sabendo que AB é paralelo a CD, determine a medida do ângulo x.



13 *Ângulos em bicos – Solução*

a) Por cada um dos vértices dos "bicos", trace uma paralela ao segmento AB. Perceba que vários pares de ângulos alternos internos serão formados como indica a figura abaixo.



Cada um dos ângulos marcados possui exatamente um representante entre os ângulos brancos e cinzas. Assim, cada uma dessas somas das medidas de ângulos vale $x_1 + x_2 + \ldots + x_6$.

b) Pelo Teorema dos Bicos, aplicado à linha poligonal que passa por E, temos $x = \alpha + \theta$. Aplicando-o novamente, agora à linha poligonal que passa por J, temos $180^\circ - 3x = 2\alpha + 2\theta$. Assim, $180^\circ - 3x = 2x$, ou seja, $x = 36^\circ$.

14 *Transportando líquidos em tambores*

Considere dois tambores de capacidade suficientemente grande, um deles vazio e o outro cheio de líquido.

a) Determine se é possível colocar exatamente um litro do líquido do tambor cheio, no vazio, usando dois baldes, um com capacidade de 5 litros e o outro com capacidade de 7 litros.

b) Determine se é possível colocar exatamente um litro do líquido de um dos tambores no outro usando dois baldes, um com capacidade de $2 - \sqrt{2}$ litros e o outro com capacidade de $\sqrt{2}$ litros.

14 *Transportando líquidos em tambores – Solução*

a) Basta encher o tambor vazio com 15 litros (3×5 litros) usando três vezes o balde de 5 litros e, em seguida, retirar 14 litros (2×7 litros) usando o balde de 7 litros duas vezes. Dessa forma, transportamos $3 \times 5 - 2 \times 7 = 1$ litro.

b) A quantidade a que podemos transportar do tambor cheio para o vazio é da forma $k(2-\sqrt{2})+l(\sqrt{2})$ litros, onde k e l são inteiros que indicam quantas vezes tiramos ou colocamos líquidos usando cada um dos baldes. Se $l-k \neq 0$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} a &= k(2-\sqrt{2})+l\sqrt{2} \\ a-2k &= \sqrt{2}(l-k) \\ \frac{a-2k}{l-k} &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

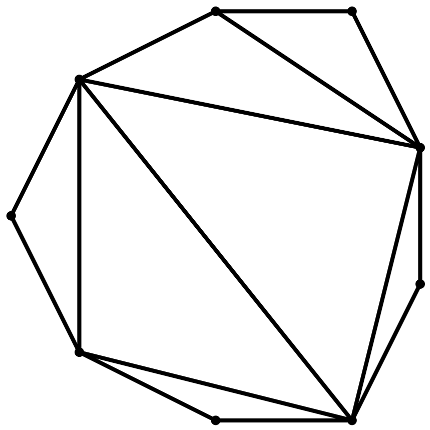
Assim, o número $\sqrt{2}$ seria o quociente de dois inteiros o que resultaria em um número racional. Sabemos que isso não pode acontecer porque $\sqrt{2}$ é irracional. Falta analisarmos o que acontece quando $l=k$. A equação se transforma em:

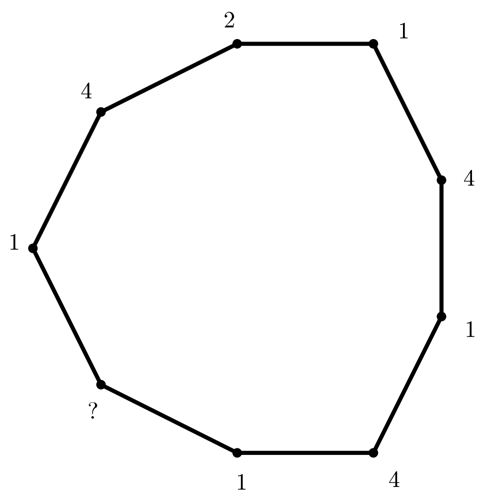
$$\begin{aligned} a &= k(2-\sqrt{2})+l\sqrt{2} \\ &= k(2-\sqrt{2})+k\sqrt{2} \\ &= 2k. \end{aligned}$$

Veja que $2k$ é par e assim não podemos levar um valor ímpar como $a=1$. Em qualquer caso, não é possível colocar exatamente 1 litro usando os baldes com as capacidades dadas neste item.

15 *As diagonais de Carlitos*

Carlitos desenhou em uma folha de papel um polígono convexo de n lados, conforme a figura abaixo, e traçou algumas de suas diagonais (que não se cortavam), dividindo a região interior do polígono em triângulos. Esse tipo de divisão é conhecido como triangulação. Em cada vértice ele escreveu o número de triângulos da triangulação dos quais ele era membro.





Uma semana depois, Carlitos não se lembrava quais diagonais tinham sido traçadas e percebeu que um dos números estava apagado. Sua professora de matemática explicou que ainda assim seria possível descobrir as diagonais apagadas e Carlitos começou a buscar informações que pudessem ajudá-lo nessa tarefa.

a) Verifique que o número de triângulos em que o polígono foi dividido é sempre o mesmo, não importando como ele tenha escolhido as diagonais.

b) Verifique que sempre um dos vértices terá o número 1 escrito.

c) Usando o item anterior, descubra um método que pode ser usado por Carlitos para desenhar as diagonais que foram traçadas.

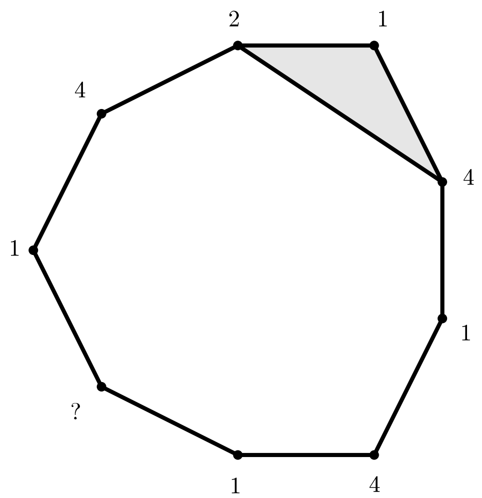
15 *As diagonais de Carlitos – Solução*

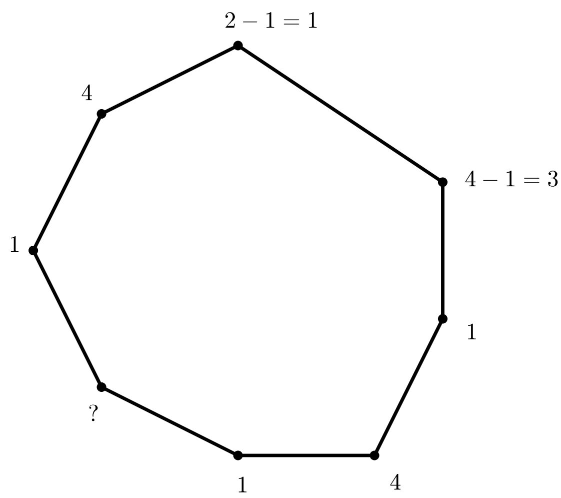
a) Seja K o número de triângulos. Os triângulos desenhados determinam uma divisão dos ângulos internos do polígono. Portanto, a soma dos ângulos internos de todos esses triângulos corresponde à soma dos ângulos internos do polígono que vale $180°(n-2)$, ou seja, $180° \cdot K = 180°(n-2)$. Assim, $K = n-2$.

b) Dada qualquer triangulação, considere a diagonal AB que determina entre seus dois vértices a menor cadeia de vértices $AC_1C_2 \ldots C_kB$ consecutivos do polígono. Se $k > 1$, então alguma outra diagonal deve ser traçada entre os vértices do conjunto $\{A, C_1, C_2, \ldots, C_k, B\}$, pois o polígono $AC_1C_2 \ldots C_kB$ também deve estar dividido em triângulos. Isso geraria um absurdo, pois tal diagonal produziria uma cadeia menor de vértices. Portanto, $k = 1$ e AB faz o vértice C_1 ter o número 1.

Observação: É possível mostrar que existem pelo menos dois vértices com o número 1 escrito.

c) O primeiro passo é procurar algum vértice com o número 1. A partir dele, podemos concluir que certamente existe uma diagonal entre seus dois vizinhos.

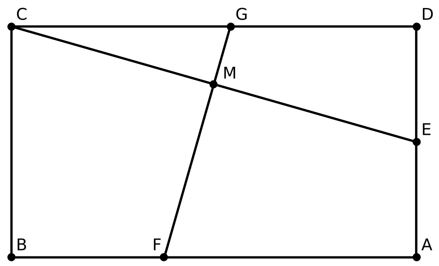




Após traçarmos tal diagonal, devemos desconsiderar o triângulo formado e repetir o processo no novo polígono com os números de seus vértices atualizados. Se em qualquer momento o número 1 não estiver escrito é porque ele deve ser o número desconhecido. Como existe um número finito de diagonais, após um número finito de repetições desse processo, todas elas serão traçadas.

$\boxed{16}$ *Razão entre segmentos*

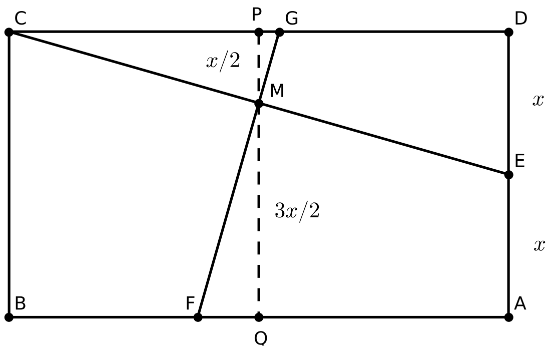
Na figura abaixo, $ABCD$ é um retângulo e E é o ponto médio de AD. O segmento FG passa pelo ponto médio M de CE. Determine a razão entre os comprimentos de GM e MF.



$\boxed{16}$ *Razão entre segmentos – Solução*

Pelo ponto M, trace o segmento de reta PQ perpendicular aos lados AB e CD do retângulo $ABCD$ como mostra a figura abaixo. Como M é o ponto médio de CE, podemos concluir que PM é base média relativa ao lado DE do triângulo ECD. Assim, se $DE = EA = x$, $PM = DE/2 = x/2$. Como E é ponto médio de DA, temos $PQ = DA = 2x$. Consequentemente, $MQ = 2x - PM = 3x/2$. Os triângulos $\triangle PMG$ e $\triangle MFQ$ são semelhantes, pois possuem os mesmos ângulos. Portanto,

$$\frac{GM}{MF} = \frac{PM}{MQ} = \frac{x/2}{3x/2} = \frac{1}{3}.$$



$\boxed{17}$ *Previsões astrológicas*

João trabalha vendendo pacotes de previsão astrológica. Para incrementar as vendas de suas previsões, ele oferece descontos caso pessoas de um mesmo signo queiram contratar seus serviços. No Horóscopo Grego, como existem exatamente 12 signos, portanto, em um grupo de 13 pessoas, sempre duas delas terão o mesmo signo e poderão se interessar pelo pacote promocional.

a) Qual o número mínimo de pessoas que um grupo deve possuir para ele ter certeza de que existirão pelo menos 3 pessoas de um mesmo signo do Horóscopo Grego?

b) No Horóscopo Chinês, também existem exatamente 12 signos. Se João quiser ter certeza de que, em determinado grupo de pessoas existirão duas possuindo exatamente os mesmos signos, tanto no Horóscopo Grego quanto no Horóscopo Chinês, qual o número mínimo de pessoas que tal grupo deve ter?

$\boxed{17}$ *Previsões astrológicas – Solução*

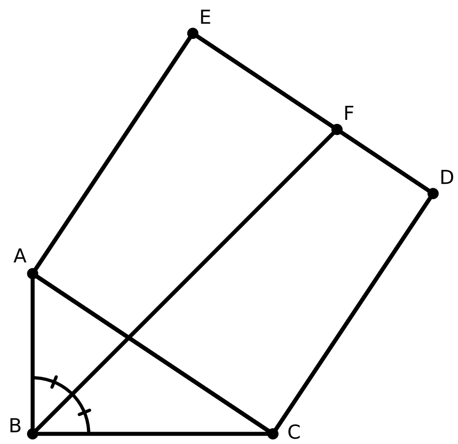
a) O mínimo é 25. Se em um grupo de 24 pessoas cada signo aparecer no máximo duas vezes, teremos no máximo $2 \cdot 12 = 24$ pessoas. Como $24 < 25$, isso mostra que pelo menos um dos signos deverá aparecer três vezes. De fato, esse é o mínimo onde tal propriedade ocorre pois se considerarmos 24 pessoas divididas em 12 pares com o mesmo signo, a propriedade do enunciado não será encontrada.

b) O número mínimo é $12 \cdot 12 + 1 = 145$. Veja que existem no máximo $12 \cdot 12 = 144$ pares de combinações possíveis entre signos Gregos e Chineses. Se escolhermos 145 pessoas e as dividirmos de acordo com esses pares, pelo menos um deles deverá ser usado duas vezes. Não é possível concluirmos isso com menos de 145, pois é possível 144 pessoas apresentarem todos os pares possíveis de combinações sem repetições.

Observação: Os argumentos usados em ambos os itens são aplicações do Princípio da Casa dos Pombos. Veja o problema 11 do nível 1 do Banco de 2014.

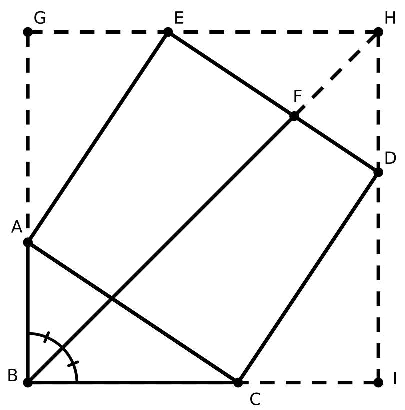
18 *Quadrado inclinado*

Na figura abaixo, $\angle ABF = \angle FBC = 45°$ e $ACDE$ é um quadrado. Se $AB = 2/3 \cdot BC$, determine a razão $\dfrac{EF}{FD}$.



18 *Quadrado inclinado – Solução*

Pelos pontos E e D, as retas paralelas aos lados BC e AB do triângulo $\triangle ABC$ determinam, juntamente com os prolongamentos desses lados, os pontos G, H e I, como indicado na figura abaixo.



Dado que $\angle ABC = 90°$, segue que $GHIB$ é um retângulo. Como $\angle BAC + \angle ACB = 90°$ e $\angle ACD = 90°$, segue que $\angle DCI = \angle BAC$. Assim, o triângulo $\triangle DCI$ possui os mesmos ângulos do triângulo $\triangle ABC$ e $AC = CD$. Pelo caso de congruência ALA, esses dois triângulos são congruentes. Da mesma forma podemos mostrar que $\triangle ABC \equiv \triangle GAE \equiv \triangle EHD$. Consequentemente $GH = GE + EH = AB + BC = HD + DI$ e, portanto, $GHIB$ é um quadrado. Isso implica que $\angle GHB = \angle BHI = 45°$. Pelo Teorema da Bissetriz Interna aplicado ao triângulo $\triangle EHD$, temos:

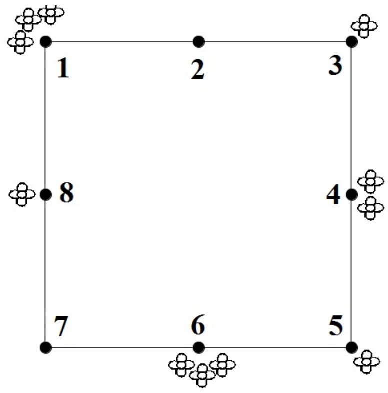
$$\begin{aligned} \frac{EF}{FD} &= \frac{EH}{HD} \\ &= \frac{BC}{AB} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$\boxed{19}$ *Arranjos de flores no quadrado*

Um decorador distribuirá flores em oito pontos ao redor de um arranjo quadrado de flores, como indicado na figura abaixo. Ele quer fazer isso de modo tal que, em cada lado do arranjo, as pessoas vejam sempre a mesma quantidade de flores. No exemplo abaixo, temos o total de 11 flores e em cada um dos 4 lados do quadrado são vistas exatamente 4 delas.

a) Qual o número **máximo** de flores que podem ser usadas, considerando que em cada lado do quadrado devem ser vistas exatamente 9 flores?

b) Qual o número **mínimo** de flores que podem ser usadas, considerando que em cada lado do quadrado devem ser vistas exatamente 12 flores?



$\boxed{19}$ *Arranjos de flores no quadrado – Solução*

a) A soma das flores vistas nos lados é $4 \cdot 9 = 36$. Como as flores nos cantos são vistas por dois lados e as flores no meio dos lados são vistas apenas uma vez, podemos escrever:

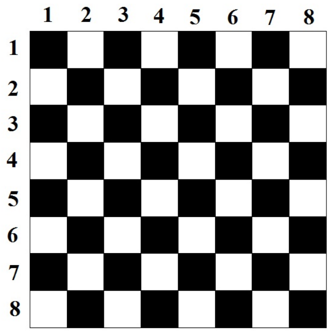
$$2C + M = 36,$$

onde C e M indicam as quantidades de flores nos cantos e no meio. Consequentemente, $C + M = 36 - C \leq 36$ e seu valor será no máximo 36, que ocorre quando $C = 0$. Assim, devemos distribuir nas posições 2, 4, 6 e 8 exatamente 9 flores. Portanto, o número máximo de flores é 36.

b) A soma das flores vistas nos lados agora é $4 \cdot 12 = 48$ e a equação do item anterior se transforma em $2C + M = 48$. Consequentemente, $2(C + M) = 48 + M \geq 48$. Para atingir tal valor, como devemos ter $M = 0$, basta distribuir 6 flores em cada um dos quatro cantos 1, 3, 5 e 7 do arranjo. Portanto, o número mínimo de flores é 24.

20 *Somando no tabuleiro de Xadrez*

Um tabuleiro de Xadrez tem suas linhas e colunas numeradas conforme a figura a seguir. Em cada casa é escrito o número que é a soma dos números da linha e da coluna dessa casa. Por exemplo, na casa que está na linha 4 e na coluna 5 é escrito o número $4+5=9$.



a) Qual a soma dos números escritos em todas as casas do tabuleiro?

b) Sejam S_{pretas} a soma de todos os números escritos nas casas pretas e $S_{brancas}$ a soma de todos os números escritos em casas brancas. Quanto vale a diferença $S_{pretas} - S_{brancas}$?

c) Quanto vale S_{pretas}?

20 *Somando no tabuleiro de Xadrez – Solução*

a) Veja que na linha 1 o número 1 é somado em cada uma das 8 casinhas, na linha 2 o número 2 também é somado oito vezes, e assim por diante. Desse modo, podemos contabilizar a contribuição das linhas por:

$$\begin{aligned} 8\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8) &= 8\cdot 36 \\ &= 288. \end{aligned}$$

O mesmo se passa com a contribuição das colunas, também totalizando 288. Concluímos que a soma de todas as casas é $2\cdot 288 = 576$.

b) Essa diferença também pode ser feita analisando-se a contribuição de cada linha e cada coluna, mas nesse caso para cada casa preta devemos somar o seu número, enquanto que para cada casa branca devemos subtraí-lo. Como cada linha e cada coluna possui exatamente quatro casas pretas e quatro brancas, o número escrito em uma linha ou coluna deve ser somado e subtraído 4 vezes, ou seja, contribui com $4-4=0$. Portanto, concluímos que $S_{pretas} - S_{brancas} = 0$.

c) Juntando as duas informações dos itens *a*) e *b*), temos

$$\begin{cases} S_{pretas} + S_{brancas} &= 576 \\ S_{pretas} - S_{brancas} &= 0. \end{cases}$$

Somando as duas linhas, temos $2S_{pretas} = 576$, ou seja, $S_{pretas} = 288$.

21 *Inteiros positivos espertinhos*

Dizemos que um número inteiro positivo n é *espertinho* se existirem números inteiros positivos a, b, c e d, não necessariamente distintos, tais que:

$$n = \frac{a^2 - b^2}{c^2 + d^2}$$

Por exemplo, 12 é espertinho, pois:

$$12 = \frac{16^2 - 4^2}{4^2 + 2^2}$$

Mostre que todos os números inteiros positivos são espertinhos.

21 *Inteiros positivos espertinhos – Solução*

Podemos reescrever a equação da seguinte forma:

$$\begin{aligned} n &= \frac{a^2 - b^2}{c^2 + d^2} \\ n(c^2 + d^2) &= (a+b)(a-b). \end{aligned}$$

Se conseguirmos inteiros positivos tais que $a + b = n$ e $a - b = c^2 + d^2$, teremos uma solução para a equação. Se é n par, basta fazermos $c = d = 1$ e resolvermos o sistema

$$\begin{cases} a+b &= n \\ a-b &= 2. \end{cases}$$

Somando e subtraindo as equações, encontramos a solução $a = \frac{n+2}{2}$ e $b = \frac{n-2}{2}$. Se $n > 2$, a e b são inteiros positivos. Para ver que $n = 2$ também é espertinho, escrevemos

$$2 = \frac{5^2 - 3^2}{2^2 + 2^2}.$$

Se n é ímpar, podemos usar o mesmo raciocínio tomando $c = 1$ e $d = 2$. Daí, teremos $c^2 + d^2 = 5$ e:

$$\begin{cases} a+b &= n \\ a-b &= 5. \end{cases}$$

Novamente, somando e subtraindo as equações, encontramos a solução $a = \frac{n+5}{2}$ e $b = \frac{n-5}{2}$. Se $n > 5$, a e b são inteiros positivos. Para ver que 1, 3 e 5 também são espertinhos, escrevemos:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{7^2 - 6^2}{3^2 + 2^2}, \\ 3 &= \frac{8^2 - 5^2}{3^2 + 2^2}, \\ 5 &= \frac{9^2 - 4^2}{3^2 + 2^2}. \end{aligned}$$

$\boxed{22}$ *Crianças dando voltas no lago*

Dez crianças decidem correr ao redor de um lago circular com 200m de perímetro. No início da corrida, as dez crianças estão paradas ocupando posições distintas e cada uma delas correrá no sentido horário ou anti-horário, a depender de sua vontade, com velocidade de $\dfrac{200}{k}$m/min, onde k é um inteiro positivo. Mostre que depois de certo tempo, existirá um instante em que todas as crianças estarão exatamente sobre as suas mesmas posições iniciais.

$\boxed{22}$ *Crianças dando voltas no lago – Solução*

Se uma criança tem velocidade $\frac{200}{k} m/min$, então ela demorará k minutos para dar uma volta completa no lago. Tendo isso em mente, se k_1, k_2, ..., k_{10} denotam os inteiros associados às velocidades das 10 crianças e M é um múltiplo comum de todos eles, após M minutos a primeira criança terá feito exatamente $\frac{M}{k_1}$ voltas e estará sobre sua posição inicial. Do mesmo modo, cada uma das outras crianças terá feito uma quantidade inteira de voltas e estará sobre sua posição inicial. Concluímos então que após M minutos todas as crianças estarão em suas posições iniciais.

$\boxed{23}$ *Somando e multiplicando os números das cinco crianças*

Cinco crianças sentam-se ao redor de uma mesa circular. Cada criança escolhe um número inteiro positivo e o relata para as outras. Em seguida, cada criança faz a seguinte conta: soma os números das duas crianças à sua esquerda, subtrai a soma dos números das outras duas crianças à sua direita e multiplica essa diferença pelo seu próprio número, chegando assim ao seu resultado final.

Prove que a soma dos resultados finais de todas as crianças é um valor fixo que não depende dos números que as crianças escolheram inicialmente e, em seguida, determine esse valor.

$\boxed{23}$ *Somando e multiplicando os números das cinco crianças – Solução*

Vamos supor que os números em sentido horário são a, b, c, d e e. Os valores obtidos como resultados finais são:

$$\begin{aligned}
a((e+d)-(b+c)) &= ae+ad-ab-ac;\\
b((a+e)-(c+d)) &= ba+be-bc-bd;\\
c((b+a)-(d+e)) &= cb+ca-cd-ce;\\
d((c+b)-(e+a)) &= dc+db-de-da;\\
e((d+c)-(a+b)) &= ed+ec-ea-eb.
\end{aligned}$$

Veja que cada produto de dois números escolhidos inicialmente aparece uma vez com o sinal + e uma vez com o sinal −, por exemplo, ae aparece positivo na primeira expressão e negativo na última. Isso acontece, pois se um número x tem y no lado esquerdo, aparecerá $+xy$ em seu resultado final associado, enquanto que y tendo x do lado direito produzirá $-xy$ também em seu resultado final associado. Sendo assim, a soma dos resultados é sempre igual a zero.

24 *Descobrindo os números curiosos*

Sejam a e b dois dígitos diferentes de zero não necessariamente diferentes. O número de dois dígitos $\overline{ab}$ é chamado de curioso, se ele for um divisor do número $\overline{ba}$, que é formado pela troca da ordem dos dígitos de $\overline{ab}$. Ache todos os números curiosos.

Observação: O traço sobre os números serve para distinguir o produto $a \cdot b$ do número de dois dígitos $\overline{ab}$.

24 *Descobrindo os números curiosos – Solução*

O número de dois dígitos $\overline{ab}$ pode ser escrito como $10a+b$, assim como $\overline{ba} = 10b+a$. Se $10a+b$ é divisor de $10b+a$, temos $10b+a = (10a+b)k$, onde k é um inteiro menor ou igual a 9 já que os dois números possuem dois dígitos. Segue que

$$\begin{aligned} 10b+a &= (10a+b)k \\ 10b+a+10a+b &= (10a+b)(k+1) \\ 11(a+b) &= (10a+b)(k+1). \end{aligned}$$

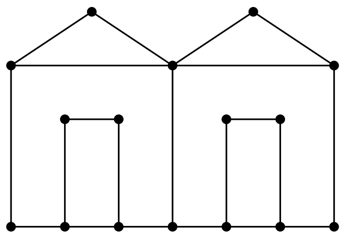
Pela última equação, o número $(10a+b)(k+1)$ deve ser múltiplo de 11. Como $k \leq 9$, temos $k+1 \leq 10$ e, consequentemente, $k+1$ não possui fator 11, implicando que $10a+b$ deve ser múltiplo de 11. Todos os números de dois dígitos múltiplos de 11 possuem dígitos iguais e isso nos permite concluir que necessariamente $a = b$. Quando $a = b$, $\overline{ab} = \overline{ba}$ e, certamente, um divide o outro. Portanto, o conjunto dos números curiosos é

$$\{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}.$$

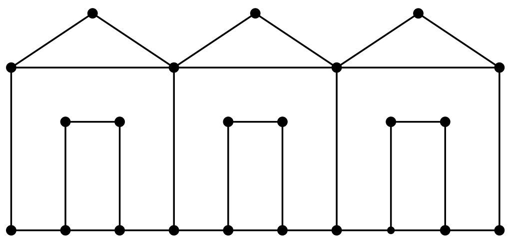
25 *Mudando de cor com fios mágicos*

Algumas lâmpadas de Natal são arranjadas usando fios mágicos. Cada lâmpada pode ser da cor verde ou amarela. Cada fio está ligado a duas lâmpadas e tem uma propriedade mágica: quando alguém toca em um fio unindo duas lâmpadas, cada uma delas troca de cor passando de verde para amarela ou de amarela para verde.

a) No arranjo a seguir, cada ponto representa uma lâmpada e os segmentos representam os fios mágicos. No começo todas elas são amarelas. Qual o menor número de fios que devemos tocar para que todas as lâmpadas se tornem verdes? Mostre um exemplo de como fazer essa mudança com esse número mínimo de fios.

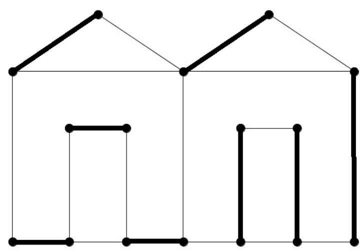


b) Considere o arranjo da figura a seguir onde todas as lâmpadas estão com a cor amarela. Mostre que não é possível tocar em alguns fios mágicos e mudar a cor de todas as lâmpadas para o verde.



25 *Mudando de cor com fios mágicos – Solução*

a) Cada fio que tocamos muda exatamente a cor de duas lâmpadas. Como existem 16 lâmpadas amarelas, devemos encostar em pelo menos 8 fios. A figura a seguir mostra um exemplo de escolhas de fios que torna isso possível:



b) Veja que a configuração dada no item *b*) possui exatamente 23 lâmpadas. Note que ao encostar em um fio mágico temos três possibilidades de mudanças de lâmpadas:

   i) Duas verdes podem virar duas amarelas.

   ii) Duas amarelas podem virar duas verdes.

   iii) Uma verde e uma amarela viram uma amarela e uma verde.

   Assim, ou o número de lâmpadas verdes diminui 2, aumenta 2 ou permanece o mesmo. Desse modo, se no início começamos com 0 verdes, sempre teremos uma quantidade par de lâmpadas verdes. Como 23 é ímpar, não é possível chegar a tornar todas as 23 lâmpadas verdes.

26 *Marcando casinhas do tabuleiro 8 por 8*

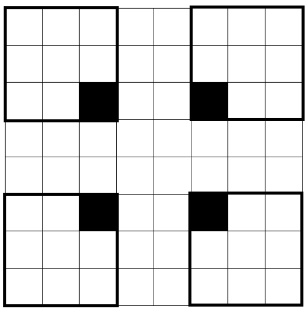
É dado um tabuleiro 8×8.

a) Qual o número mínimo de casinhas que devemos marcar nesse tabuleiro, de modo que cada um de seus subtabuleiros 3×3 possua pelo menos uma casinha marcada?

b) Qual o número mínimo de casinhas que devemos marcar nesse tabuleiro, de modo que cada um de seus subtabuleiros 3×3 possua pelo menos três casinhas marcadas?

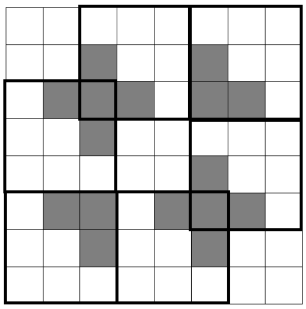
26 *Marcando casinhas do tabuleiro 8 por 8 – Solução*

a) Considere a figura a seguir.



Cada um dos quatro subtabuleiros 3×3 assinalados na figura deve ter pelo menos uma casa marcada. Além disso, com as quatro casas marcadas na figura acima, temos a propriedade desejada. Portanto, o mínimo é 4.

b) Considere a figura a seguir.



Veja que cada um dos seis pedaços 3×3 deve ter pelo menos três casas marcadas. Veja também que existem duas casas que podem ser contadas para dois pedaços. Com isso, teremos no mínimo $6 \times 3 - 2 = 16$ casas marcadas. Observe ainda que com as 16 casas marcadas na figura temos a propriedade desejada.

27 *Jogando com dominós*

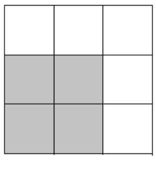
Umberto e Doisberto jogam em um tabuleiro $3 \times n$ colocando dominós sempre cobrindo duas casas adjacentes (com lado em comum) do tabuleiro. Umberto faz a primeira jogada, Doisberto faz a segunda e eles seguem jogando alternadamente. Perde o jogador que não conseguir jogar. Para cada um dos casos abaixo, diga quais dos jogadores pode bolar uma estratégia e sempre garantir a vitória independentemente de como o outro jogue.

a) $n = 3$

b) $n = 4$

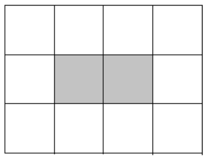
27 *Jogando com dominós – Solução*

a) Doisberto pode sempre garantir a vitória. Basta ele realizar um movimento que complete um quadrado 2×2 a partir do primeiro dominó de Umberto.



Veja na figura que sobram 5 casas. Independente da jogada de Umberto, na jogada seguinte de Doisberto, o jogo acaba com a sua vitória.

b) Umberto pode sempre garantir a vitória. Basta ele jogar o primeiro dominó nas duas casas centrais do tabuleiro.



A partir daí, a cada jogada de Doisberto, Umberto deve jogar de forma simétrica em relação ao centro do tabuleiro, ou seja, como se ele imitasse a jogada de Doisberto. Por exemplo, se Doisberto colocar uma peça na horizontal começando no canto superior esquerdo, Umberto deve colocar outra peça também na horizontal começando no canto inferior direito. Desse modo, se Doisberto fizer uma jogada, certamente Umberto também poderá fazer a sua. Depois de algumas jogadas, Doisberto não poderá jogar e perderá o jogo.

$\boxed{28}$ *Separando em conjuntos de mesmo produto*

a) Mostre que não é possível separar os números do conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ em dois conjuntos em que o produto dos números em cada um deles é o mesmo.

b) Qual o menor número de elementos que precisamos retirar do conjunto A de modo que os elementos restantes possam ser divididos em dois conjuntos cujo produto de seus elementos sejam iguais? Mostre que números devem ser retirados e como separar os dois conjuntos.

$\boxed{28}$ *Separando em conjuntos de mesmo produto – Solução*

a) Basta olharmos para o número 7. Como ele é o único número de A com fator 7, não é possível dividi-los em dois com o mesmo produto de seus elementos, pois um desses produtos seria múltiplo de 7 e o outro não.

b) Retirando apenas o número 7, mostraremos que é possível fazer tal divisão. Listemos as fatorações dos outros números em primos:

1	2	3	4	5	6	8	9	10
1	2	3	2^2	5	$2\cdot 3$	2^3	3^2	$2\cdot 5$

Existem exatamente dois números com fatores 5 e inevitalmente 5 e 10 devem estar em conjuntos separados. Como existem quatro fatores 3, distribuídos em três números, 9 deve ficar em um conjunto enquanto 3 e 6 devem ir para o outro. Finalmente, basta dividir os oito fatores 2 restantes. Um exemplo seria

$$\begin{aligned} C_1 &= \{1,10,3,6,4\} \text{ e} \\ C_2 &= \{5,9,2,8\}. \end{aligned}$$

Cada um dos conjuntos anteriores possui o produto dos elementos igual a 720.

$\boxed{29}$ *Somando e subtraindo em um quadrado 3 por 3*

É dado um quadrado 3×3 com números escritos em cada casinha 1×1. As jogadas permitidas são escolher uma linha, uma coluna ou uma diagonal e somar ou subtrair 1 dos três números que estiverem nela. Prove que não é possível começar com os números na configuração da esquerda e chegar aos números na configuração da direita após algumas operações.

0	1	0
1	0	1
0	1	0

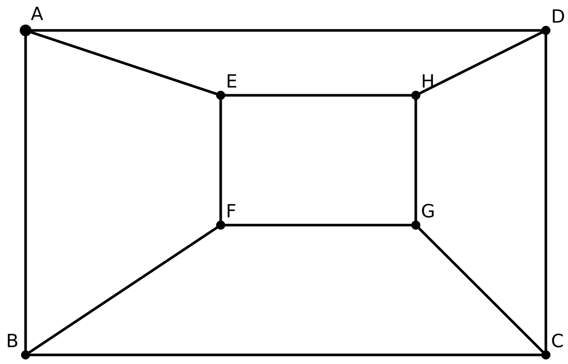
1	0	1
0	1	0
1	0	1

$\boxed{29}$ *Somando e subtraindo em um quadrado 3 por 3 – Solução*

Seja S a soma de todos os números nas casinhas do quadrado. Ao somarmos 1 em três casinhas, trocamos S por $S+3$ e, ao subtrairmos 1 em três casinhas, trocamos S por $S-3$. Como estamos sempre somando ou subtraindo 3, o resto da soma de todos os números na divisão por 3 não se altera. Na primeira configuração temos soma 4 e na segunda configuração temos soma 5. Como 4 e 5 não deixam o mesmo resto na divisão por 3, não é possível ir de uma configuração para a outra.

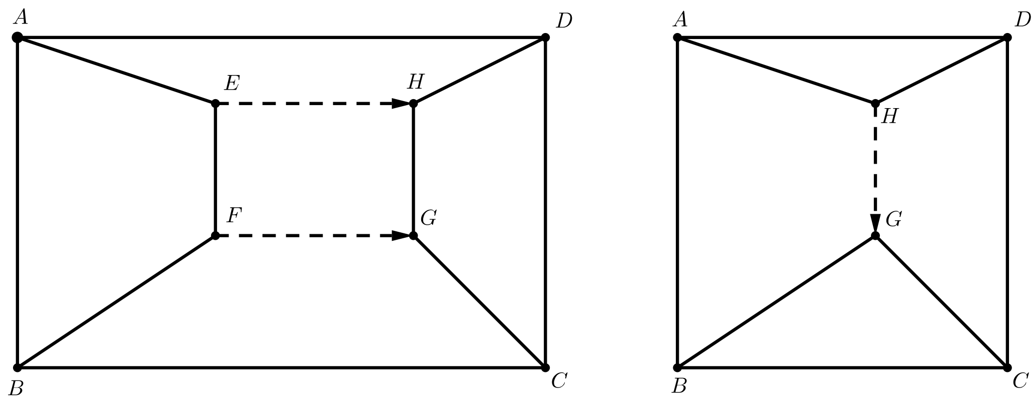
30 *Retângulos encaixados*

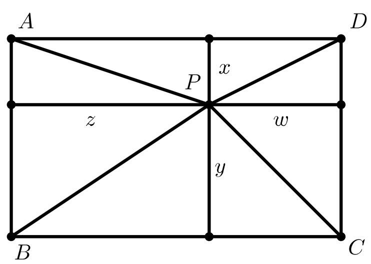
Na figura abaixo, $ABCD$ e $EFGH$ são retângulos de lados paralelos. Sabendo que $AE = 10$, $BF = 20$ e $DH = 30$, determine o comprimento do segmento CG.



30 *Retângulos encaixados – Solução*

Realizaremos duas transformações geométricas no desenho de modo a manter os comprimentos de AE, DH, GC e BF inalterados. Translademos[1] o trapézio $AEFB$ para a direita como indicado na figura abaixo até EF coincidir com HG. Em seguida, translade o triângulo $\triangle AHD$, também como indicado abaixo, até que H coincida com G.





Sejam P o novo ponto obtido pelo colapso de E, H, G e F e x, y, z e w as suas distâncias aos

[1]Transladar um objeto significa mover todos os seus pontos em uma direção fixa e por uma distância fixa.

lados do retângulo. Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned}AE^2 = AP^2 &= x^2 + z^2\\ DH^2 = PD^2 &= x^2 + w^2\\ GC^2 = PC^2 &= y^2 + w^2\\ BF^2 = PB^2 &= z^2 + y^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}AE^2 + GC^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + w^2\\ &= DH^2 + BF^2\\ &= 900 + 400.\end{aligned}$$

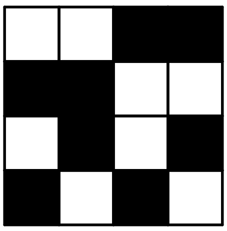
Finalmente, $GC = \sqrt{900 + 400 - 100} = 20\sqrt{3}$.

31 *Pintando de preto e branco*

João conseguiu pintar de preto e branco os quadrados de um tabuleiro $n \times n$ de modo que as interseções de quaisquer duas linhas e de quaisquer duas colunas não eram constituídas por quadrados com a mesma cor. Qual o valor máximo de n?

31 *Pintando de preto e branco – Solução*

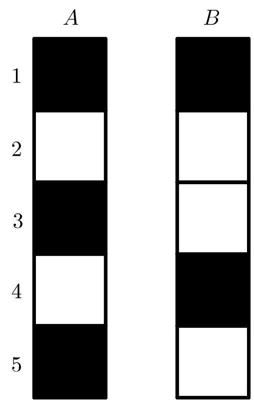
Um exemplo com $n = 4$ é dado na figura abaixo:



Queremos mostrar agora que, se $n \geq 5$, não é possível existir tal pintura. Considere então um tabuleiro $n \times n$ com $n \geq 5$.

Analisando os quadrados da primeira linha, pelo menos três deles serão de uma mesma cor. Digamos que esta cor seja preta (se fosse branca não faria a menor diferença para a nossa análise seguinte) e observemos agora as colunas A, B e C que contêm esses três quadrados pretos. A segunda linha deve intersectar essas três colunas em pelo menos dois quadrados brancos, pois, caso contrário, teríamos quatro interseções pretas entre as duas primeiras linhas e duas dessas três colunas.

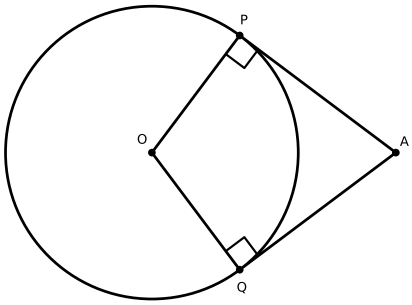
Suponha agora que as colunas que contêm dois quadrados pretos na primeira linha e dois brancos na segunda sejam as colunas A e B (se fossem A e C ou B e C a análise seguinte seria a mesma). A partir da terceira linha, como não podemos ter quadrados de mesma cor simultaneamente nas colunas A e B, as distribuições de cores só podem ser as duas opções seguintes: preto e branco ou branco e preto. Daí, dentre as linhas 3, 4 ou 5, duas delas terão exatamente a mesma distribuição. Essas duas linhas com mesma distribuição de cores intersectam a coluna C em dois quadrados, em que nenhum deles pode ser preto ou branco e isso impede a existência da pintura satisfazendo as condições do enunciado.



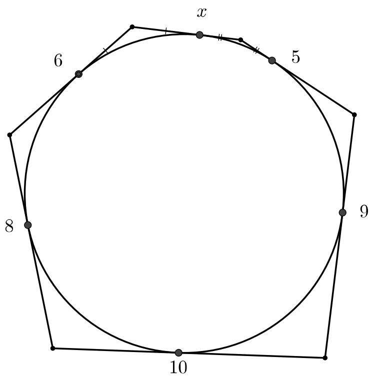
$\boxed{32}$ *Formando figuras com triângulos*

Nesse problema, vamos aprender e utilizar o famoso Teorema do Bico, que tem esse nome porque a figura formada parece realmente a cabeça e o bico de um pássaro.

a) O Teorema do Bico diz que as distâncias de um ponto exterior a uma circunferência aos pontos onde suas tangentes tocam a circunferência são iguais. Na figura a seguir, AP e AQ são tangentes à circunferência. Mostre que $AP = AQ$.



b) Considere o hexágono da figura a seguir, no qual todos os lados tangenciam a circunferência. Determine o valor do lado desconhecido x.



Observação: Não confunda com o Teorema dos Bicos do problema 13. Em ambos os casos, trata-se do nome popular dos resultados mencionados.

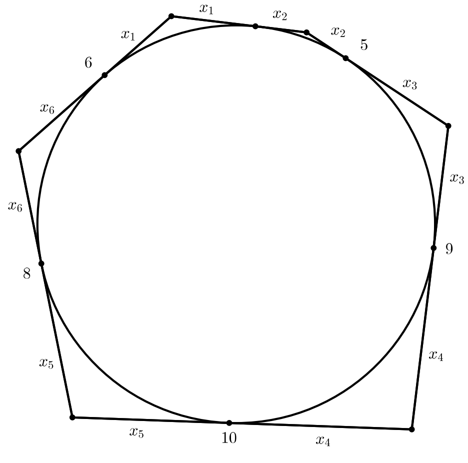
32 *Formando figuras com triângulos – Solução*

a) Trace OA. Observe que os triângulos ΔOPA e ΔOQA são congruentes pois são triângulos retângulos com a mesma hipotenusa e um dos catetos com a mesma medida. Desse modo, $AP = AQ$.

b) Cada um dos lados é dividido pelo ponto de tangência em dois segmentos, conforme a figura. Pelo item anterior, dois desses segmentos, que compartilham um vértice do hexágono em comum, são iguais. Daí,

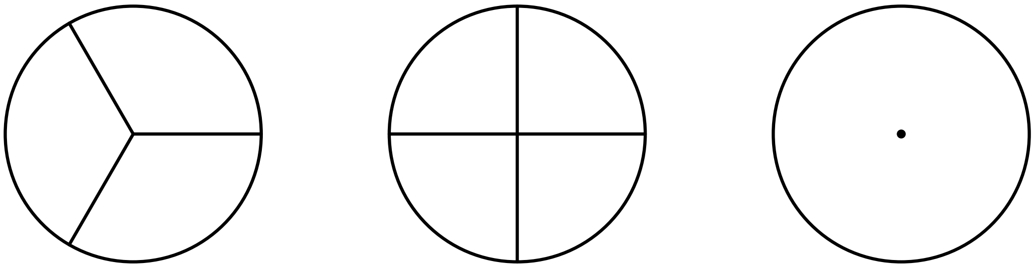
$$\begin{aligned} 6+5+10 &= (x_6+x_1)+(x_2+x_3)+(x_5+x_4) \\ &= (x_1+x_2)+(x_3+x_4)+(x_5+x_6) \\ &= x+9+8. \end{aligned}$$

Portanto, $x = 21 - 17 = 4$.



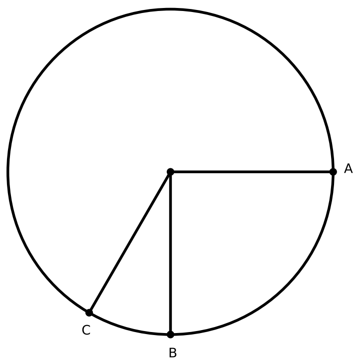
$\boxed{33}$ *Cortando um bolo usando o compasso*

Certo matemático adora pensar em problemas e cozinhar bolos. Após cozinhar seus bolos, ele os corta em pedaços iguais. As três figuras a seguir mostram bolos circulares de mesmo raio em que os dois primeiros foram cortados em 3 e 4 pedaços iguais, respectivamente. Ele deseja cortar o terceiro bolo, mas a única marcação conhecida é o centro do bolo. Mostre que usando um compasso e uma faca, de tamanhos suficientemente grandes, e os dois primeiros bolos é possível cortar o terceiro em 12 pedaços iguais.



$\boxed{33}$ *Cortando um bolo usando o compasso – Solução*

O compasso servirá para transportar distâncias. O primeiro passo é marcar um ponto A de referência na lateral do terceiro bolo. Usando os comprimentos de arcos do primeiro bolo e o compasso, pode-se marcar um ponto C tal que o arco AC meça $\frac{1}{3}$ do perímetro de sua circunferência. Em seguida, usando o comprimento de arco do segundo bolo, deve-se marcar o ponto B no terceiro bolo tal que o arco AB meça $\frac{1}{4}$ do perímetro de sua circunferência. Veja a figura abaixo.



A fração do comprimento da circunferência que representa o arco BC é

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}.$$

Usando o compasso podemos transportar a distância BC ao longo do perímetro do bolo 11 vezes dividindo-o assim em 12 arcos iguais. Basta agora usar a faca e efetuar cortes que comecem nos pontos marcados e terminem no centro do bolo.

34 *Quadriláteros com todos os lados iguais não são congruentes*

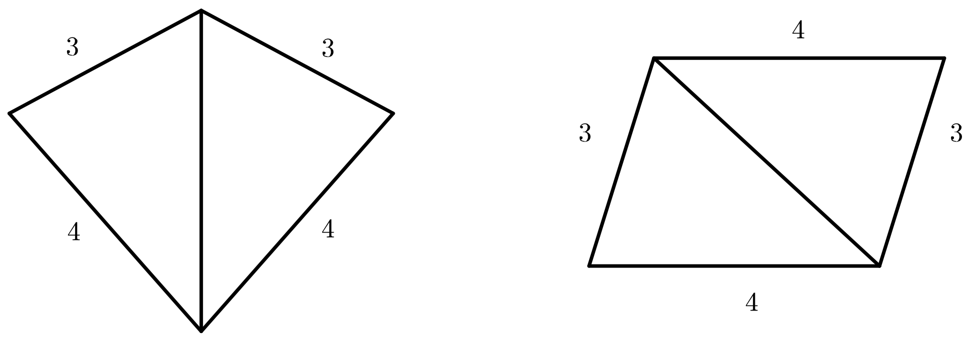
Um erro que muitos alunos cometem é pensar que dois quadriláteros são congruentes se tiverem os seus respectivos lados iguais. Isso não é verdade. Nesse problema, veremos que quadriláteros podem ter lados correspondentes iguais, mas áreas distintas.

a) Mostre que a maior área possível para um quadrilátero que possui dois lados de comprimento 3 e dois de comprimento 4 é 12.

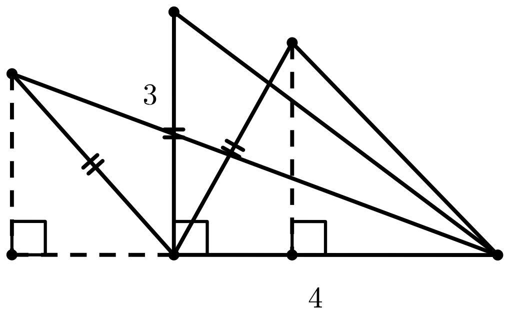
b) Mostre que, nos quadriláteros em que isso acontece, a soma dos ângulos opostos é 180°.

34 *Quadriláteros com todos os lados iguais não são congruentes – Solução*

a) Existem dois modos de montar o quadrilátero com pares de lados iguais: ou eles ficam juntos ou ficam separados. Nos dois casos, o quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos que serão congruentes pelo caso (*L.L.L.*). Veja a figura abaixo.



Na segunda figura logo abaixo, fixamos o lado de comprimento 4 e fazemos variar o lado de comprimento 3.



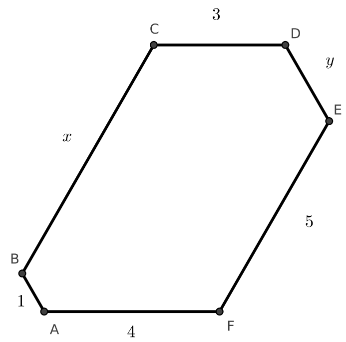
Como a base de comprimento 4 está fixa, a maior área possível ocorrerá quando tivermos a maior altura possível a tal lado e isso ocorre quando o lado de comprimento 3 for perpendicular à essa base. Qualquer altura diferente de 3 seria cateto de um triângulo retângulo de hipotenusa 3 e, consequentemente, menor que 3.

Portanto, a maior área para cada triângulo é $(3 \cdot 4)/2 = 6$. Dado que existem dois de tais triângulos em cada tipo de quadrilátero, a área máxima é $6 + 6 = 12$.

b) Veja que a área máxima ocorre quando os triângulos formados são retângulos. Assim, a soma de ângulos opostos retos é $90° + 90° = 180°$. Como a soma dos ângulos internos do quadrilátero é $360°$, os outros dois ângulos também devem somar $180°$.

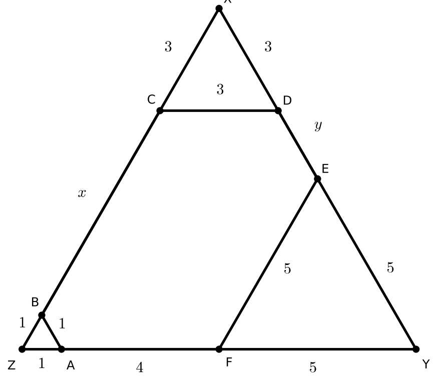
$\boxed{35}$ *Lados desconhecidos do hexágono equiângulo*

Um hexágono é chamado equiângulo quando possui os seis ângulos internos iguais. Considere o hexágono equiângulo $ABCDEF$ com lados 3, y, 5, 4, 1 e x, da figura a seguir. Determine os comprimentos x e y desconhecidos.



$\boxed{35}$ *Lados desconhecidos do hexágono equiângulo – Solução*

Como um hexágono pode ser dividido em 4 triângulos por meio de suas diagonais, a soma de seus ângulos internos é $180°(6-2) = 720°$. Dado que ele é equiângulo, cada um dos ângulos internos medirá $\frac{720°}{6} = 120°$. Sabendo disso, ao prolongarmos os lados formaremos, como indicado abaixo, triângulos equiláteros menores externos a três de seus lados e um triângulo equilátero maior $\triangle XYZ$ que o conterá.



Como os lados do triângulo $\triangle XYZ$ são iguais, temos

$$3 + y + 5 = 5 + 4 + 1 = 1 + x + 3.$$

Logo, $x = 6$ e $y = 2$.

36 *Formigas no retângulo*

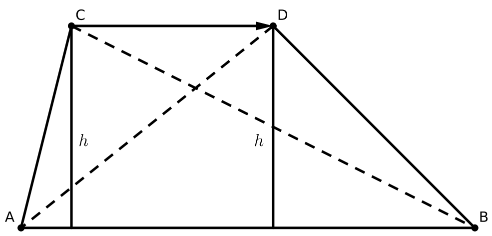
Três formigas estão posicionadas nos vértices de um retângulo. Uma formiga se movimenta apenas quando as duas outras estão paradas e sempre em uma direção paralela à reta determinada pelas outras duas formigas. É possível que após algumas movimentações as três formigas fiquem posicionadas em três dos pontos médios dos lados do retângulo?

36 *Formigas no retângulo – Solução*

Quando uma formiga se move da posição C para a posição D, como ilustra o desenho abaixo, a área do triângulo formado por elas permanece a mesma, pois

$$A_{ACB} = \frac{h \cdot AB}{2} = A_{ADB}.$$

Não é possível que as três formigas ocupem os pontos médios porque no início a área do triângulo formado por elas corresponde à metade da área do retângulo original e a área de um triângulo formado pelos pontos médios corresponde a um quarto da área do retângulo original.



SOLUÇÕES DO NÍVEL 3

1 *Polígono no relógio*

A partir do meio-dia, João faz, a cada 80 minutos, uma marca na posição do ponteiro das horas do seu relógio.

a) Depois de quanto tempo não será mais necessário fazer novas marcas no relógio?

b) Qual a soma dos ângulos internos do polígono formado pelas marcas?

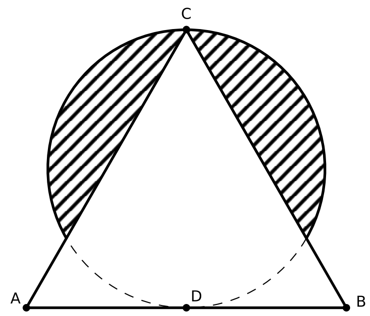
1 *Polígono no relógio – Solução*

a) O ponteiro das horas concluirá uma volta completa após $12 \cdot 60 = 720$ minutos e ao longo dela nenhuma marca será repetida. Como 720 é múltiplo de 80, durante esse período são feitas exatamente $\dfrac{12 \cdot 60}{80} = 9$ marcas no relógio e, além disso, os dois ponteiros voltam às suas posições iniciais. Daí, como as próximas marcas serão repetidas, o tempo desejado é 720 minutos.

b) A soma dos ângulos internos de um polígono de 9 lados é $180^\circ \cdot (9-2) = 1260^\circ$.

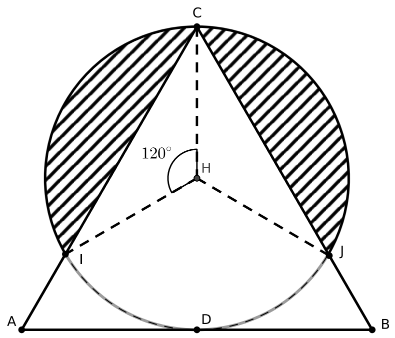
2 *Um diâmetro que também é altura*

No desenho abaixo, o $\triangle ABC$ é um triângulo equilátero e CD é tanto uma altura do triângulo quanto um diâmetro do círculo. Se $AB = 10$cm, determine a área sombreada.



2 *Um diâmetro que também é altura – Solução*

Como CD é diâmetro, o seu ponto médio H é o centro do círculo. Sejam I e J as outras interseções da circunferência com os lados AC e BC.



Como $\angle ICH = \angle HCJ = 30°$ e $IH = CH = HJ$, segue que os triângulos $\triangle CHI$ e $\triangle CHJ$ são isósceles com ângulo do vértice igual à 120°. Se l é o raio do círculo, como a altura do triângulo e o diâmetro do círculo coincidem, $2l = \dfrac{10\sqrt{3}}{2}$cm e consequentemente $l = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$cm. Cada uma das regiões sombreadas corresponde a área de um setor circular de $120° = 2\pi/3$ subtraída de um triângulo isósceles, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{(2\pi/3)l^2}{2} - \frac{l^2 \operatorname{sen} 120°}{2} &= \frac{\pi l^2}{3} - \frac{\sqrt{3}l^2}{4} \\ &= \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})l^2}{12}. \\ &= \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})}{12} \cdot \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2. \\ &= \frac{100\pi - 75\sqrt{3}}{8} cm^2. \end{aligned}$$

Como temos duas regiões iguais, a área procurada é o dobro do valor encontrado, ou seja, $\dfrac{100\pi - 75\sqrt{3}}{4} cm^2$.

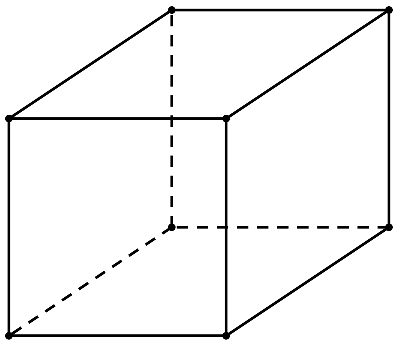
3 *Cubo cortado*

Francisco acaba de aprender em sua aula de geometria espacial a *Relação de Euler* para poliedros convexos:

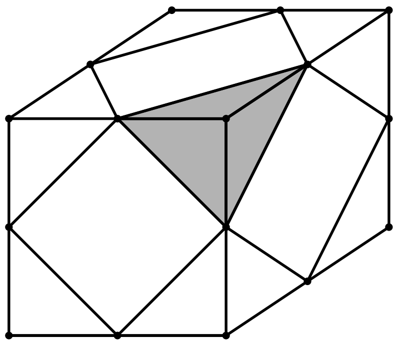
$$V + F = A + 2.$$

Na equação acima, V, A e F representam o número de vértices, de arestas e de faces do poliedro, respectivamente. Podemos verificar que a Relação de Euler é válida no cubo abaixo, pois existem 6 faces, 12 arestas, 8 vértices e

$$V + F = 8 + 6 = 12 + 2 = A + 2.$$



João decidiu verificar a Relação de Euler em outro poliedro obtido de um cubo de madeira. Ele marcou os pontos médios de cada aresta e, em cada face, os uniu formando quadrados, como mostra a figura abaixo. Em seguida, ele cortou as 8 pirâmides formadas em torno de cada vértice, obtendo um novo poliedro. Determine:



a) o novo número de vértices;

b) o novo número de arestas;

c) o novo número de faces.

3 *Cubo cortado – Solução*

a) Os vértices do novo poliedro são exatamente os pontos médios das arestas do cubo original. Como o cubo tem 12 arestas, o novo poliedro possui 12 vértices.

b) Cada aresta do novo poliedro é um lado de um dos quadrados formados nas faces. Como o cubo possui 6 faces e cada uma delas possui os 4 lados de um dos quadrados, o total de arestas procurado é $4 \cdot 6 = 24$.

c) Existem 8 faces triangulares que são as bases das pirâmides removidas e 6 faces quadradas formadas nas faces do cubo original. Temos então $8 + 6 = 14$ faces.

Veja que a Relação de Euler é válida também para esse novo poliedro, pois

$$V + F = 12 + 14 = 24 + 2 = A + 2.$$

4 *Tecla da calculadora*

A calculadora científica de João possui uma tecla especial que transforma qualquer número x escrito na tela e que seja diferente de 1 no número $\dfrac{1}{1-x}$.

a) O que acontece se o número 2 estiver escrito na tela e apertarmos a tecla especial três vezes?

b) O que acontece se o número 2 estiver escrito na tela e apertarmos a tecla especial dez vezes?

c) Finalmente, o que acontece se o número 2 estiver escrito na tela e apertarmos a tecla especial 2015 vezes?

4 *Tecla da calculadora – Solução*

a) Após apertarmos a tecla três vezes, obtemos:

$$2 \xrightarrow{1^a} \frac{1}{1-2} = -1 \xrightarrow{2^a} \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \xrightarrow{3^a} \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

b) Em virtude do item anterior, a cada três toques na tecla especial, tudo se passa como se o número 2 não tivesse sido alterado. Assim, após a sexto e o nono uso da tecla especial, o número 2 ainda estará na tela. Finalmente, com o décimo uso da tecla especial, o transformaremos em $\dfrac{1}{1-2} = -1$. Esse padrão de repetição não é particular ao número 2 como mostra a sequência:

$$x \xrightarrow{1^a} \frac{1}{1-x} \xrightarrow{2^a} \frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}} = -\frac{1-x}{x} \xrightarrow{3^a} \frac{1}{1-(-\dfrac{1-x}{x})} = x.$$

c) Como a cada três usos da tecla especial o número 2 continuará na tela, sempre após um número que é múltiplo de 3 de usos de tal tecla ainda teremos o número 2. Como 2013 é múltiplo de 3, basta analisarmos as duas últimas apertadas:

$$\ldots \xrightarrow{2013^a} 2 \xrightarrow{2014^a} \frac{1}{1-2} = -1 \xrightarrow{2015^a} \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, restará o número $\frac{1}{2}$ na tela.

5 *Uma fatoração esperta*

a) José aprendeu um método para calcular produtos de dois números de uma forma mais rápida baseado na fatoração:

$$(n-k)(n+k) = n^2 - k^2.$$

Para calcular $23 \cdot 17$, ele escolhe $n = 20$, $k = 3$ e calcula:

$$23 \cdot 17 = 20^2 - 3^2 = 400 - 9 = 391.$$

Determine, sem usar a calculadora, o valor de $\sqrt{1001 \cdot 1003 + 1}$.

b) Verifique que $(n(n+3)+1)^2 = n(n+1)(n+2)(n+3)+1$.

c) Determine, sem usar a calculadora, o valor de:

$$\sqrt{(2014)(2015)(2016)(2017)+1}.$$

5 *Uma fatoração esperta – Solução*

a) Basta escolher $n = 1002$ e $k = 1$, pois

$$\begin{aligned} \sqrt{1001 \cdot 1003 + 1} &= \sqrt{1002^2 - 1^2 + 1} \\ &= \sqrt{1002^2} \\ &= 1002. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (n(n+3)+1)^2 &= n^2(n+3)^2 + 2n(n+3) + 1 \\ &= n(n+3)[n(n+3)+2] + 1 \\ &= n(n+3)[n^2+3n+2] + 1 \\ &= n(n+3)[(n+1)(n+2)] + 1 \\ &= n(n+1)(n+2)(n+3) + 1. \end{aligned}$$

c) Usando o item anterior e escolhendo $n = 2014$, temos

$$\begin{aligned}\sqrt{(2014)(2015)(2016)(2017)+1} &= \sqrt{(2014\cdot 2017+1)^2}\\ &= 2014\cdot 2017+1.\\ &= 4062239.\end{aligned}$$

6 *Termos esquecidos da P.A.*

Uma *progressão aritmética*, costumeiramente chamada de *P.A.*, é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com um valor fixo r chamado de diferença comum ou razão da progressão. Por exemplo, a sequência abaixo é uma progressão aritmética com termo inicial 3 e diferença comum 4.

$$a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = 11, a_4 = 15, a_5 = 19, a_6 = 23, a_7 = 27, a_8 = 31, a_9 = 35, \ldots$$

Veja que estamos denotando o número da posição i pelo símbolo a_i.

a) Se o primeiro termo de uma progressão aritmética é 2 e sua diferença comum é 3, qual é o valor do quarto termo?

b) A professora de João pediu que ele calculasse o décimo primeiro termo de uma progressão aritmética. Infelizmente ele esqueceu qual era o termo inicial e a diferença comum. As únicas informações das quais ele lembrava eram:

$$\begin{aligned}a_4 + a_7 + a_{10} &= 207\\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} &= 553.\end{aligned}$$

Quanto vale o décimo primeiro termo?

6 *Termos esquecidos da P.A. - Solução*

a) Se $a_1 = 2$ e $r = 3$, temos

$$\begin{aligned}a_2 &= a_1 + 3 = 5\\ a_3 &= a_2 + 3 = 8\\ a_4 &= a_3 + 3 = 11.\end{aligned}$$

b) Sejam $a_1 = d$ e r a razão. Então, temos:

$$\begin{array}{llllll} a_1 = d, & a_2 = d + r, & a_3 = d + 2r, & a_4 = d + 3r, & a_5 = d + 4r, & a_6 = d + 5r, \\ a_7 = d + 6r, & a_8 = d + 7r, & a_9 = d + 8r, & a_{10} = d + 9r, & a_{11} = d + 10r. & \end{array}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_4 + a_7 + a_{10} &= (d + 3r) + (d + 6r) + (d + 9r) \\ 217 &= 3(d + 6r). \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} &= (d + 4r) + (d + 5r) + \ldots + (d + 10r) \\ 553 &= 7(d + 7r). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{cases} d + 6r &= 207/3 = 69, \\ d + 7r &= 553/7 = 79. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior, obtemos $r = 10$ e $d = 9$. Assim, $a_{11} = d + 10r = 109$.

7 *Mágica com números de 1 a 50*

O mágico Magimático chama três pessoas da plateia: Ana, Beto e Caio, para ajudarem em sua matemágica. Ele diz para cada um pensar em um número de 1 a 50, sem revelá-lo ao mágico, e contá-lo para cada um dos outros dois participantes. Em seguida, cada um deles deve simultaneamente trocar o seu número pela soma dos números dos outros dois. Por exemplo, Ana passa a ter a soma dos números de Beto e Caio. Magimático pede então que eles repitam esse processo mais uma vez. Após concluir a segunda troca, ele pede que falem os seus números. Ana responde 104, Beto 123 e Caio 137. Para a surpresa de todos, Magimático acerta os números iniciais escolhidos pelos três. Quais foram os números escolhidos incialmente?

7 *Mágica com números de 1 a 50 – Solução*

Vamos chamar o número de Ana de A, o de Beto de B e o de Caio de C. Na primeira troca, Ana passou a ter $B + C$, Beto $A + C$ e Caio $A + B$. Após a segunda troca, Ana passou a ter $A + C + A + B = 2A + B + C$, Beto passou a ter $A + 2B + C$ e Caio passou a ter $A + B + 2C$. A partir das respostas finais que eles deram, sabemos que:

$$\begin{aligned} 2A + B + C &= 104 \\ A + 2B + C &= 123 \\ A + B + 2C &= 137. \end{aligned}$$

Somando as três equações, obtemos $4A + 4B + 4C = 104 + 123 + 137 = 364$, ou seja, $A + B + C = 91$. Subtraindo esse valor de cada uma das três equações, obtém-se $A = 13$, $B = 32$ e $C = 46$.

8 *Formando triângulos obtusângulos*

Dado um triângulo de lados $a \leq b \leq c$, pela lei dos cossenos temos:

$$\cos \hat{C} \;=\; \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Se o ângulo $\hat{C}$ é obtuso, $\cos \hat{C} < 0$. Como $2ab$ é positivo, isso é o mesmo que $a^2+b^2-c^2 < 0$. Portanto, para um triângulo ser obtusângulo, o maior lado elevado ao quadrado é maior que a soma dos quadrados dos outros dois lados. Além disso, pela desigualdade triangular, sabemos que o maior lado é menor que a soma dos outros dois. Podemos resumir essas duas informações através das desigualdades

$$a^2+b^2 < c^2 < (a+b)^2.$$

Quantos triângulos obtusângulos podemos formar com lados inteiros positivos menores que 7?
Observação: Considere que dois triângulos com os mesmos comprimentos de lado mas em ordens diferentes representam o mesmo triângulo.

8 *Formando triângulos obtusângulos – Solução*

Primeiro vamos assumir a mesma ordem de lados que o enunciado, ou seja, $a \leq b \leq c$. Dividamos o problema em casos a partir do valor de a. Para facilitar a análise, lembre-se que os sete primeiros quadrados perfeitos são:

$$1^2=1,\quad 2^2=4,\quad 3^2=9,\quad 4^2=16,\quad 5^2=25,\quad 6^2=36 \quad \text{e} \quad 7^2=49.$$

Em cada caso, substituiremos o valor de a na desigualdade do enunciado.

i) Se $a=1$, temos $1+b^2<c^2<(b+1)^2$. Nesse caso, não teremos soluções, pois a desigualdade anterior implica que $b<c<b+1$ e não existe um inteiro em tal intervalo.

ii) Se $a=2$, temos $4+b^2<c^2<(b+2)^2$. Nesse caso, teremos $b<c<b+2$, daí $c=b+1$. Então, como $c<7$, as soluções são: $(2,2,3)$, $(2,3,4)$, $(2,4,5)$ e $(2,5,6)$.

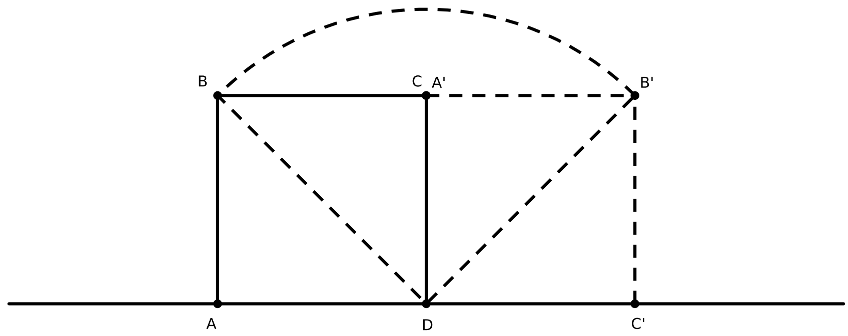
iii) Se $a=3$ temos $9+b^2<c^2<(b+3)^2$. Nesse caso, teremos $b<c<b+3$ e então $c=b+1$ ou $c=b+2$. Se $b=3$, teremos apenas $c=5$ como solução. Se $b=4$, só teremos $c=6$. Finalmente, se $b=5$, teremos apenas $c=6$. Temos então as soluções: $(3,3,5)$, $(3,4,6)$ e $(3,5,6)$.

iv) Se $a=4$ e $b=4$ só podemos completar com $c=6$ e a solução é $(4,4,6)$ pois $5^2<4^2+4^2$. Se $a=4$ e $b=5$ teremos $a^2+b^2>c^2$. O mesmo ocorre se $a\geq 5$ pois $a^2+b^2\geq 5^2+5^2>7^2$.

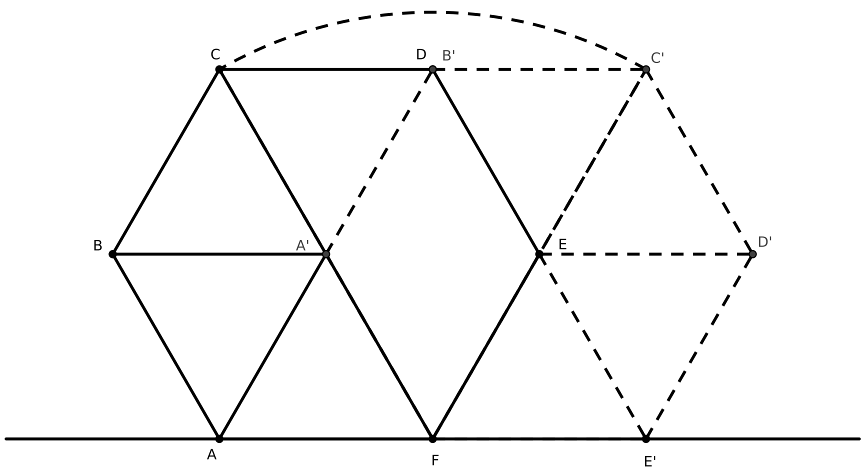
Portanto, podemos formar apenas 8 triângulos obtusângulos.

9 *Polígonos tombados*

a) O quadrado $ABCD$ de lado 1cm é "tombado" em torno do ponto D conforme a figura a seguir. Os traços pontilhados indicam a área ocupada pelo quadrado durante o seu movimento de tombamento. Qual a área total ocupada pelo quadrado do início até o final de seu tombamento?

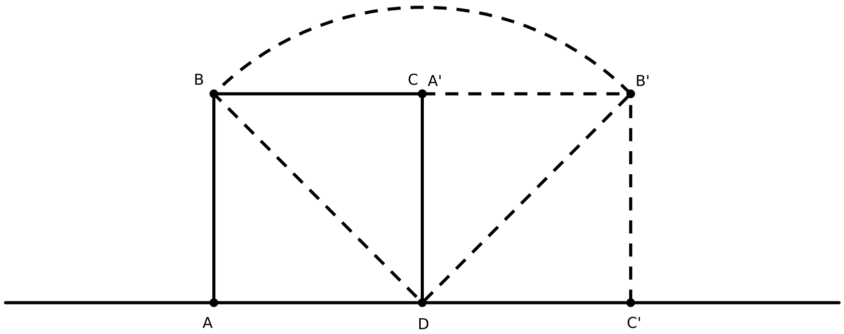


b) Assim, como no caso do quadrado do item anterior, um hexágono regular $ABCDEF$ de lado 1cm é "tombado" em torno do ponto F conforme a figura a seguir. Qual a área total ocupada pelo hexágono do início até o final do seu tombamento?



9 *Polígonos tombados – Solução*

a) Veja que a figura formada pode ser dividida em dois triângulos retângulos, ΔABD e $\Delta DB'C'$, e um setor circular DBB' de abertura 90°.



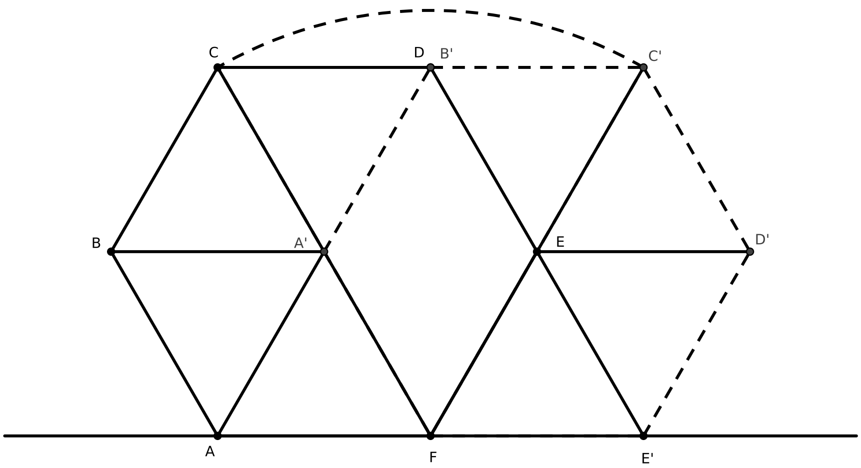
O raio do setor pode ser calculado usando-se o Teorema de Pitágoras

$$R = BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Sua abertura de 90° equivale a $\frac{1}{4}$ da área de um círculo. Assim, a área será dada por

$$\begin{aligned}[BAD] + [B'DC'] + [\widehat{BB'}] &= \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \pi \left(\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{\pi}{2}\text{cm}^2.\end{aligned}$$

b) Veja que a figura formada pode ser dividida em 6 triângulos equiláteros de lado 1 e um setor circular de raio 2 e abertura 60°.



Como a altura de um triângulo equilátero de lado 1 é $\sqrt{3}/2$, a sua área é

$$\frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Um setor de 60° equivale à um sexto da área de um círculo e assim a área procurada é

$$6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{9\sqrt{3} + 4\pi}{6}\text{cm}^2.$$

10 *Meninos e meninas na sorveteria Sorvete Matemático*

Pedro decidiu levar todos os seus filhos, meninos e meninas, para tomar sorvete na sorveteria *Sorvete Matemático*. Na sorveteria, há 12 sabores diferentes de sorvete e cada criança pediu um combo com 3 bolas de sorvete. Depois de sair da sorveteria, Pedro percebeu que, no total, foram pedidas exatamente duas bolas de cada sabor disponível na sorveteria.

a) Sabendo que Pedro não tomou sorvete, qual o número total de seus filhos (meninas e meninos)?

b) Pedro olhou com mais atenção os sabores que cada um pediu e notou que nenhum sabor foi pedido por um menino e por uma menina, ou seja, se um menino escolheu um sabor, nenhuma menina escolheu aquele mesmo sabor. Sabendo que pelo menos um de seus filhos é menino e que ele possui mais filhas do que filhos, determine o número de suas filhas.

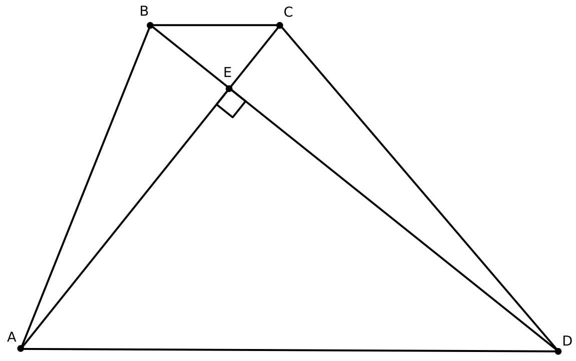
10 *Meninos e meninas na sorveteria Sorvete Matemático – Solução*

a) Seja n o número de filhos de Pedro. No total, foram pedidas $3n$ bolas de sorvete. Como cada um dos 12 sabores foi pedido duas vezes, temos $3n = 2 \cdot 12$, ou seja, $n = 8$. Portanto, Pedro possui 8 filhos.

b) Sejam x o número de meninos e y o número de meninas. Pelo item anterior, sabemos que $x + y = 8$. Como existe pelo menos um filho e há mais filhas do que filhos, sabemos que: $0 < x < y$. Dado que nenhum sabor foi pedido simultaneamente por meninos e por meninas, eles podem ser separados em sabores dos meninos e sabores das meninas. Então, $3x$ é igual ao dobro do número de sabores dos meninos, pois foram pedidas exatamente duas bolas de cada sabor e nenhuma menina pode pedir um dos sabores dos meninos. Consequentemente, x é par. Do mesmo modo, y também é par. Como $0 < x < y$ e $x + y = 8$, podemos concluir que $x = 2$ e $y = 6$. Daí, Pedro possui 6 filhas.

11 *Trapézio com diagonais perpendiculares*

No desenho abaixo, $ABCD$ é um trapézio e suas diagonais AC e BD são perpendiculares. Além disso, $BC = 10$ e $AD = 30$.



a) Determine a razão entre os segmetos BE e ED.

b) Encontre o valor do comprimento dos segmentos EC, AE e ED em função do comprimento de $BE = x$.

c) Se $AE \cdot EC = 108$, determine o valor de $BE \cdot ED$.

11 *Trapézio com diagonais perpendiculares – Solução*

a) Como BE e AD são paralelos, $\angle EBC = \angle EDA$ e $\angle BCE = \angle CAD$. Consequentemente, os triângulos $\triangle BEC$ e $\triangle EAD$ são semelhantes e $BE/ED = BC/AD = 10/30 = 1/3$. Analogamente, podemos mostrar que $EC/AE = 1/3$.

b) Pelo item anterior, sabemos que $ED = 3BE = 3x$. Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle BEC$, temos $EC^2 = BC^2 - BE^2 = 100 - x^2$ e, consequentemente $EC = \sqrt{100 - x^2}$. Como $EC/AE = 1/3$, segue que $AE = 3\sqrt{100 - x^2}$.

c) Se $AE \cdot EC = 108$, tem-se

$$108 = 3\sqrt{100 - x^2} \cdot \sqrt{100 - x^2} = 3(100 - x^2).$$

Ou seja, $x^2 = 64$. Portanto,

$$\begin{aligned} BE \cdot ED &= x \cdot 3x \\ &= 3x^2 \\ &= 3 \cdot 64 = 192. \end{aligned}$$

12 *Somando os números ímpares de 1000 a 2014*

Uma técnica muito usada para calcular somatórios é a *Soma Telescópica*. Ela consiste em "decompor" as parcelas de uma soma em partes que se cancelem. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5} &= \\
\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{1}{5}\right) &= \\
\frac{1}{1}-\frac{1}{5} &= \\
\frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Com esta técnica, podemos achar uma forma de somar números ímpares consecutivos. Vejamos:

a) Contando os números ímpares de um por um e começando pelo 1, verifique que o número na posição m é igual a $m^2-(m-1)^2$.

b) Calcule a soma de todos os números ímpares entre 1000 e 2014.

12 *Somando os números ímpares de 1000 a 2014 – Solução*

a) Veja que o primeiro número ímpar é $2\cdot 1-1$ e, sabendo que os números ímpares crescem de 2 em 2, podemos concluir que o número ímpar que estará na posição m em nossa contagem é

$$\begin{aligned}
2\cdot 1-1+\underbrace{2+2+\ldots+2}_{m-1 \text{ vezes}} &= 2\cdot 1-1+2(m-1) \\
&= 2m-1.
\end{aligned}$$

Para verificar que ele coincide com o número do item *a*), basta calcularmos

$$m^2-(m-1)^2=m^2-(m^2-2m-1)=2m-1.$$

b) Queremos somar os números ímpares desde $1001 = 2 \cdot 501 - 1$ até $2013 = 2 \cdot 1007 - 1$. Usando a expressão do item *a*), temos

$$\begin{array}{rcl} 1001 &=& 501^2 - 500^2 \\ 1003 &=& 502^2 - 501^2 \\ 1005 &=& 503^2 - 502^2 \\ & \dots & \\ 2011 &=& 1006^2 - 1005^2 \\ 2013 &=& 1007^2 - 1006^2. \end{array}$$

Somando tudo, vemos que todos os números de 501^2 até 1006^2 são cancelados. Assim, o resultado é:

$$\begin{array}{rcl} 1001 + 1003 + \ldots + 2013 &=& 1007^2 - 500^2 \\ &=& (1007 - 500)(1007 + 500) \\ &=& 507 \cdot 1507 \\ &=& 764049. \end{array}$$

Então a soma dos ímpares entre 1000 e 2014 é 763048.

13 *Mágica com dominós*

O mágico Magimático diz para uma pessoa da plateia escolher uma peça qualquer de um dominó comum. Tal peça é formada por um par de números de 0 a 6. Em seguida, ele diz para a pessoa escolher um dos números da peça e realizar a seguinte sequência de operações:

1. multiplicá-lo por 5;
2. somar o resultado anterior com 15;
3. multiplicar o último resultado por 2 e, finalmente,
4. somar o último resultado com o outro número da peça.

Realizadas tais operações, o resultado é divulgado e Magimático impressiona a plateia dizendo exatamente os números escritos no dominó escolhido.

a) Sabendo que o resultado foi 62, como o mágico descobriu o número escolhido pelo membro da plateia?

b) Se o resultado tivesse sido n, como descobrir os números da peça escolhida?

13 *Mágica com dominós – Solução*

a) Vamos revelar o segredo do mágico. Suponha que o par de números escritos no dominó é (x, y) e que o número escolhido para a sequência de operações foi o x. Assim, as operações realizadas pelo membro da plateia foram:

$$x \to 5x \to 5x+15 \to 2(5x+15) \to 2(5x+15)+y.$$

O resultado divulgado é o número $2(5x+15)+y = 10x+y+30$. Como $30+10x$ termina em 0, o dígito das unidades do resultado e o de y são iguais. Dado que $y < 7$ e o resultado foi 62, então $y = 2$ e $10x+30 = 60$. Ou seja, $x = 3$ e a peça escolhida foi a peça com os números $(3,2)$.

b) Se o resultado divulgado foi n, teremos $10x+30+y = n$. Então, como $y < 7$ e $10x+30$ termina em 0, y é o dígito das unidades de n e x é o dígito das dezenas subtraído de 3.

14 *Quantos dígitos tem um número muito grande?*

Quantos dígitos possui o número 3^{100}? Bom, podemos dar uma resposta aproximada para esta pergunta, sem usar a calculadora, simplesmente comparando-o com potências de 10. Veja que $3^2 < 10$ nos permite concluir que $(3^2)^{50} = 3^{100} < 10^{50}$. Então, 3^{100} tem no máximo 50 dígitos pois, 10^{50} é o primeiro número com 51 dígitos. O número 3^{100} tem de fato 48 dígitos! Agora é a sua vez. Seja N a quantidade de dígitos do número 2^{100}, determine um inteiro positivo k tal que $k \leq N \leq k+5$.

14 *Quantos dígitos tem um número muito grande? – Solução*

Veja que $2^3 = 8$ é menor que 10, então

$$2^{100} < 2^{102} = (2^3)^{34} < 10^{34}.$$

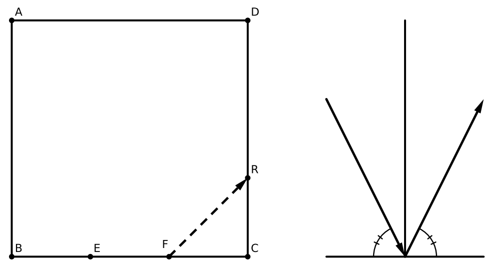
Como 10^{34} é o primeiro número com 35 dígitos, 2^{100} possui no máximo 34 dígitos. Além disso, veja que $2^7 = 128$ é maior que 100. Daí

$$2^{100} > 2^{98} = (2^7)^{14} > (10^2)^{14} = 10^{28}.$$

Como 10^{28} é o menor número com 29 dígitos, 2^{100} possui pelo menos 29 dígitos. Fica então demonstrado que $k = 29$ satisfaz a condição dado que $29 \leq N \leq 34$.

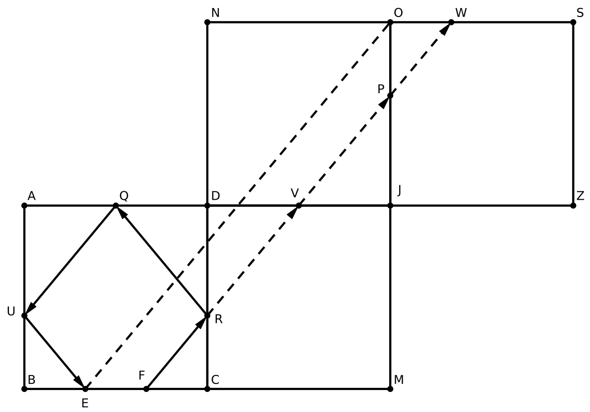
15 *O poderoso Raio Reflexivo*

O herói de um desenho animado enfrenta mais uma vez seu arqui-inimigo e precisa desferir seu famoso golpe do Raio Reflexivo. No quadrado da figura abaixo, o raio deverá, partindo de F ricochetear, exatamente uma vez nos lados CD, AD e AB, nesta ordem, antes de atingir o inimigo na posição E. Sempre que o raio ricocheteia em um dos lados do quadrado, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de saída como mostra a figura da direita. Sabendo que $BE = EF = FC = 2$m e que o raio viaja a $1m/s$, determine o tempo decorrido entre o disparo do raio em F e sua chegada ao ponto E.



15 *O poderoso Raio Reflexivo – Solução*

Se a parede onde o raio reflete fosse um espelho, a sua trajetória também "apareceria" no outro lado do espelho como uma continuação em linha reta da trajetória inicial. Assim, após refletirmos o quadrado três vezes ao longo dos lados onde o raio incide, conseguiremos traçar uma trajetória imaginária com o mesmo comprimento da trajetória real. No desenho abaixo, o quadrado $ABCD$ foi refletido incialmente com respeito ao lado DC e depois seguido das reflexões nos lados DJ e JO. A soma dos quatro segmentos que compõem a trajetória real coincide com o comprimento do segmento FW. Como $OW = BE = EF$, segue que $OE = FW$.



Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo OME, temos:

$$OE^2 = OM^2 + EM^2 = 12^2 + 10^2 = 244$$

Portanto, $OE = 2\sqrt{61}m$. Consequentemente, o raio levará $2\sqrt{61}$ segundos para atingir o alvo.

16 *O valor da expressão*

Sejam a e b números reais positivos quaisquer. Determine o valor da expressão

$$\frac{\sqrt{\frac{ab}{2}+\sqrt{8}}}{\sqrt{\frac{ab+16}{8}+\sqrt{ab}}}.$$

16 *O valor da expressão – Solução*

Seja $x = \sqrt{\frac{ab}{2}+\sqrt{8}}$. Então:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{ab}{2}+4\sqrt{ab}+8 \\ &= 4\left(\frac{ab+16}{8}+\sqrt{ab}\right) \\ &= 4\left(\sqrt{\frac{ab+16}{8}+\sqrt{ab}}\right)^2. \end{aligned}$$

Assim, o valor da expressão procurada é

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\frac{ab}{2}+\sqrt{8}}}{\sqrt{\frac{ab+16}{8}+\sqrt{ab}}} &= \frac{x}{x/2} \\ &= 2. \end{aligned}$$

17 *Produto de dígitos*

Observe a equação:

$$\begin{aligned} (1+2+3+4)^2 &= (1+2+3+4)(1+2+3+4) \\ &= 1\cdot1+1\cdot2+1\cdot3+1\cdot4+2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4+ \\ &+ 3\cdot1+3\cdot2+3\cdot3+3\cdot4+4\cdot1+4\cdot2+4\cdot3+4\cdot4. \end{aligned}$$

Note que são formados $4\times4=16$ produtos ao calcularmos $(1+2+3+4)^2$ usando a propriedade distributiva.

a) Quantos produtos serão formados ao calcularmos $(1+2+3+4)^3$ também usando a propriedade distributiva?

b) Qual a quantidade de números de dois algarismos que usam apenas os dígitos 1, 2, 3 e 4?

c) Qual a soma dos produtos dos dígitos de todos os números com quatro algarismos formados apenas pelos dígitos 1, 2, 3 e 4?

17 *Produto de dígitos – Solução*

a) Cada produto que aparece na soma final é uma expressão do tipo $x \cdot y \cdot z$ onde x é um número vindo do primeiro parênteses, y é um número vindo do segundo e z um número vindo do terceiro. Como existem 4 opções possíveis para cada um desses números, pelo princípio multiplicativo temos $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ tais produtos.

b) Tendo apenas 4 opções de dígitos, existem 4 opções de escolha para o dígito das dezenas e quatro opções de escolha para o dígito das unidades. Assim, temos $4 \cdot 4 = 16$ números de dois algarismos usando apenas os dígitos 1, 2, 3 e 4.

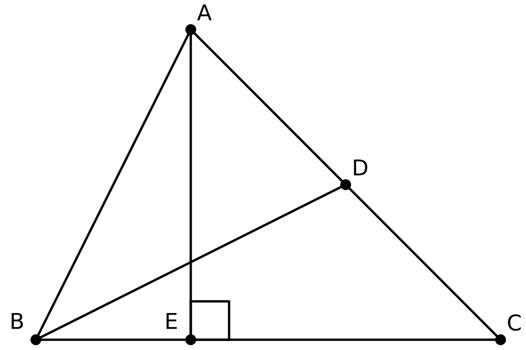
c) Calculemos inicialmente a soma dos produtos dos dígitos de todos os números com dois algarismos que usam apenas os quatro dígitos dados. Pelo item anterior, existem 16 tais números, a saber: 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44. A soma dos 16 produtos dos dígitos é:

$$\begin{aligned} 1\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 3+1\cdot 4+2\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 4 &\quad + \\ 3\cdot 1+3\cdot 2+3\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 1+4\cdot 2+4\cdot 3+4\cdot 4 &= (1+2+3+4)^2. \end{aligned}$$

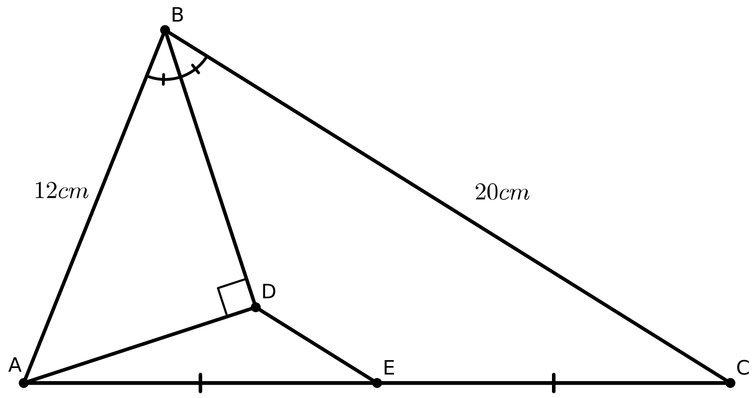
Isso nos motiva a analisar o número $(1+2+3+4)^4 = 10000$. Veja que se aplicarmos a propriedade de distributividade irão aparecer $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ produtos e cada um deles coincide com o produto dos dígitos dos números de quatro algarismos formados apenas pelos dígitos 1, 2, 3 e 4. Assim, o valor procurado é 10000.

18 *Ponto médio lembra base média*

a) Na figura abaixo, $AD = DC$, $AE = BD$, $\angle AEC = 90°$. Determine o valor do ângulo $\angle CBD$.

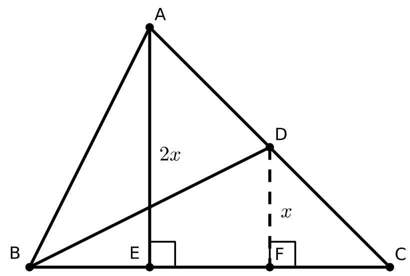


b) No triângulo $\triangle ABC$ abaixo, BD é bissetriz do ângulo $\angle ABC$, E é o ponto médio de AC e $\angle ADB = 90°$. Se $AB = 12$cm e $BC = 20$cm, calcule o comprimento do segmento DE.

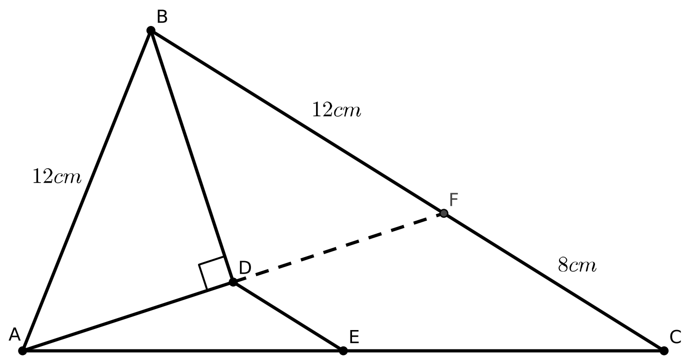


18 *Ponto médio lembra base média – Solução*

a) Pelo ponto D, trace o segmento perpendicular ao lado BC como indica a figura abaixo. Como D é ponto médio de AC e $DF \parallel AE$, podemos concluir que DF é base média do triângulo $\triangle AEC$ com respeito à base AE. Portanto, se $AE = 2x$, então $DF = AE/2 = x$. Daí, $\operatorname{sen}\angle DBC = DF/BD = x/2x = 1/2$. Consequentemente, $\angle DBC = 30°$.



b) Prolongue o segmento AD até ele intersectar o lado BC em F. Como BD é bissetriz de $\angle ABF$, segue que os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BDF$ possuem os mesmos ângulos e um lado em comum. Sendo assim, são congruentes e $BF = AB = 12$cm. Daí, $FC = 8$cm. Além disso, como $AD = DF$ e $AE = EC$, podemos concluir que DE é base média do triângulo $\triangle AFC$, ou seja, $DE = FC/2 = 4$cm.



19 *Números bacanas*

Um número natural é bacana se a soma de todos os seus divisores positivos (incluindo 1 e n) é maior ou igual ao dobro do número. Por exemplo, 12 é bacana pois $1+2+3+4+6+12 = 28 \geq 24 = 2 \cdot 12$ enquanto que 4 não é bacana pois $1+2+4 < 8 = 2 \cdot 4$. Demonstre que existem infinitos números que são bacanas e infinitos números que não são bacanas.

19 *Números bacanas – Solução*

Veja que nenhum número primo é bacana, pois se p é primo a soma dos seus divisores positivos é $p+1 < 2p$. Como existem infinitos números primos, segue que existem infinitos números que não são bacanas. Se p é um primo maior que 3, o número $n = 12p$ possui pelo menos os seguintes divisores positivos distintos:

$$\begin{aligned} p+2p+3p+4p+6p+12p &= 28p \\ &> 24p \\ &= 2n. \end{aligned}$$

Assim, todo número da forma $12p$ com p primo maior que 3 é bacana. Novamente, como existem infinitos números primos, temos uma coleção infinita de números bacanas.

20 *Jogando com o resto na divisão por 3*

Arnaldo e Bernaldo decidem jogar um jogo que possui um número limitado de jogadas. Arnaldo escreve o número 1 no quadro em sua primeira jogada. Em seguida, Bernaldo escreve 2 ou 4 no quadro. Depois disso, Arnaldo escreve 3 ou 9 no quadro. Os dois continuam jogando alternadamente mantendo a regra de que na jogada n o jogador escreve n ou n^2 no quadro. Arnaldo vence o jogo se, após a última jogada, a soma dos números no quadro for divisível por 3. Se a soma não for divisível por 3, então Bernaldo vence.

a) Suponha que o jogo acabe na jogada de número 15. Mostre que Bernaldo pode garantir a vitória.

b) Suponha que o jogo acabe na jogada de número 7. Nesse caso, qual dos dois jogadores poderá sempre garantir a vitória independentemente de como o seu adversário jogue? Como ele deverá jogar para vencer?

20 *Jogando com o resto na divisão por 3 – Solução*

a) Veja que 15 é divisível por 3, então independente da última jogada, 15 ou 15^2, o resto na divisão por 3 não será alterado. Vejamos a jogada de número 14. Veja que 14 deixa resto 2 na divisão por 3 enquanto que $14^2 = 196$ deixa resto 1 na divisão por 3. Como 14 é par, quem fará tal jogada é Bernaldo. Ele pode garantir sua vitória da seguinte forma:

   i) Se a soma dos 13 primeiros números deixar resto 0 ou 2 por 3, Bernaldo deve jogar 14, tornando o resto 2 ou 1 (que é o resto de $2+2=4$).

   ii) Se a soma dos 13 primeiros deixar resto 1, então Bernaldo deve usar 196 tornando o resto total 2.

   Logo, Bernaldo pode garantir sua vitória em qualquer caso.

b) Observe que 7 e $7^2 = 49$ deixam resto 1 na divisão por 3. Então a sétima jogada acrescentará 1 ao resto da soma dos números anteriores da escolha. Estendendo esse raciocínio, vemos que 1, 3, 4, 6 e 7 deixam os mesmos restos que seus quadrados na divisão por 3. Assim, não importa o que seja feito nessas jogadas correspondentes a esses números, elas contribuirão com os restos:

$$1+0+1+0+1=3.$$

   Como a soma anterior deixa resto 0 por 3, as jogadas relevantes são as de número 2 (que pertence Bernaldo) e a de número 5 (que pertence a Arnaldo). Para Arnaldo garantir sua vitória, basta que ele jogue da seguinte forma:

   i) Se Bernaldo jogar 2, Arnaldo deve jogar 25 totalizando $2+25=27$ que deixa resto 0 por 3.

   ii) Se Bernaldo jogar 4, Arnaldo deve jogar 5 totalizando $4+5=9$ que deixa resto 0 por 3.

   Desse modo, Arnaldo pode garantir sua vitória em qualquer caso.

21 *Teoremas de Quadradágoras*

Quadradágoras era um enorme admirador de Pitágoras. Em suas investigações, ele descobriu dois teoremas sobre quadriláteros:

a) “Se um quadrilátero $ABCD$ é tal que $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, então $AB^2 - CD^2 = AD^2 - BC^2$.”

b) “Se um quadrilátero $ABCD$ é tal que $\angle ACB = \angle ADC = 90°$, então $AB^2 = BC^2 + CD^2 + AD^2$.”

Prove esses resultados.

21 *Teoremas de Quadradágoras – Solução*

a) Como $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, sabemos que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADC$ são retângulos. Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 &= AC^2 \\ AD^2 + CD^2 &= AC^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(AB^2 - CD^2) - (AD^2 - BC^2) = (AB^2 + BC^2) - (AD^2 + CD^2) = AC^2 - AC^2 = 0$$

e, consequentemente $AB^2 - CD^2 = AD^2 - BC^2$.

b) De $\angle ACB = \angle ADC = 90°$, sabemos que os triângulos $\triangle ACB$ e $\triangle ADC$ são retângulos. Usando o Teorema de Pitágoras teremos

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + CD^2 \\ AB^2 &= BC^2 + AC^2 \\ &= BC^2 + (AD^2 + CD^2) \\ &= BC^2 + CD^2 + AD^2. \end{aligned}$$

22 *Número de divisores de um livre de quadrados*

Seja n um número inteiro positivo. Se, para cada divisor primo p de n, o número p^2 não divide n, dizemos então que n é livre de quadrados. Mostre que todo número livre de quadrados tem uma quantidade de divisores que é igual a uma potência de 2.

22 *Número de divisores de um livre de quadrados – Solução*

Suponha que n é um número livre de quadrados e considere sua fatoração em primos:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Como n é livre de quadrados, os expoentes α_i são todos iguais a 1. Portanto,

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k.$$

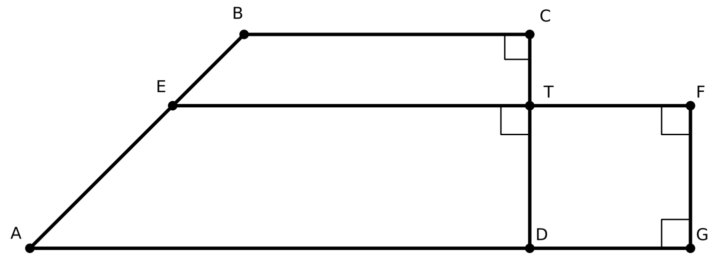
Para contarmos os dividores de n, basta contarmos quantos números possuem ou não cada um desses primos p_i. Como temos duas possibilidades para cada um desses primos figurar em um divisor, a saber, estar ou não estar na fatoração dele, pelo princípio multiplicativo temos

$$2 \cdot 2 \cdot \cdot \ldots \cdot 2 = 2^k$$

divisores.

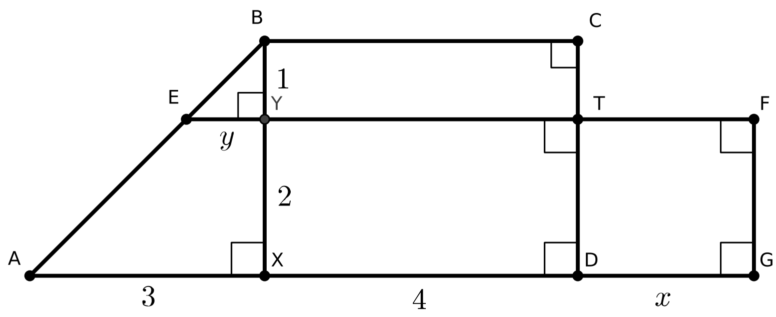
23 *Quadriláteros de mesma área não são congruentes*

Na figura abaixo, os trapézios retângulos $ABCD$ e $AEFG$, com $BC \parallel EF$ e $CD \parallel FG$, possuem a mesma área. Sabendo que $BC = 4$, $AD = 7$, $CT = 1$ e $TD = 2$, determine a medida do segmento DG.



23 *Quadriláteros de mesma área não são congruentes – Solução*

Trace a perpendicular por B ao lado DA, intersectando EF em Y e AD em X. Chamemos DG de x e EY de y. Veja a figura abaixo:



Os triângulos $\triangle EYB$ e $\triangle AXB$ possuem os mesmos ângulos e, consequentemente são semelhantes. Desse modo, $\frac{y}{3} = \frac{1}{1+2}$ e, por conseguinte $y = 1$.

Calculemos as áreas dos trapézios dados:

$$\begin{aligned} [ABCD] &= \frac{CD \cdot (BC + AD)}{2} \\ &= \frac{3 \cdot (4+7)}{2} \\ &= \frac{33}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [AEFG] &= \frac{FG \cdot (EF + AG)}{2} \\ &= \frac{2 \cdot ((x+5) + (x+7))}{2} \\ &= 2x + 12. \end{aligned}$$

Como $[ABCD] = [AEFG]$, temos $33 = 4x + 24$ e $DG = x = 9/4$.

24 *Produto de tangentes*

a) Verifique que $(1+\operatorname{tg} k)(1+\operatorname{tg}(45^\circ-k))=2$.

b) Dado que

$$(1+\operatorname{tg} 1^\circ)(1+\operatorname{tg} 2^\circ)\cdot\ldots\cdot(1+\operatorname{tg} 45^\circ)=2^n,$$

encontre n.

24 *Produto de tangentes – Solução*

a)

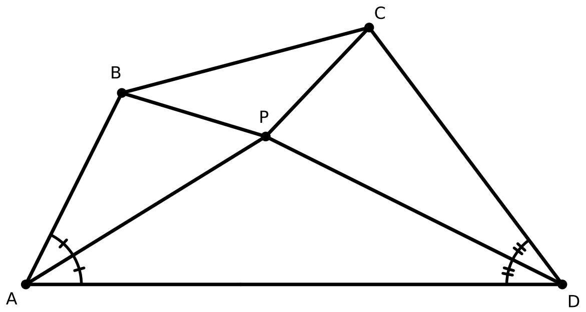
$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(45^\circ-k)+1 &= \frac{\operatorname{sen}(45^\circ-k)}{\cos(45^\circ-k)}+1\\
&= \frac{\operatorname{sen}45^\circ\cos k-\cos 45^\circ\operatorname{sen} k}{\cos 45^\circ\cos k+\operatorname{sen}45^\circ\operatorname{sen} k}+1\\
&= \frac{\cancel{\sqrt{2}/2}\cos k-\cancel{\sqrt{2}/2}\operatorname{sen} k}{\cancel{\sqrt{2}/2}\cos k+\cancel{\sqrt{2}/2}\operatorname{sen} k}+1\\
&= \frac{\dfrac{\cos k}{\cos k}-\dfrac{\operatorname{sen} k}{\cos k}}{\dfrac{\cos k}{\cos k}+\dfrac{\operatorname{sen} k}{\cos k}}+1\\
&= \frac{1-\operatorname{tg} k}{1+\operatorname{tg} k}+1\\
&= \frac{2}{1+\operatorname{tg} k}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, $(\operatorname{tg}(45^\circ-k)+1)(\operatorname{tg} k+1)=2$.

b) O item anterior nos permite agrupar os primeiros 44 termos do produto dado, através de pares da forma $(\operatorname{tg}(45^\circ-k)+1)(\operatorname{tg} k+1)$, em 22 produtos iguais a 2. Como $1+\operatorname{tg}45^\circ=2$, segue que $2^n=2^{23}$ e $n=23$.

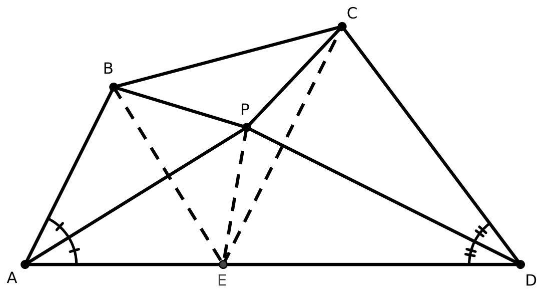
25 *Bissetrizes no quadrilátero*

No quadrilátero $ABCD$, o lado AD é tal que $AD = AB + CD$. Se P é o ponto de encontro das bissetrizes de $\angle BAD$ e $\angle CDA$, mostre que $BP = PC$.



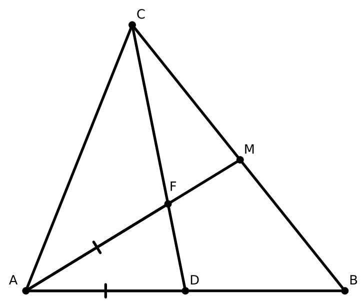
25 *Bissetrizes no quadrilátero – Solução*

Considere um ponto E sobre o lado AD de modo que $AE = AB$. Consequentemente, $ED = AD - AE = AD - AB = CD$. Além disso, como AP e BP são bissetrizes, temos $\triangle BAP \equiv \triangle APE$ e $\triangle PED \equiv \triangle PDC$ pelo caso de congruência $(L.A.L.)$. Daí, de $BP = PE$ e $PE = PC$, segue que $BP = PC$.



26 *Razão entre segmentos e ponto médio*

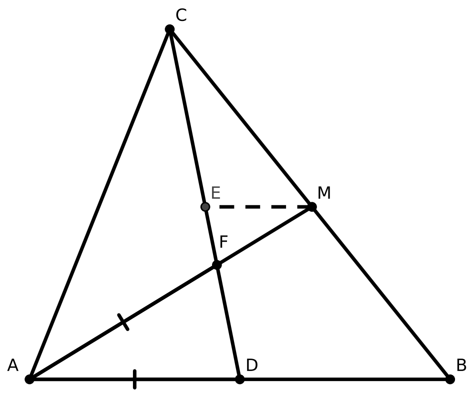
Sejam D um ponto no lado AB do triângulo $\triangle ABC$ e F a interseção de CD e da mediana AM. Se $AF = AD$, encontre a razão entre BD e FM.



26 *Razão entre segmentos e ponto médio – Solução*

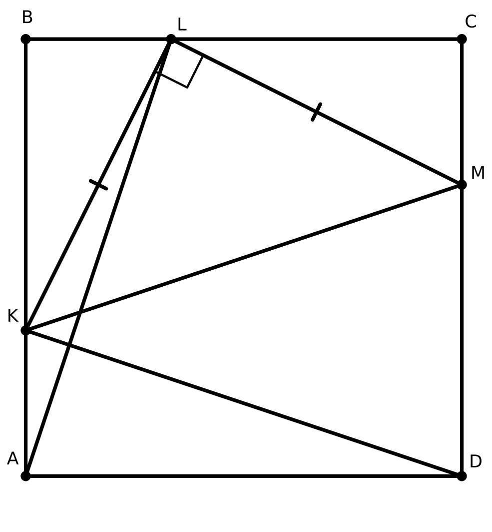
Seja E o ponto de interseção da reta paralela ao lado AB, que passa pelo ponto M, com o segmento CD. Como $ME \parallel AB$, segue que $\angle MED = \angle EDA$. Além disso, como $\angle AFD = \angle EFM$ e o triângulo $\triangle AFD$ é isósceles, podemos concluir que $\triangle EFM$ também é isósceles com $EM = FM$. Dado que M é ponto médio de BC e $EM \parallel BD$, o segmento EM é uma base média do triângulo $\triangle CDB$. Assim,

$$\frac{BD}{FM} = \frac{BD}{EM} = 2.$$



27 *Segmentos perpendiculares*

Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado e os pontos K, L e M estão sobre os lados AB, BC e CD de modo que $\triangle KLM$ é um triângulo isósceles retângulo em L. Prove que AL e DK são perpendiculares.



27 *Segmentos perpendiculares – Solução*

Sejam $\angle MLC = \alpha$ e $\angle BAL = \beta$. Como $\angle KLM = \angle KBL = \angle LCM = 90°$, segue que $\angle KLB = \angle LMC = 90° - \alpha$. Além disso, como $KL = LM$, os triângulos retângulos $\triangle LMC$ e $\triangle BLK$ são congruentes. De $BL = CM$ e $BK = LC$, segue que

$$AK = AB - BK = BC - LC = BL.$$

Os triângulos $\triangle KAD$ e $\triangle ABL$ são congruentes pois $AK = BL$, $AB = AD$ e $\angle ABL = \angle KAD$. Consequentemente, $\angle ADK = \beta$ e $\angle LAD = 90° - \angle BAL = 90° - \beta$. Como os ângulos $\angle LAD$ e $\angle KDA$ são complementares, segue finalmente que AL e KD são perpendiculares.

28 *Trocando números usando MDC e MMC*

Em uma lousa são escritos os 2014 inteiros positivos de 1 até 2014. A operação permitida é escolher dois números a e b, apagá-los e escrever em seus lugares os números $mdc(a,b)$(Máximo Divisor Comum) e $mmc(a,b)$(Mínimo Múltiplo Comum). Essa operação pode ser feita com quaisquer dois números que estão na lousa, incluindo os números que resultaram de operações anteriores. Determine qual a maior quantidade de números 1 que podemos deixar na lousa.

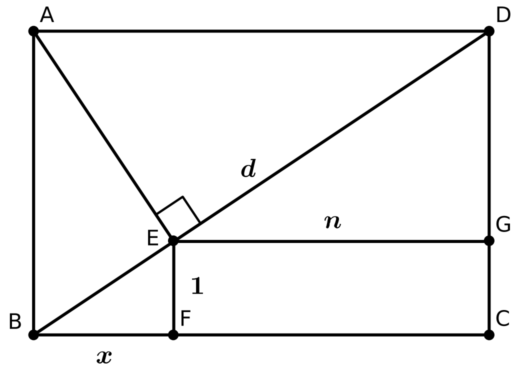
28 *Trocando números usando MDC e MMC – Solução*

A maior quantidade de números 1 que podemos deixar é 1007. Primeiro vamos mostrar como obtê-los. Para isso, basta tomar os pares de números consecutivos, $(1,2)$, $(3,4)$, $(5,6)$, $\ldots$, $(2013,2014)$ e realizar a operação em cada par. Sabendo que números consecutivos não têm fator comum, cada um dos máximos divisores comuns será 1.

Não é possível obter mais do que isso pois a quantidade de números pares não se altera no decorrer das operações. Isso ocorre pois, se operarmos com dois números pares, teremos como resultado dois números pares, se operarmos com dois números ímpares teremos como resultado dois números ímpares e se operarmos com um número par e um número ímpar obteremos também um número par e um número ímpar. Começamos com 1007 números pares e sempre teremos 1007 números pares.

29 *A diagonal de um retângulo*

No desenho abaixo, $ABCD$ é um retângulo e E é o pé da perpendicular traçada de A até a diagonal BD. As distâncias do ponto E aos lados DC, BC e AB são n, 1 e x, respectivamente. Seja ainda d o comprimento da diagonal BD.



a) Verifique que $DE = x^2\sqrt{1+x^2}$.

b) Verifique que $n = x^3$.

c) Verifique que $d^{2/3} - x^{2/3} = 1$.

29 *A diagonal de um retângulo – Solução*

a) Seja $y = DG$. Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle BEF$, temos $BE^2 = x^2 + 1$. Pelas relações métricas do triângulo retângulo $\triangle AEB$, temos

$$\begin{aligned} x^2 &= y \cdot 1 \\ &= y \\ AE^2 &= y(y+1) \\ &= x^2(x^2+1). \end{aligned}$$

Agora, pelas relações métricas no triângulo retângulo $\triangle ABD$, temos

$$x^2(1+x^2) = AE^2 = BE \cdot ED = \sqrt{1+x^2} \cdot ED,$$

ou seja, $ED = x^2\sqrt{1+x^2}$.

b) Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle EDG$, obtemos

$$n^2 = EG^2 = ED^2 - DG^2 = x^4(1+x^2) - x^4 = x^6.$$

Assim, $n = x^3$.

c)

$$\begin{aligned} d &= BE+ED \\ &= \sqrt{1+x^2}+x^2\sqrt{1+x^2} \\ &= (1+x^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

Daí, $d^{2/3} = 1+x^2 = 1+n^{2/3}$ e o resultado segue.

30 *Dígitos repetidos*

a) Usando que $\dfrac{10^n-1}{9} = \underbrace{111\ldots111}_{n}$, verifique que:

$$\underbrace{111\ldots111}_{4028} = \underbrace{222\ldots222}_{2014} + (\underbrace{333\ldots333}_{2014})^2.$$

b) Considere o número de 4028 dígitos

$$X = \underbrace{111\ldots111}_{2013}2\underbrace{888\ldots888}_{2012}96.$$

Calcule $\sqrt{X}$.

c) Mostre que o número $\underbrace{444\ldots444}_{n\ vezes}\underbrace{888\ldots888}_{(n-1)\ vezes}9$ é um quadrado perfeito.

d) Mostre que o número

$$\underbrace{111\ldots111}_{4028} - \underbrace{222\ldots222}_{2014}$$

é um quadrado perfeito.

30 *Dígitos repetidos – Solução*

a)

$$\begin{aligned} \underbrace{222\ldots222}_{2014} + (\underbrace{333\ldots333}_{2014})^2 &= \left(2\cdot\frac{10^{2014}-1}{9}\right) + \left(3\cdot\frac{10^{2014}-1}{9}\right)^2 \\ &= \frac{18(10^{2014}-1)}{81} + \frac{9\cdot 10^{4028} - 18\cdot 10^{2014}+9}{81} \\ &= \frac{9(10^{4028}-1)}{81} \\ &= \frac{10^{4028}-1}{9} \\ &= \underbrace{111\ldots111}_{4028}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
X &= \underbrace{111\ldots111}_{2013}2\underbrace{888\ldots888}_{2012}96\\
&= \underbrace{111\ldots111}_{2013}\cdot 10^{2015}+2\cdot 10^{2014}+\underbrace{888\ldots888}_{2014}+8\\
&= \frac{10^{2013}-1}{9}\cdot 10^{2015}+2\cdot 10^{2014}+8\cdot\frac{10^{2014}-1}{9}+8\\
&= \frac{10^{4028}-10^{2015}+18\cdot 10^{2014}+8\cdot 10^{2014}-8+9\cdot 8}{9}\\
&= \frac{10^{4028}+16\cdot 10^{2014}+64}{9}\\
&= \left(\frac{10^{2014}+8}{3}\right)^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\sqrt{X} &= \frac{10^{2014}+8}{3}\\
&= \frac{10^{2014}-1}{3}+3\\
&= \underbrace{333\ldots333}_{2014}+3\\
&= \underbrace{333\ldots333}_{2013}6.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\underbrace{444\ldots444}_{n\ vezes}\underbrace{888\ldots888}_{(n-1)\ vezes}9 &= \underbrace{444\ldots444}_{n\ vezes}\cdot 10^n+\underbrace{888\ldots888}_{n\ vezes}+1\\
&= 4\cdot\frac{10^n-1}{9}\cdot 10^n+8\cdot\frac{10^n-1}{9}+1\\
&= \frac{4\cdot 10^{2n}+4\cdot 10^n+1}{9}\\
&= \left(\frac{2\cdot 10^n+1}{3}\right)^2.
\end{aligned}$$

Como $\dfrac{2\cdot 10^n+1}{3}=\dfrac{6\cdot 10^n-6}{9}+1=\underbrace{666\ldots666}_{n\ vezes}+1$ é um inteiro, segue que o número dado é um quadrado perfeito.

d)

$$\begin{aligned}
\underbrace{111\ldots111}_{4028\ vezes}-\underbrace{222\ldots222}_{2014} &= \frac{10^{4028}-1}{9}-2\cdot\frac{10^{2014}-1}{9}\\
&= \frac{10^{4028}-2\cdot 10^{2014}+1}{9}\\
&= \left(\frac{10^{2014}-1}{3}\right)^2.
\end{aligned}$$

Para finalizar, basta provar que $\dfrac{10^{2014}-1}{3}$ é inteiro e para isso veja que

$$\frac{10^{2014}-1}{3}=3\cdot\frac{10^{2014}-1}{9}=\underbrace{333\ldots333}_{2014}.$$

31 *Radicais sucessivos*

Encontre as soluções da equação

$$\sqrt{x+\sqrt{4x+\sqrt{16x+\sqrt{\ldots+\sqrt{4^n x+3}}}}}=1+\sqrt{x}.$$

31 *Radicais sucessivos – Solução*

Elevemos a equação dada ao quadrado n vezes, obtendo

$$\begin{aligned}
\cancel{x}+\sqrt{4x+\sqrt{16x+\sqrt{\ldots+\sqrt{4^n x+3}}}} &= 1+2\sqrt{x}+\cancel{x}\\
\sqrt{4x+\sqrt{16x+\sqrt{\ldots+\sqrt{4^n x+3}}}} &= 1+2\sqrt{x}\\
\cancel{4x}+\sqrt{16x+\sqrt{\ldots+\sqrt{4^n x+3}}} &= 1+4\sqrt{x}+\cancel{4x}\\
\sqrt{16x+\sqrt{\ldots+\sqrt{4^n x+3}}} &= 1+4\sqrt{x}\\
\ldots &= \ldots\\
\sqrt{4^{n-1}x+\sqrt{4^n x+3}} &= 1+2^{n-1}\sqrt{x}\\
\cancel{4^{n-1}x}+\sqrt{4^n x+3} &= 1+2^n\sqrt{x}+\cancel{2^{2n-2}x}\\
\sqrt{4^n x+3} &= 1+2^n\sqrt{x}\\
\cancel{4^n x}+3 &= 1+2^{n+1}\sqrt{x}+\cancel{2^{2n}x}\\
3 &= 1+2^{n+1}\sqrt{x}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\sqrt{x}=2^{-n}$, ou seja, $x=2^{-2n}$.

32 *Valores possíveis das raízes*

Na equação $x^2+px+q=0$, os coeficientes p e q podem assumir quaisquer valores do intervalo $[-1,1]$. Quais são os possíveis valores das raízes de tal equação?

32 *Valores possíveis das raízes – Solução*

As raízes da equação são dadas por $r=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$. O valor máximo α de tal expressão deve ocorrer quando $-p$ e $\pm\sqrt{p^2-4q}$ forem máximos. Como $p^2-4q\le 1^2-4(-1)=5$ e $-p\le 1$, segue que

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1+\sqrt{1^2-4(-1)}}{2}\\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

De modo similar, podemos verificar que o valor mínimo é $-\alpha$. Se y é uma raiz de tal equação e m é tal que $|m|\le 1$, então $z=my$ é uma raiz de $x^2+pmx+qm^2$ e os coeficientes ainda estão em $[-1,1]$. Consequentemente, todos os os números do intervalo $[-\alpha,\alpha]$ podem ser raízes de tais equações e, como vimos no início, nenhum outro número fora deste intervalo pode sê-lo.

33 *Ímpares que de 5 em 5 e 9 em 9 somam quadrados perfeitos*

Os números que são inteiros positivos elevados ao quadrado são chamados *quadrados perfeitos*, por exemplo, 16 é um quadrado perfeito pois é igual a 4^2. Um fato curioso é que números que são quadrados perfeitos deixam apenas restos 0 ou 1 na divisão por 4. Com isso podemos provar, por exemplo, que 2014 não é um quadrado perfeito pois 2014 deixa resto 2 na divisão por 4.

a) Sabendo que todo número inteiro ímpar é da forma $2k+1$, mostre que os quadrados perfeitos ímpares deixam resto 1 na divisão por 8.

b) É possível colocar 45 números inteiros ímpares em sequência de modo que a soma de quaisquer 5 consecutivos e de quaisquer 9 consecutivos sejam quadrados perfeitos?

33 *Ímpares que de 5 em 5 e 9 em 9 somam quadrados perfeitos – Solução*

a) Desenvolvamos o produto notável relativo ao quadrado de um número ímpar $(2k+1)^2$:

$$\begin{aligned}(2k+1)^2 &= 4k^2+4k+1\\ &= 4k(k+1)+1.\end{aligned}$$

Como pelo menos um dentre k e $k+1$ é par, segue que $k(k+1)$ é par e que $4k(k+1)$ é múltiplo de $4\cdot 2=8$. Consequentemente, $4k(k+1)+1$ deixa resto 1 na divisão por 8.

b) Provaremos por contradição que não é possível. Suponha que seja possível encontrar tal sequência de números. Como a soma de 9 números ímpares é ímpar, separando todos os números da sequência em 5 grupos de 9 números consecutivos, podemos concluir que a soma total é igual à soma de 5 quadrados perfeitos de números ímpares. Assim, como cada um deles deixa resto 1 na divisão por 8, em virtude do item anterior, a soma total deixaria o mesmo resto que

$$1+1+1+1+1=5$$

na divisão por 8. A soma de 5 números ímpares também é um número ímpar. Consequentemente, separando a lista total em 9 grupos de cinco números consecutivos, podemos concluir que a soma total também é igual à soma de 9 quadrados perfeitos ímpares. Assim, como cada um deles deixa resto 1 na divisão por 8, novamente em virtude do item anterior, a soma total deixaria o mesmo resto que

$$1+1+1+1+1+1+1+1+1=9$$

na divisão por 8. Ou seja, a soma total deixaria resto 1 na divisão por 8.

Obtemos uma contradição, pois a soma dos 45 números está deixando dois restos diferentes, 1 e 5, na divisão por 8 e isso mostra que não é possível existir tal sequência.

34 *Soma de dois primos é múltiplo de seis*

Sejam p, q e r três números primos maiores que 3. Sabe-se que o número $p+q+r$ também é primo. Mostre que $p+q$, $p+r$ ou $q+r$ é um múltiplo de 6.

34 *Soma de dois primos é múltiplo de seis – Solução*

Primeiramente vejamos que, se um número n é maior que 3 e deixa resto 0, 2, 3 ou 4 na divisão por 6, então esse número não pode ser primo. Para isso, basta mostrar que o número pode ser escrito como o produto de dois números maiores que 1:

$$\begin{aligned} n &= 6m+0 = 2\cdot 3\cdot m;\\ n &= 6m+2 = 2\cdot(3m+1);\\ n &= 6m+3 = 3\cdot(2m+1);\\ n &= 6m+4 = 2\cdot(3m+2). \end{aligned}$$

Logo, números primos maiores que 3 deixam resto 1 ou 5 na divisão por 6. Apliquemos isso aos números do enunciado. Como $p+q+r$ também é primo, podemos concluir que os três não podem deixar todos restos iguais a 1 ou todos restos iguais a 5, pois isso faria com que $p+q+r$ fosse um múltiplo de 3 maior que 3 e naturalmente não poderia ser primo. Então, dentre os números p, q e r, pelo menos um deixa resto 1 e pelo menos outro deixa resto 5 na divisão por 6. Somando-os, chegamos a um número múltiplo de 6.

35 *Pontuações em um torneio de Xadrez*

Em um torneio de xadrez, todos os jogadores enfrentaram todos os outros exatamente uma vez. Em cada partida, o jogador ganha 1 ponto se vencer, $1/2$ se empatar e 0 ponto se perder. Ao final do torneio, um repórter somou as pontuações de todos os jogadores e obteve 190 pontos. Nesse tipo de torneio, o vencedor é aquele que faz mais pontos.

a) Quantos jogadores participaram do torneio?

b) André participou do torneio e fez 9 pontos. Mostre que, mesmo sem saber as outras pontuações, André não foi o vencedor do torneio.

35 *Pontuações em um torneio de Xadrez – Solução*

a) Seja J o número de jogadores. Cada partida vale no total 1 ponto, seja $1+0=1$ ou $1/2+1/2=1$. Então a pontuação total é igual ao número de partidas. Como cada um dos J jogadores enfrenta cada um dos outros $J-1$ jogadores, poderíamos pensar que o total de jogos seria $J(J-1)$ embates. Entretanto, cada partida acaba sendo contada duas vezes e portanto o total de partidas é $\frac{J(J-1)}{2}$. Usando o número obtido pelo jornalista, temos

$$\begin{aligned}\frac{J(J-1)}{2} &= 190\\ J(J-1) &= 380\\ &= 20\cdot 19.\end{aligned}$$

Daí $J=20$.

b) Como no total foram 190 pontos para 20 competidores, a média de pontos é $\frac{190}{20}=9,5$ pontos. Como André está abaixo da média de pontos e sempre existe um jogador que fez pelo menos tantos pontos quanto a média, podemos concluir que ele não foi o vencedor do torneio.

36 *Equação com radicais*

Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-6x+10}=5$.

36 *Equação com radicais – Solução*

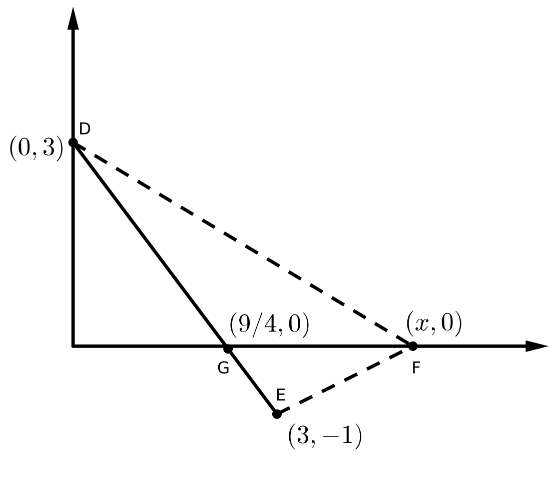
Primeira Solução: Podemos eliminar radicais elevando membros da equação abaixo ao quadrado:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-6x+10} &= 5\\
(\sqrt{x^2-6x+10})^2 &= (5-\sqrt{x^2+9})^2\\
x^2-6x+10 &= 25-10\sqrt{x^2+9}+x^2+9\\
10\sqrt{x^2+9} &= 6x+24\\
25(x^2+9) &= (3x+12)^2\\
25x^2+225 &= 9x^2+72x+144\\
16x^2-72x+81 &= 0\\
(4x-9)^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Consequentemente, $4x-9=0$, ou seja $x=\dfrac{9}{4}$. Para verificar que $x=\dfrac{9}{4}$ é a solução, basta escrever

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-6x+10} &= \sqrt{\frac{81}{16}+9}+\sqrt{\frac{81}{16}-6\cdot\frac{9}{4}+10}\\
&= \frac{15}{4}+\frac{5}{4}\\
&= 5.
\end{aligned}$$

Segunda Solução: Considere no plano cartesiano os pontos F, D e E de coordenadas $(x,0)$, $(0,3)$ e $(3,-1)$, respectivamente.



Podemos associar as distâncias entre alguns pontos aos radicais dados:

$$\begin{aligned}
DF &= \sqrt{x^2+9}\\
FE &= \sqrt{(x-3)^2+1^2}\\
&= \sqrt{x^2-6x+10}\\
DE &= \sqrt{9+16}\\
&= 5.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+9}+\sqrt{(x-3)^2+1^2} &= DF+FE\\ &\geq DE\\ &= 5.\end{aligned}$$

Com igualdade apenas quando D, F e E são colineares. Portando, o ponto F deve coincidir com a interseção G entre DE e o eixo Ox, ou seja, $x = 9/4$.

Observação: Um problema relacionado que admitiria a mesma abordagem por meio de Geometria Analítica seria o:

Qual o menor valor da função real

$$f(x) = \sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{(b-x)^2+c^2},$$

onde a, b, c são reais positivos?

Repetindo o argumento anterior, se $E = (b, -c)$, $D = (0, a)$ e $F = (x, 0)$, temos $f(x) = FE + FD$ e, pela desigualdade triangular, $f(x) \geq DE$ onde a igualdade ocorre apenas se D, F e E são colineares. O ponto de interseção de DE e o eixo Ox é $(\frac{ab}{a+c}, 0)$ e, portanto, o mínimo ocorre em $x = \frac{ab}{a+c}$.

37 *Números em sequência que se repetem*

Uma propriedade interessante do número 2013 é que 3 é o último dígito da soma $2+0+1$. Repetindo-se esse processo, isto é, escrevendo-se à direita o último dígito da soma dos três dígitos anteriores, teremos uma sequência:

$$2, 0, 1, 3, 4, 8, 5, 7...$$

a) Prove que começando com a sequência $2, 0, 1$, nessa ordem, podemos também encontrar os três números consecutivos $1, 2, 2$, nessa ordem.

b) Observe que se uma sequência de três números consecutivos aparecer novamente na mesma ordem, então toda a sequência se "repetirá" sucessivamente. Por exemplo, a sequência abaixo **não é a sequência do enunciado**, mas se repete a cada quatro números

$$\ldots\underline{1243}12431243\ldots12431243\ldots$$

Verifique que alguma sequência de três dígitos se repete na sequência do enunciado.

c) Suponha que na primeira aparição de “a,b,c” na sequência, o número imediatamente anterior seja x, e que na sua segunda aparição seja y, ou seja, na sequência iremos encontrar os números na seguinte ordem:

$$\dots, x, a, b, c, \dots, y, a, b, c\dots$$

Mostre que $x = y$.

d) Dado que $1,2,2$ apareceu na sequência, nessa ordem, mostre que eventualmente aparecerá novamente a sequência de dígitos $2,0,1$, também nessa ordem.

37 *Números em sequência que se repetem – Solução*

a) Basta continuarmos a escrever mais termos da sequência seguindo a regra do enunciado:

$$\mathbf{2,0,1}, 3, 4, 8, 5, 7, 0, 2, 9, \mathbf{1,2,2}, \dots$$

b) Veja que temos no máximo 10 valores possíveis para cada um dos três números a, b e c. Portanto, existem no máximo $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ sequências distintas de três números. Então, se tomarmos os 1003 primeiros números, teremos 1001 sequências de três números consecutivos desde os três primeiros até os três últimos deles. Como só existem 1000 sequências possíveis, alguma delas se repetirá, ou seja, existem três números consecutivos a, b, c que aparecem mais de uma vez na sequência.

c) Em virtude do aparecimento do dígito c, $x + a + b$ e $y + a + b$ devem ser iguais a c, $10 + c$ ou $20 + c$. Efetuando-se a subtração $x - y$, podemos obter -20, -10, 0, 10 ou 20. Como x e y são dígitos, essa diferença só poderá assumir o valor 0 e, consequentemente $x = y$.

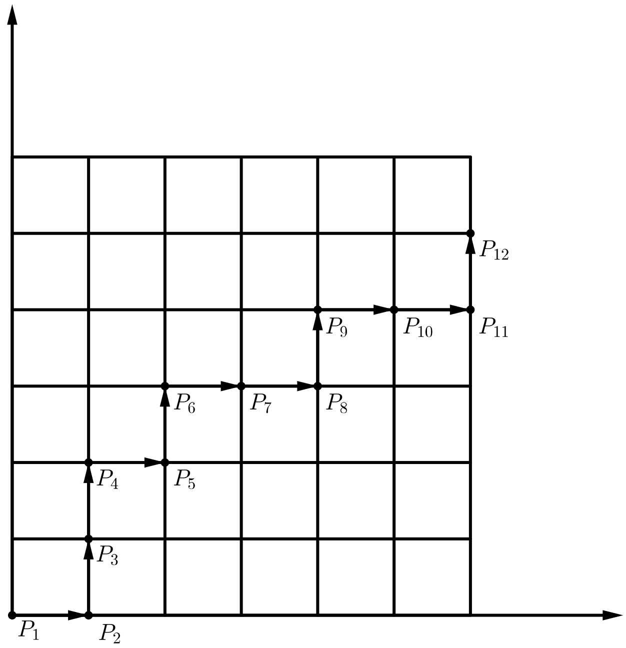
d) Pelo item *b*), sabemos que os números se repetem em algum momento. Pelo item *c*), vemos que se três números se repetem o dígito imediatamente anterior a eles também se repete e, por conseguinte, todos os anteriores correspondentes também se repetem. Logo, a tripla de dígitos $2,0,1$ irá se repetir. Como, pelo item *a*), partindo de $2,0,1$ chega-se a $1,2,2$, então quando $2,0,1$ se repetir, teremos “partido” de $1,2,2$ e chegado a $2,0,1$.

$$\mathbf{2,0,1}, 3, 4, 8, 5, 7, 0, 2, 9, \mathbf{1,2,2}, \dots 9, \mathbf{2,0,1}, 3, 4, 8, 5, 7, 0\dots$$

38 *Somando e subtraindo números de cobrinhas*

A folha do caderno de desenho de João é um enorme plano cartesiano quadriculado. Um dos seus desenhos preferidos é a criação de cobrinhas cobrindo os lados dos quadradinhos com sua caneta. Basicamente uma *cobrinha* é uma sequência de $2n$ pontos distintos P_1, P_2, …, P_{2n} escolhidos nos vértices dos quadradinhos dos tabuleiros de modo que pontos com índices consecutivos estão no lado de um mesmo quadradinho do tabuleiro. Por exemplo, na figura abaixo, temos uma cobrinha unindo os seguintes pontos do plano cartesiano:

$$\begin{aligned} P_1 &= (0,0), \quad P_2 = (1,0), \quad P_3 = (1,1), \quad P_4 = (1,2), \quad P_5 = (2,2), \quad P_6 = (2,3) \\ P_7 &= (3,3), \quad P_8 = (4,3), \quad P_9 = (4,4), \quad P_{10} = (5,4), \quad P_{11} = (6,4), \quad P_{12} = (6,5). \end{aligned}$$



Depois de desenhar cobrinhas no tabuleiro, João gosta de calcular a soma das coordenadas dos pontos de índices ímpares, isto é, dos pontos P_1, P_3, …, P_{2n-1} , e subtrair desse número o resultado da soma das coordenadas dos pontos de índices pares, isto é, dos pontos P_2, P_4, …, P_{2n}.

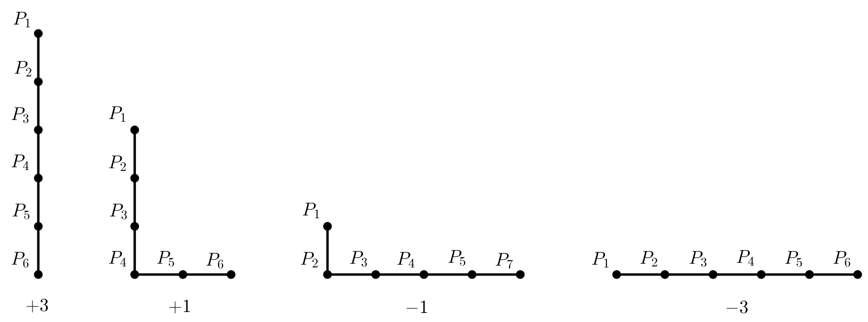
a) Para $n = 3$, ou seja, com 6 pontos, desenhe "cobrinhas" em que o resultado obtido por João seja -1, -3, 1 e 3.

b) Dependendo de n, quais os possíveis valores que João pode obter?

Observação: A "cobrinha" pode também conter pontos com coordenadas negativas, basta que ela "se mova" para a esquerda do eixo y ou para baixo do eixo x.

38 *Somando e subtraindo números de cobrinhas – Solução*

a) A figura a seguir mostra como obter os valores -1, 1, 3 e -3 para o caso $n = 3$.



b) Sejam $S(P_n)$ a soma das coordenadas do ponto P_n e S o número obtido por João. Queremos calcular os possíveis valores de S.

$$\begin{aligned} S &= (S(P_1) + S(P_3) + \ldots + S(P_{2n-1})) - (S(P_2) + S(P_4) + \ldots + S(P_{2n})) \\ &= (S(P_1) - S(P_2)) + (S(P_3) - S(P_4)) + \ldots + (S(P_{2n-1}) - S(P_{2n})). \end{aligned}$$

Veja que cada diferença $(S(P_x) - S(P_{x+1}))$ é igual a 1 ou -1 pois eles são vértices de um mesmo quadradinho da folha de caderno. Desse modo, S é adição de n parcelas ± 1, ou seja,

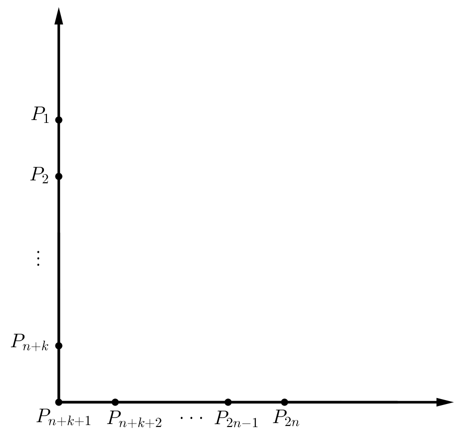
$$S = \pm 1 + \pm 1 + \ldots \pm 1.$$

A soma máxima é n, quando todos os termos forem $+1$ e a mínima é $-n$, quando todos forem -1. Será que S pode assumir qualquer valor entre n e $-n$? Note que se n é par, S é a soma de uma quantidade par de parcelas ímpares e isso naturalmente produz um número par. Se n é ímpar, S é a soma de uma quantidade ímpar de parcelas ímpares e isso naturalmente produz um número ímpar. Portanto, S só pode assumir os valores que diferem por um número par de n, ou seja, valores do conjunto

$$A = \{-n, -(n-2), \ldots, n-2l, \ldots, n-2, n\},$$

O exemplo anterior nos fornece uma ideia de como mostrar que qualquer número da forma $k = n - 2l$ do conjunto A pode ser obtido.

Desenhe uma “cobrinha” com comprimento $n+k = 2n-2l$ no eixo y e com comprimento $n-k = 2l$ no eixo x como indicado no desenho abaixo



Os segmentos no eixo y darão como contribuição o número $\dfrac{n+k}{2} = n-l$ e os do eixo x o número $-\dfrac{n-k}{2} = l$. O resultado total é $\dfrac{n+k}{2} - \dfrac{n-k}{2} = k$.

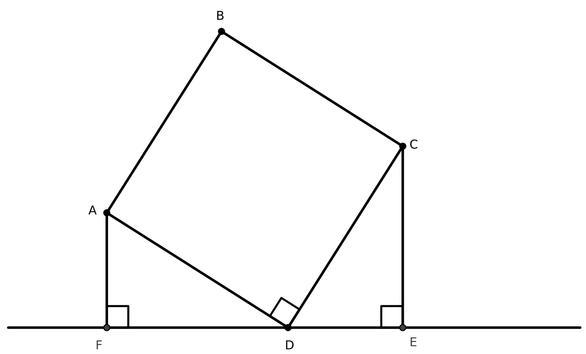
39 *Quadrado encostando na reta*

a) Todo número real ao quadrado é maior ou igual a 0, sendo 0 apenas se o número elevado ao quadrado for o próprio 0. Consequentemente, para quaisquer números reais a e b temos $(a-b)^2 \geq 0$. Prove que

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$$

com igualdade ocorrendo somente quando $a = b$.

b) A figura a seguir mostra um quadrado de lado 1 com um vértice em comum com uma reta horizontal. Considerando todas as posições em que o quadrado “encosta” apenas um de seus vértices na reta, qual a maior área possível do pentágono $ABCEF$ onde E e F são as projeções ortogonais dos vértices A e C na reta horizontal?



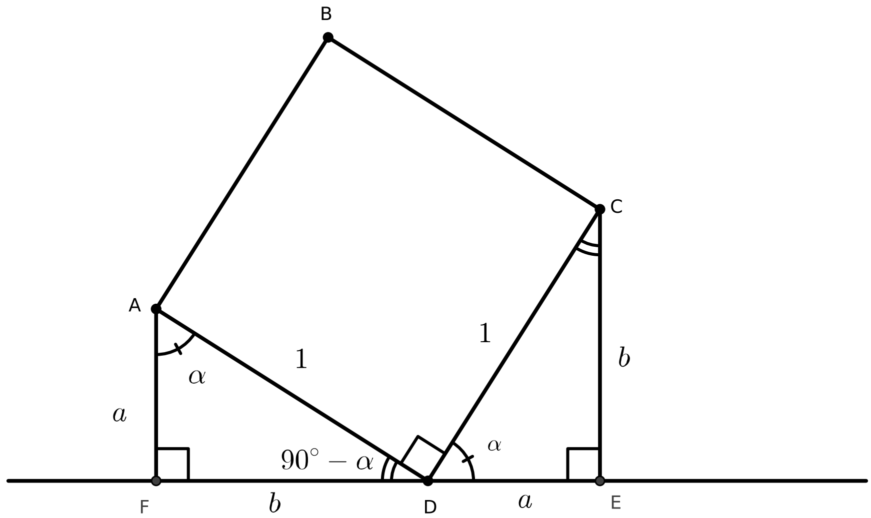
39 *Quadrado encostando na reta – Solução*

a) Desenvolvendo o produto notável, temos

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \geq ab.$$

Veja que a igualdade da última expressão acontece apenas quando há igualdade na primeira, ou seja, quando $a = b$.

b) Considere a figura abaixo.



Seja $\angle FAD = \alpha$. Como $\angle AFD = \angle ADC = 90^\circ$, temos:

$$\begin{aligned} \angle FDA &= 90^\circ - \angle FAD = 90^\circ - \alpha, \\ \angle CDE &= 180^\circ - \angle ADF - 90^\circ = \alpha, \\ \angle DCE &= 90^\circ - \angle CDE = 90^\circ - \alpha. \end{aligned}$$

Como os triângulos $\triangle FAD$ e $\triangle EDC$ possuem os mesmos ângulos e um lado correspondente de mesma medida, eles são congruentes pelo caso de congruência $(A.L.A.)$. Sejam a e b os comprimentos de seus catetos como indicado na figura. Assim, a área do pentágono $ABCEF$ é

$$[ABCEF] = [FAD] + [EDC] + [ABCD] = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + 1 \cdot 1 = ab + 1.$$

Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo $\triangle AFD$, sabemos que $a^2 + b^2 = 1$. Finalmente, usando o resultado do item a), obtemos:

$$\begin{aligned} [ABCEF] &= ab + 1 \\ &\leq \frac{a^2+b^2}{2} + 1 \\ &= \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

com igualdade apenas quando $a = b$. Portanto, a maior área possível do pentágono $ABCEF$ é $3/2$.

ÍNDICE DE PROBLEMAS