10 Anos

10ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS | OBMEP 2014

Somando novos talentos para o Brasil

OBMEP – Banco de Questões 2014

Alex Abreu, Johel Beltrán, Jonathan Farfán
Marcelo Hilário e Tertuliano Franco

Banco de Questões 2014

Impresso no Brasil/Printed in Brazil
Primeira edição e impressão

Texto e diagramação: Alex Abreu, Johel Beltrán, Jonathan Farfán, Marcelo Hilário, Tertuliano Franco

Este livro foi escrito usando o sistema LaTeX.

Capa: Rogério Kaiser

IMPA/OBMEP
Banco de Questões 2014
Rio de Janeiro, IMPA, 2014
176 páginas
ISBN 978-85-244-0388-0

Distribuição
IMPA/OBMEP
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
E-mail: contato@obmep.org.br
Página: www.obmep.org.br

CONTEÚDO

APRESENTAÇÃO

Em sua décima edição, a OBMEP tem a satisfação de preparar, mais uma vez, um Banco de Questões com problemas e desafios de matemática para alunos e professores. Este material pretende despertar o prazer pela matemática, estimular o aluno interessado com perguntas instigantes e proporcionar um treinamento para as provas da OBMEP.

Os problemas apresentados este ano foram concebidos pelos professores Alex Correa Abreu (UFF), Johel Beltrán (PUCP), Jonathan Farfán (PUCP), Marcelo Richard Hilário (UFMG) e Tertuliano Franco Santos Franco (UFBA). A eles o nosso agradecimento.

Lembramos que todas as edições do Banco de Questões, assim como as apostilas do Programa de Iniciação Científica da OBMEP estão disponíveis em formato eletrônico na página www.obmep.org.br.

Se você, leitor, encontrar uma solução para algum problema diferente da solução apresentada ao final do Banco de Questões, não deixe de mandá-la para o endereço bancodequestoes@obmep.org.br. Ela poderá ser publicada na página da OBMEP!

Boa diversão,

Claudio Landim
Coordenador Geral da OBMEP

PREFÁCIO

Querido leitor/leitora,

O Banco de Questões deste ano da OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – segue o mesmo padrão do banco do ano passado. Vem com noventa questões, sendo trinta de cada nível.

Para facilitar a busca de questões em meio ao livro, há um sumário no início, e também um índice remissivo ao final com os nomes dos problemas e respectivas páginas onde aparecem seus enunciados e soluções. Além disso, as questões do Nível 1 são numeradas como **1**, **2**, **3** etc. As questões do Nível 2 são numeradas como **1**, **2**, **3** etc. E as questões do Nível 3 são numeradas como **1**, **2**, **3** etc.

Aproveitamos para agradecer a colaboração de todos os envolvidos neste projeto.

Bom proveito!

A. Abreu, J. Beltrán, J. Farfán, M. Hilário e T. Franco

“A dúvida é o princípio da sabedoria.”

Aristóteles

“Não importa. Tente novamente.
Erre novamente. Erre melhor.”

Samuel Beckett

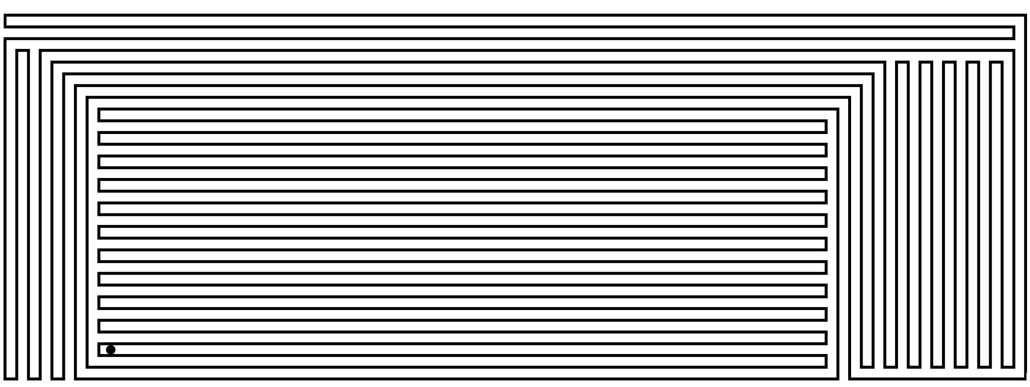
“Coisas das quais nunca se duvidou
jamais foram provadas.”

Denis Diderot

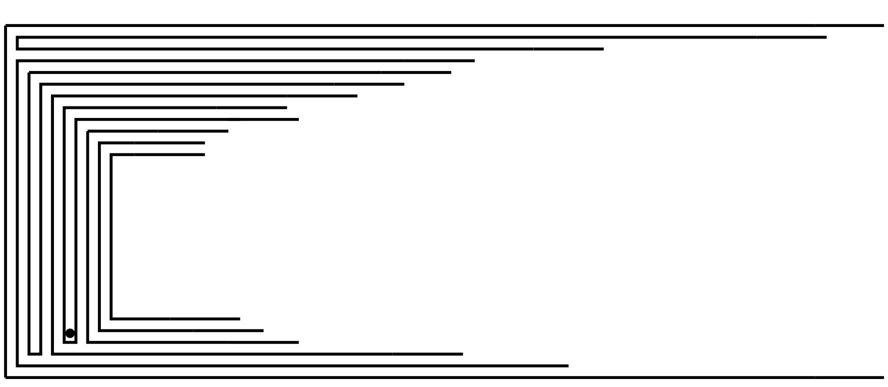
NÍVEL 1 – ENUNCIADOS

1 *Dentro ou fora?*

a) O ponto preto abaixo está dentro ou fora da região delimitada pelo caminho fechado?

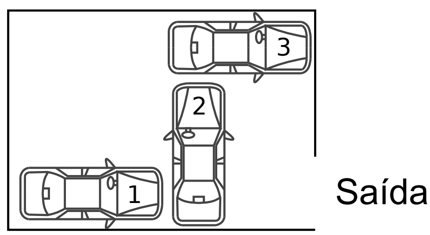


b) No caso abaixo, como o desenho era muito grande, não foi possível colocá-lo inteiramente aqui. Mesmo assim, sabendo que o caminho é fechado e não se corta, é possível dizer se o ponto está dentro ou fora da região delimitada pelo caminho. Descubra se o ponto está dentro ou fora da curva e justifique!

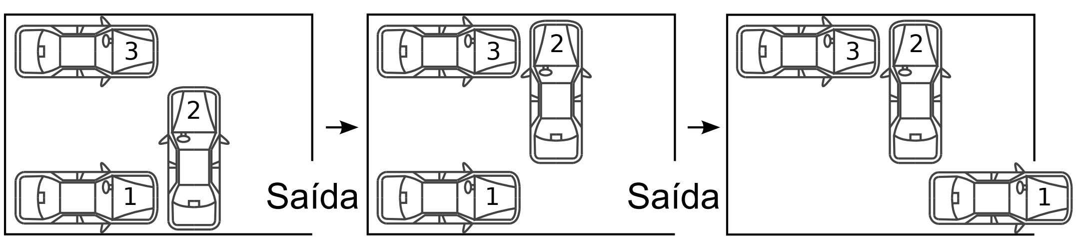


2 *Estacionamento complicado*

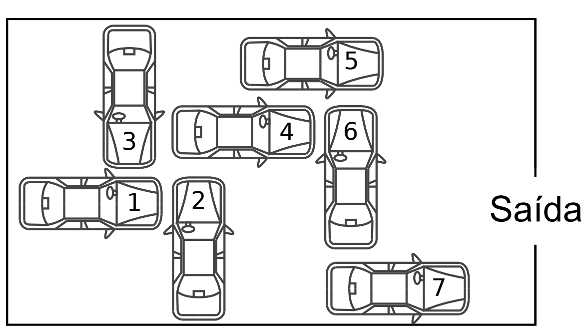
Num certo estacionamento, os automóveis foram estacionados conforme mostra a figura (de maneira bastante apertada!). O motorista do carro número 1 pede educadamente para que os outros motoristas se movam para que ele possa sair do estacionamento. Um carro se move por vez e, devido ao estreito espaço para manobrar, cada carro se move apenas para frente ou para trás.



Logo, para que o carro 1 possa sair, os carros foram movimentados na seguinte ordem: 3-2-1, como se vê na sequência de desenhos abaixo:

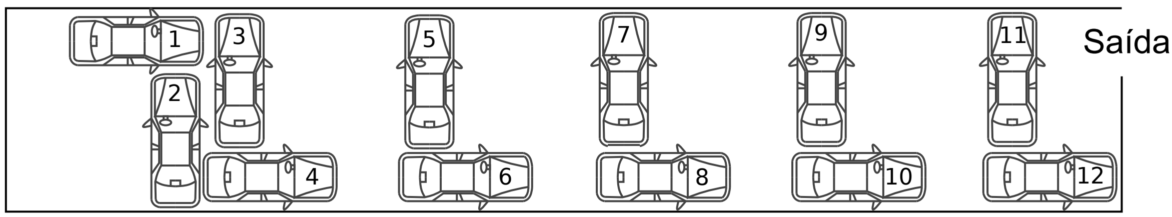


a) Dada a situação de carros estacionados abaixo, descreva uma sequência de seis movimentos de carros de tal forma que o carro 1 possa sair do estacionamento.



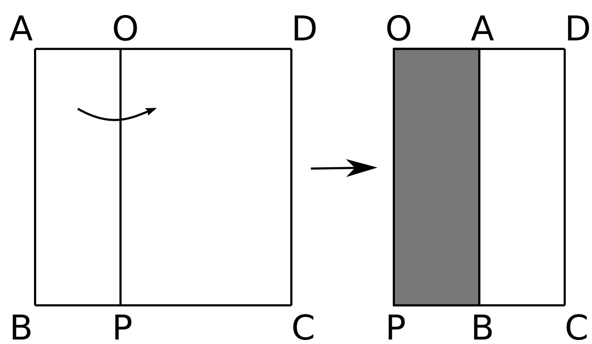
b) Existe alguma sequência com menos de seis movimentos para a solução do item anterior? Argumente o porquê!

c) Descreva uma sequência de movimentos para que o carro 1 possa sair do estacionamento, dada a situação abaixo de carros estacionados.

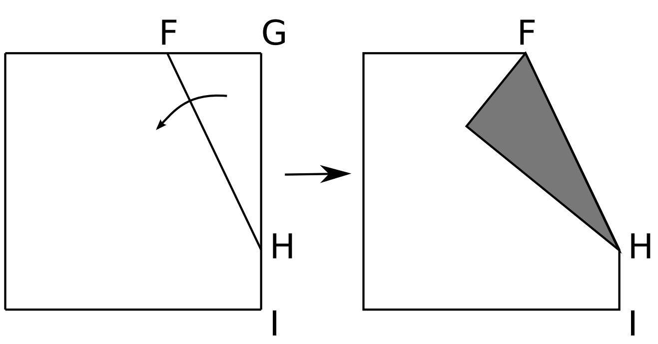


3 *Dobraduras*

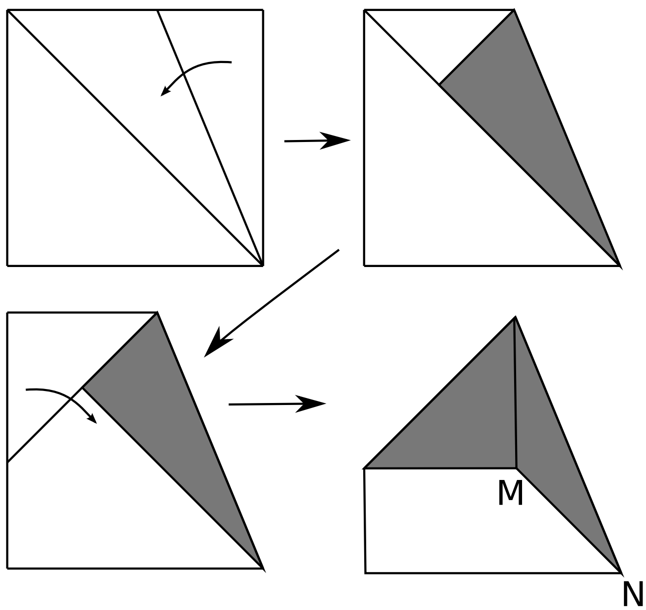
a) Um quadrado de papel de lado 1 foi dobrado conforme mostra a figura abaixo. Sabe-se que o comprimento do segmento que liga os pontos A e O é igual a $1/3$. Qual a área da parte da face superior do papel que continuou visível? (Ou seja, a parte em branco na figura abaixo à direita.)



b) Um outro quadrado, este de lado 5, foi dobrado conforme a figura abaixo, sendo o comprimento dos segmentos FG e HI iguais a 1. Após a dobradura, qual é a área da face superior do papel que continuou visível?

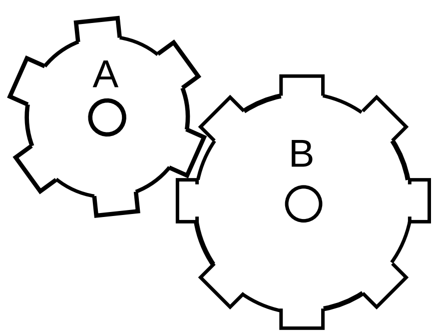


c) Um terceiro quadrado, de lado 1, foi dobrado duas vezes como mostra a figura abaixo. Qual o comprimento do segmento que liga os pontos M e N?



4 *Engrenando*

a) Na figura abaixo, são mostradas duas engrenagens encaixadas, uma engrenagem A com 6 dentes e outra engrenagem B com 8 dentes. Todos os dentes têm o mesmo tamanho. Se a engrenagem A der 12 voltas, quantas voltas dará a engrenagem B?

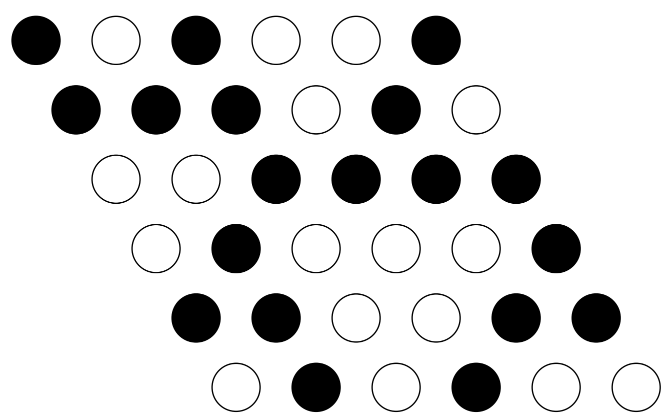


b) Considere 5 engrenagens encaixadas. A primeira tem 10 dentes, e está encaixada com uma segunda engrenagem com 20 dentes, que por sua vez está encaixada com uma terceira engrenagem que tem 40 dentes, que está encaixada com uma quarta engrenagem que tem 80 dentes, que por sua vez está encaixada com uma quinta engrenagem que tem 160 dentes. Quando a engrenagem maior der uma volta, qual a soma de voltas que serão dadas por todas as engrenagens?

c) Considere três engrenagens C, D e E, sendo que a engrenagem C está encaixada na engrenagem D e a engrenagem D está encaixada na engrenagem E. Cada uma delas tem uma certa quantidade de dentes, todos do mesmo tamanho. Sabe-se que quando a engrenagem C deu 160 voltas, a engrenagem D deu 1007 voltas, e a engrenagem E deu 38 voltas. Qual o menor número total de dentes das três engrenagens somadas para que isso possa acontecer?

5 *Qual a pintura?*

Seis círculos, pintados de preto ou branco, estão em fila. A cada passo, uma nova linha de seis círculos é desenhada abaixo e em diagonal. Os novos círculos da nova linha são pintados com uma certa regra simples, que só depende da linha anterior. Veja a figura abaixo e descubra qual é essa regra!



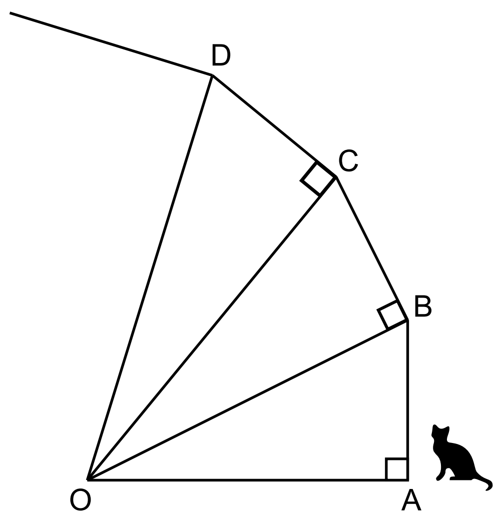
a) Como serão pintados os círculos da sétima linha?

b) Em algum momento todos os círculos de uma mesma linha estarão pintados de preto?

c) Como estarão pintados os círculos da linha de número 2014?

6 *Gata que salta*

Uma gata anda sempre em saltos de comprimento 1 m. Inicialmente, esta gata está no ponto A da figura abaixo, que está a uma distância de 2 m do ponto O. Em seguida, ela salta para o ponto B, distante 1 m do ponto A e tal que o segmento AB é perpendicular ao segmento OA. Em seguida, a gata salta do ponto B para o ponto C, distante 1 m do ponto B e tal que BC é perpendicular ao segmento OB, e assim por diante.



a) Qual o comprimento do segmento OB?

b) Qual o comprimento do segmento OC?

c) Após 2014 saltos, a que distância do ponto O estará a gata? Após quantos saltos ela estará a exatos 45 m do ponto O?

7 *O último algarismo*

Chamamos de “último algarismo de um número” como o algarismo mais à direita. Por exemplo, o último algarismo de 2014 é o algarismo 4.

a) Qual o último algarismo de 11^{11}?

b) Qual o último algarismo de 9^9? E qual o último algarismo de 9219^{9219}?

c) Qual o último algarismo de 2014^{2014}?

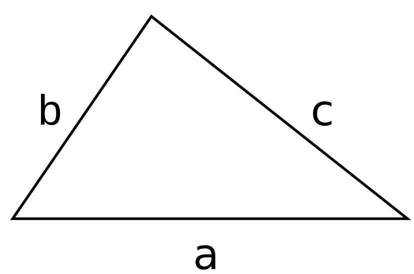
8 *Ora bolas*

a) Têm-se 3 urnas inicialmente vazias. Escolhe-se uma delas ao acaso com igual probabilidade ($1/3$ para cada). Em seguida, coloca-se uma bola dentro da urna escolhida. Repete-se o processo até que uma mesma urna tenha duas bolas. Qual a probabilidade de que quando o processo termine, a quantidade total de bolas dentro de todas as urnas seja igual a 2?

b) Têm-se agora 2014 urnas inicialmente vazias. Repetindo o mesmo processo de antes, qual a probabilidade de que no final haja exatamente 10 bolas dentro das urnas?

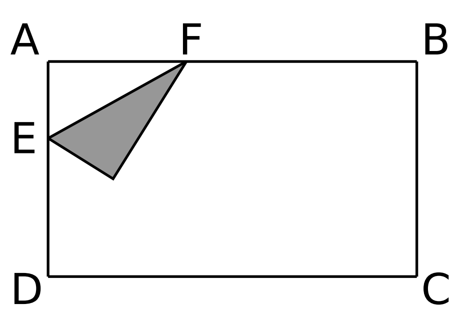
9 *Dobraduras e perímetros*

Num triângulo de lados a, b e c, vale sempre que a soma de dois lados é maior do que o terceiro lado. Por exemplo, no triângulo abaixo, de lados a, b e c,

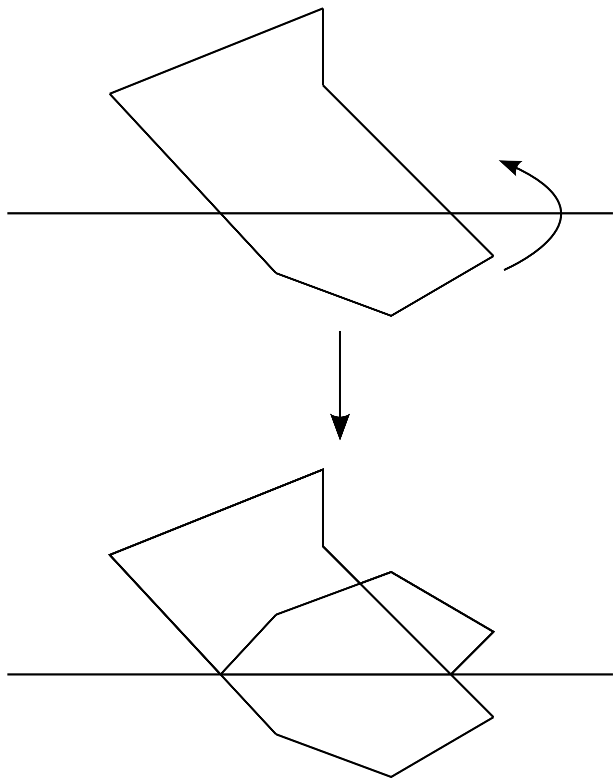


vale a desigualdade $a < b + c$. Esta é a famosa Desigualdade Triangular.

a) Um retângulo de papel foi dobrado conforme mostra a figura abaixo. Mostre que o perímetro (soma dos comprimentos dos lados) do polígono $FBCDE$ obtido é menor do que o perímetro do retângulo $ABCD$ original.



b) Um polígono de papel foi dobrado conforme a figura a seguir. Mostre que o perímetro do polígono formado é menor do que o perímetro do polígono original.



10 *Professora Lorena e os quadrados*

A professora Lorena ensinou a seus alunos o seguinte produto notável: para quaisquer números reais a e b,

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Por exemplo, $4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$. Por outro lado, $(4+3)(4-3) = 7 \times 1 = 7$. Usando este ensinamento da professora Lorena,

a) Calcule

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + 96^2 - 95^2 + \cdots + 2^2 - 1^2.$$

b) Encontre dois números inteiros maiores do que 1 cujo produto é 999.991.

11 *O mínimo para ter certeza*

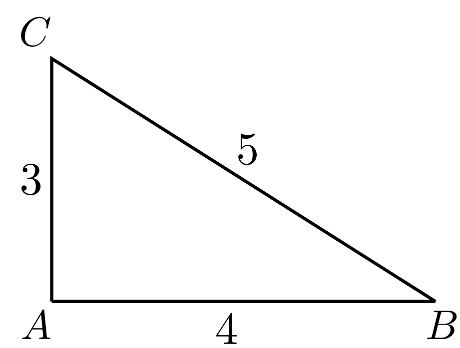
Mirtes trabalha num setor com mais sete colegas, sendo portanto oito ao todo. No dia 1^{o} de janeiro, Mirtes comenta que neste ano dois dos funcionários do setor farão aniversário no mesmo dia da semana, pois há sete dias em uma semana e oito colegas.

a) Usando esta ideia de Mirtes, descubra qual é o número mínimo de funcionários que o setor precisaria ter para garantir que duas pessoas tenham o mesmo signo.

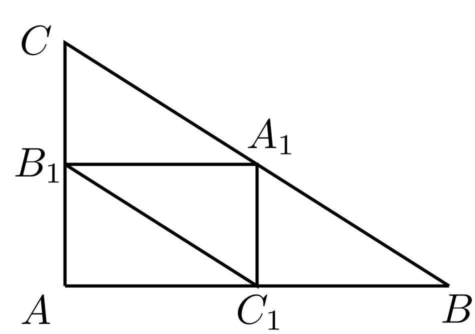
b) Qual o número mínimo de funcionários que o setor precisaria ter para garantir que pelo menos quatro deles fizessem aniversário no mesmo dia da semana neste ano?

12 *Triângulo dentro de triângulo*

Dona Bete desenha um triângulo de lados 3, 4 e 5, como mostra a figura abaixo:

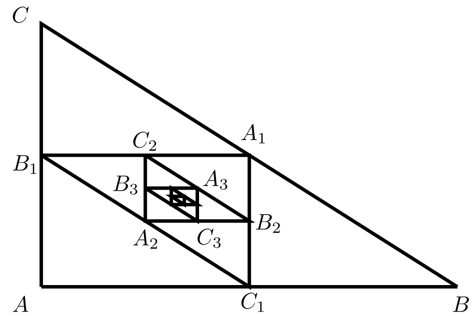


Em seguida, Dona Bete marca os pontos médios de cada lado e desenha um novo triângulo como mostra a figura abaixo.



a) Calcule a área do triângulo $A_1B_1C_1$.

b) Seu Maurício nota um interessante padrão e repete o processo, como mostra a figura, sempre marcando e ligando os pontos médios de cada novo triângulo.



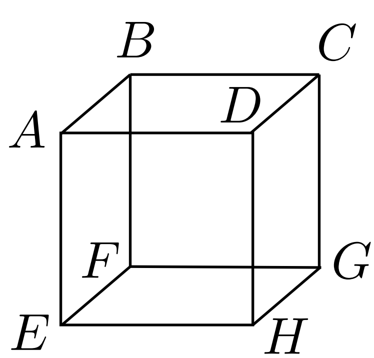
Calcule a área do triângulo $A_{2014}B_{2014}C_{2014}$.

13 *Araceli e Luana*

Usando os algarismos distintos a, b e c, Araceli escreveu o número abc, e Luana escreveu os números ab, bc e ca. Encontre os algarismos a, b e c, sabendo que a soma dos números escritos por Luana coincide com o número escrito por Araceli.

14 *Triângulos no cubo*

A figura seguinte mostra um cubo.

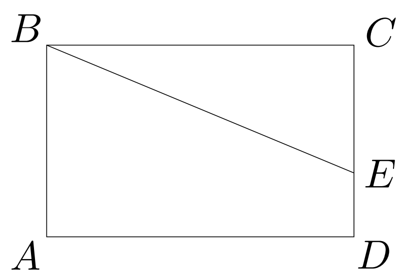


a) Calcule o número de triângulos cujos três vértices são vértices do cubo.

b) Quantos desses triângulos não estão contidos em uma face do cubo?

15 *Proporção de áreas*

Na figura, $ABCD$ é um retângulo e E é um ponto sobre o segmento $\overline{CD}$ tal que $|CE| = 2|DE|$.



Se a área do triângulo BCE é 10 m^2, calcule a área do retângulo $ABCD$.

16 *A lista de Paul*

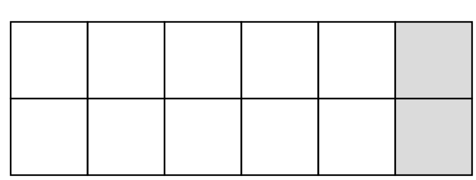
Paul escreveu a lista dos 100 menores números inteiros positivos maiores que 10 e que têm todos seus algarismos iguais a 9 com exceção do último (o algarismo das unidades) que é igual a 7.

(a) Quantos algarismos 9 escreveu Paul na lista?

(b) Se S é a soma de todos os números na lista, qual a soma dos algarismos de S?

17 *Os doze números de Pedro*

Pedro tem um tabuleiro 6×2, contendo as duas casas mais à direita pintadas em cinza como ilustrado abaixo:



Ele deve preencher todas as casas do seu tabuleiro com os números de 1 a 12 de modo que:

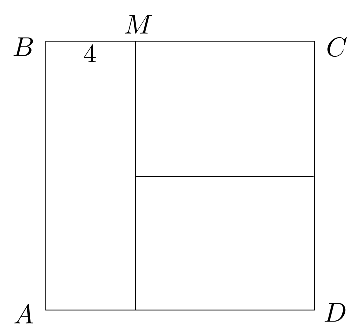
- em cada linha, os 6 números, lidos da esquerda para a direita, estejam em ordem crescente; e
- em cada coluna, o número de cima seja menor que o número de baixo.

a) Mostre que a maior soma que Pedro pode conseguir nas casas pintadas é 23. Mostre também como ele pode atingir essa soma.

b) Mostre que a menor soma que Pedro pode conseguir nas casas pintadas é 18. Mostre também como ele pode atingir essa soma.

18 *Quadrado dividido em retângulos*

Na figura seguinte, o quadrado $ABCD$ foi dividido em três retângulos de mesma área.



Se o comprimento do segmento BM é igual a 4, calcule a área do quadrado $ABCD$.

19 *Os sinais de Luís*

Na expressão

$$*1*2*3*4*5*6*7*8*9*10,$$

Luís substituiu cada símbolo $*$ por um sinal $+$ ou um sinal $-$, utilizando cinco sinais de cada tipo. Ao calcular o valor da expressão, o resultado obtido foi um número positivo N, de dois algarismos, que é múltiplo de 7.

a) Mostre que N é menor que 25.

b) Mostre que N é igual a 21.

c) Indique uma forma de designar os sinais $+$ e $-$ para obter o valor $N = 21$.

20 *Ajudemos o Pepi*

Pepi deve colocar todos os números de 1 a 8 no seguinte tabuleiro de modo que a soma dos dois números colocados em cada coluna seja sempre o mesmo valor S.

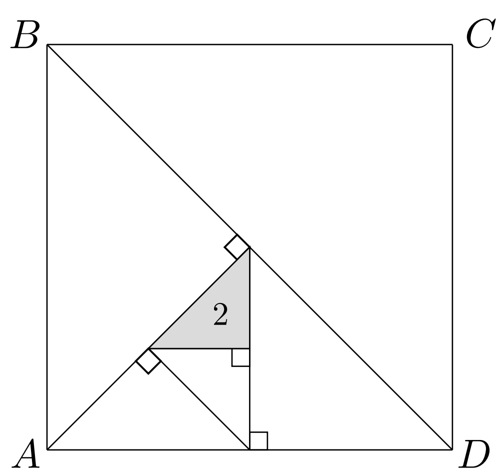
a) Mostre a Pepi um modo de colocar os números.

b) Convença Pepi de que o único valor possível para S é 9.

c) Calcule a quantidade de formas em que Pepi pode colocar os números.

21 *Quadrado dividido em triângulos*

O quadrado $ABCD$ é dividido em 6 triângulos retângulos isósceles como indica a figura a seguir:



Se a área do triângulo pintado é 2, calcule a área do quadrado.

22 *As filhas de Francisco*

Francisco tem 3 filhas: Alina, Valentina e Civela. Um fato curioso é que as três filhas nasceram no dia 18 de março. Hoje, 18 de março de 2014, é o aniversário delas. Ao notar um outro fato curioso, Francisco diz:

– Alina, a sua idade é agora o dobro da idade de Valentina.

a) Mostre que isso nunca poderia ter acontecido antes e que, depois do próximo aniversário de Valentina, isso não acontecerá nunca mais.

Em seguida, Alina, que era muito esperta, exclamou:

– Papai, há exatamente 10 anos, a idade de uma de nós três era o dobro da idade de uma outra, e dentro de 10 anos, o mesmo fato acontecerá novamente!

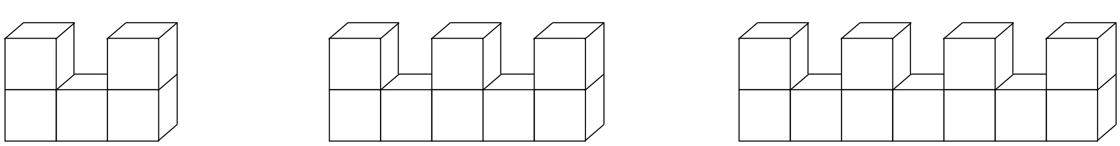
b) Sabe-se que a mais velha das filhas tem mais de 30 anos. Quantos anos Civela tem?

23 *Os adesivos de Ximena*

Ximena deseja numerar as páginas de um caderno. Para isto, ela tem uma grande quantidade de adesivos com os algarismos 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, mas tem somente 100 adesivos com o algarismo 2. Determine até que página Ximena pode numerar este caderno.

24 *Construindo muros*

Utilizando-se cubos de 1 m de aresta, são construídos muros conforme ilustrado na figura abaixo:



2 pontas 3 pontas 4 pontas

Os muros da figura possuem 2, 3 e 4 pontas.

a) Calcule o número de cubos necessários para construir um muro com 5 pontas.

b) Calcule o número de cubos necessários para construir um muro com 2014 pontas.

c) Decide-se pintar a superfície do muro com 2014 pontas (sem pintar a base). Calcule a área total pintada.

25 *Multiplicando números grandes*

Joãozinho escreveu uma multiplicação no quadro e, logo depois, Pedrinho substituiu os algarismos por símbolos e letras como mostrado a seguir:

$$\begin{array}{r} \star\star\star\star\star\star\star A \\ \times \quad A \\ \hline BBBBBBBBB \end{array}$$

A letra A representa o mesmo algarismo, ou seja, onde agora ela aparece, antes estava o mesmo algarismo. O mesmo vale para a letra B. Por outro lado, as estrelinhas $\star$ podem representar algarismos diferentes uns dos outros. Qual foi a multiplicação que Joãozinho escreveu?

26 *Completando o tabuleiro*

Complete o tabuleiro abaixo com as letras A, B, C, D e E de modo que não haja letras iguais numa mesma linha, coluna ou diagonal.

A	B	C	D	E
	A	B	C	

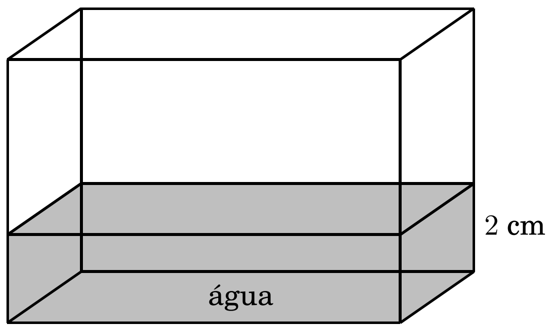
Observação: Aqui, diagonal também refere-se às diagonais menores, ou seja, são diagonais, por exemplo, as casas marcadas com estrelinhas a seguir

	$\star$			
		$\star$		
			$\star$	
				$\star$

				$\star$
			$\star$	
		$\star$		

27 *Água na caixa*

Maria encheu uma caixa em forma de paralelepípedo retangular com 160 ml de água e a apoiou em uma das suas faces, como na figura abaixo:



Maria, então, mediu a altura que a água atingiu e obteve 2 cm. Depois, ela repetiu o experimento apoiando a caixa em outras faces e obteve alturas de 4 cm e 5 cm. Quais são as dimensões (largura, altura e comprimento) da caixa?

28 *Dinheiro alienígena*

O dinheiro no planeta Zoltan vem em notas de 5 e 7.

a) Qual é a menor quantidade de dinheiro que você precisa dar para pagar um pedaço de pizza que custa 1 recebendo integralmente o seu troco? (A pizzaria tem notas de 5 e 7 em grande quantidade.) Por exemplo, dar uma nota de 7 não serve pois não tem como receber 6 de troco.

b) Máquinas automáticas em Zoltan aceitam apenas pagamentos exatos (não dão troco). Liste todos os inteiros positivos que NÃO podem ser usados como preços nestas máquinas.

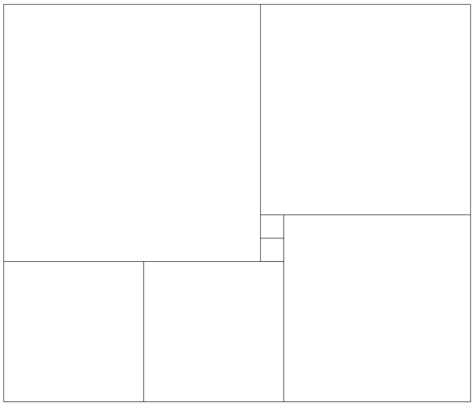
29 *Em quantos zeros termina?*

a) Quantos zeros estão no final do número $A = 2^5 \times 3^7 \times 5^7 \times 11^3$?

b) Quantos zeros estão no final do número $B = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 137$?

30 *Quadrados de Sofia*

Sofia montou um retângulo usando vários quadrados de diferentes tamanhos conforme mostra a figura a seguir:

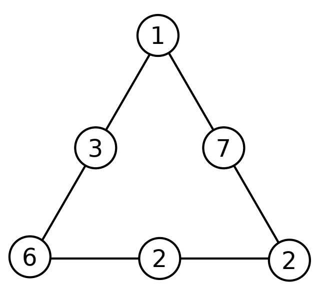


Se os lados dos quadrados menores medem 1 cm, qual a área do retângulo formado?

NÍVEL 2 – ENUNCIADOS

1 *Mantenha a soma*

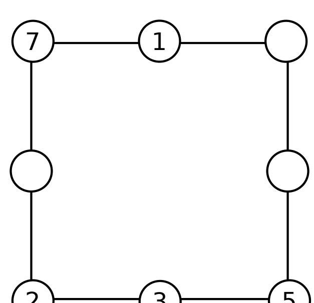
Amanda desenhou a seguinte figura:



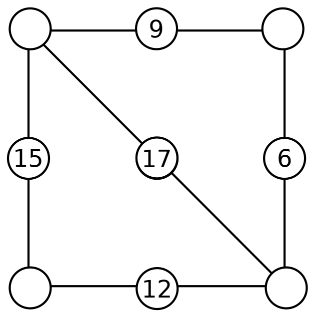
Observe que a soma ao longo de qualquer lado do triângulo acima é sempre a mesma, pois, como podemos verificar,

$$1+3+6 \;=\; 6+2+2 \;=\; 1+7+2\,.$$

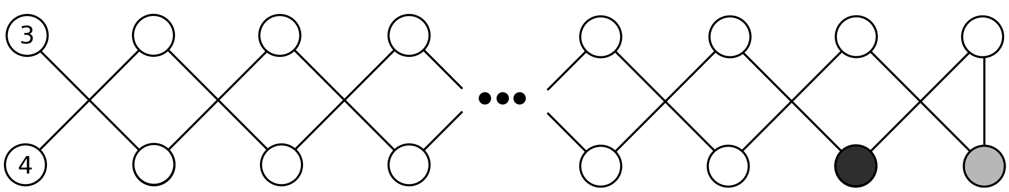
a) Complete os números que faltam nos círculos da figura abaixo de modo que as somas ao longo de qualquer lado do quadrado sejam sempre as mesmas.



b) Encontre uma maneira de colocar os números nos círculos de maneira que as somas ao longo de qualquer linha sejam sempre as mesmas. Há mais de uma solução?

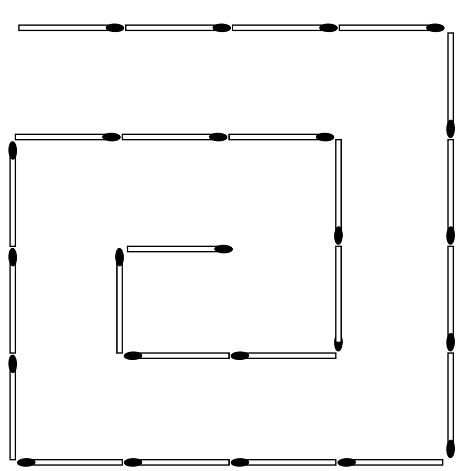


c) Na figura abaixo, que foi desenhada apenas parcialmente (por falta de espaço!), também vale que a soma ao longo de cada segmento é sempre a mesma. Entretanto, Amanda apagou todos os números exceto os dois números mostrados na figura (3 e 4). Sabe-se que há 40 círculos no desenho. É possível descobrir quais números estavam nos círculos pintados de cinza claro e cinza escuro?



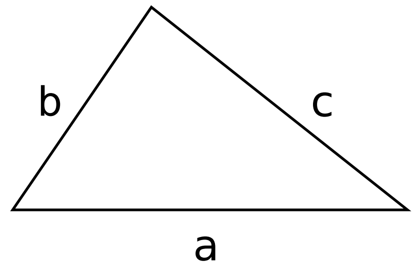
2 *Mova os fósforos!*

Movendo exatamente quatro fósforos, transforme a espiral abaixo em três quadrados de tamanhos distintos.



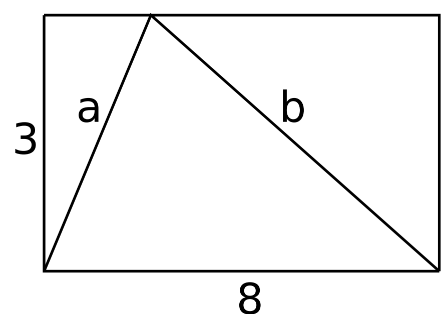
$\boxed{3}$ *Desigualdades e triângulos*

a) Num triângulo de lados a, b e c, vale sempre que a soma de dois lados é maior do que o terceiro lado. Por exemplo, no triângulo a seguir, de lados a, b e c,



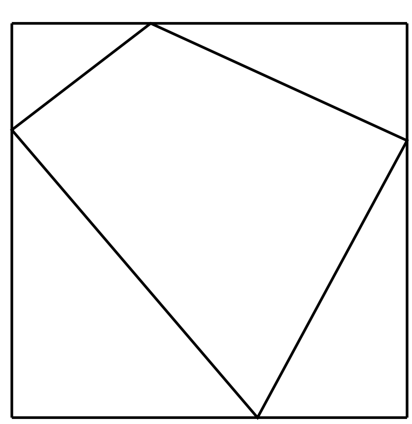
vale a desigualdade $a < b + c$. Além disso, valem outras duas desigualdades. Quais são?

b) Na figura abaixo pode-se observar um retângulo cujo lado menor mede 3 e cujo lado maior mede 8.



Suponha que $a \neq b$. Mostre que $a + b > 10$. Sugestão: copie um retângulo igual ao desenhado em cima dele!

c) Em cada lado de um quadrado é escolhido um ponto. Em seguida, estes pontos são ligados formando um quadrilátero, conforme mostrado na figura abaixo:



Mostre que o perímetro deste quadrilátero (soma dos comprimentos dos lados) é maior ou igual a duas vezes o comprimento da diagonal do quadrado.

Sugestão: desenhe vários quadrados iguais ao quadrado dado!

4 *Números invertidos*

O número 1089 tem uma propriedade interessante. Quando fazemos a multiplicação deste número por 9, como é mostrado a seguir,

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 8 & 9 \\ & & \times & 9 \\ \hline 9 & 8 & 0 & 1 \end{array}$$

obtemos o número 9801 que é o número 1089 com os seus algarismos escritos da esquerda para direita!

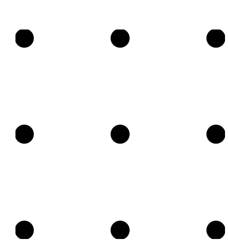
a) Encontre um número de cinco algarismos $ABCDE$ tal que sua multiplicação por 9 seja igual ao número que tem os dígitos de $ABCDE$ escritos da direita para a esquerda, ou seja,

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ & & & \times & 9 \\ \hline E & D & C & B & A \end{array}$$

b) Encontre todos os números de sete algarismos cuja multiplicação por 9, como anteriormente, inverte a posição de seus algarismos.

5 *Ponto e linha sobre plano*

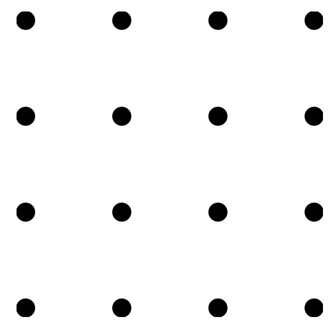
O grande pintor Kandinskemílio desenhou os seguintes pontos no papel.



a) Sem levantar o lápis do papel, desenhe quatro linhas retas que passem por todos os nove pontos da figura desenhada por Kandinskemílio.

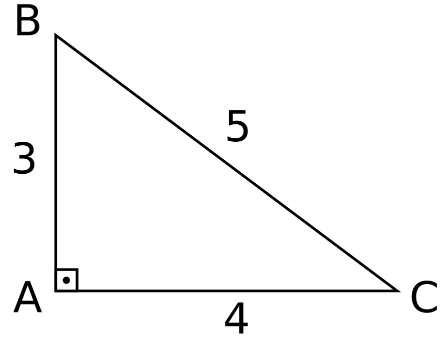
b) Prove que não é possível fazer o mesmo, descrito no item anterior, com apenas três linhas retas.

c) Sem levantar o lápis do papel, desenhe seis linhas retas que passem por todos os dezesseis pontos da figura abaixo.

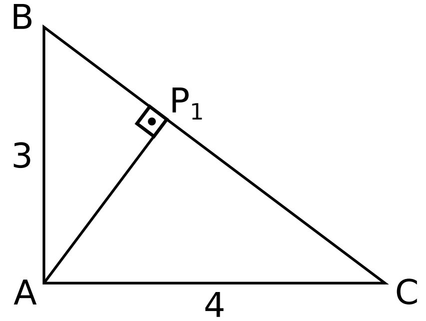


6 *Jussara gosta de fazer cópias reduzidas*

A professora Jussara gosta de fazer cópias reduzidas. Ela começa desenhando o triângulo retângulo ABC abaixo:



Em seguida, a professora Jussara traça um segmento AP_1 de forma que AP_1 seja perpendicular a BC, conforme mostra a figura abaixo.



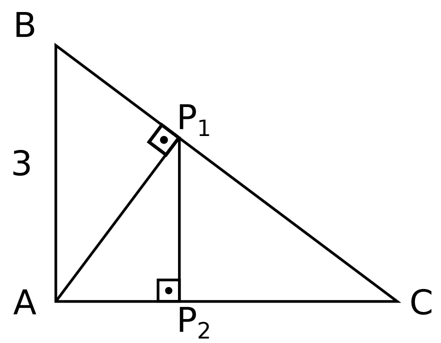
Jussara afirma então que o triângulo AP_1C é semelhante ao triângulo ABC (ou seja, tem ângulos correspondentes iguais).

a) Mostre que a professora Jussara está certa!

b) Calcule o comprimento do segmento AP_1.

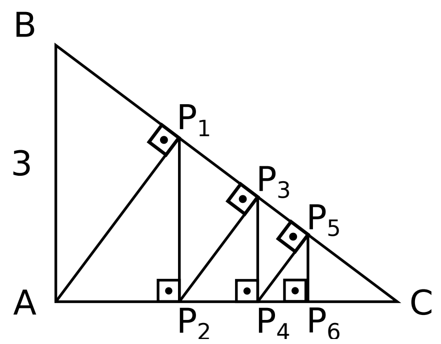
c) Calcule a razão entre a área do triângulo ABC e a área do triângulo AP_1C.

d) A professora Jussara repete o processo, agora traçando um segmento P_1P_2 perpendicular ao lado AC, conforme a figura abaixo.



Qual a razão entre as áreas dos triângulos P_1P_2C e AP_1C?

e) A professora Jussara repete o processo mais duas vezes, conforme mostra a figura abaixo.



Qual a área do triângulo P_5P_6C?

7 *Maior ou menor?*

Qual número é maior, 2^{300} ou 3^{200}? Bem, calcular explicitamente tais números é algo bem difícil, mesmo com a ajuda de uma calculadora ou de um computador. Entretanto, podemos descobrir sem calculá-los explicitamente! Observe:

$$2^{300} = 2^{3\cdot 100} = \left(2^3\right)^{100} = 8^{100}\,,$$

e observe também que

$$3^{200} = 3^{2\cdot 100} = \left(3^2\right)^{100} = 9^{100}\,.$$

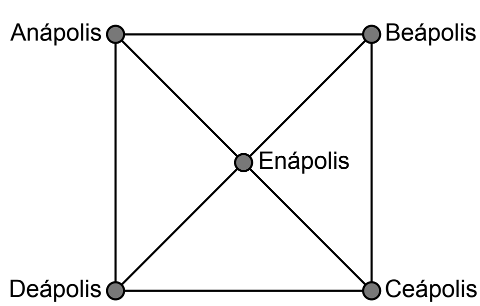
Como $8^{100} < 9^{100}$, concluímos que $2^{300} < 3^{200}$.

a) Qual número é maior, 2^{40} ou 3^{28} ?

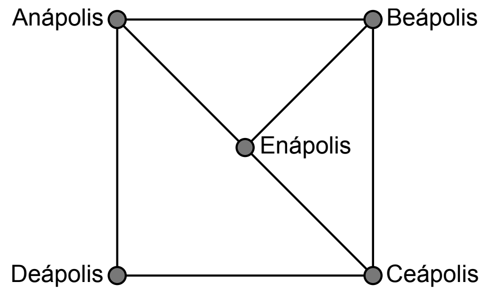
b) Qual número é maior, 31^{11} ou 17^{14} ?

8 *Drª. Maria Amélia viaja*

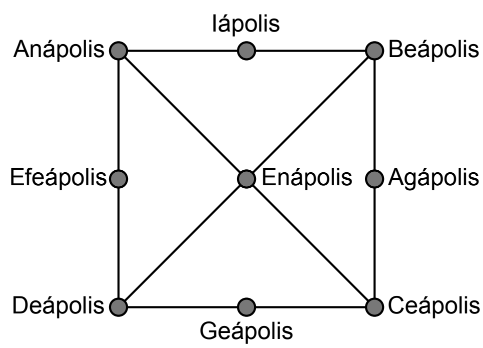
a) A doutora Maria Amélia viaja para atender seus pacientes. Em seu primeiro dia de trabalho, ela tem que atender pacientes nas cidades Anápolis, Beápolis, Ceápolis, Deápolis e Enápolis. As cidades são ligadas por estradas, como mostra a figura abaixo. Para atender os pacientes mais rapidamente, a doutora Maria Amélia precisa passar por cada cidade exatamente uma vez, e no fim voltar para a cidade de onde começou o percurso. A doutora começa em Anápolis. Mostre como ela pode fazer isso!



b) A doutora Maria Amélia precisa fazer o mesmo, mas agora uma estrada foi interditada para manutenção. Mostre que a doutora ainda pode fazer o percurso descrito anteriormente passando apenas uma vez por cada cidade e retornando para a cidade de partida, Anápolis.

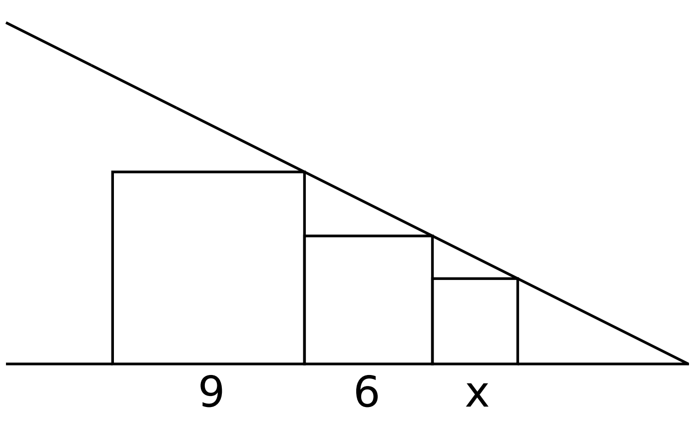


c) Com o crescimento populacional, surgiram novas cidades, Efeápolis, Geápolis, Agápolis e Iápolis, como mostrado abaixo. As estradas que estavam em manutenção voltaram a ser transitáveis. Mostre que neste caso não há solução para o problema, ou seja, não há como a doutora sair de Anápolis, passar por cada uma das outras cidades exatamente uma vez, e então voltar para Anápolis.

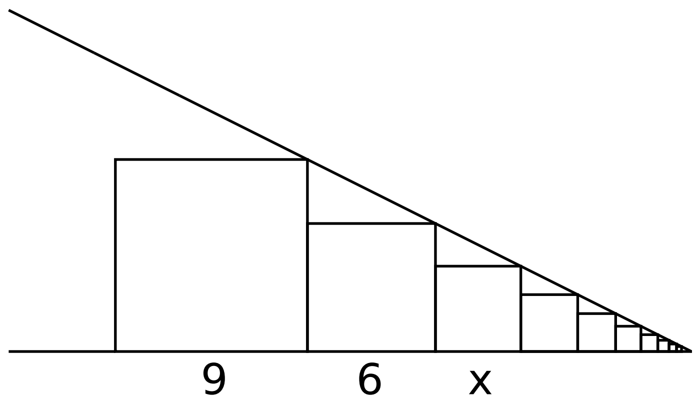


9 *Quadrados e mais quadrados*

a) Na figura abaixo, há três quadrados de lados 9, 6 e x. Determine o valor de x.



b) Marcelo continua o desenho anterior e desenha mais alguns quadrados (muitos!). Como estes ficaram muitos pequenos, não é possível vê-los, mas mostramos alguns na figura abaixo. Qual o comprimento do lado do $2014^{\underline{o}}$ quadrado, contando da esquerda para a direita?



10 *Divisão na medida*

Renato tem trinta melancias, Leandro tem dezoito melancias e Marcelo tem vinte e quatro jacas. Ao contrário de Leandro e Renato, Marcelo não gosta de jaca. Por outro lado, os três gostam de melancia. Os três fazem então um acordo: Marcelo dá as suas vinte e quatro jacas para Leandro e Renato, e as melancias de Leandro e Renato são divididas igualmente entre os três, ou seja, dezesseis para cada. Qual é a divisão justa de jacas entre Renato e Leandro?

11 *Comissões*

Em uma sala de aula há uma turma de dez alunos. Precisa-se escolher uma comissão de três alunos para representar esta turma, sendo a comissão composta por: um porta-voz, um diretor de artes e um assessor técnico. Nenhum aluno pode acumular cargos.

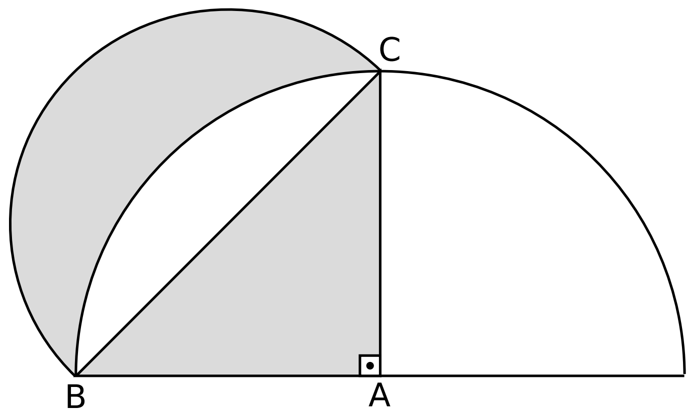
a) De quantas maneiras esta comissão pode ser formada?

b) Quantas comissões diferentes podem ser formadas com os alunos Leandro, Renato e Marcelo?

c) Considere agora comissões sem cargos específicos. Use os itens a) e b) anteriores para descobrir quantas comissões sem cargos específicos podem ser formadas.

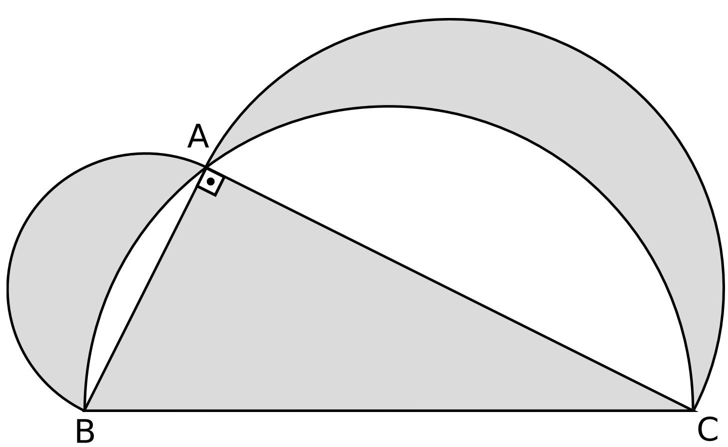
12 *Lúnulas*

a) Leandro desenha uma Lúnula de Hipócrates como mostrado na figura a seguir:



Nesta figura, o triângulo ABC é retângulo e isósceles. A lúnula é a região em forma de lua crescente interna a uma semicircunferência e externa à outra semicircunferência, como mostra a figura. A primeira tem raio igual ao comprimento do cateto AB e a segunda tem raio igual à metade do comprimento da hipotenusa BC. Mostre que a área da Lúnula de Hipócrates desenhada por Leandro é igual à área do triângulo retângulo ABC.

b) Inspirado pelo desenho de Leandro, Renato decide desenhar as Lúnulas de Alhazen, conforme mostrado na figura abaixo:



Nessa figura, as lúnulas são as regiões em forma de lua crescente. Um triângulo retângulo ABC e três semicircunferências são utilizadas para obter essas regiões. O comprimento do raio da maior das semicircunferências é igual à metade do comprimento da hipotenusa, enquanto que as duas menores têm raio igual à metade do comprimento do cateto correspondente. Mostre que a soma das áreas das duas lúnulas desenhadas por Renato é igual à área do triângulo ABC.

13 *A soma de Vladimir*

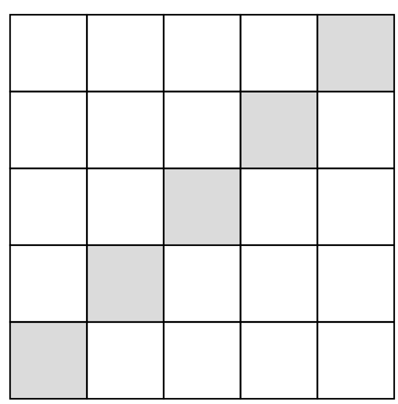
Vladimir escolheu três algarismos a, b e c tais que $a > b > c > 0$ e com eles formou os números abc, cba e cab. Note que abc **não é** o produto de a, b e c, mas sim o número de algarismos a, b e c. Por exemplo, se $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$, abc será o número 123.

Depois de escolher estes três algarimos a, b e c, Vladimir percebeu que um dos números formados era igual à soma dos outros dois. Encontre os números formados por Vladimir.

14 *Números no tabuleiro*

No seguinte tabuleiro, devemos colocar todos os números, desde 1 até 25, seguindo as seguintes regras:

- Em cada fila, os 5 números colocados devem formar uma sequência estritamente crescente quando lidas da esquerda para a direita.
- Em cada coluna, os 5 números colocados devem formar uma sequência estritamente crescente quando lidas de cima para baixo.



A diagonal principal do tabuleiro é a diagonal pintada no gráfico.

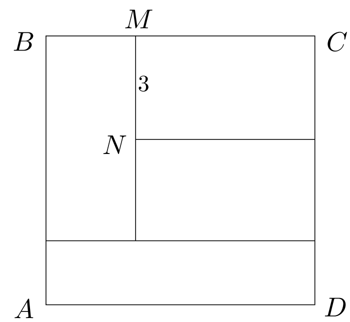
a) Mostre que depois de colocar os números, o menor número colocado na diagonal principal é sempre maior ou igual a 5, e o maior número colocado na diagonal principal é maior ou igual a 15.

b) Coloque os números no tabuleiro de modo que na diagonal principal encontremos os números 5, 9, 12, 14 e 15.

c) Mostre que é impossível colocar os números de modo que a soma na diagonal principal seja menor que 55.

15 *Retângulos formando um quadrado*

Na figura seguinte, o quadrado $ABCD$ foi dividido em quatro retângulos, todos possuindo a mesma área.



Sabendo que $MN = 3$, calcule a área do quadrado $ABCD$.

16 *Cinco piratas e um tesouro*

Cinco piratas encontraram um cofre do tesouro cheio de moedas de ouro e as dividiram entre si. Sabe-se que:

- O que o primeiro pirata recebeu é equivalente à metade do que receberam os outros quatro em conjunto.
- O que o segundo pirata recebeu é equivalente à terça parte do que receberam os outros quatro em conjunto.
- O que o terceiro pirata recebeu é equivalente à quarta parte do que receberam os outros quatro em conjunto.
- O que o quarto pirata recebeu é equivalente à quinta parte do que receberam os outros quatro em conjunto.

Se o quinto pirata recebeu 90 moedas, diga quantas moedas tinha o cofre antes da divisão.

17 *Números balanceados*

Um número de quatro algarismos $abcd$ é chamado balanceado se

$$a + b = c + d.$$

Calcule as seguintes quantidades:

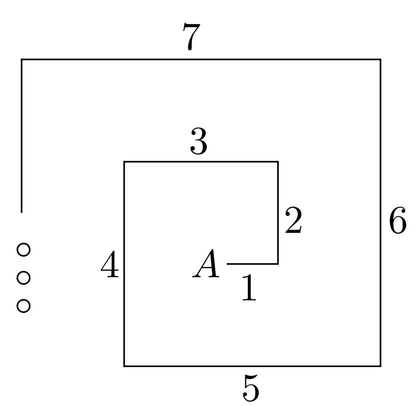
a) Quantos números $abcd$ são tais que $a + b = c + d = 8$?

b) Quantos números $abcd$ são tais que $a + b = c + d = 16$?

c) Quantos números balanceados existem?

18 *O passeio de Florinda*

Florinda foi dar um passeio. Ela saiu do ponto A e caminhou 1 m. Nesse ponto ela virou para a esquerda um ângulo de 90° e caminhou 2 m. No último ponto ela virou para esquerda, e caminhou 3 m. Ela continuou andando desta maneira até que no último trecho ela caminhou 30 m e chegou ao seu ponto final que chamaremos de ponto B. A figura seguinte ilustra os primeiros sete trechos do passeio de Florinda (note que o ponto B não está ilustrado).



Calcule a distância entre os pontos A e B.

19 *Sonho impossível*

Uma noite, Wanderson sonhou com dois números de três algarismos:

$$abc \quad \text{e} \quad def,$$

de modo que a soma

$$abc + def + abcdef$$

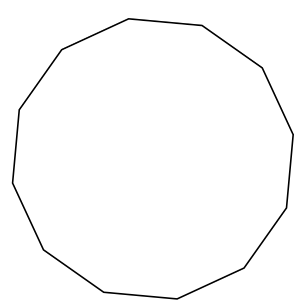
coincidia com a soma de todos os números de três algarismos. Note que abc **não é** o produto dos algarismos a, b e c, e sim o número de três algarismos a, b e c. O mesmo vale para os outros números.

a) Calcule a soma de todos os números de três algarismos.

b) Mostre que o sonho de Wanderson é um sonho impossível.

20 *Triângulos no dodecágono*

A seguinte figura mostra um dodecágono regular.



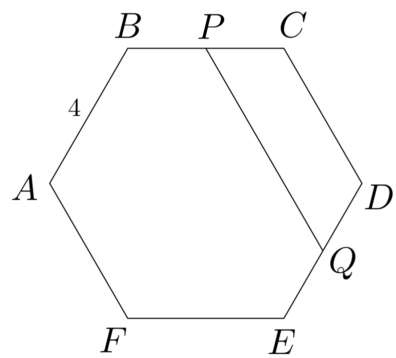
Responda às seguintes perguntas:

a) Quantos triângulos equiláteros podem ser formados de modo que seus três vértices sejam vértices do dodecágono?

b) Quantos triângulos escalenos podem ser formados de modo que seus três vértices sejam vértices do dodecágono?

$\boxed{21}$ *O perímetro do hexágono*

Considere o seguinte hexágono regular $ABCDEF$, cujo lado mede 4, e onde os pontos P e Q são os pontos médios dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$, respectivamente.



Calcule o perímetro do hexágono $ABPQEF$.

$\boxed{22}$ *Números equilibrados*

Um número inteiro positivo é chamado "equilibrado" se ele tem quatro algarismos, e um desses algarismos é igual à média dos outros três. Por exemplo: o número 2631 é equilibrado porque 3 é a média de 2, 6 e 1; 4444 também é equilibrado porque 4 é a média de 4, 4 e 4.

a) Encontre os três menores números equilibrados.

b) Quantos são os números equilibrados menores que 2014?

$\boxed{23}$ *Subconjuntos hierárquicos*

Consideremos o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$. Um subconjunto de A é chamado hierárquico se satisfaz as seguintes duas propriedades:

- O subconjunto deve ter mais de um número.
- Há um número no subconjunto que coincide com a soma dos outros números do subconjunto.

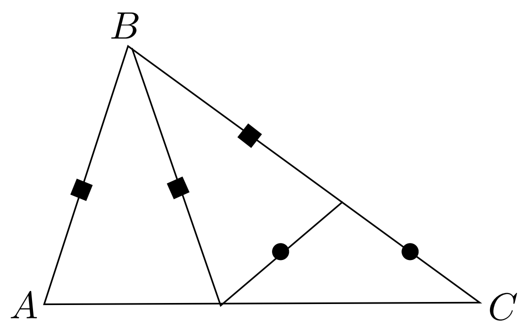
Deseja-se dividir o conjunto A em subconjuntos hierárquicos.

a) Para $n = 13$, mostre que não é possível fazer a divisão.

b) Para $n = 12$, mostre que tal divisão é possível.

24 *Dividindo em triângulos isósceles*

A seguinte figura mostra um triângulo ABC que foi dividido em 3 triângulos isósceles.



a) Mostre que todo triângulo retângulo pode ser dividido em 2 triângulos isósceles.

b) Mostre que qualquer triângulo pode ser dividido em 4 triângulos isósceles.

c) Mostre que qualquer triângulo pode ser dividido em 5 triângulos isósceles.

25 *Dividindo pedras*

Uma pilha de pedras está sobre uma mesa, Pedrinho joga o seguinte jogo: a cada momento, ele pode escolher uma pilha com pelo menos 3 pedras, retirar uma dessas pedras e dividir a pilha em duas pilhas não vazias. Por exemplo, se ele tem uma pilha com 15 pedras, ele pode dividir essa pilha em duas pilhas de 9 e 5 (ele tira uma pedra, ficando com 14 pedras na pilha e depois a divide). Ele pode continuar com o processo. Por exemplo, Pedrinho pode dividir a pilha com 9 pedras em duas, uma de 3 e uma de 5, ficando no final com três pilhas, uma de 3, e duas de 5.

a) Se no início há uma única pilha com 19 pedras sobre a mesa. Pedrinho consegue, depois de alguns movimentos, que todas as pilhas restantes tenham exatamente 3 pedras?

b) E se houver uma única pilha com 1001 pedras?

$\boxed{26}$ *Escrevendo números em ordem crescente*

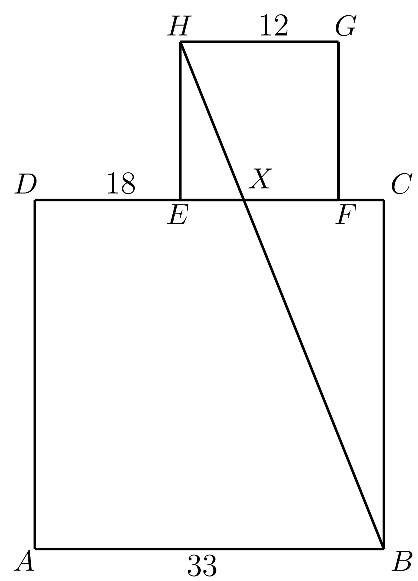
Pedrinho faz uma lista de todos os números de 5 algarismos distintos que se formam com os dígitos $1, 2, 3, 4, 5$. Nesta lista os números estão ordenados de forma crescente.

a) Qual o número que ocupa a posição 10 da lista?

b) Qual o número que ocupa a posição 85 da lista?

$\boxed{27}$ *Quadrado em cima de quadrado*

Sejam $ABCD$ e $EFGH$ quadrados de lados 33 e 12, com EF sobre o lado DC (como mostrado na figura abaixo). Seja X o ponto de interseção dos segmentos HB e DC. Suponha que $\overline{DE} = 18$.



a) Calcule o comprimento do segmento $\overline{EX}$.

b) Prove que os pontos A, X e G são colineares.

28 *Calculando médias*

Pedrinho escolheu 8 números distintos entre 1 e 11 e os escreveu numa determinada ordem. Joãozinho, vendo os números que Pedrinho escreveu, notou o seguinte fato curioso: se fizermos a média dos n primeiros números escritos por Pedrinho, $n = 1, \ldots, 8$, teremos como resultado sempre um número inteiro. Ou seja, se fizermos a média dos dois primeiros números, dos três primeiros, dos quatro primeiros números, e assim por diante, todas essas médias serão inteiras.

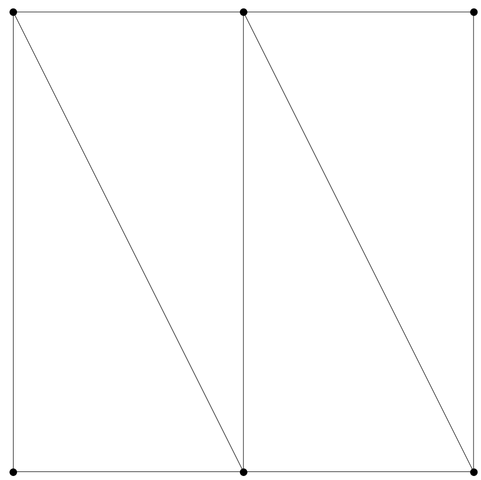
Quais são as possíveis sequências de números que Pedrinho escreveu? (Dica: primeiro descubra quais são as possíveis somas para os 8 números, e depois tente descobrir de trás pra frente os números escolhidos.)

29 *Pizza para quantos?*

Um grupo de rapazes e moças saiu para comer pizza em dois dias consecutivos. No restaurante em que foram, as pizzas são cortadas em doze pedaços iguais. Maria observou que no primeiro dia cada rapaz comeu 7 pedaços, e cada moça 3 pedaços. Já no segundo dia, cada rapaz comeu 6 pedaços e cada moça 2 pedaços. Curiosamente, em ambos os dias eles pediram quatro pizzas que foram totalmente consumidas e depois pediram mais uma, da qual sobraram alguns pedaços (ou seja, foi comido pelo menos um pedaço e sobrou pelo menos um pedaço). Quantos rapazes e moças foram à pizzaria?

30 *Montando quadrados*

Pedrinho tem várias peças de madeira na forma de um triângulo retângulo de catetos 1 cm e 2 cm. Com 4 dessas peças, ele consegue montar um quadrado de lado 2 cm, como na figura abaixo.



Brincando com mais peças, ele conseguiu montar um quadrado usando exatamente 20 peças. Monte você também um quadrado usando 20 peças. (Dica: calcule a área dos triângulos, e com isso calcule o lado do quadrado. Depois compare com a hipotenusa das peças.)

NÍVEL 3 – ENUNCIADOS

1 *Minhoca rápida*

a) Uma minhoca anda sempre sobre uma linha reta. Todos os dias, ela avança 5 m e recua 3 m. Ao final de 15 dias, a minhoca estará a que distância do ponto de partida?

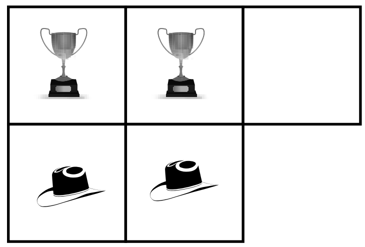
b) Ao final destes 15 dias, quantos metros terá caminhado, no total, esta minhoca?

c) Uma outra minhoca anda também sobre uma linha reta, porém de maneira diferente da primeira. No primeiro dia, ela anda 1 m para a frente e $1/2$ m para trás. No segundo dia, ela anda $1/2$ m para a frente e $1/3$ m para trás. No terceiro dia, ela anda $1/3$ m para a frente e $1/4$ m para trás, e assim sucessivamente. Quantos metros ela terá andado após 1000 dias?

d) Algum dia esta segunda minhoca conseguirá estar a 2 m de distância do ponto inicial?

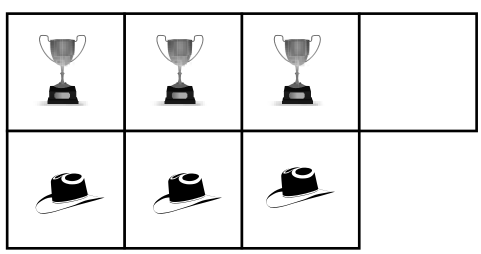
2 *Trocando posições*

No tabuleiro abaixo, é permitido mover qualquer objeto de seu quadrado para qualquer quadrado adjacente vazio acima, abaixo, ao lado ou em diagonal.

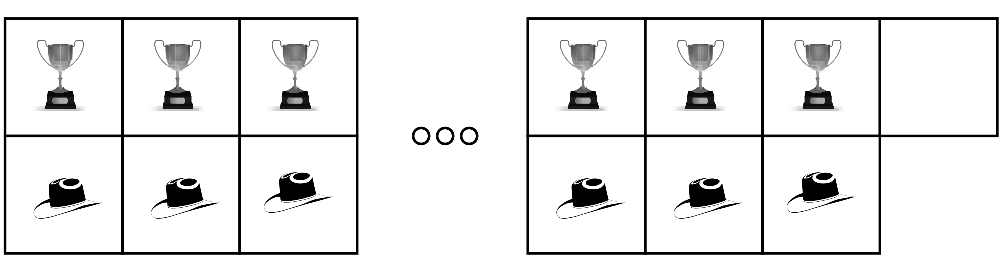


a) Mostre como trocar a posição de todos os chapéus com todos os troféus em apenas cinco movimentos. Argumente porque não é possível trocá-los de posição com menos de cinco movimentos.

b) Neste outro tabuleiro mostrado abaixo, qual o mínimo de movimentos para trocar os chapéus de posição com os troféus?

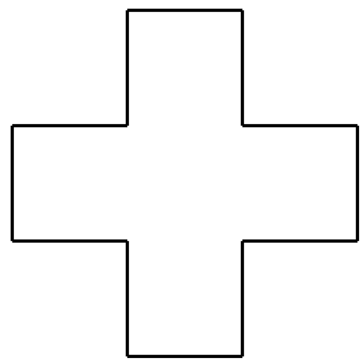


c) E se fosse um tabuleiro parecido com os anteriores, porém com 1000 chapéus e 1000 troféus, qual seria o mínimo de movimentos para trocá-los de posição?



3 *Corte na medida*

Diogo recortou uma cruz de cartolina como mostrado abaixo. Nesta cruz, todos os lados têm comprimento igual a 1 cm, e todos os ângulos são retos. Fernanda desafiou Diogo a fazer dois cortes em linha reta nesta cruz, de modo a formar quatro peças que possam ser reencaixadas de modo a formar um quadrado.



a) Qual será a área do quadrado obtido?

b) Qual será o lado do quadrado obtido?

c) Mostre como Diogo pode fazer estes dois cortes em linha reta de modo a poder formar o quadrado com as quatro peças obtidas pelo corte!

4 *Par ou ímpar maluco*

Artur e Dinah vão disputar o jogo do par ou ímpar maluco. Dinah escolhe "par" e Artur escolhe "ímpar". Em seguida, cada um escreve um número inteiro positivo em uma folha de papel sem que o outro a veja. Emílio recolhe as duas folhas, multiplica os números e declara Dinah vencedora se o resultado for par e Artur vencedor se for ímpar.

a) Como deve fazer Dinah para que ela sempre ganhe o jogo?

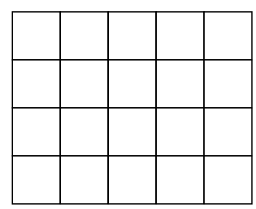
Emílio sugere uma modificação na disputa. Primeiramente ele pede que Artur e Dinah escrevam apenas números que não sejam divisíveis por três. Ele recolhe as folhas, multiplica os dois números, divide o resultado por três e declara Dinah vencedora se o resto da divisão for igual a 1 e Artur vencedor se esse resto for igual a 2.

b) Mostre que Dinah não pode mais ter uma estratégia vencedora.

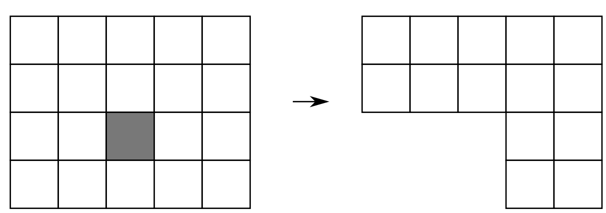
c) Mostre que Artur e Dinah têm a mesma probabilidade de ganhar.

5 *Jogo do tira*

Diogo e Helen jogam o Jogo do Tira, que consiste no seguinte. Dado um quadriculado de quadrados 1×1, cada jogador, em sua vez, tem o direito de escolher um quadrado e então retirar do quadriculado todos os quadrados abaixo dele, todos os quadrados à esquerda dele, e todos os outros que estejam abaixo e à esquerda dele. Por exemplo, dado o quadriculado abaixo,

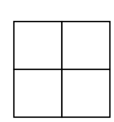


o jogador que tem a vez pode selecionar o quadrado abaixo marcado em cinza, deixando para seu adversário os quadrados mostrados.

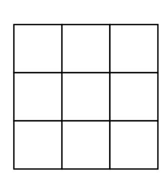


Perde quem tira o último quadrado.

a) Dado o quadriculado abaixo, Helen começa jogando. Mostre uma estratégia para que ela ganhe a partida, independente da estratégia de Diogo.

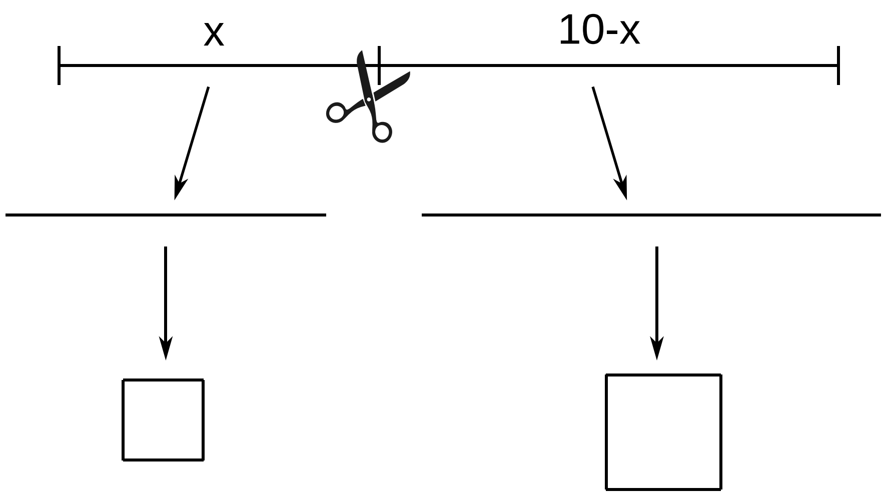


b) Dado o quadriculado abaixo, Helen começa jogando. Mostre uma estratégia para que ela ganhe a partida, independente da estratégia de Diogo.



6 *Cortando a corda*

Augusto tem um arame com 10 m de comprimento. Ele realiza um corte em um ponto do arame obtendo assim dois arames. Um com comprimento x e outro com comprimento $10 - x$ como mostra a figura abaixo:



Augusto usa os dois pedaços do arame para fazer dois quadrados.

a) Qual é o comprimento do lado de cada um dos quadrados? Qual é a área de cada um?

b) Qual é o valor do comprimento de cada um dos dois pedaços do arame para que a soma das áreas dos quadrados obtidos seja mínima?

c) Suponha que Augusto corte o arame em dez pedaços e use cada um deles para fazer um quadrado. Qual deve ser o tamanho de cada um dos pedaços para que a soma das áreas dos quadrados obtidos seja mínima?

7 *Calculadora de Cincolândia*

a) Uma calculadora do país de Cincolândia tem apenas os algarismos de 0 a 9 e dois botões $\square$ e $\triangle$. O botão $\square$ eleva ao quadrado o número que está no visor da calculadora. O botão $\triangle$ subtrai 5 do número que está no visor da calculadora. Mônica digita o número 7 e depois aperta $\square$ e, em seguida, aperta o botão $\triangle$. Qual o resultado mostrado pela calculadora?

b) Mostre que se um número natural x deixa resto 4 quando dividido por 5, então o número x^2 deixa resto 1 quando dividido por 5.

c) Na calculadora de Cincolândia, é possível digitar o número 9 e depois chegar ao resultado 7 apertando os botões $\square$ ou $\triangle$ de maneira adequada?

8 *Algum dia ele ganha?*

A partir de hoje, o grande apostador Carlo Pietro decidiu frequentar cassinos diariamente. No primeiro dia, ele apostará em um jogo cuja probabilidade de ganhar é igual a $\frac{1}{2}$. Nos segundo, terceiro e quarto dias, ele apostará em jogos diferentes cujas probabilidades de vitória são, respectivamente, iguais a $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ e assim por diante nos dias que se seguirem.

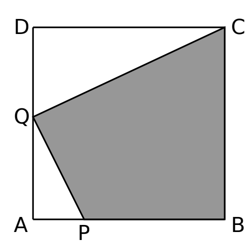
a) Qual é a probabilidade de que ele não tenha ganhado até o terceiro dia?

b) Qual é a probabilidade de que ele não tenha ganhado até o quinto dia?

c) Qual é a probabilidade de que ele não tenha ganhado até o $2013^{\underline{o}}$ dia?

9 *Área máxima*

O quadrado $ABCD$ desenhado na figura abaixo tem lado 3 cm.



Os pontos P e Q podem ser deslocados sobre os segmentos AB e AD respectivamente de forma que o comprimento do segmento AP meça a metade do comprimento do segmento AQ.

a) Determine o valor da área do quadrilátero hachurado em função do comprimento do segmento AB.

b) Determine a área máxima que o quadrilátero hachurado pode assumir.

10 *Uns e mais uns*

Calcule a soma

$$1 + 11 + 111 + 1111 + \cdots + \underbrace{1111\ldots11}_{n \text{ uns}}.$$

11 *Apertos de mão*

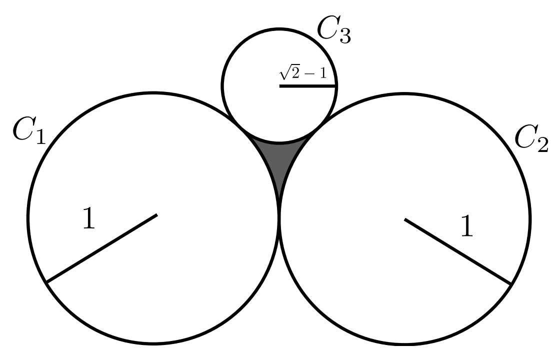
Num grupo de 20 pessoas, algumas pessoas trocam apertos de mão.

a) Contamos quantos apertos de mão cada pessoa deu e somamos todos esses números. Mostre que o resultado é par.

b) É possível que num grupo de 99 pessoas cada pessoa tenha dado exatamente 3 apertos de mão?

12 *Círculo sobre círculo*

Em uma folha de papel, Emanuelle desenha duas circunferências de raio 1 que se tangenciam em um ponto. Em seguida, ela desenha uma terceira circunferência de raio $1-\sqrt{2}$ que tangencia as duas anteriores externamente, conforme a figura abaixo.



Emanuelle calcula a área da região limitada e exterior às três circunferências que é mostrada em cinza na figura acima. Qual o valor por ela encontrado?

13 *O treinamento de Julian*

Julian treina em uma pista de 3 km. Ele percorre o primeiro quilômetro caminhando, o segundo correndo, e o terceiro em bicicleta. Se ele tivesse percorrido toda a pista em bicicleta, haveria demorado 10 minutos a menos. Julian corre ao dobro da velocidade com que caminha, e vai em bicicleta ao triplo da velocidade com que caminha. Quanto tempo Julian leva para correr 1 km?

14 *Peões rebeldes*

No seguinte tabuleiro 4×4 devem ser colocados 4 torres, 4 cavalos, 4 bispos e 4 peões de modo que em cada linha e em cada coluna as peças colocadas sejam distintas, como no exemplo:

B	T	P	C
P	B	C	T
T	C	B	P
C	P	T	B

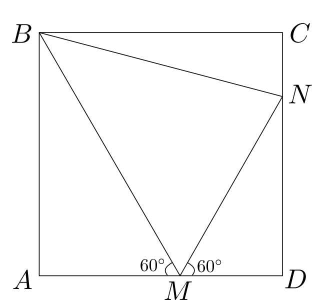
Os peões são rebeldes e decidiram ficar nas seguintes posições:

		P	
P			
			P
	P		

Calcule o número de modos em que as outras peças podem ser colocadas.

15 *Ângulos no quadrado*

A seguinte figura mostra um quadrado $ABCD$.



Se $\measuredangle AMB = 60°$ e $\measuredangle DMN = 60°$ calcule $\measuredangle MBN$.

16 *Carla escreve, Diana apaga*

Carla escreveu no quadro-negro os números inteiros de 1 até 21. Diana deseja apagar alguns deles de tal modo que ao multiplicar os números restantes o resultado seja um quadrado perfeito.

a) Mostre que Diana deve apagar necessariamente os números 11, 13, 17 e 19 para conseguir seu objetivo.

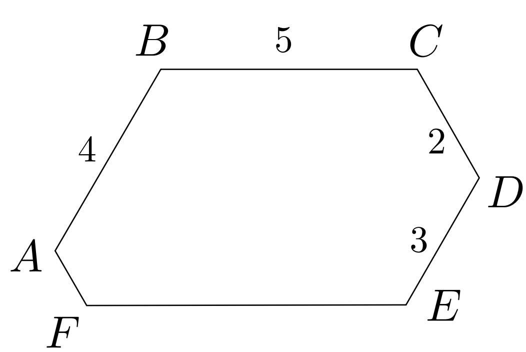
b) Qual a menor quantidade de números que Diana deve apagar para atingir o seu objetivo?

17 *Papai Noel*

Papai Noel chegou à casa de Arnaldo e Bernaldo carregando dez brinquedos distintos e enumerados de 1 a 10 e disse a eles: "o brinquedo número 1 é para você, Arnaldo e o brinquedo número 2 é para você, Bernaldo. Mas esse ano, vocês podem escolher ficar com mais brinquedos contanto que deixem ao menos um para mim". Diga de quantos modos Arnaldo e Bernaldo podem dividir entre eles o restante dos brinquedos.

18 *Hexágono equiângulo*

No hexágono da seguinte figura, a medida de todos os ângulos internos é α, por isso ele é chamado de equiângulo.



Sabe-se que os comprimentos dos segmentos AB, BC, CD e DE têm as medidas $|AB| = 4$, $|BC| = 5$, $|CD| = 2$, $|DE| = 3$.

a) Calcule o valor de α.

b) Calcule $|EF|$ e $|FA|$.

c) Calcule a área do hexágono.

19 *A lei pirata*

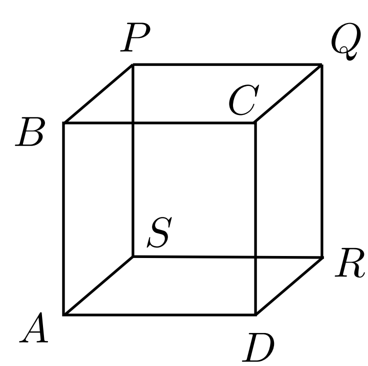
A lei pirata estabelece que, para dividir as moedas de um tesouro, o capitão deve escolher um grupo de piratas (excluindo a si mesmo). Em seguida, o capitão deve distribuir a mesma quantidade de moedas a cada um dos piratas desse grupo, de tal modo que não seja possível dar a cada um deles nenhuma outra das moedas que restaram (respeitando o fato de que cada pirata recebe a mesma quantidade). As moedas restantes são então dadas ao capitão. No navio do capitão Barbaroxa há 100 piratas (sem incluir o capitão). Barbaroxa deve dividir um tesouro que contém menos de 1000 moedas. Se ele escolher 99 piratas, ele ficará com 51 moedas, mas se escolher 77 piratas, ele ficará com 29 moedas.

a) Quantas moedas contém o tesouro?

b) Quantos piratas deve escolher Barbaroxa para ficar com a maior quantidade possível de moedas?

20 *Triângulos equiláteros no cubo*

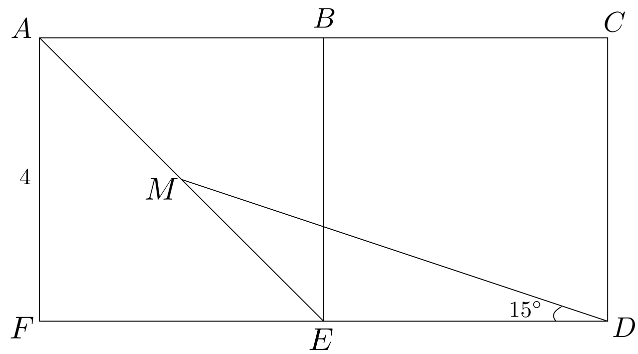
A seguinte figura mostra um cubo.



Calcule o número de triângulos equiláteros que podem ser formados de modo que seus três vértices sejam vértices do cubo.

21 *Quadrados vizinhos*

Na seguinte figura, $ABEF$ e $EBCD$ são quadrados.



Se $\measuredangle MDE = 15°$ e $|AF| = 4$, calcule $|MD|$.

Observação: $|MD|$ é o comprimento do segmento MD.

22 *O engano de Raul*

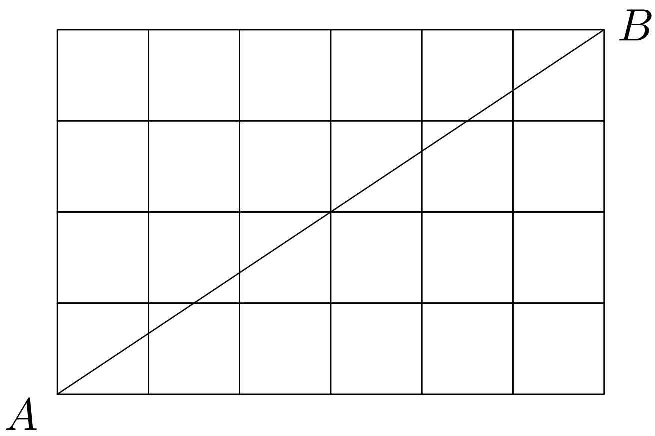
Sejam a e b números inteiros positivos tais que $a > b$. O professor Fernando disse ao aluno Raul que se ele calculasse o número $A = a^2 + 4b + 1$, o resultado seria um quadrado perfeito. Raul, por engano, trocou os números a e b e calculou o número $B = b^2 + 4a + 1$ que, por acaso, também é um quadrado perfeito.

a) Mostre que $A = (a + 1)^2$.

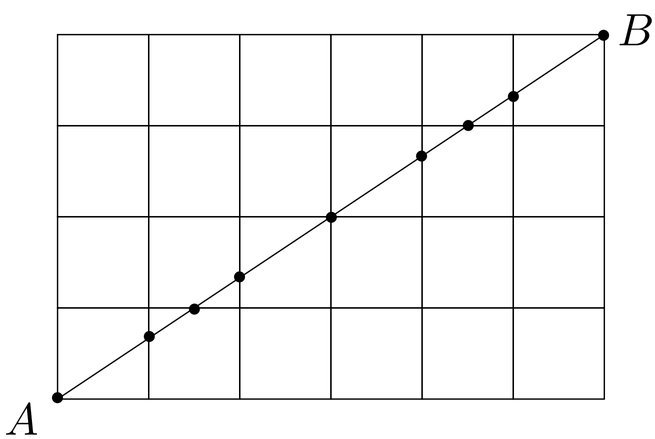
b) Encontre os números a, b, A e B.

23 *A diagonal do quadriculado*

No seguinte papel, foi desenhado um quadriculado de 4×6 e depois traçada a diagonal de A a B.



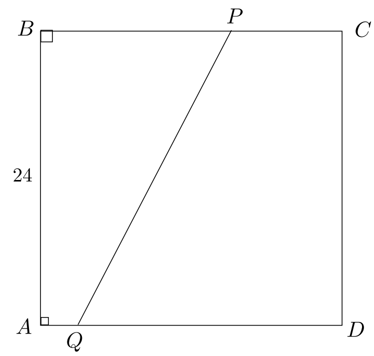
Observe que a diagonal AB intersecta o quadriculado em 9 pontos:



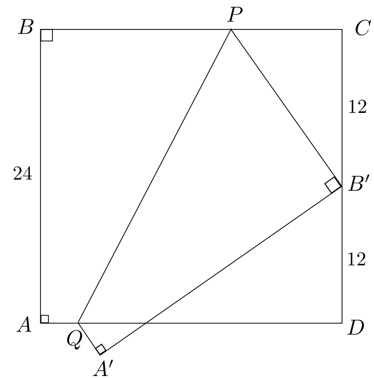
Se o quadriculado fosse de tamanho 12×17, em quantos pontos a diagonal AB intersectaria o quadriculado?

24 *Dobrando o quadrado*

A seguinte figura mostra um quadrado $ABCD$, e dois pontos P e Q sobre os lados $\overline{BC}$ e $\overline{DA}$, respectivamente.



Dobramos agora o quadrado ao longo do segmento $\overline{PQ}$, levando o vértice B até o ponto médio do segmento $\overline{CD}$.



Sabe-se que o lado do quadrado mede 24.

a) Calcule o comprimento do segmento $\overline{PC}$.

b) Calcule o comprimento do segmento $\overline{AQ}$.

c) Calcule o comprimento do segmento $\overline{PQ}$.

25 *Somando Cubos*

Joãozinho começou a somar os primeiros cubos e reparou algo curioso:

$$1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9 = (1 + 2)^2.$$

O mesmo vale se somarmos até 3:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = (1 + 2 + 3)^2.$$

Ou mesmo até 4:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100 = (1 + 2 + 3 + 4)^2.$$

Surpreso com isso, Joãozinho foi perguntar ao seu professor de matemática se isso sempre aconteceria. O professor então deu a Joãozinho os seguintes passos para mostrar esse fato:

Seja

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

a soma dos n primeiros números,

$$Q_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

a soma dos n primeiros quadrados e

$$C_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

a soma dos n primeiros cubos.

a) Calcule a diferença $(n+1)^2 - n^2$. Agora calcule a soma

$$(2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + (4^2 - 3^2) + \ldots + ((n+1)^2 - n^2)$$

e conclua que $2S_n + n = (n+1)^2 - 1$. Ache uma fórmula para S_n.

b) Calcule $(n+1)^3 - n^3$. Conclua que $3Q_n + 3S_n + n = (n+1)^3 - 1$, e ache uma fórmula para Q_n.

c) Calcule $(n+1)^4 - n^4$. Conclua que $4C_n + 6Q_n + 4S_n + n = (n+1)^4 - 1$, e ache uma fórmula para C_n. Conclua que $C_n = S_n^2$ para todo natural n.

26 *Contando tabuleiros*

Seja a_n o número de maneiras de preencher um tabuleiro $n \times n$ com os algarismos 0 e 1, de modo que a soma em cada linha e em cada coluna seja a mesma. Por exemplo, os tabuleiros 2×2 que satisfazem essa regra são:

0	0
0	0

1	0
0	1

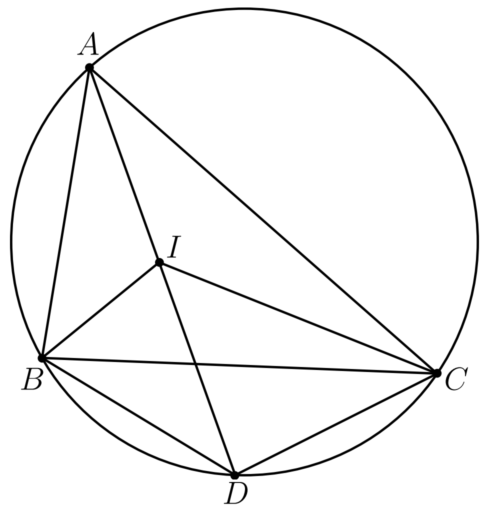
0	1
1	0

1	1
1	1

Logo, $a_2 = 4$. Calcule os valores de a_3 e a_4.

27 *Distância até o incentro*

Seja ABC um triângulo inscrito na circunferência abaixo. Sejam também I o incentro do triângulo ABC e D o ponto onde a reta AI corta a circunferência. Mostre que $|\overline{DB}| = |\overline{DC}| = |\overline{DI}|$.

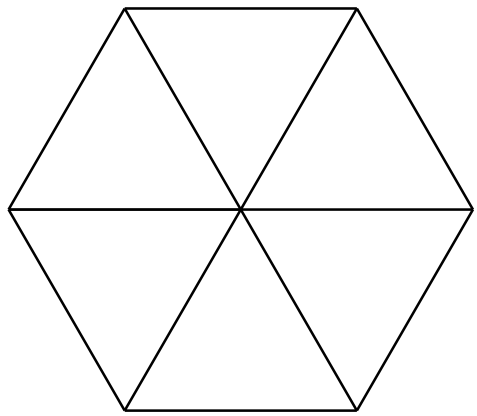


28 *Produto igual à soma*

Pedrinho escreveu dois números inteiros e positivos num pedaço de papel e mostrou para Joãozinho. Depois disso, Pedrinho calculou o dobro do produto destes dois números. Joãozinho somou 21 com o dobro do primeiro número e depois o resultado com o segundo número. Para surpresa dos dois, o resultado foi o mesmo. Quais são os possíveis números que Pedrinho escreveu no pedaço de papel?

29 *Colorindo palitos*

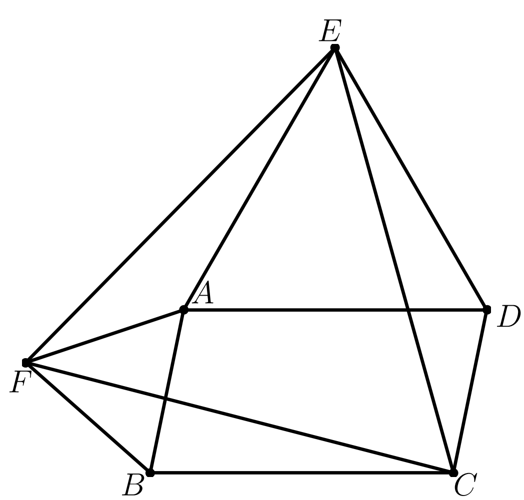
Pedrinho está brincando de fazer arranjos com palitos. Ele dispõe seus palitos formando triângulos equiláteros, como mostra a figura abaixo:



Pedrinho quer pintar cada palito de seu arranjo de tal forma que cada triângulo tenha seus lados pintados de exatamente duas cores diferentes. Para isso, ele dispõe de tintas vermelha, azul e preta. De quantos modos ele pode pintar o arranjo?

30 *Triângulos equiláteros*

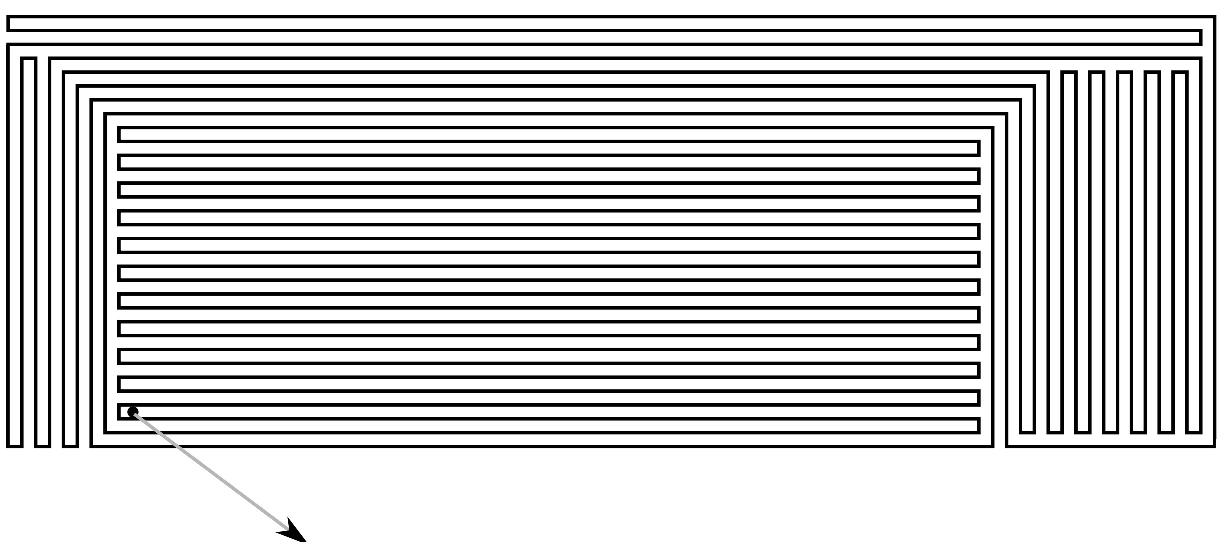
Seja $ABCD$ um paralelogramo, e ABF e ADE triângulos equiláteros construídos exteriormente ao paralelogramo. Prove que FCE também é equilátero.



NÍVEL 1 – SOLUÇÕES

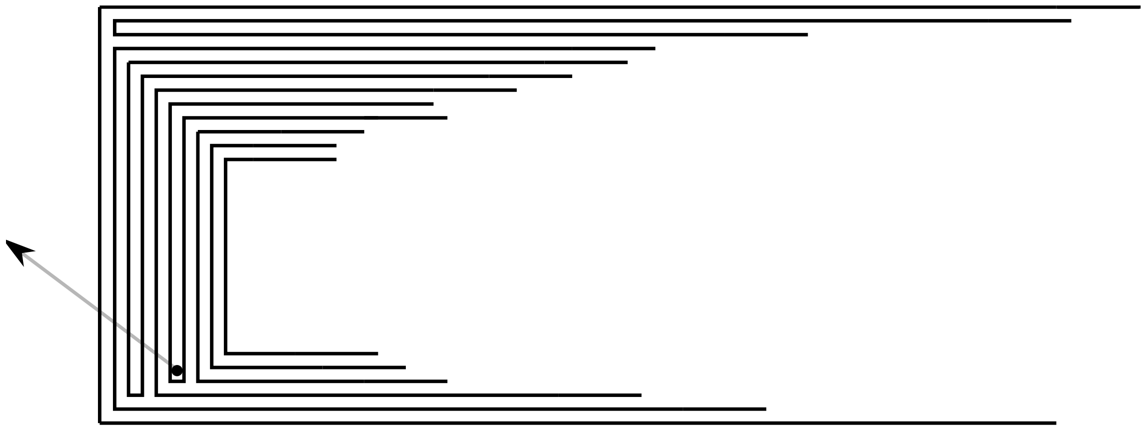
1 ***Dentro ou fora?*** – *Solução*

a) Você pode rabiscar caminhos até descobrir se o ponto está dentro ou fora... mas uma maneira legal de descobrir se o ponto está dentro ou fora é a seguinte. Tracemos uma linha ligando o ponto até a região externa à curva. Cada vez que esta linha corta a curva, isso significa que mudamos de região (ou estávamos dentro e saímos, ou estávamos fora e entramos). Observe:



Logo, como a linha cinza é cortada três vezes, o ponto está dentro da região delimitada pelo caminho fechado. Em outras palavras, ao ir de fora para dentro seguindo a linha cinza, “entramos”, “saímos” e finalmente “entramos”.

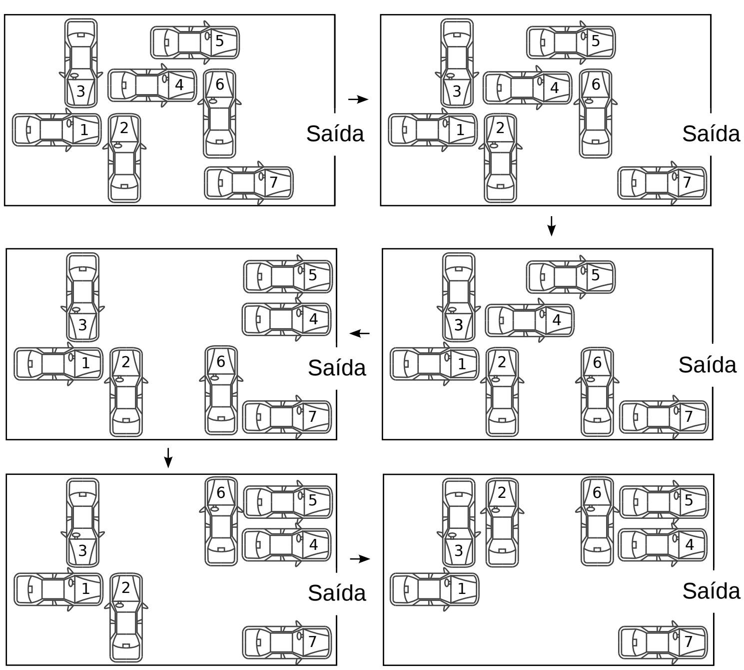
b) Aqui aplicamos o mesmo argumento de antes! E sem precisar saber como é o resto do desenho.



Logo, como a linha cinza é cortada seis vezes, e seis é um número par, concluímos que o ponto está fora da região delimitada pelo caminho fechado!

2 *Estacionamento complicado* – *Solução*

a) Uma sequência possível de movimentos que permite que o carro 1 saia do estacionamento é a seguinte: $7 \rightarrow$, $6 \downarrow$, $4 \rightarrow$, $5 \rightarrow$, $6 \uparrow$, $2 \uparrow$. A figura abaixo ilustra essa sequência de movimentos.



Observe que poderíamos ter movimentado o carro 4 e depois o carro 5, ou poderíamos ter movimentado o carro 5 e depois o carro 4. E também poderíamos ter movimentado o carro 2 antes do carro 6 nos dois últimos passos.

b) Não há nenhuma solução com menos de seis movimentos. A explicação é dada a seguir.

Para que o carro 1 possa sair, é necessário que:

1. O carro 2 se mova, pois ele está na frente do carro 1.

2. O carro 4 se mova, para que o carro 2 possa se mover.

3. O carro 6 se mova para trás, para permitir com que o carro 4 possa se mover (observe que o carro 3 não pode mover-se antes que o carro 1 se mova). O carro 6 deve mover-se no mínimo uma vez para frente, já que movendo-se para trás apenas ele ficaria à frente do carro 1.

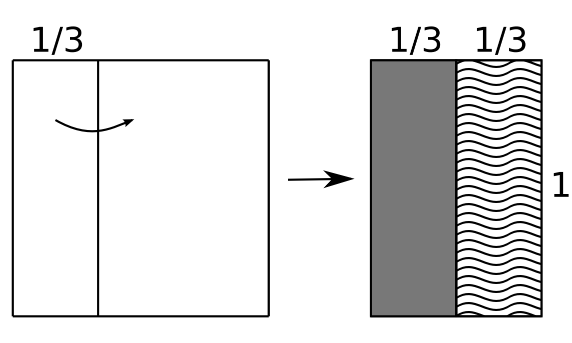
4. Pelo menos um dos carros 5 ou 7 se movam, para que o carro 4 se mova; mas se apenas o carro 7 se movesse, então o carro 1 não poderia sair, pois o carro 6 ficaria na frente dele! Mas se só o carro 5 se movesse, o carro 4 não poderia se mover já que o carro 6 ficaria na sua frente. Assim o carro 4 bloquearia o carro 1!

Concluímos dessa maneira que os carros 2, 4, 5, 6 e 7 necessariamente precisam se mover para o carro 1 sair, sendo que o carro 6 precisa mover-se pelo menos duas vezes. No item anterior já mostramos uma solução com seis movimentos.

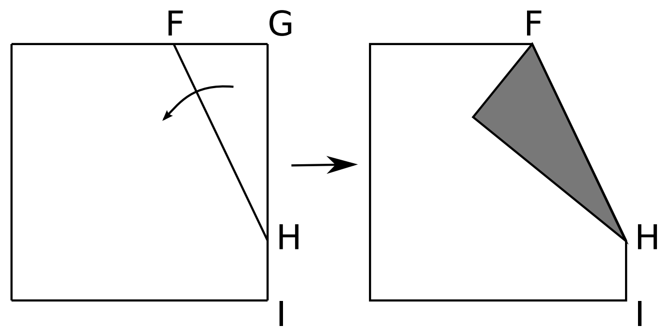
c) Este caso tem mais movimentos! Mas não é tão diferente. Uma solução seria: $1 \leftarrow$, $2 \uparrow$, $4 \leftarrow$, $2 \downarrow 3 \downarrow$, $6 \leftarrow$, $5 \downarrow$, $8 \leftarrow 7 \downarrow$, $10 \leftarrow$, $9 \downarrow$, $12 \leftarrow$, $11 \downarrow$.

3 ***Dobraduras*** – *Solução*

a) Como podemos ver na figura abaixo, a área da parte superior do papel é um retângulo de altura 1 e base $1/3$ (este retângulo é o retângulo abaixo hachurado com linhas curvas). Logo, sua área é igual a $1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.



b) A área que ficou visível é igual a área do quadrado menos duas vezes a área do triângulo FGH. Para ver isso, observe a figura:

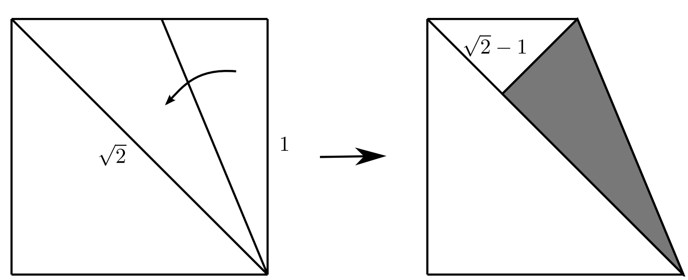


O triângulo pintado de cinza é o triângulo FGH virado para baixo. Logo, tem a mesma área do triângulo FGH. Como o quadrado tem lado 5, sua área é $5 \times 5 = 25$. Vamos calcular a área do triângulo FGH. Como HI mede 1, e o lado do quadrado mede 5, concluímos que GH mede 4. Além disso, o segmento FG mede 1. Como a área de um triângulo é igual a base vezes altura sobre dois, obtemos:

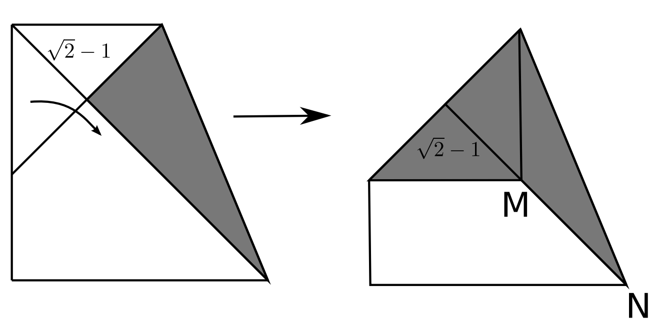
$$\text{área do triângulo } FGH \;=\; \frac{4 \times 1}{2} \;=\; 2\,.$$

Logo, a área que ficou visível é igual a $25 - 2 \times 2 = 21$.

c) Pelo Teorema de Pitágoras, sabemos que o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1 é igual a $\sqrt{2}$. Observe a figura abaixo. Como o lado do quadrado foi dobrado de modo a cair na diagonal, concluímos que o comprimento do segmento tracejado no quadrado da direita é igual a $\sqrt{2} - 1$.



Na dobradura seguinte, este segmento tracejado foi dobrado de modo a cair na diagonal, conforme observamos abaixo:



Como a diagonal mede $\sqrt{2}$, e subtraímos dela duas vezes este comprimento $\sqrt{2}-1$, concluímos que o segmento MN mede

$$\sqrt{2}-2\times(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}\,.$$

$\boxed{4}$ ***Engrenando*** – *Solução*

a) Seja N o número de voltas realizadas pela engrenagem B. O leitor pode verificar que na região de contato entre as duas engrenagens, cada dente da engrenagem A é tocado acima por um dente da engrenagem B. O número de contatos desse tipo é igual a 12×6, já que a engrenagem A realiza um total de 12 voltas e tem 6 dentes. Por outro lado, como a engrenagem B tem 8 dentes e realiza N voltas, esse número também é igual a $N\times 8$. Assim, obtemos que $8N=12\times 6$, o que nos fornece que $N=9$.

b) Como a quinta engrenagem tem o dobro de dentes da quarta, a cada volta que ela realiza, a quarta engrenagem realiza 2 voltas. Como a quinta engrenagem realiza 1 volta, a quarta realiza 2.

Seguindo o mesmo raciocínio, vemos que, a cada volta realizada por uma das engrenagens, a engrenagem menor conectada a ela realiza 2 voltas. Como a quarta engrenagem realiza 2 voltas, temos que a terceira realiza 4 voltas. Então a segunda realiza 8 voltas e a primeira realiza 16 voltas.

A soma total de voltas realizadas por todas as engrenagens é então igual a $1+2+4+8+16=31$.

c) Sejam N_C, N_D e N_E os números de dentes das engrenagens C, D e E respectivamente. Como a engrenagem C dá 160 voltas enquanto a D dá 1007 voltas e a E dá 38 voltas, um raciocínio semelhante àquele utilizado no item a) mostra que:

$$160N_C=1007N_D=38N_E.$$

Dessa maneira valem as seguintes equações:

$$\begin{aligned}160N_C&=1007N_D\\160N_C&=38N_E.\end{aligned}$$

Decompondo em fatores primos, encontramos que $38=2\times 19$, $160=2^5\times 5$ e $1007=19\times 53$. Assim, a primeira equação acima nos fornece que:

$$2^5\cdot 5\cdot N_C=19\cdot 53\cdot N_D.$$

Dessa primeira equação, vemos que N_C tem que ser um múltiplo de $19\cdot 53$ pois esses fatores primos aparecem no lado direito da equação, mas não no termo $2^5\cdot 5$. Pelo mesmo motivo, N_D tem que ser um múltiplo de $2^5\cdot 5$. Os menores números que cumprem essa condição são $N_C=19\cdot 53$ e $N_D=2^5\cdot 5$.

Substituindo esses valores na segunda equação obtemos que:

$$2^5 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 53 = 2 \cdot 19 \cdot N_E,$$

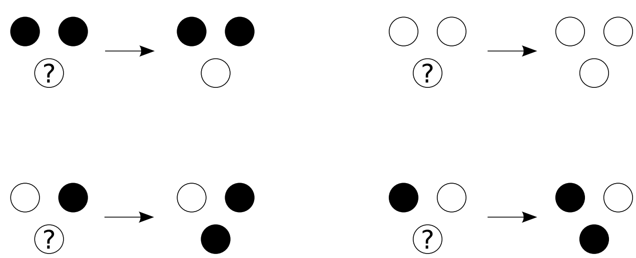
o que nos fornece que $N_E = 2^4 \cdot 5 \cdot 53$.

Assim a menor quantidade de dentes das engrenagens C, D e E são 1007, 160 e 4240, sendo a menor soma total igual a 5407.

5 ***Qual a pintura?*** *– Solução*

a) Vamos estabelecer uma regra simples para definirmos a configuração de uma linha a partir da configuração da linha localizada logo acima dela.

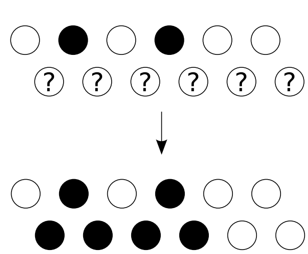
Para saber a cor de uma bolinha, deve-se comparar a cor das duas bolinhas da linha de cima que estão mais próximas a ela.



Há, no entanto, um problema! A última bolinha de uma linha tem apenas uma bolinha na linha de cima mais próxima a ela. “O que fazer então para determinar a cor da última bolinha de uma determinada linha?” Para determinar a sua cor, devemos comparar as cores da primeira e da última bolinha da linha de cima. E aplicar a mesma regra descrita acima.

Note que, com essa regra, é possível, a partir da coloração da primeira linha, gerar a coloração das linhas de baixo uma a uma. O leitor deve conferir que a regra descrita acima realmente se aplica começando com a primeira linha colorida como P, B, P, B, B, P (aqui P significa “preto” e B significa “branco”) e colorindo as linhas de baixo até a sexta, repetindo o desenho do enunciado.

Para gerar a configuração da sétima linha, usamos o fato de que a configuração da sexta linha é dada por B, P, B, P, B, B e aplicamos a regra acima. O resultado é a coloração P, P, P, P, B, B como podemos ver na figura abaixo:



b) Não! Suponha que tivéssemos uma linha (digamos a n-ésima linha) toda colorida com a cor preta. Para que todas as bolinhas dessa linha estejam coloridas de preto, é necessário que as bolinhas da linha de cima estejam coloridas de maneira alternada, ou seja como, P, B, P, B, P, B ou B, P, B, P, B, P.

Suponhamos que o primeiro caso seja verificado, isto é, que a linha de número $n-1$ esteja colorida como P, B, P, B, P, B. Nesse caso, para que a coloração das 5 primeiras bolinhas da linha $n-1$ seja a especificada, é necessário que a coloração da linha $n-2$ seja B, P, P, B, B, P ou P, B, B, P, P, B. Mas se a linha $n-2$ estivesse colorida de umas dessas maneiras, então, obrigatoriamente, a última bolinha da linha $n-1$ deveria estar colorida de preto, o que não é o caso.

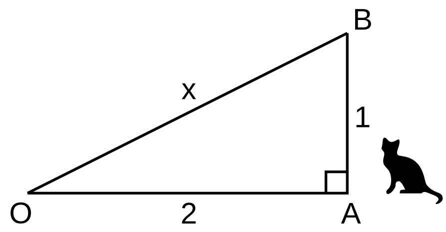
Suponhamos agora que o segundo caso seja verificado, isto é, que a linha de número $n-1$ esteja colorida como B, P, B, P, B, P. Nesse caso, para que a coloração das 5 primeiras bolinhas da linha $n-1$ seja a especificada, é necessário que a coloração da linha $n-2$ seja B, B, P, P, B, B ou P, P, B, B, P, P. Mas se a linha $n-2$ está colorida de umas dessas maneiras, então, obrigatoriamente, a última bolinha da linha $n-1$ deveria estar colorida de branco, o que não é o caso.

c) No item a) ficou estabelecida uma regra para gerar a coloração da linha de número n, caso seja conhecida a coloração da linha de número $n-1$. Através dessa regra, foi possível gerar a configuração da sétima linha a partir da configuração da sexta linha que foi mostrada na figura do enunciado. O resultado obtido para a coloração da sétima linha é P, P, P, P, B, B. Aplicando mais uma vez a regra, obtemos que a configuração da oitava linha será dada por B, B, B, P, B, P. Note que essa é a mesma configuração da terceira linha. Assim, a partir da terceira linha as configurações vão se repetir em ciclos de 6 linhas. Logo, as linhas de número $3, 9, 15, 21, 27, \ldots$, têm a mesma configuração. Também as linhas de número $3+k, 9+k, 15+k, 21+k, 27+k, \ldots$ têm a mesma configuração que a linha k para cada $k \in \{0, \ldots, 5\}$. Notando que $2014 = 3 \cdot 671 + 1$, temos que a sua coloração é igual à da linha de número $3+1$, ou seja, da linha de número 4. Logo, a linha de número 2014 está colorida como B, P, B, B, B, P.

Observação: O fato de que as configurações se repetem em ciclos de 6 linhas pode ser usado para resolver também o item b). Esse fato nos permite conhecer todas as configurações que aparecem nesse ciclo. Listando todas elas, podemos observar que nenhuma é a que contém todas as 6 bolinhas pretas.

6 *Gata que salta* – *Solução*

Nessa solução todas as distâncias são dadas em metros.
a) Observe a figura abaixo:

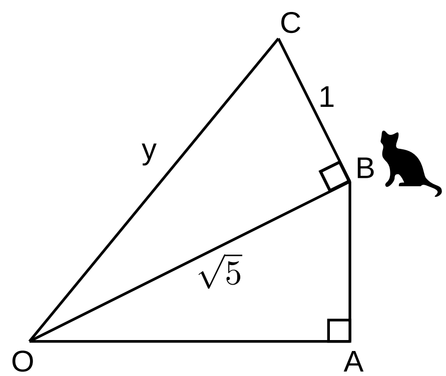


Pelo Teorema de Pitágoras, temos que:

$$x^2 = 2^2 + 1^2 .$$

Logo, temos que $x = \sqrt{5}$, sendo este o comprimento do segmento OB.

b) Observe a figura abaixo:



Novamente, pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$y^2 = (\sqrt{5})^2 + 1^2,$$

de onde concluímos que $y = \sqrt{6}$. Logo, o comprimento do segmento BC é igual a $\sqrt{6}$.

c) Repetindo o processo anterior, sempre usando Pitágoras, obtemos $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}$ e assim por diante. Observe:

	Distância
1º salto	$\sqrt{5}$
2º salto	$\sqrt{6}$
3º salto	$\sqrt{7}$
$\vdots$	$\vdots$
2014º salto	x

Daí, deduzimos que $x = \sqrt{2018}$. Deste modo, após 2014 saltos, a gata estará a uma distância $\sqrt{2018}$ m do ponto O. Para descobrir após quantos saltos a gata estará a exatos 45 m do ponto O, basta achar um número tal que a raiz quadrada desse número seja igual a 45. Ou seja este número deve ser igual a $45^2 = 2025$. Olhando na tabela anterior, podemos deduzir que a gata estará a uma distância $\sqrt{2025}$ m do ponto O após 2021 saltos.

$\boxed{7}$ *O último algarismo* – *Solução*

a) Observe que

$$11^{11} = \underbrace{11 \times 11 \times 11 \times 11 \times \cdots \times 11}_{\text{11 vezes}}.$$

Cada vez que multiplicamos dois números que têm o algarismo 1 como algarismo mais à direita, obtemos novamente um número que tem o algarismo 1 como algarismo mais à direita. Por exemplo, $11 \times 11 = 121$. Logo, repetindo o processo, vamos descobrir que 11^{11} tem o algarismo 1 como algarismo mais à direita.

b) Observe que

$$9^9 = \underbrace{9 \times 9 \times \cdots \times 9}_{\text{9 vezes}}.$$

Neste caso, quando fazemos a primeira multiplicação, obtemos $9 \times 9 = 81$, que termina em 1. Quando fazemos a próxima multiplicação, obtemos $81 \times 9 = 729$, que termina em 9. Fazendo a próxima multiplicação, obtemos um número que termina em 1 novamente. Depois outro número, agora terminando em 9. Logo, temos um padrão! Como começamos de 9 e fazemos oito multiplicações, vamos obter no final um número que termina em 9.

Para o número 9219^{9219}, fazemos a mesma análise de antes. Como começamos com um número que termina com 9, e fazemos 9218 multiplicações, concluímos que no final será obtido um número que termina em 9.

c) Neste caso, observemos novamente o padrão gerado. Notemos que $4 \times 4 = 16$. Multiplicando o último algarismo (que no caso é 6) por 4, obtemos $6 \times 4 = 24$. Sendo assim, o último algarismo volta a ser 4. Ou seja, obtemos um padrão no qual o último algarismo alterna entre 4 e 6. Como

$$2014^{2014} = \underbrace{2014 \times 2014 \times \cdots \times 2014}_{\text{2014 vezes}},$$

começamos com um 2014 e fazemos 2013 multiplicações. Deste modo, o algarismo mais à direita do resultado será o algarismo 6.

8 ***Ora bolas*** – *Solução*

a) Primeiro, uma bola é colocada em alguma urna. Para que o processo termine com duas bolas, é necessário que, no próximo passo, a próxima bola seja colocada na mesma urna onde a primeira bola foi colocada. Isso tem probabilidade de $1/3$. Logo, a probabilidade de que o processo termine com duas bolas é igual a $1/3$.

b) Primeiro, uma bola é colocada em alguma urna. No próximo passo, é necessário que a próxima bola seja colocada em uma urna distinta da primeira urna escolhida. Caso contrário o processo acaba! Como são 2013 urnas vazias (uma já está ocupada), temos uma probabilidade igual a

$$\frac{2013}{2014}$$

de isso acontecer. No terceiro passo, uma nova urna é escolhida. Para que o processo não termine, é necessário que esta nova urna escolhida seja diferente das duas anteriores. A probabilidade de isso acontecer é

$$\frac{2012}{2014}.$$

No quarto passo, uma nova urna é escolhida. Pelo mesmo argumento de antes, a probabilidade da urna escolhida ser diferente das anteriores é

$$\frac{2011}{2014},$$

e assim sucessivamente até a nona urna, cuja probabilidade será

$$\frac{2006}{2014}.$$

Para que o processo termine com dez bolas, é necessário que a décima bola seja colocada em uma urna que já tenha uma bola! Como temos, até este ponto, nove urnas ocupadas e são 2014 urnas, a probabilidade de isso ocorrer é

$$\frac{9}{2014}.$$

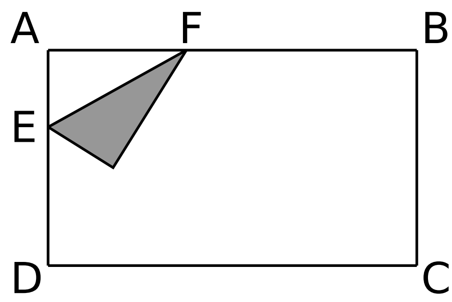
Assim, a probabilidade de que o processo termine com 10 bolas é igual ao produto das probabilidades descritas acima, o que nos dá

$$\frac{2013}{2014}\cdot\frac{2012}{2014}\cdot\frac{2011}{2014}\cdot\frac{2010}{2014}\cdot\frac{2009}{2014}\cdot\frac{2008}{2014}\cdot\frac{2007}{2014}\cdot\frac{2006}{2014}\cdot\frac{9}{2014}$$

como resultado.

9 ***Dobraduras e perímetros*** – *Solução*

a) Observe a figura abaixo:

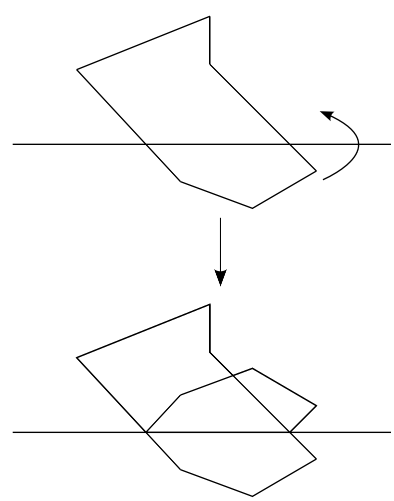


Aplicando a Desigualdade Triangular, concluímos que

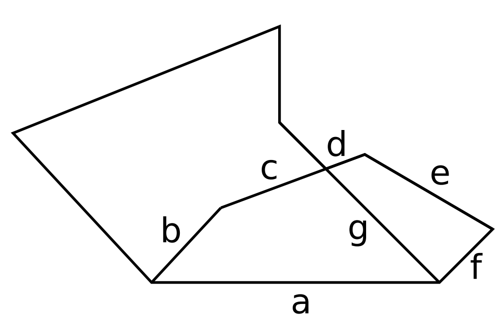
$$|\overline{EF}| < |\overline{EA}| + |\overline{AF}|$$

onde $|\overline{EF}|$, $|\overline{EA}|$ e $|\overline{AF}|$ representam os comprimentos dos respectivos segmentos. Quando fizemos a dobradura, os segmentos $\overline{EA}$ e $\overline{AF}$ foram substituídos pelo segmento $\overline{EF}$. Logo, o perímetro diminuiu!

b) Observe a figura:

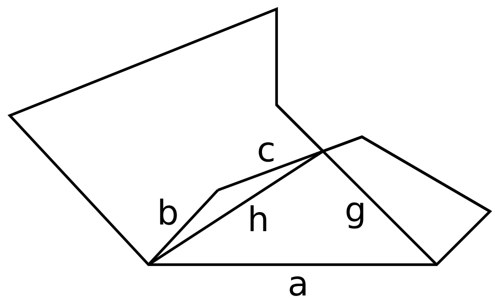


Quando fizemos a dobradura descrita acima, algumas linhas deixaram de contribuir no perímetro e outras passaram a existir.



Como podemos ver acima, os segmentos de comprimentos b, c e g foram retirados quando fizemos a dobra, e o segmento de comprimento a foi adicionado. Os segmentos de comprimento e, d e f foram mantidos.

Tracemos um segmento tracejado, como mostra a figura abaixo:



Pela Desigualdade Triangular, temos que

$$a < h + g\,.$$

Também pela Desigualdade Triangular, temos que

$$h < b + c\,.$$

Portanto,

$$a < h + g < b + c + g,$$

de onde concluímos que o perímetro diminuiu.

10 *Professora Lorena e os quadrados* – *Solução*

a) Usando o produto notável $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, vamos reescrever a expressão

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + 96^2 - 95^2 + \cdots + 2^2 - 1^2$$

como

$$(100+99)(100-99) + (98+97)(98-97) + (96+95)(96-95) + ... + (2+1)(2-1).$$

Observe que várias diferenças acima são iguais a um! Por exemplo, $100 - 99 = 1$, $98 - 97 = 1$ e assim por diante. Logo, a expressão acima é igual a

$$100 + 99 + 98 + 97 + \cdots + 3 + 2 + 1.$$

Para calcular a soma acima, vamos somá-la duas vezes! Observe:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ + & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\ \hline = & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

Todas as somas dão 101. Como são 100 somas, isso dá $100 \times 101 = 10100$. Mas havíamos somado duas vezes o que queríamos, logo temos que dividir por dois. Daí, temos como resposta final

$$\frac{10100}{2} \;=\; 5050\,.$$

b) Usando novamente o produto notável ensinado pela profesora Lorena, observamos que

$$999.991 = 1.000.000 - 9 = 1000^2 - 3^2 = (1000+3)(1000-3) = 1003 \times 997,$$

e obtemos os números 1003 e 997 cujo produto dá 999.991.

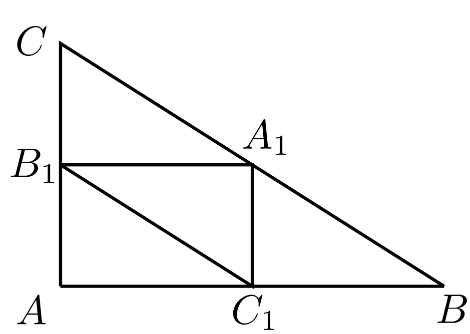
$\boxed{11}$ ***O mínimo para ter certeza*** – *Solução*

a) São doze signos. Logo, para garantir que duas têm o mesmo signo, bastam treze pessoas!

b) São sete os dias da semana. Logo, para garantir que pelo menos quatro fazem aniversário no mesmo dia da semana neste ano, vamos precisar de $3 \times 7 + 1 = 22$ pessoas!

$\boxed{12}$ ***Triângulo dentro de triângulo*** – *Solução*

a) Os pontos A_1, B_1 e C_1 são pontos médios dos lados BC, AC e AB, respectivamente, veja a figura abaixo.



O triângulo grande ABC é retângulo, tendo altura 3 e base 4. Logo, sua área é $\frac{3\times 4}{2} = 6$. Os quatro triângulos CB_1A_1, $A_1C_1B_1$, B_1AC_1 e $C_1A_1B_1$ são todos congruentes, tendo, portanto, mesma área, que deve ser $1/4$ da área total. Portanto, a área do triângulo $A_1B_1C_1$ é igual a $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

b) Pelo item anterior, cada vez que desenhamos um triângulo ligando os pontos médios do anterior, este novo triângulo central tem área igual a $\frac{1}{4}$ do anterior. Daí,

$$\text{Área do triângulo } A_1B_1C_1 = \frac{1}{4} \cdot 6 = \frac{3}{2}\,.$$

Repetindo o processo,

$$\text{Área do triângulo } A_2B_2C_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2}\,.$$

Novamente,

$$\text{Área do triângulo } A_3B_3C_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{2}\,.$$

Repetindo o processo mais uma vez,

$$\text{Área do triângulo } A_4B_4C_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{3}{2},$$

e assim por diante. Logo, a área do triângulo $A_{2014}B_{2014}C_{2014}$ será igual a $(\frac{1}{4})^{2013} \cdot \frac{3}{2}$.

13 ***Araceli e Luana*** – *Solução*

Queremos que a seguinte identidade seja satisfeita:

$$\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}. \qquad (\blacklozenge)$$

O lado esquerdo da igualdade pode ser escrito como $100a + 10b + c$, enquanto que o lado direito pode se escrever como

$$(10a + b) + (10b + c) + (10c + a) = 11a + 11b + 11c.$$

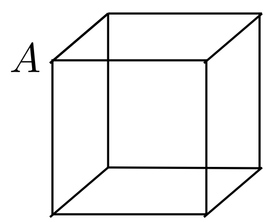
Substituindo essas expressões na identidade ($\blacklozenge$), obtemos a equação

$$89a = b + 10c.$$

O lado direito da última equação é o número $\overline{cb}$. Para que $89a$ seja um número de dois algarismos, necessariamente $a = 1$. Logo, $\overline{cb} = 89a = 89$ e, finalmente, $b = 9$ e $c = 8$.

14 ***Triângulos no cubo*** – *Solução*

a) Vamos começar fixando um vértice, digamos A, e contando o número de triângulos que usam esse vértice. Cada um desses triângulos será determinado indicando os seus outros dois vértices distintos de A.

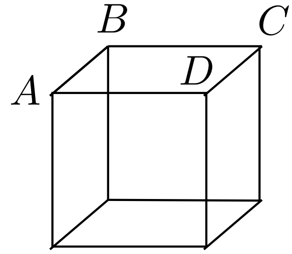


Então o número de triângulos que usam o vértice A coincide com o número de formas de escolherem-se dois vértices distintos no conjunto $\mathcal{V} = \{B, C, D, E, F, G, H\}$. Uma vez escolhido o primeiro vértice, restam 6 possíveis escolhas em $\mathcal{V}$ para o segundo vértice. Contaríamos assim 7 (número de vértices em $\mathcal{V}$) vezes 6 pares de vértices em $\mathcal{V}$, mas cada par haveria sido contado duas vezes. Logo há $7 \times 6/2 = 21$ maneiras de escolherem-se dois vértices distintos em $\mathcal{V}$.

Até aqui provamos que, para cada vértice do cubo, o número de triângulos que usam tal vértice é 21. Como o cubo possui 8 vértices, contaríamos 8×21 triângulos, mas cada triângulo haveria sido assim contado três vezes, uma vez por cada um de seus vértices. Concluímos que há

$$\frac{8 \times 21}{3} = 56$$

triângulos que podem ser formados usando os vértices do cubo.
b) É uma boa ideia contar primeiro o número de triângulos que estão contidos em alguma face. Fixemos nossa atenção sobre uma face, digamos a face $ABCD$.



Para determinar cada triângulo, devemos escolher os seus 3 vértices dentro do conjunto de vértices $\{A, B, C, D\}$. Escolher um trio em $\{A, B, C, D\}$ é equivalente a escolher um elemento no mesmo conjunto, aquele que não pertence ao trio. São então 4 trios e, portanto, 4 triângulos que estão contidos na face $ABCD$. Como o cubo tem 6 faces, contaríamos assim $6 \times 4 = 24$ triângulos. Nessa contagem, cada triângulo foi contado exatamente uma vez, portanto a quantidade total de triângulos que estão contidos nas faces do cubo é 24. Assim, há $56 - 24 = 32$ triângulos que não estão contidos em uma face do cubo.

15 *Proporção de áreas* – *Solução*

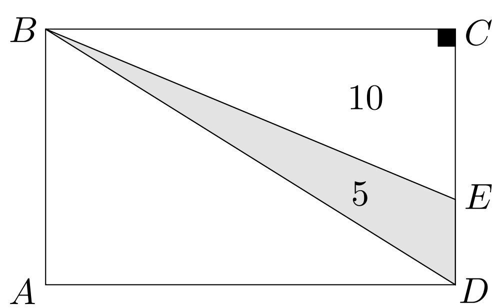
Lembre-se de que a área de um triângulo é dada por (base $\times$ altura)$/2$. Para o triângulo BED, se considerarmos ED como sendo a sua base então BC será a sua altura. Então, a área do triângulo BED é igual a

$$\frac{|ED| \times |BC|}{2}. \qquad (\blacksquare)$$

Por outro lado, a área do triângulo BCE pode ser calculado como

$$\frac{|CE| \times |BC|}{2}. \qquad (\bullet)$$

Comparando as quantidades ($\blacksquare$) e ($\bullet$) e usando que $CE = 2ED$, concluímos que a área do triângulo BCE é igual ao dobro da área do triângulo BED. Portanto, a área do triângulo BED é 5 m^2.



Logo, a área do triângulo BCD é igual a $(10+5)$ m^2. Finalmente, a área do retângulo $ABCD$ é igual ao dobro da área do triângulo BCD e, portanto, a resposta é $2 \times (10 + 5) = 30$ m^2.

16 *A lista de Paul* – *Solução*

(a) Os números na lista de Paul são:

$$97,\ 997,\ 9997,\ 99997,\ \ldots,\ \underbrace{9999\ldots9}_{100 \text{ vezes}}7.$$

O número de algarismos 9 nessa lista é

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{(100)(101)}{2} = 5050.$$

(b) Os números na lista de Paul podem ser escritos na forma:

$$100-3,\ 1000-3,\ 10000-3,\ 100000-3,\ \ldots,\ 1\underbrace{0000\ldots0}_{101 \text{ vezes}}-3\,.$$

A soma desses números é, então:

$$S = \underbrace{1111\ldots1}_{100 \text{ vezes}}00 - 100(3) = \underbrace{1111\ldots1}_{98 \text{ vezes}}0800.$$

Finalmente, a soma dos algarismos de S é $98(1)+8=106$.

17 ***Os doze números de Pedro*** – *Solução*

Sejam A e B os números colocados nas casas pintadas como indicado na seguinte figura:

					A
					B

Observe que, pelas regras, B deve ser maior que todos os outros números da sua mesma linha e também maior que A. Mas sendo A maior que todos os outros números da sua linha, concluímos que B deve ser maior que todos os outros números do tabuleiro. Portanto $B=12$.

a) O maior valor que A pode tomar é 11. A maior soma é, então, $A+B=11+12=23$. A figura seguinte mostra um modo de atingir essa soma:

1	3	5	7	9	11
2	4	6	8	10	12

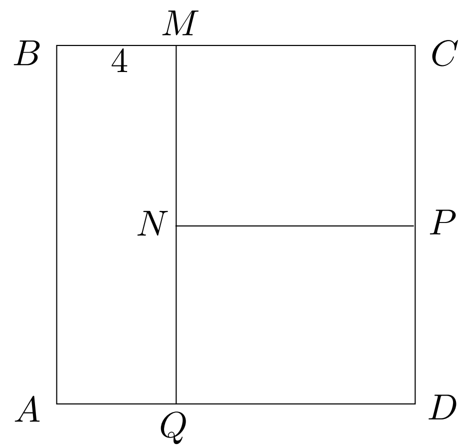
Observação: Essa é, de fato, a única maneira na qual a soma é igual a 23.
b) Como A deve ser maior que os outros 5 números da sua linha, o mínimo valor que A pode tomar é 6. Então, o menor valor que pode tomar a soma é $A+B=6+12=18$. A figura seguinte mostra um modo de atingir essa soma:

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12

Observação: Essa é, de fato, a única maneira na qual a soma é igual a 18.

18 ***Quadrado dividido em retângulos*** – *Solução*

Na seguinte figura, a área do retângulo $MNPC$ é $|MN| \times |NP|$ enquanto que a área do retângulo $NQDP$ é $|NQ| \times |NP|$.



Para que as áreas desses retângulos coincidam, é necessário que $|MN|$ e $|NQ|$ sejam iguais. Chamemos de a esse valor comum, isto é, $a = |MN| = |NQ|$. Assim temos que $|MQ| = |MN| + |NQ| = 2a$. Logo, a área do retângulo $ABMQ$ é igual a $|BM| \times |MQ| = 4 \times (2a) = 8a$. A área do retângulo $MNPC$ é igual a $|MN| \times |NP| = a \times |NP|$. Assim, para que a área dos retângulos $MNPC$ e $NQDP$ seja também igual a $8a$ é necessário que $NP = 8$.

Daí, temos que a medida do lado BC do quadrado coincide com $|BM| + |MC| = |BM| + |NP| = 4 + 8 = 12$. A área do quadrado $ABCD$ é, portanto, $12^2 = 144$.

19 ***Os sinais de Luís*** – *Solução*

a) Chamemos de a, b, c, d e e os números que ficaram com sinal negativo. Já que

$$-a - b - c - d - e = (a + b + c + d + e) - 2(a + b + c + d + e)$$

o número N pode ser também calculado como

$$N = (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) - 2(a+b+c+d+e) = 55 - 2(a+b+c+d+e).$$

Observe que o menor valor possível para a soma $a+b+c+d+e$ é $1+2+3+4+5 = 15$. Isso proporciona um valor máximo possível para N:

$$N = 55 - 2(a + b + c + d + e) \leq 55 - 2(15) = 25.$$

Como 25 não é múltiplo de 7, então N deve ser um número estritamente menor que 25.

b) Já que N é um número de dois algarismos, múltiplo de 7 que é menor que 25, restam somente duas possibilidades: 14 e 21. Mas, pela identidade mostrada no item a) temos que

$$N = 55 - 2(a + b + c + d + e). \qquad (\spadesuit)$$

Logo, N é a diferença entre um número ímpar e um número par. Então N deve ser ímpar e, portanto, $N = 21$.

c) Se $N = 21$ então a relação (♠) mostra que $a + b + c + d + e = 17$. Podemos conseguir essa soma com, por exemplo, $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$ e $e = 7$. Assim, uma forma de designar os sinais é

$$-1 - 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 + 8 + 9 + 10.$$

20 ***Ajudemos o Pepi*** – *Solução*

a) Um modo de colocar os números é o seguinte

1	2	3	4
8	7	6	5

b) A soma de todos os números colocados no tabuleiro pode ser calculado somando primeiro os dois números em cada coluna e somando depois as somas obtidas. Como a soma em cada coluna é igual a S, a soma de todos os números é $4 \times S$. Portanto

$$4 \times S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8.$$

Obtemos assim que $S = 9$.

c) Sabemos que a soma em cada coluna deve ser $S = 9$. Os pares que somam 9 são

$$\{1, 8\}\ , \quad \{2, 7\}\ , \quad \{3, 6\}\ , \quad \{4, 5\}\ .$$

O par $\{1, 8\}$ pode ser colocado em qualquer uma das 4 colunas. Feito isso, para colocar o par $\{2, 7\}$ restariam 3 colunas possíveis. Colocados os dois primeiros pares restariam 2 colunas para o par $\{3, 6\}$ e, finalmente, o par $\{4, 5\}$ seria colocado na única coluna restante. Existem então

$$4 \times 3 \times 2 \times 1$$

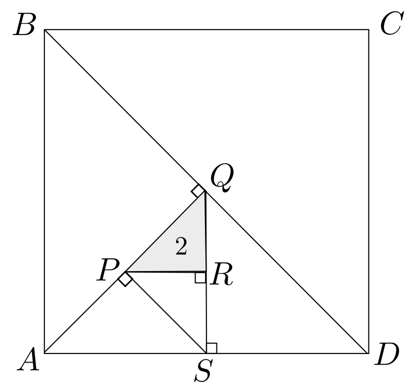
modos de associar cada par a cada coluna. Mas, escolhida a coluna para cada par, teríamos 2 formas de colocar cada par nas casas da coluna correspondente. Assim, contaríamos

$$2^4 \times (4 \times 3 \times 2) = 384$$

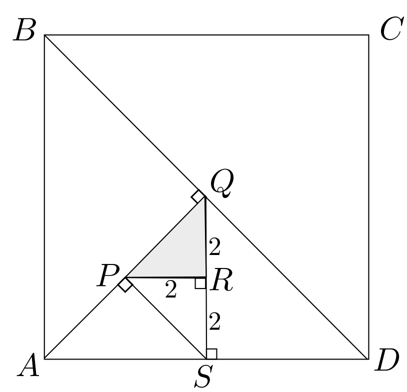
maneiras pelas quais Pepi pode colocar os números no tabuleiro.

21 *Quadrado dividido em triângulos* – *Solução*

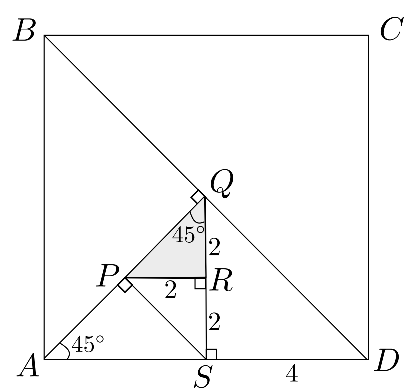
Pela informação do problema, o triângulo PQR da figura tem área 2.



Mas, por ser um triângulo retângulo, a área do triângulo PQR pode ser calculada como $PR \times QR/2$. Já que $PR = QR$, concluímos que $PR = QR = 2$. Agora, sabemos que PRS é também um triângulo retângulo isósceles e portanto $RS = PR = 2$.



Como o triângulo retângulo QSD é isósceles podemos concluir que $SD = QS = 2 + 2 = 4$. Por outro lado, como os triângulos PQR e APS são triângulos retângulos isósceles, então $\measuredangle PAS = \measuredangle PQR = 45°$.



Isso implica que o triângulo AQS é isósceles e portanto $AS = SQ = 4$. Até aqui, temos que o lado do quadrado mede $AD = AS + SD = 8$. A área do quadrado é portanto $8^2 = 64$.

22 ***As filhas de Francisco*** – *Solução*

a) É claro que Alina é mais velha que Valentina. Chamemos de d a diferença entre as idades de Alina e Valentina. Como elas nasceram no mesmo dia do ano, d não varia (observe que isso não seria verdade se elas tivessem nascido em dias diferentes, já que, nesse caso, a diferença se altera no dia do aniversário de cada uma).

Se a idade de Valentina hoje é α, então a idade de Alina deve ser 2α então a diferença de idade entre as duas é dada por:

$$d = 2\alpha - \alpha.$$

Concluímos que $d = \alpha$, logo Alina tem $2d$ anos e Valentina tem d anos.

Tal relação entre as idades de Alina e Valentina não poderia ter acontecido antes, já que Valentina tinha menos do que d anos. Também não poderá acontecer depois, pois Valentina terá mais do que d anos.

b) Chamemos de A a idade da filha mais nova, B a idade da filha do meio e C a idade da filha mais velha. Chamemos de $x = B - A$ a diferença de idades entre as duas mais novas, e de $y = C - B$ a diferença de idades entre as duas filhas mais velhas. A diferença de idades entre a mais nova e a mais velha é portanto $C - A = x + y$. Como elas nasceram no mesmo dia do ano, temos que essas diferenças não variam.

Sabe-se que, em cada um dos anos 2004, 2014 e 2024, a idade de uma das filhas foi, é, ou será o dobro da idade de uma das outras. Para isso, somente existem 3 possibilidades:

(i) B é o dobro de A.

(ii) C é o dobro de B.

(iii) C é o dobro de A.

Pelo raciocínio usado na parte a), sabemos que cada situação somente pode se dar em um dos três anos. Então, necessariamente, as três situações: (i), (ii) e (iii) devem acontecer nos três anos: 2004, 2014 e 2024, mas não sabemos ainda em que ordem. Também pela parte a), sabemos que:

- Quando acontece (i), B deve ser igual a $2x$ e A deve ser igual a x. Além disso, C é igual a $B + y$, isto é, C deve ser igual a $2x + y$.

- Quando acontece (ii), $B = y$, $C = 2y$ e, portanto, $A = y - x$.
- Quando acontece (iii), $C = 2(x + y)$, $A = x + y$ e, portanto, $B = 2x + y$.

Observe que as idades de A nos casos (i), (ii) e (iii) são

$$x, \quad y - x \quad \text{e} \quad x + y,$$

respectivamente. Como $x < x + y$ e $y - x < x + y$, concluímos que $x + y$ é a maior das três idades e, portanto, (iii) deve acontecer no ano 2024. Somente resta ver em quais dos dois anos 2004 ou 2014 acontece cada um dos eventos em (i) e (ii).
Vamos supor que (i) e (ii) acontecem nos anos 2014 e 2004 respectivamente. Então, as idades de A nos anos 2004, 2014 e 2024 seriam $y - x$, x e $x + y$ respectivamente. Assim, teríamos as equações

$$y - x + 10 = x \quad \text{e} \quad x + 10 = x + y\ .$$

Resolvendo, teríamos que $x = 10$ e $y = 10$. Mas nesse caso, C seria hoje igual a $2x + y = 30$. Mas a filha mais velha tem mais do que 30 anos, como enunciado no problema. Descartamos, assim, essa possibilidade.
Sabemos então que (i) e (ii) acontecem nos anos 2004 e 2014, respectivamente. Então, as idades de A nos anos 2004, 2014 e 2024 são x, $y - x$ e $x + y$, respectivamente. Logo, temos que

$$x + 10 = y - x \quad \text{e} \quad y - x + 10 = x + y.$$

Resolvendo, obtemos $x = 5$ e $y = 20$. Finalmente, as idades das filhas de Francisco são hoje, iguais a

$$y - x = 15\ , \quad y = 20 \quad \text{e} \quad 2y = 40.$$

Como a idade de Alina deve ser o dobro da idade de Valentina, as idades de Alina e Valentina devem ser hoje iguais a 40 e 20 respectivamente. Portanto, Civela tem hoje 15 anos.

23 ***Os adesivos de Ximena*** – *Solução*

Vamos começar contando quantas vezes o algarismo 2 aparece nos números entre 1 e 199. Como algarismo das unidades, o algarismo 2 aparece nas páginas

$$2, 12, 22, 32, 42, 52, 62, \ldots, 152, 162, 172, 182, 192;$$

logo, contamos até agora, 20 números.

Como algarismo das dezenas, o algarismo 2 aparece nas páginas

$$20, 21, 22, 23, \ldots, 28, 29, 120, 121, 122, 123, \ldots, 128, 129.$$

Se apagássemos o algarismo 2 das dezenas desses números obteríamos os números desde o 0 até o 19. Contamos, assim, mais 20 números. Até aqui, vimos que o algarismo 2 é usado 40 vezes nas primeiras 199 páginas.

Da página 200 até a página 219 usamos 20 vezes o algarismo 2 na posição das centenas mais 2 vezes na posição das unidades nos números 202 e 212. Isso soma 22 vezes.

Nas 10 páginas que há desde a 220 até a 229 usamos o algarismo 2 dez vezes nas centenas, dez vezes nas dezenas e uma vez nas unidades, somando $10 + 10 + 1 = 21$ no total.

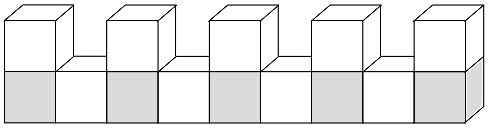
Até a página 229, usamos então $40 + 22 + 21 = 83$ vezes o algarismo 2. Restam ainda 17 adesivos com o algarismo 2. Para as 10 páginas da 230 até a 239, são usados 10 adesivos para as centenas e 1 para as unidades. Restam agora 6 adesivos que podem ser usados nas páginas

$$240\,, \quad 241\,, \quad 242\,, \quad 243 \quad \text{e} \quad 244.$$

Concluímos, assim, que Ximena somente pode numerar as páginas até a página 244.

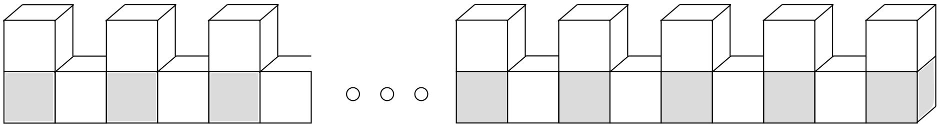
24 *Construindo muros* – *Solução*

a) Para construir um muro de 5 pontas são necessários $5 + 4$ cubos para a base e um cubo para cada uma das 5 pontas.



A resposta é, portanto, $(5 + 4) + 5 = 14$ cubos.

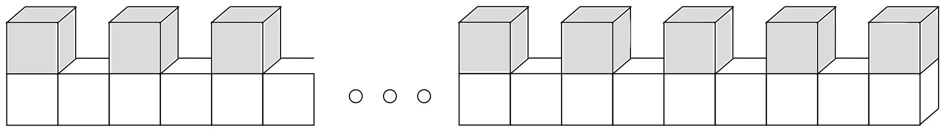
b) Contemos de modo similar ao utilizado na parte a). Para a base são necessários $2014 + 2013$ cubos e, para as pontas, são necessários 2014 cubos.



2014 pontas

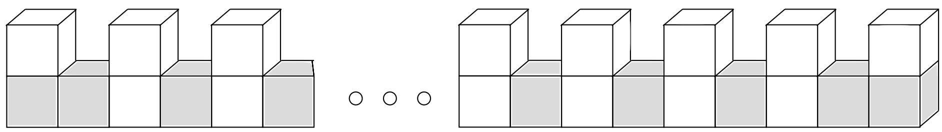
A resposta é, portanto, $(2014 + 2013) + 2014 = 6041$ cubos.

c) Observe que, em cada cubo usado como ponta, são pintadas cinco faces.



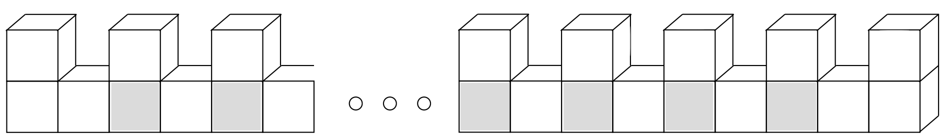
2014 pontas

Como cada face tem $1\ \text{m}^2$, temos uma área de $5 \times 2014\ \text{m}^2$ pintada até aqui. Nos cubos que estão pintados em cinza na próxima figura, são pintadas três faces.



2014 pontas

Esses são, no total, 2015 cubos. Portanto, eles acrescentam $3 \times 2015\ \text{m}^2$ de superfície pintada. Finalmente, restam 2012 cubos (um cubo embaixo de cada ponta, exceto nos dois extremos) dos quais são pintadas duas faces



2014 pontas

Logo, eles acrescentam uma superfície de $2 \times 2012\ \text{m}^2$ pintada. Contamos assim, no total,

$$5 \times 2014\ +\ 3 \times 2015\ +\ 2 \times 2012\ =\ 20139$$

metros quadrados de superfície pintada.

25 ***Multiplicando números grandes*** – *Solução*

Primeiro notamos que se soubermos A, então B é o algarismo das unidades do número $A \times A$. E conhecendo B, podemos fazer a operação inversa, dividir o número $BBBBBBBBB$ por A e ver se conseguimos um número da forma $\star\star\star\star\star\star\star A$. Aqui cabe notar que o número $BBBBBBBBB$ tem 9 dígitos, enquanto que $\star\star\star\star\star\star\star A$ só tem 8.

Então vamos lá:

Se $A = 1$, então $B = 1$, e é fácil ver que a divisão de 111111111 por 1 dá um número de 9 dígitos, e não de 8 dígitos. O mesmo acontece nos casos $A = 2$ e $A = 3$. Se $A = 2$, então $B = 4$ e

$$444444444 \div 2 = 222222222,$$

o que não pode acontecer, porque 222222222 tem 9 dígitos. Se $A = 3$, então $B = 9$ e

$$999999999 \div 3 = 333333333,$$

que também tem 9 dígitos.

Se $A = 4$, então $B = 6$. E o que acontece, neste caso, é que a divisão de 666666666 por 4 não é exata. De fato, a divisão tem quociente 166666666 e resto 2. Logo, A não pode ser 4.

Se $A = 5$, então $B = 5$ também e, portanto

$$555555555 \div 5 = 111111111,$$

que tem 9 dígitos e não termina em 5.

Se $A = 6$, então $B = 6$ também e, portanto

$$666666666 \div 6 = 111111111,$$

que tem 9 dígitos e não termina em 6.

Se $A = 7$, então $B = 9$. E como no caso $A = 4$, vemos que a divisão de 999999999 por 7 não é exata. De fato, a divisão tem quociente 142857142 e resto 5.

Se $A = 8$, então $B = 4$. E como anteriormente, a divisão de 444444444 por 8 não é exata, tendo quociente 55555555 e resto 4.

Por fim, se $A = 9$, então $B = 1$. E dividindo

$$111111111 \div 9 = 12345679,$$

que é um número de 8 dígitos terminado em 9. Portanto, a multiplicação que Joãozinho escreveu no quadro foi

$$\begin{array}{r} 12345679 \\ \times \quad 9 \\ \hline 111111111 \end{array}$$

26 ***Completando o tabuleiro*** – *Solução*

Para completar o tabuleiro, basta procurar por casas onde só temos uma opção de letra para preenchê-la, por exemplo:

A	B	C	D	E
			$\star$	
	A	B	C	

Vemos que onde está a estrelinha $\star$, só pode estar a letra B, porque na coluna de $\star$ aparecem D e C, e em uma das diagonais aparecem A e E. Logo ficamos com:

A	B	C	D	E
			B	
	A	B	C	

A	B	C	D	E
			B	
		$\star$		
	A	B	C	

Agora olhamos para a posição de $\star$ acima. Em uma das diagonais já aparecem A, B e E, enquanto que na coluna aparece C. Portanto, sobra a letra D para a posição de $\star$. Como já temos 4 letras na diagonal grande, podemos completar a diagonal com a letra C.

A	B	C	D	E
			B	
		D		
	A	B	C	
C				

A	B	C	D	E
			B	
		D		
	A	B	C	
C		$\star$		

Para a posição acima, vemos que na coluna já aparecem B, C e D, e em uma das diagonais aparece a letra A. Portanto, no lugar de $\star$ temos a letra E, e podemos completar a coluna com a letra A.

A	B	C	D	E
		A	B	
		D		
	A	B	C	
C		E		

A	B	C	D	E
	$\star$	A	B	
		D		
	A	B	C	
C		E		

Continuando com o raciocínio, na posição de $\star$ acima só pode aparecer a letra E, pois em uma das diagonais temos as letras A, C e D, enquanto que na linha temos a letra B. Com isso completamos a diagonal maior com a letra B.

A	B	C	D	E
	E	A	B	
		D		
	A	B	C	
C		E		B

A	B	C	D	E
	E	A	B	
		D		
	A	B	C	
C	$\star$	E		B

Agora completamos a última linha. Na posição de $\star$ só pode aparecer a letra D, pois na linha já temos B, C e E, e na coluna temos a letra A. Para completar essa linha, falta só a letra A:

A	B	C	D	E
	E	A	B	
		D		
	A	B	C	
C	D	E	A	B

Agora podemos facilmente completar a segunda e quarta colunas, ambas já têm 4 letras:

A	B	C	D	E
	E	A	B	
	C	D	E	
	A	B	C	
C	D	E	A	B

A	B	C	D	E
$\star$	E	A	B	
$\ddagger$	C	D	E	
	A	B	C	
C	D	E	A	B

Olhando para a posição de $\star$ acima, vemos que na linha já aparecem A, B e E e na coluna aparece a letra C, então $\star$ tem que ser a letra D. Por outro lado, na linha de ‡ aparecem as letras C, D e E e na coluna aparece a letra A, portanto ‡ é a letra B. Completando a coluna ficamos

A	B	C	D	E
D	E	A	B	
B	C	D	E	
E	A	B	C	
C	D	E	A	B

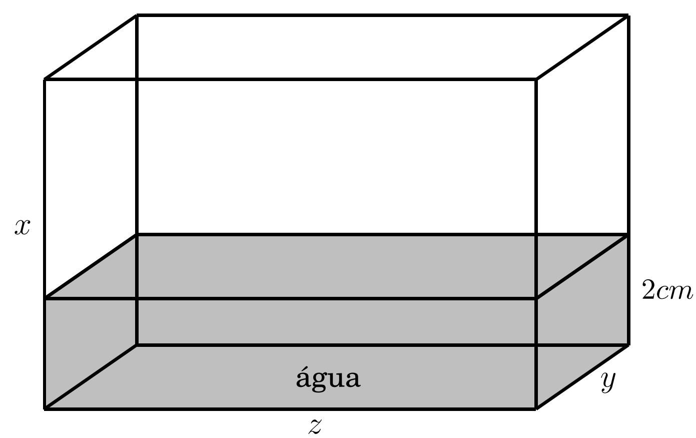
Tudo que falta é completar agora a última coluna, o que é fácil pois já temos 4 letras em cada linha:

A	B	C	D	E
D	E	A	B	C
B	C	D	E	A
E	A	B	C	D
C	D	E	A	B

E é fácil ver que esta configuração satisfaz as condições do enunciado.

27 ***Água na caixa*** – *Solução*

Sejam x, y e z as dimensões das caixas em centímetros, como mostrado na figura abaixo. Primeiro, lembramos que 160 mililitros são 160 cm^3. Então, se ao apoiarmos a caixa na face que tem dimensões y e z, a água atinge com 2 cm de altura, como na figura abaixo:



A região ocupada pela água forma um paralelepípedo de medidas y, z e 2 cm, logo

$$\begin{aligned} y \times z \times 2 &= 160 \\ y \times z &= 80. \end{aligned}$$

Analogamente, ao apoiarmos a caixa na face de dimensões x e z obtemos

$$\begin{aligned} x \times z \times 4 &= 160 \\ x \times z &= 40. \end{aligned}$$

E, por fim, temos

$$\begin{aligned} x \times y \times 5 &= 160 \\ x \times y &= 32. \end{aligned}$$

Agora multiplicamos as duas primeiras equações, e obtemos

$$x \times y \times z^2 = 3200.$$

Como $x \times y = 32$, então

$$32z^2 = 3200.$$

Logo $z^2 = 100$ e, portanto $z = 10$ cm. Agora, sabendo o valor de z, podemos encontrar os valores de x e y. Pela primeira equação, vale que $10y = 80$, logo $y = 8$ cm, e da segunda equação vale que $10x = 40$, logo $x = 4$ cm. Portanto as dimensões da caixa são 4 cm, 8 cm e 10 cm.

28 *Dinheiro alienígena* – *Solução*

a) Vamos testar os menores valores para descobrirmos. Claramente não poderemos pagar com uma nota de 5 ou 7, pois não há como receber nem 4 e nem 6 de troco. O próximo valor que conseguimos pagar é $10 = 5 + 5$ (duas notas de 5), mas não temos como receber 9 de troco. Depois de 10, conseguimos pagar $12 = 5 + 7$, mas também não temos como receber 11 de troco. O próximo valor que conseguimos é $14 = 7 + 7$, o que daria 13 de troco, que também não pode ser dado. Depois de 14, podemos pagar $15 = 5 + 5 + 5$, e agora sim podemos receber $14 = 7 + 7$ de troco. Portanto, o menor valor que podemos pagar é 15.

b) Vamos continuar com o processo acima e escrever que valores podem ser usados nas máquinas. Já vimos que $5, 7, 10, 12, 14$ e 15 podem ser usados. Continuando:

$$\begin{aligned} 17 &= 5+5+7 \\ 19 &= 5+7+7 \\ 20 &= 5+5+5+5 \\ 21 &= 7+7+7 \\ 22 &= 5+5+5+7 \\ 24 &= 5+5+7+7 \\ 25 &= 5+5+5+5+5 \\ 26 &= 5+7+7+7 \\ 27 &= 5+5+5+5+7 \\ 28 &= 7+7+7+7. \end{aligned}$$

Agora, como podemos usar nas máquinas os 5 valores consecutivos 24, 25, 26, 27, 28, é fácil ver que, a partir daí, vamos poder usar qualquer valor, pois basta somar notas de 5:

$$29 = 24+5, \quad 30 = 25+5, \quad 31 = 26+5, \quad 32 = 27+5, \quad 33 = 28+5, \quad 34 = 29+5\ldots$$

Então, os valores que não podem ser usados nas máquinas são:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 16, 18, 23.$$

29 *Em quantos zeros termina?* – Solução

a) Para contar a quantidade de zeros no final de um número, basta descobrir qual é a maior potência de 10 que é divisor desse número. Por outro lado, como $10 = 2 \times 5$, basta sabermos as potências de 2 e 5 que aparecem na fatoração do número. Então podemos escrever:

$$A = 2^5 \times 3^7 \times 5^7 \times 11^3 = 10^5 \times 3^7 \times 5^2 \times 11^3.$$

Como o número $3^7 \times 5^2 \times 11^3$ não é um múltiplo de 10, ele não termina em 0. Logo, vemos que o número original termina em 5 zeros. Na verdade, podemos calcular o valor e achamos 7277242500000.

b) Como descobrir qual a maior potência de 10 que divide o número B? Para isso, basta contar quantas vezes cada fator 2 e 5 aparece na fatoração de B e a menor destas quantidades fornece a quantidade de zeros em que termina o número B.

Começamos contando a quantidade de fatores 2. Como cada número par terá um fator 2, temos que contar a quantidade de números pares que existem entre 1 e 137. E isso é bem fácil de contar, pois o último número par que aparece é o 136 que é igual a 2×68. Logo, temos 68 números pares e, portanto, 68 fatores 2.

Porém, isso não é tudo. Existem números pares que contribuem com mais de um fator 2 (o 4 por exemplo). E, na verdade, todos os múltiplos de 4 contribuem com dois fatores 2, então temos que contar também os múltiplos de 4 que são em quantidade $136 \div 4 = 34$. Aqui 136 é o último múltiplo de 4 que aparece no produto. Do mesmo modo, existem números que contribuem com 3 fatores, como os múltiplos de $8 = 2^3$; com 4 fatores, como os múltiplos de $16 = 2^4$ e assim por diante com $32 = 2^5$, $64 = 2^6$ e $128 = 2^7$. Essas são as potências de 2 menores que 137. Vamos então contar todos esses números.

O último múltiplo de 8 antes de 137 é 136, logo aparecem $136 \div 8 = 17$ múltiplos de 8. Já o último múltiplo de 16 é o 128, logo temos $128 \div 16 = 8$ múltiplos de 16. Continuando, aparecem $128 \div 32 = 4$ múltiplos de 32, $128 \div 64 = 2$ múltiplos de 64 e um único múltiplo de 128. Logo, a quantidade de fatores 2 que aparecem na fatoração do número B é

$$68 + 34 + 17 + 8 + 4 + 2 + 1 = 134.$$

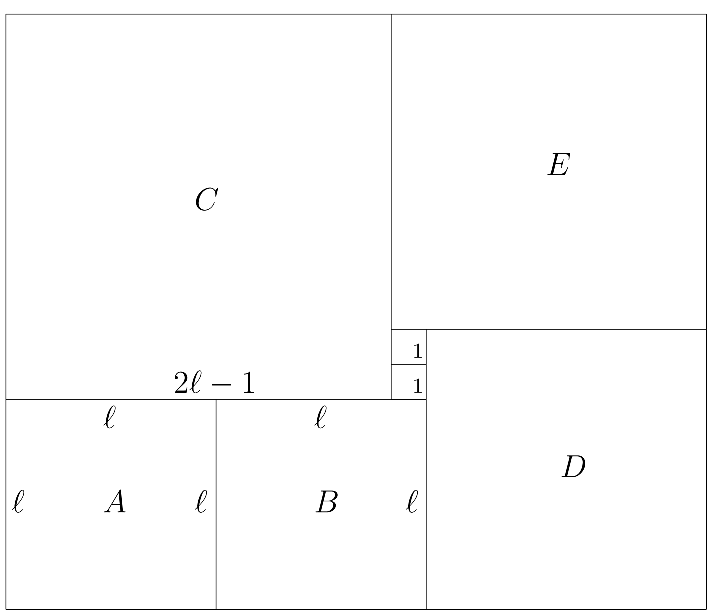
Agora, basta contar a quantidade de fatores 5. Para isso, seguimos o mesmo processo acima. Aparecem $135 \div 5 = 27$ múltiplos de 5, $125 \div 25 = 5$ múltiplos de 25 e um único múltiplo de 125. Logo, a quantidade de fatores 5 é

$$27 + 5 + 1 = 33.$$

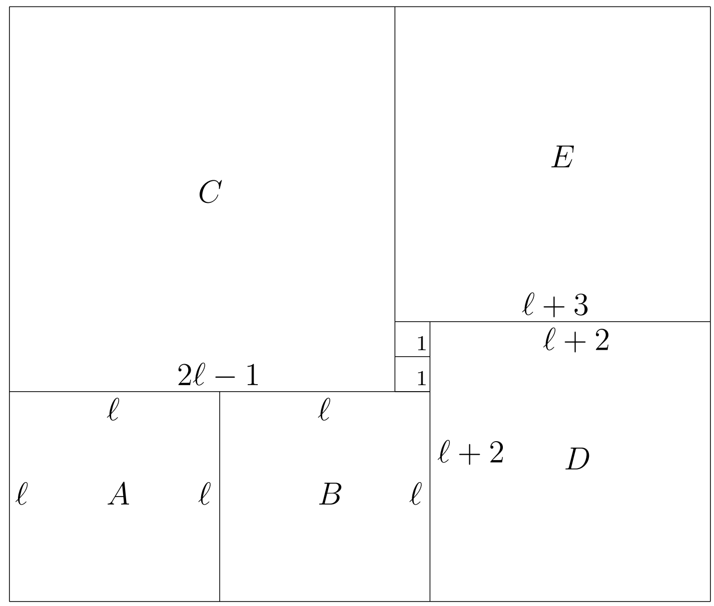
Portanto, como a quantidade de fatores 5 é menor que a quantidade de fatores 2, quer dizer que o número B termina em 33 zeros.

30 ***Quadrados de Sofia*** – *Solução*

Seja ℓ a medida do lado do quadrado A como na figura abaixo. Então o lado do quadrado B também mede ℓ, enquanto que o lado do quadrado C mede $2\ell - 1$.



Já a medida do lado do quadrado D é igual à medida do lado do quadrado B mais 2. Logo, o lado do quadrado D mede $\ell + 2$. Por fim, a medida do lado do quadrado E é igual à medida do lado do quadrado D mais 1 e, portanto, o quadrado E tem lado $\ell + 3$.



Mas como a figura final é um retângulo, vale que os lados opostos são iguais. Portanto, se somarmos as medidas dos lados dos quadrados A e C, temos que obter o mesmo resultado que se somarmos as medidas dos lados dos quadrados E e D. Logo, vale

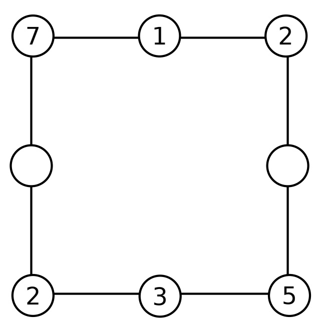
$$\begin{aligned}\ell + (2\ell - 1) &= (\ell + 2) + (\ell + 3)\\ 3\ell - 1 &= 2\ell + 5\\ \ell &= 6 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Portanto, o retângulo tem lados $\ell + (2\ell - 1) = 17$ cm e $\ell + \ell + (\ell + 2) = 20$ cm. Logo, a área do retângulo é $17 \times 20 = 340$ cm^2.

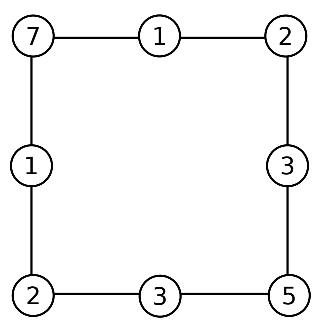
NÍVEL 2 – SOLUÇÕES

1 ***Mantenha a soma*** – *Solução*

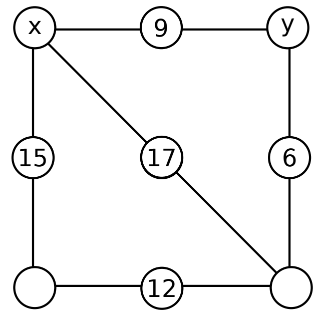
a) Na linha inferior a soma é $2+3+5=10$. Como as somas ao longo de qualquer lado são iguais, o número que falta no canto superior à direita do quadrado deve ser igual a 2, como na figura a seguir:



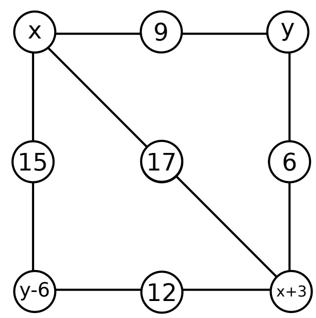
Faltam mais dois números a serem preenchidos. Novamente, como a soma deve ser 10 em qualquer lado, os números que faltam são 1 e 3, como na figura a seguir:



b) Vamos chamar de x e y os números a serem colocados nos cantos superiores do quadrado, como na figura a seguir:



As somas devem ser constantes ao longo de qualquer lado ou diagonal desenhada. A soma ao longo do lado superior é $x+9+y$, logo todas as somas devem ser iguais a $x+9+y$. Observando as somas ao longo dos lados verticais, deduzimos que os cantos inferiores devem ser iguais a $y-6$ e $x+3$, como na figura a seguir:



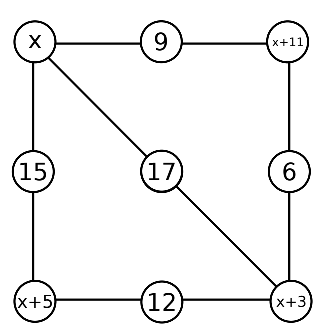
Falta verificar a soma ao longo da diagonal desenhada e do lado horizontal inferior. A soma ao longo do lado horizontal inferior é igual a

$$(y-6)+12+(x+3)=x+9+y,$$

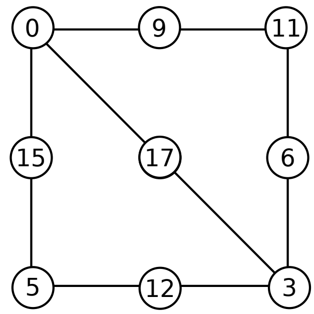
verificando a soma desejada. Verificando a soma ao longo da diagonal desenhada, obtemos

$$x+17+(x+3)=x+9+y,$$

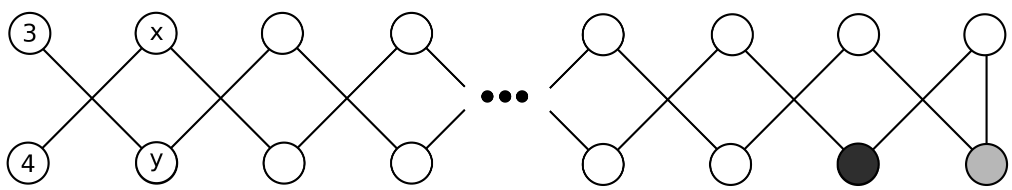
de onde concluímos que $y=x+11$. Logo, qualquer solução será da forma



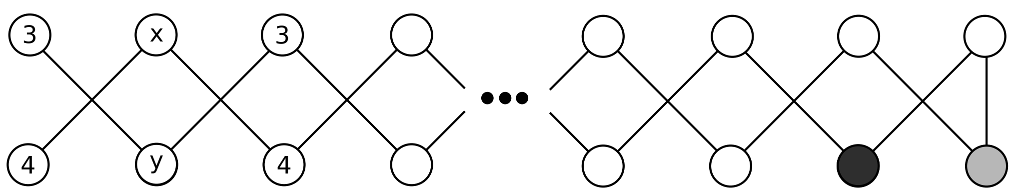
Como o valor de x ainda não foi fixado, podemos obter muitas soluções! Por exemplo, tomando $x=0$, obtemos a solução:



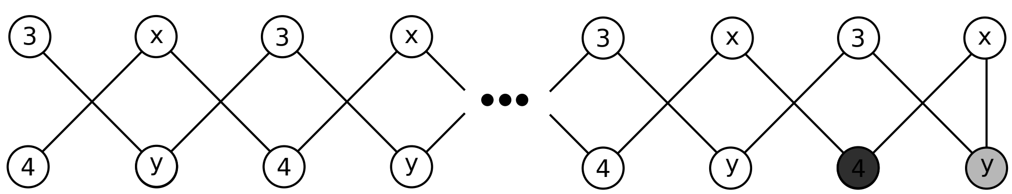
c) Chamemos de x e y os números vizinhos aos números 3 e 4, como na figura a seguir:



Como a soma ao longo de cada segmento é constante, os dois próximos números devem ser iguais a 3 e 4:



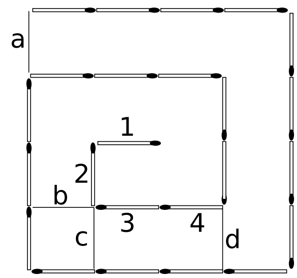
Como há 40 círculos no desenho, há 20 círculos na linha de cima e 20 círculos na linha de baixo. Continuando o processo acima, vamos obter:



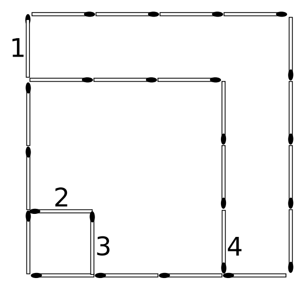
Observe o x no canto superior mais à direita. Este x está ligado ao 4 e ao y. Como $x + 4 = x + y$, concluímos que $y = 4$. Logo, os números nos dois círculos cinza são iguais a 4.

2 *Mova os fósforos!* – *Solução*

Observe a figura abaixo:



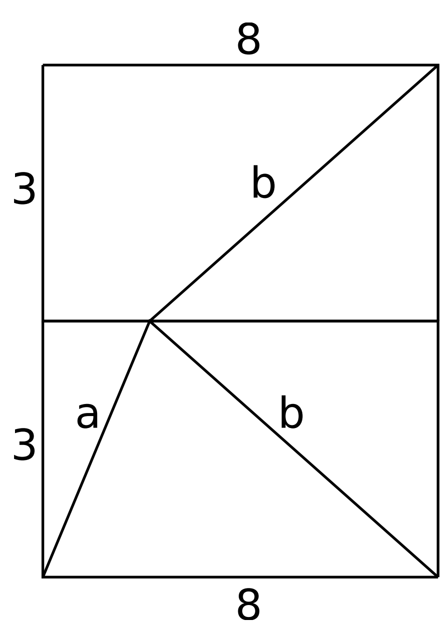
Colocando o palito de fósforo 1 na posição a, o 2 na posição b, o 3 na c e o 4 na d, obtemos a seguinte figura composta por três quadrados de tamanhos distintos:



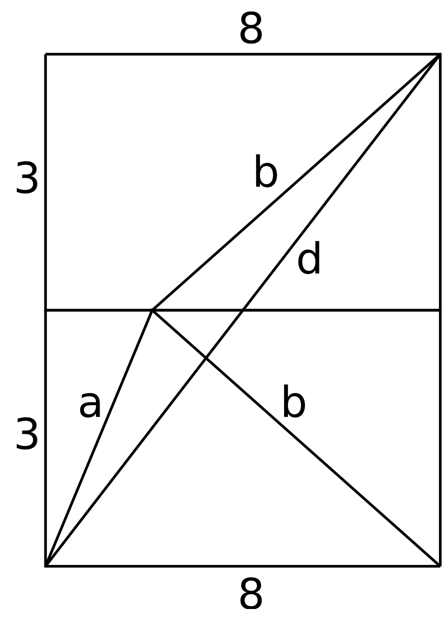
3 *Desigualdades e triângulos* – *Solução*

a) As outras desigualdades são $b < a + c$ e $c < a + b$.

b) Conforme a sugestão, desenhamos um retângulo idêntico em cima do retângulo original, com o segmento de comprimento b refletido:

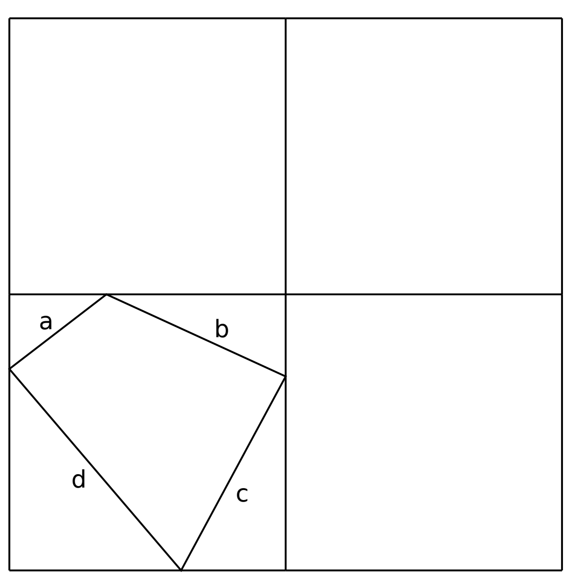


Em seguida, traçamos o segmento tracejado abaixo:

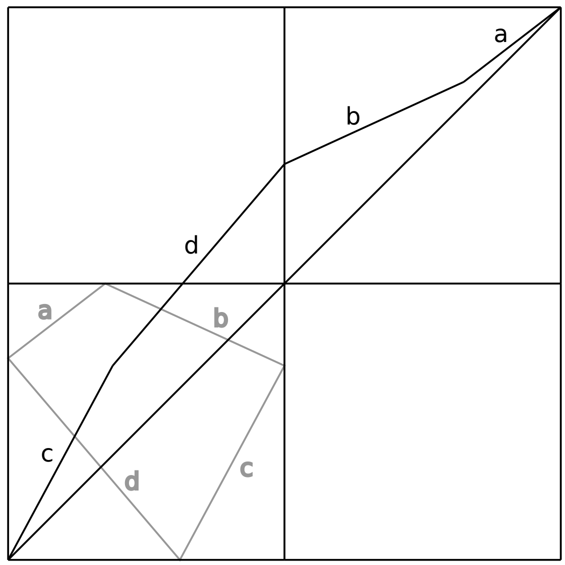


Aplicando o Teorema de Pitágoras à diagonal, temos que $d^2 = 6^2 + 8^2$. Portanto, $d^2 = 100$, e daí $d = 10$. Aplicando a desigualdade triangular ao triângulo cujos lados são a, b e a diagonal, obtemos $a + b > 10$.

c) Vamos desenhar quatro quadrados da seguinte maneira:



Em seguida, vamos copiar os segmentos de comprimentos a, b, c e d da seguinte maneira:



Observe que os segmentos de comprimento b e d foram refletidos pelo eixo vertical. Como a menor distância entre dois pontos é dado pelo comprimento do segmento de reta que liga os dois pontos, temos que $a+b+c+d$ é maior ou igual a duas vezes o comprimento da diagonal do quadrado.

4 *Números invertidos* – *Solução*

a) Estamos procurando um número de cinco algarismos $ABCDE$ tal que

$$ABCDE \times 9 = EDCBA.$$

Somando $ABCDE$ dos dois lados dessa igualdade, obtemos que $ABCDE \times 10 = EDCBA + ABCDE$. Mas o número $ABCDE \times 10$ pode ser representado ainda pelos algarismos $ABCDE0$. Sendo assim, obtivemos que $EDCBA + ABCDE = ABCDE0$. Para visualizar melhor, mostramos essa igualdade da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccccc} & E & D & C & B & A \\ + & A & B & C & D & E \\ \hline A & B & C & D & E & 0 \end{array}$$

Quando somamos dois números contendo cinco algarismos e encontramos como resultado um número contendo seis algarismos, esse último número tem o seu primeiro algarismo igual a 1. Assim, temos que $A = 1$:

$$\begin{array}{cccccc} & E & D & C & B & 1 \\ + & 1 & B & C & D & E \\ \hline 1 & B & C & D & E & 0 \end{array}$$

Como $A = 1$ e o último algarismo do resultado da soma é igual a 0, necessariamente devemos ter $E = 9$:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & 1 & \\ & 9 & D & C & B & 1 \\ + & 1 & B & C & D & 9 \\ \hline 1 & B & C & D & 9 & 0 \end{array}$$

o que implica que:

$$\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ & D & C & B \\ + & B & C & D \\ \hline B & C & D & 9 \end{array}$$

Agora, temos duas possibilidades para o valor de B. Devemos ter então $B = 1$ ou $B = 0$.

No caso em que $B = 1$, temos que:

$$\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ & D & C & 1 \\ + & 1 & C & D \\ \hline 1 & C & D & 9 \end{array}$$

Assim, devemos ter que $D = 7$ e então:

$$\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ & 7 & C & 1 \\ + & 1 & C & 7 \\ \hline 1 & C & 7 & 9 \end{array}$$

ou de maneira mais simples:

$$\begin{array}{ccc} & 7 & C \\ + & 1 & C \\ \hline 1 & C & 7 \end{array}$$

o que é impossível, já que a soma de dois números que terminam com o mesmo algarismo deve resultar em um número par.

Vamos nos concentrar no caso $B = 0$, do qual obtemos então:

$$\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ & D & C & 0 \\ + & & C & D \\ \hline & C & D & 9 \end{array}$$

Assim, temos que $D = 8$:

$$\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ & 8 & C & 0 \\ + & & C & 8 \\ \hline & C & 8 & 9 \end{array}$$

o que nos dá $C = 9$. Concluímos, portanto, que $ABCDE = 10989$.

b) A solução desse item é semelhante àquela do item anterior. Estamos procurando um número de sete algarismos $ABCDEFG$ tal que $ABCDEFG \times 9 = GFEDCBA$. Somando $ABCDEFG$ dos dois lados dessa igualdade, obtemos que:

$$\begin{array}{cccccccc} & G & F & E & D & C & B & A \\ + & A & B & C & D & E & F & G \\ \hline A & B & C & D & E & F & G & 0 \end{array}$$

Logo, concluímos que $A = 1$ e que $G = 9$, obtendo assim:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & 1 \\ & F & E & D & C & B \\ + & B & C & D & E & F \\ \hline B & C & D & E & F & 9 \end{array}$$

Daí, concluímos que $B = 1$ ou que $B = 0$. Se fosse correto que $B = 1$, então, para que o último algarismo do resultado fosse igual a 9, deveríamos ter que $F = 7$. Logo, a última soma mostrada tem um número começando com o algarismo 7 e outro com o algarismo 1 e não poderia resultar em um número contendo seis algarismos. Assim, devemos abandonar a possibilidade de que $B = 1$ e nos concentrar no caso $B = 0$. Nesse caso, temos que $F = 8$ e então a soma fica:

$$\begin{array}{ccccc} & 8 & E & D & C \\ + & & C & D & E \\ \hline & C & D & E & 8 \end{array}$$

Temos agora duas possibilidades: $C = 8$ ou $C = 9$. Se fosse correto $C = 8$ então teríamos que $E = 0$. Nesse caso, a soma acima ficaria:

$$\begin{array}{cccccc} & 8 & 0 & D & 8 \\ + & & 8 & D & 0 \\ \hline & 8 & D & 0 & 8 \end{array}$$

o que é impossível, já que para que $D + D$ termine com o algarismo 0 deveríamos ter que $D = 5$ e assim:

$$\begin{array}{cccccc} & 8 & 0 & 5 & 8 \\ + & & 8 & 5 & 0 \\ \hline & 8 & 5 & 0 & 8 \end{array}$$

o que é, claramente, errado! Logo devemos abandonar a possibilidade de que seja $C = 8$ e nos concentrar no caso $C = 9$. Nesse caso, temos que $E = 9$, logo:

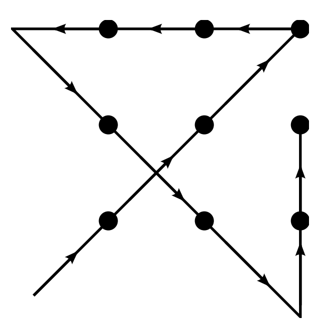
$$\begin{array}{cccccc} & 1 & & 1 & \\ & 8 & 9 & D & 9 \\ + & & 9 & D & 9 \\ \hline & 9 & D & 9 & 8 \end{array}$$

que só pode ser satisfeita se $D = 9$.

Assim, a única possibilidade é $ABCDEFG = 1099989$.

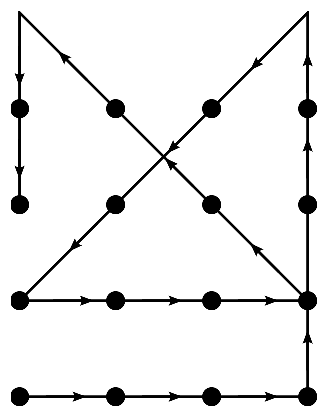
$\boxed{5}$ ***Ponto e linha sobre plano*** – *Solução*

a) Eis uma forma de passar pelos nove pontos com quatro linhas retas sem tirar o lápis do papel:



b) Eis um argumento para mostrar que não é possível fazer o mesmo do item anterior com apenas três retas: com uma reta podemos passar por no máximo três pontos. Logo, para passar pelos nove pontos, cada reta deveria cobrir três pontos distintos. Mas nesse caso, as retas seriam paralelas! Logo, não é possível.

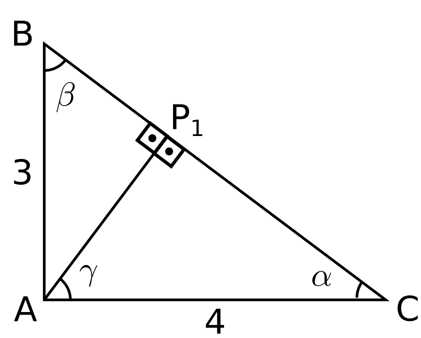
c) Abaixo, uma forma de passar pelos dezesseis pontos com seis linhas retas sem tirar o lápis do papel:



Há muitas outras!

$\boxed{6}$ ***Jussara gosta de fazer cópias reduzidas*** – *Solução*

a) Usaremos aqui que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$. Considere a seguinte figura:



Usando os ângulos internos do triângulo ABC, concluímos que $\alpha + \beta + 90° = 180°$. Logo temos que $\alpha + \beta = 90°$. Um mesmo raciocínio nos fornece que $\alpha + \gamma = 90°$. Assim, temos que $\beta = \gamma$. Logo, os triângulos BAC e AP_1C têm ângulos com mesmas medidas, logo são semelhantes.

b) Vimos no item a) que os triângulos BAC e AP_1C são semelhantes. Assim, obtemos que a razão entre os catetos adjacentes aos ângulos correspondentes deve ser igual à razão entre as hipotenusas. Ou seja,

$$\frac{|AP_1|}{|AB|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Segue daí que

$$|AP_1| = \frac{|AC| \times |AB|}{|BC|} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

Observação: Note que

$$\frac{|AP_1|}{|AB|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{4}{5},$$

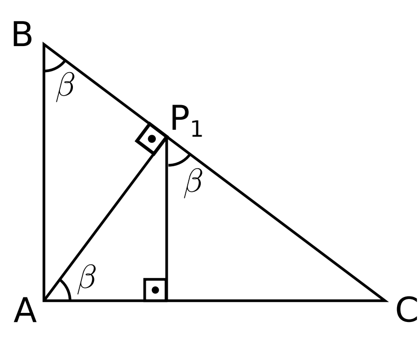
ou seja, a razão de semelhança entre esses dois triângulos é igual a $4/5$.

c) Como a razão de semelhança entre os triângulos é igual a $4/5$, temos que a base e a altura do triângulo AP_1C medem $4/5$ da base e altura do triângulo ABC respectivamente. Assim temos que:

$$\begin{aligned} \text{Área}(AP_1C) &= \frac{\text{base}(AP_1C)\times\text{altura}(AP_1C)}{2} = \frac{4/5\times\text{base}(ABC)\times 4/5\times\text{altura}(ABC)}{2} \\ &= \frac{16}{25}\frac{\text{base}(ABC)\times\text{altura}(ABC)}{2} = \frac{16}{25}\times\text{Área}(ABC) \end{aligned}$$

Segue daí que a razão entre as áreas dos triângulos AP_1C e ABC é igual a $16/25$.

d) Usando um argumento semelhante ao do item a), conclui-se que os triângulos AP_1C e P_1P_2C são semelhantes. Pela figura abaixo,



conclui-se que

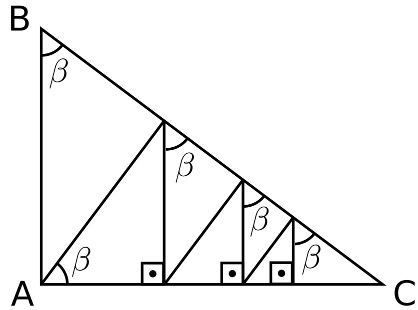
$$\frac{|P_1P_2|}{|AP_1|} = \frac{|P_1C|}{|AC|}.$$

Como a razão de semelhança entre os triângulos AP_1C e ABC é igual a $4/5$, vale que

$$\frac{|P_1P_2|}{|AP_1|} = \frac{4}{5}.$$

Daí, concluímos que a razão de semelhança entre os triângulos P_1P_2C e AP_1C também é igual a $\frac{4}{5}$. Portanto, a proporção entre as suas áreas é também igual a $16/25$.

e) Através da figura



e um procedimento análogo ao dos itens a) e d), vemos que os triângulos P_5P_6C, P_4P_5C, P_3P_4C, P_2P_3C, P_1P_2C, AP_1C e BAC são todos semelhantes, sendo a razão de semelhança entre dois desses triângulos consecutivos igual a $4/5$. Logo, a razão entre as áreas de dois desses triângulos consecutivos é igual a $16/25$. Daí,

$$\begin{aligned}\text{Área}(P_5P_6C) &= \tfrac{16}{25} \times \text{Área}(P_4P_5C) = \left(\tfrac{16}{25}\right)^2 \times \text{Área}(P_3P_4C) = \cdots = \\ &= \left(\tfrac{16}{25}\right)^4 \times \text{Área}(P_1P_2C) = \left(\tfrac{16}{25}\right)^5 \times \text{Área}(AP_1C) = \\ &= \left(\tfrac{16}{25}\right)^6 \times \text{Área}(ABC) = \left(\tfrac{16}{25}\right)^6 \times \tfrac{3\times 4}{2}.\end{aligned}$$

$\boxed{7}$ ***Maior ou menor?*** *– Solução*

a) Para ver qual número é maior, fazemos:

$$2^{40} = 2^{3\cdot 13+1} = 2\cdot 2^{3\cdot 13} = 2\cdot \left(2^3\right)^{13} = 2\cdot 8^{13}$$

$$3^{28} = 3^{2\cdot 14} = \left(3^2\right)^{14} = 9^{14} = 9\cdot 9^{13}$$

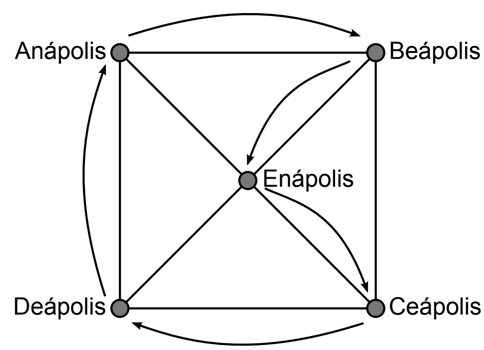
Como $2\cdot 8^{13} < 9\cdot 9^{13}$, concluímos que $2^{40} < 3^{28}$.

b) Para ver qual número é maior, fazemos:

$$31^{11} < 32^{11} = \left(2^5\right)^{11} = 2^{55} < 2^{56} = \left(2^4\right)^{14} < 17^{14}.$$

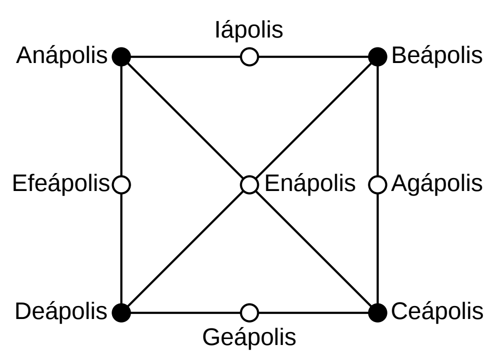
$\boxed{8}$ *Drª. Maria Amélia viaja* – *Solução*

a) Há muitas soluções possíveis. Uma delas é a solução mostrada abaixo:



b) A solução anterior também serve para este item!

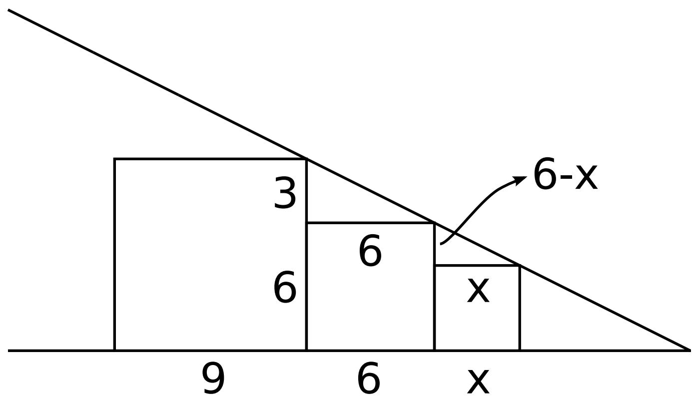
c) Uma maneira seria verificar todos os caminhos possíveis. Entretanto, façamos uma solução mais legal. Começemos colorindo os pontos que representam as cidades de preto (P) e branco (B) conforme ilustrado abaixo:



Qualquer caminho passando uma vez por cada um dos pontos deveria visitar 5 pontos brancos e 4 pontos pretos. Note que, a partir de um ponto preto somente é possível seguir para um ponto branco e, da mesma forma, a partir de um ponto branco somente é possível seguir para um ponto preto. Logo, se fosse possível sair do ponto representando a cidade de Anápolis e voltar para esse mesmo ponto passando uma vez por cada um dos outros pontos, a sequência das cores dos pontos visitados deveria ser uma sequência alternada do tipo $P, B, P, B, P, B, \ldots$ Logo, essa sequência deveria ter a mesma quantidade de pontos pretos e pontos brancos. Mas já havíamos determinado que essa sequência deveria ter 5 pontos brancos e 4 pontos pretos! Logo, não é possível que tal caminho exista.

$\boxed{9}$ ***Quadrados e mais quadrados*** – *Solução*

a) Observe a figura:



Por semelhança de triângulos, temos que

$$\frac{6-x}{x}=\frac{3}{6}\,.$$

Portanto, $x = 4$.

b) Temos que os quadrados são semelhantes numa razão de $\frac{2}{3}$. Ou seja, cada novo quadrado tem um lado com comprimento igual a $\frac{2}{3}$ do lado anterior. Logo, o $2014^{\underline{o}}$ quadrado terá um lado igual a

$$9\left(\frac{2}{3}\right)^{2013}.$$

$\boxed{10}$ ***Divisão na medida*** – *Solução*

A ideia é determinar o valor de melancias em termos de jacas. Como são $18+30 = 48$ melancias e 24 jacas, temos a proporção

48 melancias	—	24 jacas
1 melancia	—	x jacas

o que dá $x = 1/2$. Ou seja, uma melancia equivale a meia jaca. Como Renato tinha 30 melancias, este deve receber 15 jacas. Como Leandro tinha 18 melancias, este deve receber 9 jacas.

$\boxed{11}$ ***Comissões*** – *Solução*

a) Para escolher o porta-voz, temos 10 possibilidades, já que são dez alunos. Escolhido o porta-voz, temos agora 9 possibilidades para escolher o aluno que será o diretor de artes. Finalmente, para escolher o assessor técnico, restam 8 possibilidades. Logo, temos

$$10 \times 9 \times 8 = 720$$

maneiras diferentes para escolher a comissão pedida.

b) Podemos listar todas as comissões que têm os três alunos Marcelo, Leandro e Renato. Estas são:

Porta-voz	**Diretor de Artes**	**Assessor Técnico**
Marcelo	Renato	Leandro
Marcelo	Leandro	Renato
Renato	Leandro	Marcelo
Renato	Marcelo	Leandro
Leandro	Marcelo	Renato
Leandro	Renato	Marcelo

Logo, temos seis comissões possíveis. Outra maneira de obter o mesmo resultado seria: para escolher o porta-voz, temos 3 possibilidades dentre Marcelo, Renato e Leandro. Escolhido o porta-voz, restam duas possibilidades para escolher o diretor de artes. E escolhidos os dois cargos anteriores, só resta uma possibilidade para escolher o último cargo. Logo, temos

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

maneiras diferentes para escolher uma comissão que tenha os alunos Marcelo, Leandro e Renato.

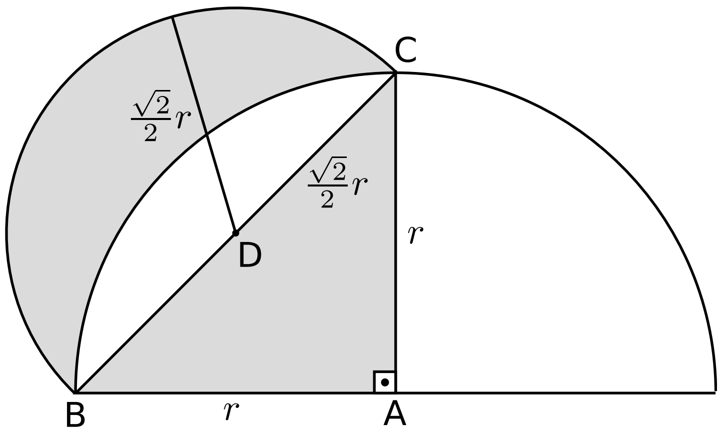
c) Agora não há mais cargos. Logo, as comissões listadas no item b) são todas iguais (representam a mesma comissão formada por Marcelo, Renato e Leandro). Para contar quantas são as comissões sem cargo, vamos agrupar as comissões com cargos (porta-voz, diretor de artes e assessor técnico) em grupos de seis comissões que tenham os mesmos três alunos. Como são 720 comissões com cargo, e são grupos de 6 com as mesmas pessoas, obtemos

$$\frac{720}{6} = 120$$

maneiras diferentes de compor uma comissão sem cargos.

$\boxed{12}$ ***Lúnulas*** – *Solução*

a) Denotemos por r o comprimento dos catetos AB e AC. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, temos que o comprimento da hipotenusa BC é igual a $\sqrt{2}r$. Observe a figura abaixo:



Como mostrado acima, o comprimento do raio da semicircunferência de centro em D e extremos B e C é igual à metade do comprimento da hipotenusa, ou seja, igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}r$.

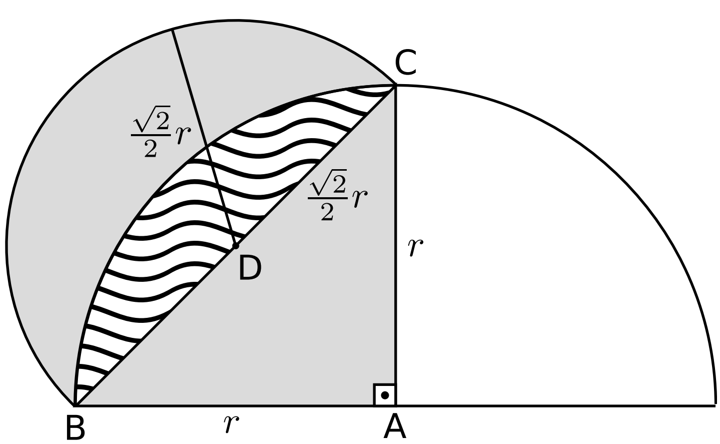
A área da semicircunferência com centro em D é igual a

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2 = \frac{\pi r^2}{4}.$$

A área do quarto de circunferência com centro em A e extremos B e C é igual a

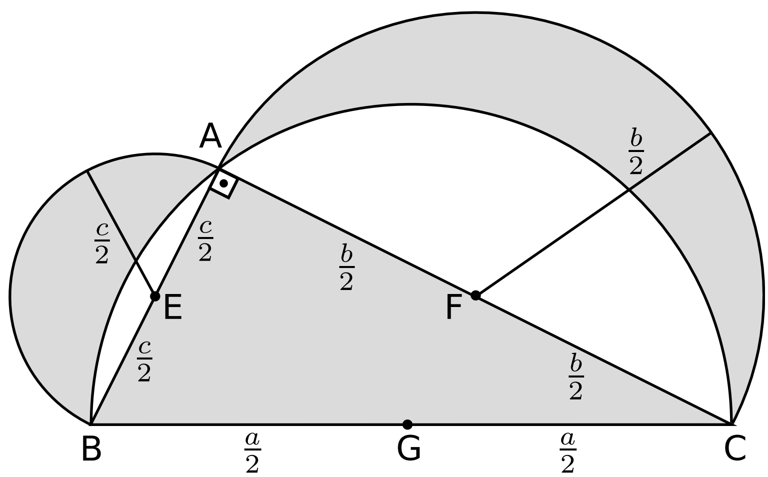
$$\frac{\pi r^2}{4}.$$

Logo, são iguais! Observe que a área hachurada abaixo é comum a essas duas regiões (a semicircunferência de centro em D e o quarto de circunferência com centro em A).



Como as duas regiões têm mesma área e, de cada uma delas foi retirada uma mesma área (a região hachurada), o que sobrou também é igual. Portanto, as áreas em cinza são iguais.

b) Observe a figura abaixo:



Vamos chamar de S_E a área da semicircunferência com centro em E e extremos A e B. Temos que

$$S_E = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{\pi c^2}{8}\,.$$

Vamos chamar de S_F a área da semicircunferência com centro em F e extremos A e C. Temos que

$$S_F = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\pi b^2}{8}\,.$$

Vamos chamar de S_G a área da semicircunferência com centro em G e extremos B e C. Temos que

$$S_G = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{8}\,.$$

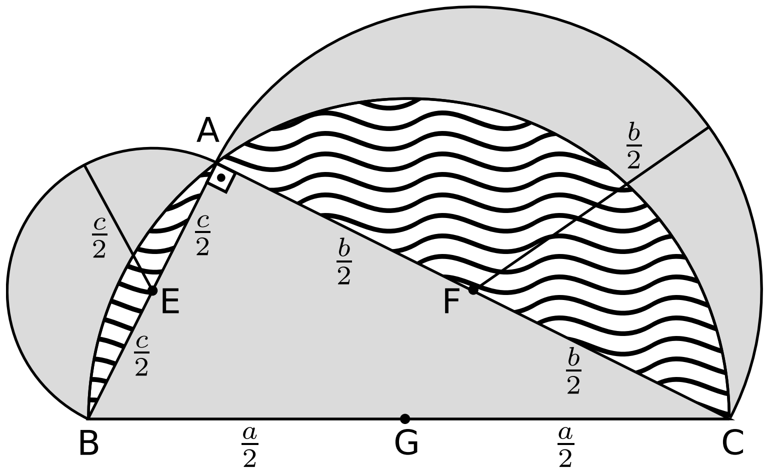
Como o triângulo ABC é retângulo, pelo Teorema de Pitágoras, sabemos que

$$a^2 = b^2 + c^2\,.$$

Disso, podemos concluir a relação entre as áreas

$$S_G = S_E + S_F\,.$$

Observe agora a figura abaixo:



A região hachurada cobre tanto parte da semicircunferência de centro em G como parte das semicircunferências com centros em E e F. Como $S_G = S_E + S_F$, e da região S_G foi retirada uma área igual à área retirada das regiões S_E e S_F (a área hachurada), concluímos que o que restou também é igual! Logo, a área do triângulo retângulo ABC é igual à soma das áreas em cinza entre os arcos de circunferência.

$\boxed{13}$ *A soma de Vladimir* – *Solução*

Como $a > c$, o número abc é maior que os números cba e cab, e então devemos ter $abc = cba + cab$. Assim,

$$100 \cdot a + 10 \cdot b + c = (100 \cdot c + 10 \cdot a + b) + (100 \cdot c + 10 \cdot b + a),$$

e então $89a = 199c + b$.

Note que $10 > a = (199 \cdot c + b)/89 > 2c$, e que $a = (199 \cdot c + b)/89 < (199 \cdot c + 10 \cdot c)/89 < 3 \cdot c$. Em particular, $5 > c$. Separemos em casos conforme o valor de c.

- Se $c = 1$: Deveríamos ter $2 < a < 3$ e não há algarismo a que cumpra isso.
- Se $c = 2$: Deveríamos ter $4 < a < 6$. Então $a = 5$ e $b = 89 \cdot a - 199 \cdot c = 47$. Não há solução nesse caso.
- Se $c = 3$: Deveríamos ter $6 < a < 9$. Então $a = 7$ ou $a = 8$, e $b = 89 \cdot a - 199 \cdot c \geq 89(7) - 199(3) = 26$. Não há solução nesse caso.
- Se $c = 4$: Deveríamos ter $8 < a < 12$. Então $a = 9$ e $b = 89 \cdot a - 199 \cdot c = 5$. Nesse caso, os números formados por Vladimir são 954, 459 e 495.

$\boxed{14}$ ***Números no tabuleiro*** – *Solução*

a) Vamos colocar as seguintes letras para representar os números colocados no tabuleiro, da maneira mostrada na seguinte figura:

M	N	P	Q	E
R	S	T	D	
U	V	C		
W	B			
A				

Observe que, pelas regras,

- A é maior que os números M, R, U e W.
- B é maior que os números M, R, U, W, N, S e V.
- C é maior que os números M, R, U, N, S, V, P e T.
- D é maior que os números M, N, P, Q, R, S e T.
- E é maior que os números M, N, P e Q.

Podemos assim concluir que qualquer número na diagonal principal é sempre maior que pelo menos 4 números distintos e, portanto, são todos maiores ou iguais a 5.

b) Podemos colocar primeiro os seguintes números para conseguir os números desejados na diagonal principal.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	
10	11	12		
13	14			
15				

Finalmente, preenchemos o resto das casas, por exemplo, do seguinte modo:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	16
10	11	12	17	18
13	14	19	20	21
15	22	23	24	25

c) Ordenemos os números A, B, C, D e E do menor para o maior, obtendo

$$\alpha < \beta < \gamma < \theta < \sigma.$$

Pela parte a), sabemos que

$$\alpha \ \geq \ 5\ . \qquad (*)$$

Agora, $\{\alpha, \beta\}$ deve coincidir com algum par em $\{A, B, C, D, E\}$, digamos que

$$\{\alpha, \beta\} \ = \ \{A, E\}.$$

Como $\beta \geq A$ e $\beta \geq E$ então β deve ser maior que os números M, N, P, Q, R, U e W. Além desses 7 números, β deve ser maior do que α, o qual é um número distinto dos 7. Assim, concluímos que β é maior que 8 números e portanto $\beta \geq 9$.
Vamos supor agora que $D \in \{\alpha, \beta\}$. Nesse caso, $\beta \geq D$ e, portanto, β é maior do que M, N, P, Q, R, S e T. Também β é maior do que α, e concluímos que β é maior do que 8 números distintos. De novo provamos que $\beta \geq 9$. De modo análogo, se $B \in \{\alpha, \beta\}$ ou $C \in \{\alpha, \beta\}$, vamos ter que β é maior do que 8 números distintos. Assim, temos provado que em qualquer caso,

$$\beta \ \geq \ 9. \qquad (**)$$

Consideremos agora o trio $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Suponhamos que $\{\alpha, \beta, \gamma\} \ = \ \{A, B, E\}$. Como γ é o máximo número entre A, B e C, então γ deve ser maior que

$$\{M, N, P, Q, R, S, T, U, W\}.$$

Além disso, γ deve ser maior que α e β. Daí, γ deve ser maior que 11 números. Portanto, $\gamma \geq 12$. Qualquer outra possibilidade para o trio $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ leva à mesma conclusão:

$$\gamma \ \geq \ 12\ . \qquad (***)$$

Quando consideramos agora as possibilidades para $\{\alpha, \beta, \gamma, \theta\}$, concluímos que θ deve ser maior que todos os números em $\{M, N, P, Q, R, S, T, U, V, W\}$ e maior que α, β e γ. Portanto

$$\theta \ \geq \ 14\ . \qquad (\bigstar)$$

Finalmente, $\sigma > \theta$ e, assim,

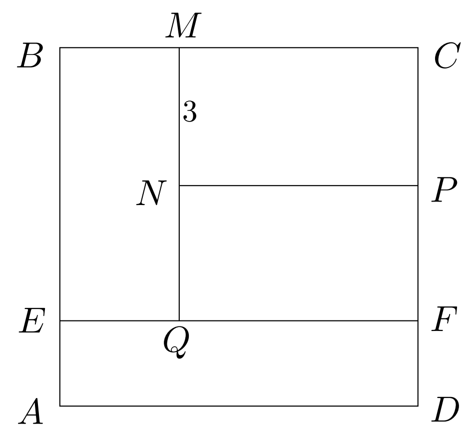
$$\sigma \ \geq \ 15\ . \qquad (\bigstar\bigstar)$$

De (*), (**), (***), (★) e (★★), obtemos que

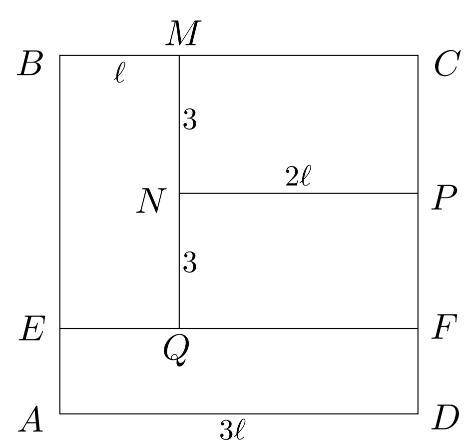
$$A + B + C + D + E = \alpha + \beta + \gamma + \theta + \sigma \geq 5 + 9 + 12 + 14 + 15.$$

$\boxed{15}$ *Retângulos formando um quadrado* – Solução

Na seguinte figura, a área do retângulo $MNPC$ é $|MN| \times |NP|$, enquanto que a área do retângulo $NQFP$ é $|NQ| \times |NP|$. Para que as áreas desses retângulos coincidam, é necessário que $|NQ| = |MN| = 3$.



Se chamarmos $|BM| = \ell$, a área do retângulo $EBMQ$ será dada por $\ell\times(3+3) = 6\ell$. Para que a área dos retângulos $MNPC$ e $NQFP$ seja também 6ℓ, é necessário que $|NP| = 2\ell$. Assim, a medida do lado do quadrado deve ser igual a $BM+NP = 3\ell$.



Em particular, $|AD| = 3\ell$, e para que a área do retângulo $AEFD$ coincida com 6ℓ, é necessário que $|FD| = 2$. Observe agora que o lado do quadrado coincide com $|MN| + |NQ| + |FD| = 3 + 3 + 2 = 8$. Finalmente, concluímos que a área do quadrado $ABCD$ é igual a $8^2 = 64$.

16 *Cinco piratas e um tesouro* – *Solução*

Sejam a, b, c, d, e as quantidades de moedas recebidas pelos cinco piratas. O número total de moedas é $S = a+b+c+d+e$. O primeiro pirata recebeu metade do que receberam os outros quatro em conjunto, isto é, $a = (b+c+d+e)/2 = (S-a)/2$. Então $a = S/3$. O segundo pirata recebeu a terça parte do que receberam os outros quatro em conjunto, isto é, $b = (a+c+d+e)/3 = (S-b)/3$. Portanto, $b = S/4$. O terceiro pirata recebeu a quarta parte do que receberam os outros quatro em conjunto, isto é, $c = (a+b+d+e)/4 = (S-c)/4$. Então $c = S/5$. O quarto pirata recebeu a quinta parte do que receberam os outros quatro em conjunto, isto é, $d = (a+b+c+e)/5 = (S-d)/5$. Daí, $c = S/6$. Assim, o último pirata recebeu

$$90 = e = S - a - b - c - d = S - \frac{S}{3} - \frac{S}{4} - \frac{S}{5} - \frac{S}{6} = \frac{S}{20}\,.$$

Portanto, o cofre tinha $S = 1800$ moedas antes da divisão.

17 *Números balanceados* – *Solução*

a) Vamos contar primeiro os valores possíveis para o par (a, b). Observe que a não pode ser igual a zero, por ser o primeiro algarismo em $abcd$. Mas a pode tomar qualquer valor em

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

porque por cada um desses valores, o número $8 - a$ dá como resultado um valor apropriado para b. Contamos, assim, 8 possibilidades para o par (a, b). Para contar os valores possíveis para o par (c, d), basta ver que c pode tomar qualquer valor no conjunto

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

e, para cada um desses valores, o número $8 - c$ dá como resultado um valor apropriado para d. São assim 9 possibilidades para o par (c, d). Os números $abcd$ que cumprem com $a + b = c + d = 8$ são as combinações de ab e cd. A resposta é, portanto,

$$8 \times 9 = 72.$$

b) Comecemos contando as possibilidades para o par (a, b). Observe que se a fosse menor do que 7, o número $16 - a$ seria negativo e não seria, então, um valor apropriado para b. Portanto, os valores possíveis para a são

$$\{7, 8, 9\}.$$

Contamos, assim, 3 possibilidades. Observe agora que para o par (c, d), as possibilidades são exatamente as mesmas que para (a, b):

$$(7, 9)\ , \quad (8, 8) \quad \text{e} \quad (9, 7).$$

Finalmente, os números $abcd$ que procuramos resultam de combinar as possibilidades para ab e cd. A resposta é, portanto,

$$3 \times 3 = 9.$$

c) Devemos contar os números $abcd$ de modo que $a+b=c+d$. Contemos primeiro aqueles em que $a+b=c+d=s$ para um $1 \le s \le 9$. As possibilidades para os pares (a,b) e (c,d) nesses casos se calculam de modo similar ao do item a). Os valores possíveis para a são

$$\{1, 2, \ldots, s\},$$

porque, para todos esses valores, o número $s-a$ é um valor permitido para b. Contamos, assim, s possibilidades para o par (a,b). Por outro lado, os valores permitidos para c são

$$\{0, 1, 2, \ldots, s\},$$

porque, para todos esses valores, o número $s-c$ é um valor permitido para d. Contamos agora $s+1$ possibilidades para o par (c,d). Finalmente, combinamos as possibilidades para os pares (a,b) e (c,d), e contamos assim

$$s \times (s+1)$$

números $abcd$ tais que $a+b=c+d=s$, com $s \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Considerando todos os valores de s entre 1 e 9, teremos no total

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 9 \times 10 = 330$$

números $abcd$ tais que $1 \le a+b=c+d \le 9$.

Observe que o máximo valor possível para $a+b=c+d=s$ é 18. Ainda resta então considerar o caso em que $10 \le s \le 18$. Para que $s-a$ seja um valor permitido para b é necessário que $0 \le s-a \le 9$. Isso implica que

$$s-9 \le a \le s.$$

Mas como a deve ser menor ou igual a 9, os valores possíveis para a serão

$$\{s-9, s-8, \ldots, 9\}.$$

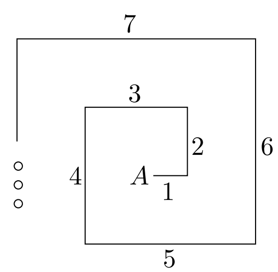
Quando $10 \le s \le 18$, é simples verificar que todos esses valores são permitidos para a, porque $s-a$ é também um valor permitido para b. Contamos assim $19-s$ possibilidades para o par (a,b). Por outro lado, como no item b), as possibilidades para o par (a,b) são exatamente as mesmas possibilidades para o par (c,d). Combinando, obteremos $(19-s)\times(19-s)$ possibilidades para $abcd$ com $a+b=c+d=s$ e $s \in \{10, 11, \ldots, 19\}$. Considerando as somas s de 10 até 18, contamos

$$9^2 + 8^2 + 7^2 + \cdots + 1^2 = 285$$

números $abcd$ tais que $10 \le a+b=c+d \le 18$. Finalmente, a resposta é que existem $330+285=615$ números $abcd$ tais que $a+b=c+d$.

$\boxed{18}$ ***O passeio de Florinda*** – *Solução*

Nesse exercício todas as distâncias estão dadas em metros. Observe na seguinte figura que os segmentos retilíneos horizontais possuem comprimentos ímpares enquanto que os verticais possuem comprimentos pares.



Se consideramos somente os segmentos retilíneos horizontais, obtemos que o deslocamento horizontal total é igual a

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + 13 - \cdots + 25 - 27 + 29.$$

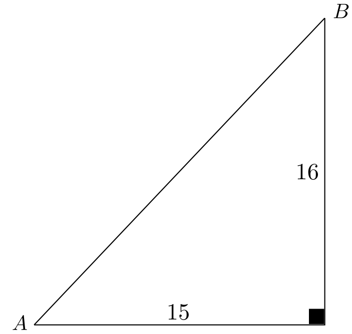
Para calcular esse valor, podemos associar os termos do seguinte modo:

$$1 \underbrace{-3+5}_{+2} \underbrace{-7+9}_{+2} \underbrace{-11+13}_{+2} - \ldots \underbrace{-27+29}_{+2}$$

O deslocamento horizontal total é, então, igual a $1 + 2 \times 7 = 15$.

Considerando agora os deslocamentos verticais, e calculando de modo similar, obtemos

$$2 \underbrace{-4+6}_{+2} \underbrace{-8+10}_{+2} \underbrace{-12+14}_{+2} - \ldots \underbrace{-28+30}_{+2} = 2 + 2 \times 7 = 16.$$



Finalmente, pelo Teorema de Pitágoras, concluímos que o deslocamento total é igual a

$$\sqrt{15^2 + 16^2} = \sqrt{481}.$$

$\boxed{19}$ *Sonho impossível* – *Solução*

Podemos calcular a soma de todos os números de 3 algarismos

$$100 + 101 + 102 + \cdots + 999 = \frac{(100 + 999) \times 900}{2} = 1099 \times 450.$$

Por outro lado,

$$abc + def + abcdef = abc + def + 1000 \times abc + def.$$

O sonho de Wanderson pode então ser escrito como a equação

$$1099 \times 450 = 1001 \times abc + 2 \times def.$$

Observemos que o número 1099×450 pode ser escrito como

$$(1001 + 98) \times 450 = 1001 \times 450 + 44100 = 1001 \times 450 + 1001 \times 44 + 56 = 1001 \times 494 + 56.$$

Isto implica que

$$1001 \times (494 - abc) + 56 = 2 \times def.$$

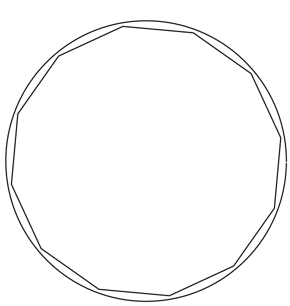
O lado direito da equação é um número par. Para que o lado esquerdo seja par, é necessário que $494 - abc$ seja par. Dividindo por 2, temos que

$$1001 \times \frac{(494 - abc)}{2} + 28 = def. \qquad (\clubsuit)$$

Sabemos que $(494 - abc)/2$ deve ser um número inteiro. Se $(494 - abc)/2 = 0$, o lado esquerdo seria igual a 28 e não obteríamos um número de 3 algarismos. Se entretanto $(494 - abc)/2 = 1$, o lado esquerdo seria igual a 1029 e não obteríamos um número de 3 algarismos. Portanto a equação ($\clubsuit$) não pode ser satisfeita. Concluímos que o sonho de Wanderson é impossível.

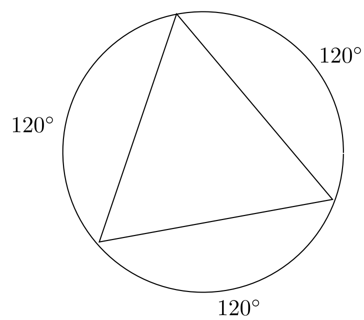
$\boxed{20}$ *Triângulos no dodecágono* – *Solução*

Podemos inscrever o dodecágono regular em um círculo como mostra a seguinte figura:

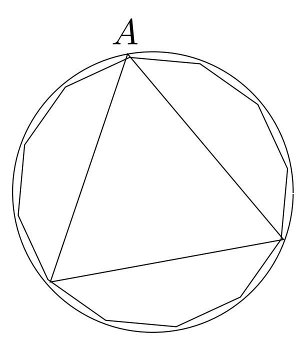


Então os arcos que correspondem a cada um dos lados do dodecágono devem medir $(360/12)^\circ = 30^\circ$.

a) Os triângulos equiláteros que podemos formar estarão também inscritos no círculo. Sabemos que a medida do arco que corresponde a um lado de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência deve ser $(360/3)^\circ = 120^\circ$.



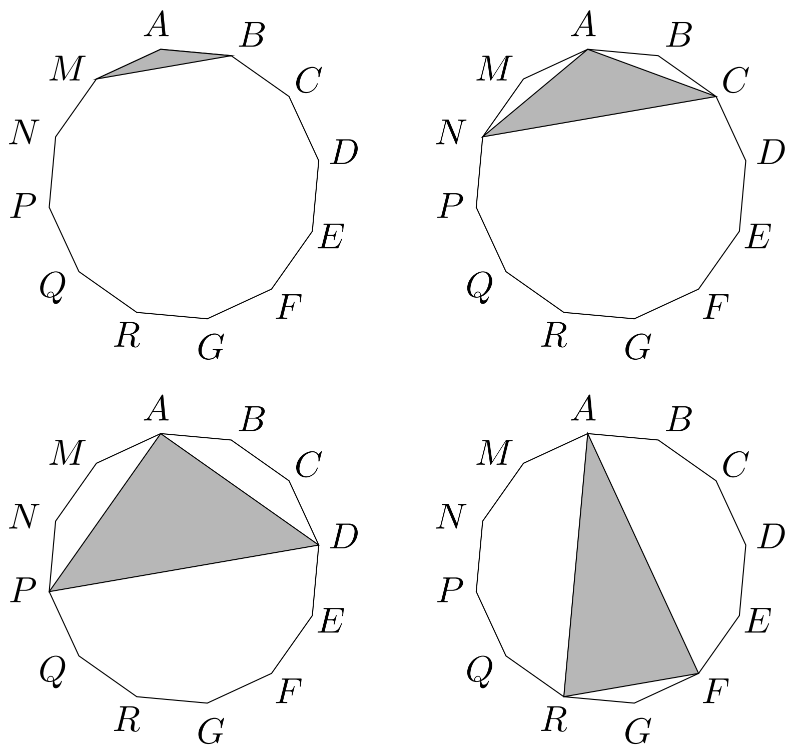
Se fixamos um vértice, digamos A no gráfico, existirá então um único triângulo equilátero usando o vértice A.



Podemos contar assim 12 triângulos (um para cada vértice). Neste caso, cada triângulo seria contado 3 vezes. Concluímos que então existem $12/3 = 4$ triângulos equiláteros inscritos no dodecágono.

b) Para contar o número de triângulos escalenos, podemos contar o número total de triângulos e subtrair o número de triângulos isósceles e equiláteros.

Primeiro, contaremos os triângulos isósceles que não são equiláteros. Fixemos um vértice, digamos, A. Existem 4 triângulos isósceles não equiláteros inscritos no dodecágono cujo vértice A corresponde ao ângulo desigual.



Podemos contar, assim, 4 triângulos isósceles por cada vértice do dodecágono, isto é, 4×12 triângulos isósceles não equiláteros no total.

Contemos agora o número total de triângulos. Para determinar um triângulo, devemos escolher três vértices no conjunto de 12 vértices do dodecágono. Para escolher o primeiro vértice do triângulo, temos 12 alternativas, para o segundo, 11 e para o terceiro, restam 10. Mas no produto $12 \times 11 \times 10$ estamos contando várias vezes um mesmo triângulo. Observe que há seis formas possíveis para ordenar os vértices de um triângulo ABC, as quais estão listadas abaixo:

$$ABC, \quad ACB, \quad BCA, \quad BAC, \quad CAB \quad \text{e} \quad CBA.$$

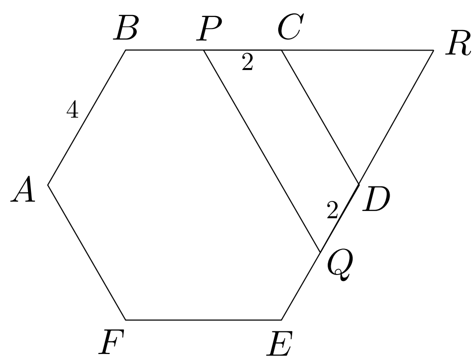
Portanto, no produto $12 \times 11 \times 10$, cada triângulo está sendo contado 6 vezes. Concluímos que há, no total, $\frac{12\times11\times10}{6} = 220$ triângulos inscritos no dodecágono.

Daí, o número de triângulos escalenos será igual a

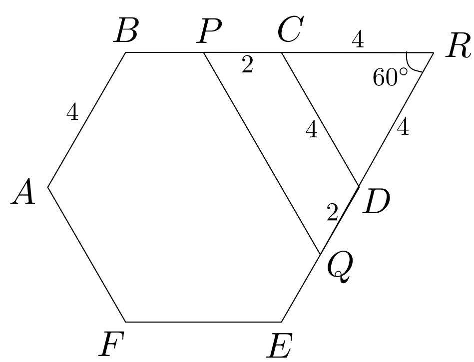
$$220 - 4 \times 12 - 4 = 168.$$

$\boxed{21}$ ***O perímetro do hexágono*** – *Solução*

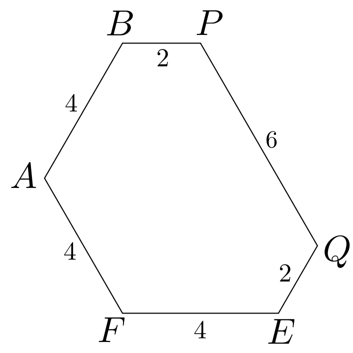
Prolongamos os lados $\overline{BC}$ e $\overline{ED}$ do modo indicado na figura seguinte:



Sendo $ABCDEF$ um hexágono regular, cada ângulo interno mede $120°$. Portanto, $\measuredangle RCD = 60°$, $\measuredangle RDC = 60°$, e concluímos que o triângulo DRC é equilátero de lado 4.



Como $|PR| = |QR| = 6$ e $\measuredangle PRD = 60°$, temos que o triângulo PQR é equilátero de lado 6. Portanto, $|PQ| = 6$.



Agora é fácil calcular o perímetro do hexágono $ABPQEF$: $4+2+6+2+4+4 = 22$.

$\boxed{22}$ ***Números equilibrados*** – *Solução*

Um número de quatro algarismos é equilibrado quando um de seus algarismos, digamos a, é a média dos outros três algarismos, digamos b, c e d, ou seja, quando $(b+c+d)/3 = a$ ou, equivalentemente, quando $(a+b+c+d)/4 = a$. Vemos assim que um número N de quatro algarismos é equilibrado quando ele satisfaz as duas seguintes condições:

(i) A soma de seus algarismos, digamos S, é divisível por 4;

(ii) $S/4$ é um dos algarismos de N.

(a) Dos números da forma $\overline{100x}$, os únicos que satisfazem a condição i) são 1003 e 1007, e desses dois números, o único que satisfaz (ii) é 1003. Dos números da forma $\overline{101x}$, os únicos que satisfazem (i) são 1012 e 1016, e desses dois, o único que satisfaz (ii) é 1012. Dos números da forma $\overline{102x}$, os únicos que satisfazem (i) são 1021, 1025 e 1029, e desses três, os que satisfazem (ii) são 1021 e 1025. Em conclusão, os três menores números equilibrados são

$$1003, \quad 1012 \quad \text{e} \quad 1021.$$

(b) Analisemos primeiro os números equilibrados da forma $\overline{1xyz}$. Pelas condições (i) e (ii), devemos ter $1+x+y+z$ divisível por 4 e $(1+x+y+z)/4$ deve coincidir com um dos algarismos 1, x, y ou z. Suponha que os algarismos x, y e z satisfazem essas condições.

• Se x, y e z são distintos, podemos formar os 6 números equilibrados $\overline{1xyz}$, $\overline{1xzy}$, $\overline{1yxz}$, $\overline{1yzx}$, $\overline{1zxy}$ e $\overline{1zyx}$.

• Se $x = y$ e z são distintos, podemos formar os 3 números equilibrados $\overline{1xxz}$, $\overline{1xzx}$ e $\overline{1zxx}$.

• Se $x = y = z$, podemos formar somente o número equilibrado $\overline{1xxx}$.

Note agora que $1 = 1+0+0+0 \leq 1+x+y+z \leq 1+9+9+9 = 28$. Então a soma $1+x+y+z$ somente pode tomar os valores 4, 8, 12, 16, 20, 24 e 28. Separaremos em casos conforme os valores que pode tomar a soma $x+y+z$.

• Se $x+y+z = 27$: Nesse caso, devemos ter $x = y = z = 9$, mas o número 1999 não satisfaz (ii), e então não é equilibrado. Assim, não temos números equilibrados.

• Se $x+y+z = 23$: Nesse caso, um dos algarismos deve ser igual a $(1+x+y+z)/4 = 6$. Então o conjunto $\{x, y, z\}$ tem que ser $\{6, 9, 8\}$, e como os algarismos 6, 9 e 8 são distintos, temos 6 números equilibrados.

• Se $x+y+z = 19$: Um dos algarismos deve ser igual a $(1+x+y+z)/4 = 5$. Então o conjunto $\{x, y, z\}$ tem que ser $\{5, 9, 5\}$, $\{5, 8, 6\}$ ou $\{5, 7, 7\}$. Se o conjunto $\{x, y, z\}$ for $\{5, 9, 5\}$, temos 3 números equilibrados, se for $\{5, 8, 6\}$ temos 6 números equilibrados, e se for $\{5, 7, 7\}$, temos 3 números equilibrados. Assim, temos no total $3+6+3 = 12$ números equilibrados.

• Se $x+y+z=15$: Um dos algarismos deve ser igual a $(1+x+y+z)/4=4$. Então o conjunto $\{x,y,z\}$ tem que ser $\{4,9,2\}$, $\{4,8,3\}$, $\{4,7,4\}$ ou $\{4,6,5\}$. Temos, então, $6+6+3+6=21$ números equilibrados.

• Se $x+y+z=11$: Um dos algarismos deve ser igual a $(1+x+y+z)/4=3$. Portanto, o conjunto $\{x,y,z\}$ tem que ser $\{3,8,0\}$, $\{3,7,1\}$, $\{3,6,2\}$, $\{3,5,3\}$ ou $\{3,4,4\}$. Temos, então, $6+6+6+3+3=24$ números equilibrados.

• Se $x+y+z=7$: Um dos algarismos deve ser igual a $(1+x+y+z)/4=2$. Então o conjunto $\{x,y,z\}$ tem que ser $\{2,5,0\}$, $\{2,4,1\}$ ou $\{2,3,2\}$. Temos então $6+6+3=15$ números equilibrados.

• Se $x+y+z=3$: Um dos algarismos deve ser igual a $(1+x+y+z)/4=1$. Então o conjunto $\{x,y,z\}$ tem que ser $\{1,2,0\}$, $\{1,1,1\}$, ou $\{3,0,0\}$. Temos, então, $6+1+3=10$ números equilibrados.

Finalmente, é simples ver que dos números $2000, 2001, \ldots, 2013$, os únicos que satisfazem as condições i) e ii) são 2006 e 2011. Então, a quantidade de números equilibrados menores que 2014 é

$$6+12+21+24+15+10+2 \ = \ 90.$$

$\boxed{23}$ ***Subconjuntos hierárquicos*** – *Solução*

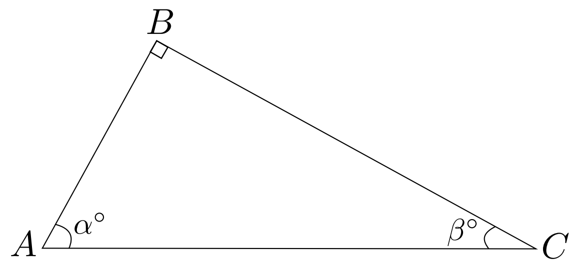
a) Vamos supor que foi possível dividir o conjunto em ℓ grupos. Em cada grupo, o maior coincide com a soma dos outros números do grupo. Então, a soma de todos os números do grupo seria duas vezes o maior número do grupo. Provamos assim que a soma dos números dentro de cada grupo é sempre um número par. Teríamos então que a soma de todos os números no conjunto A pode ser escrita como a soma de números pares e, portanto, devia ser também par. Mas se $n=13$, a soma total é $13 \times 14/2 = 13 \times 7$, que não é um número par. Isso mostra que, para $n=13$, tal divisão não pode ser feita.

b) Observe que não pode haver um grupo com dois números, porque pela segunda condição, esses números teriam que ser iguais e isso não é possível. Como há 12 números, isso implica que há, no máximo, 4 grupos. Além disso, depois da discussão feita no item a), sabemos que a soma dos números maiores em cada grupo deve ser a metade da soma de todos os números em A, isto é, a metade de $12 \times 13/2 = 78$. Para que então a soma dos números maiores de cada grupo consiga ser $(78/2) = 39$, é necessário ter ao menos 4 grupos, porque todos os números de A são menores ou iguais a 12. Concluímos assim que devem existir exatamente 4 grupos, e que cada grupo deve ter exatamente 3 elementos. Um modo de conseguir a divisão é

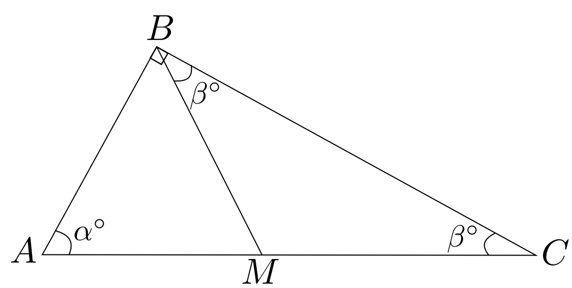
$$A = \{12,9,3\} \cup \{11,7,4\} \cup \{10,8,2\} \cup \{6,5,1\}.$$

$\boxed{24}$ ***Dividindo em triângulos isósceles*** – *Solução*

a) Consideremos o triângulo retângulo com ângulos agudos $\alpha°$ e $\beta°$, como mostra a seguinte figura:

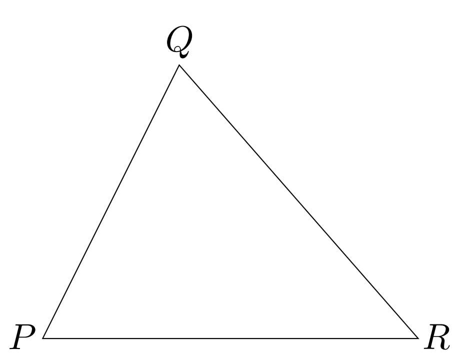


Traçamos um segmento BM, com M sobre o lado AC, de modo que $\measuredangle MBC = \beta°$

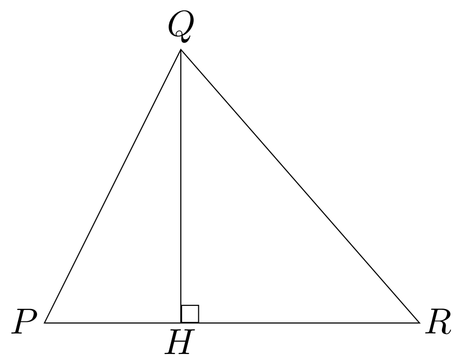


Temos então que $\measuredangle MBA = 90° - \beta° = \alpha°$, e conseguimos assim os dois triângulos isósceles AMB e BMC.

b) Primeiro devemos observar que, em qualquer triângulo, existem sempre dois ângulos internos que são estritamente menores que $90°$. Se não fosse assim, existiriam dois ângulos internos maiores ou iguais a $90°$, e isso é impossível, dado que a soma dos ângulos internos deve ser $180°$. Na figura seguinte, estamos supondo que $\measuredangle QPR$ e $\measuredangle QRP$ são ambos menores que $90°$:

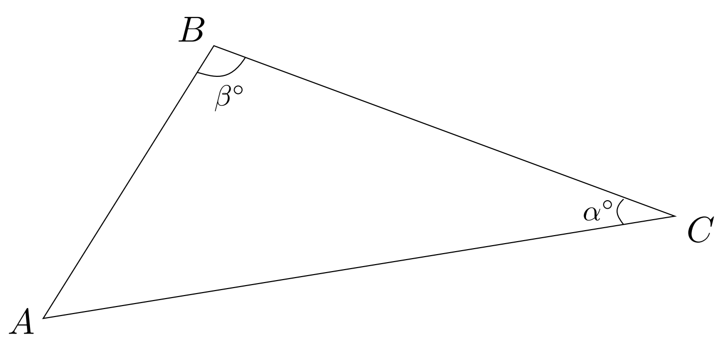


Se traçarmos a altura partindo de Q, a base da altura se encontrará no lado $\overline{PR}$, como mostra a figura:

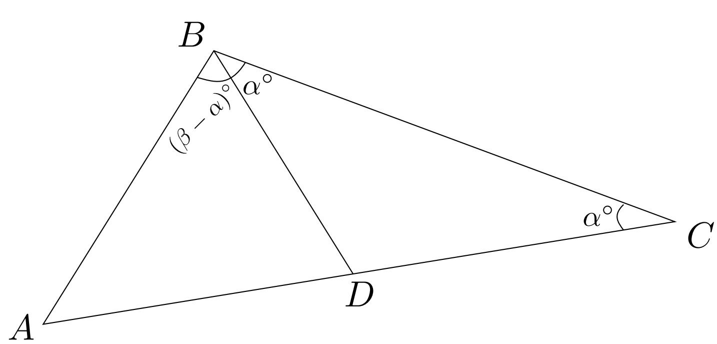


Pelo item a), os triângulos retângulos PHQ e RHQ podem ser divididos em dois triângulos isósceles cada um. Feito isso, conseguiremos dividir o triângulo PQR em 4 triângulos isósceles.

c) Sejam $\alpha°$ e $\beta°$ as medidas do menor e do maior ângulo interno do triângulo, respectivamente. Vamos supor primeiro que $\alpha < \beta$ como na figura a seguir:

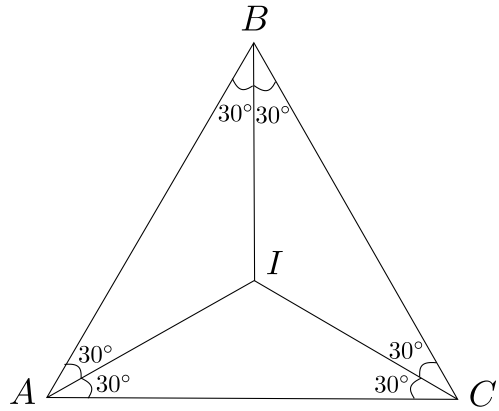


Podemos então traçar um segmento BD, como mostra a próxima figura, de modo que o triângulo BDC seja isósceles.

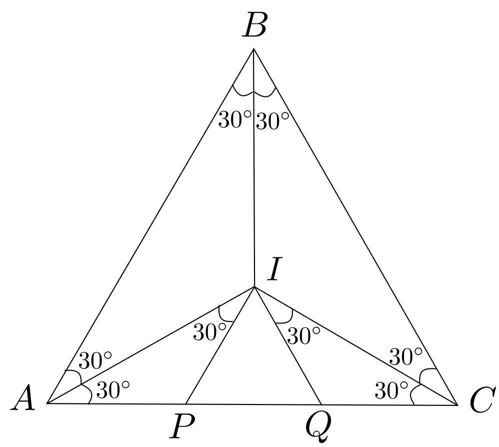


Agora, pelo item b), sabemos que o triângulo ABD pode ser dividido em 4 triângulos isósceles. Fazendo assim, teremos dividido o triângulo ABC em 5 triângulos isósceles.

Devemos considerar agora o caso em que $\alpha = \beta$. Isso acontece somente se o triângulo for equilátero. Podemos primeiro dividir o triângulo como mostra a seguinte figura, onde I é o incentro do triângulo.



Assim, temos três triângulos isósceles. Finalmente, traçamos IP e IQ de modo que $\measuredangle AIP = \measuredangle CIQ = 30°$.



Os triângulos AIP e CIQ são claramente isósceles, enquanto o triângulo IPQ é equilátero. Dividimos assim, o triângulo ABC em 5 triângulos isósceles.

$\boxed{25}$ ***Dividindo pedras*** – *Solução*

a) Sim, Pedrinho consegue! Basta fazer o seguinte processo: primeiro dividimos a pilha original em duas, uma com 3 e outra com 15. Depois, dividimos a pilha com 15 em uma com 3, e outra com 11, ficando com duas pilhas de 3, e uma de 11. Continuando o processo, dividimos a de 11 em uma de 3 e uma de 7. Por fim, dividimos a pilha de 7 em duas pilhas de 3, terminando com 5 pilhas de 3 pedras.

b) Vamos provar que Pedrinho não consegue. Suponha que ele tenha feito n divisões de pilhas. Como em cada divisão ele começa retirando uma pedra, Pedrinho retirará n pedras no total. Além disso, a cada divisão é acrescentada uma pilha (uma pilha é dividida em duas), temos ao final $n+1$ pilhas. Então, se cada uma destas pilhas tem 3 pedras, Pedrinho, ao final, vai ter no total $3(n+1)$ pedras. Logo, concluímos que $3(n+1) = 1001 - n$, ou seja, o número de pedras ao final é igual ao número inicial de pedras, menos o número de pedras que foram retiradas. Portanto,

$$\begin{aligned} 3n+3 &= 1001-n \\ 4n &= 998. \end{aligned}$$

Como 998 não é múltiplo de 4, não existe este valor n. Logo, Pedrinho não consegue dividir a pilha original em várias pilhas de três pedras.

26 *Escrevendo números em ordem crescente* – *Solução*

a) Começamos escrevendo os primeiros números da lista:

$$12345,\ 12354,\ 12435,\ 12453,\ 12534,\ 12543,\ 13245,\ 13254,\ 13425,\ 13452.$$

Logo, o décimo número é 13452.

b) Para encontrar o número que ocupa a posição 85, percebemos que sempre que um número de 5 dígitos começa com o dígito 1, este número é menor do que um número de 5 dígitos que começa com o número 2. Por sua vez, este número é menor do que um que começa com 3, e assim por diante. Então, contaremos quantos destes números começam com 1, 2 etc.

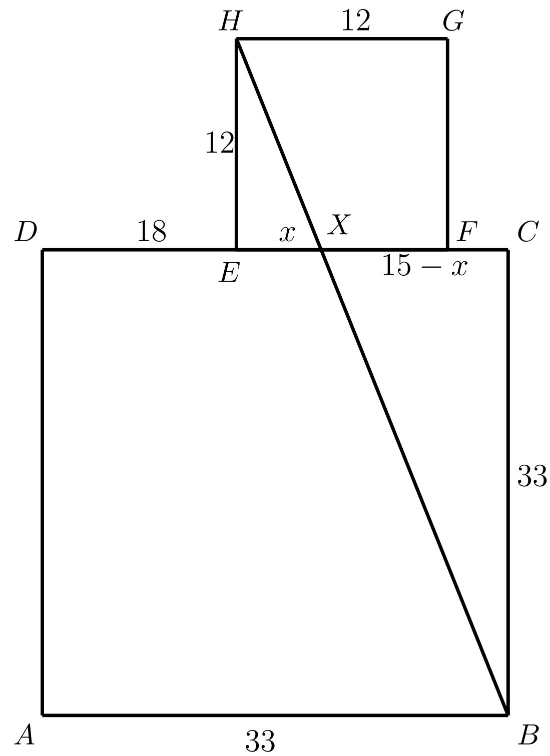
Se fixarmos o primeiro dígito, por exemplo 1, vamos ter 4 escolhas para o segundo dígito, a saber, cada um dos números 2, 3, 4 e 5. Para o terceiro dígito vamos ter só 3 escolhas, não podemos escolher um dígito já usado antes, e assim sucessivamente. Teremos 2 escolhas para o quarto dígito e uma única escolha para o último dígito. Logo, temos $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ números de 5 dígitos que começam com 1 na lista de Pedrinho e, claramente, estes têm que ser os primeiros 24 números, pois começam com 1.

Analogamente, também temos 24 números que começam com 2 (é exatamente a mesma conta, trocando 1 por 2), que têm que ser os 24 seguintes números da lista. E o mesmo vale para 3, 4 e 5. Concluímos então que os primeiros 24 números começam com 1, depois temos 24 que começam com 2, depois 24 que começam com 3. Logo, o número que fica na posição 73 é o primeiro número que começa com 4, que é o número 41235, enquanto que o número na posição 96 é o último número que começa com 4, ou seja, o número 45321.

Concluímos então que o número na posição 85 é um número que começa com 4. O que faremos agora é repetir o processo acima para o segundo dígito. Usando o mesmo argumento acima, temos $3 \times 2 \times 1 = 6$ números que começam com 41, e estes são claramente menores que os que começam com 42 (que também são 6). Como $72 + 6 + 6 = 84$, temos que o número que ocupa a posição 85 é o primeiro número que começa com 43, ou seja, é o número 43125.

27 *Quadrado em cima de quadrado* – *Solução*

a) Denote $\overline{EX} = x$. Temos que $|\overline{CX}| = 33 - 18 - x = 15 - x$.



Agora note que os triângulos EXH e CXB são semelhantes, logo:

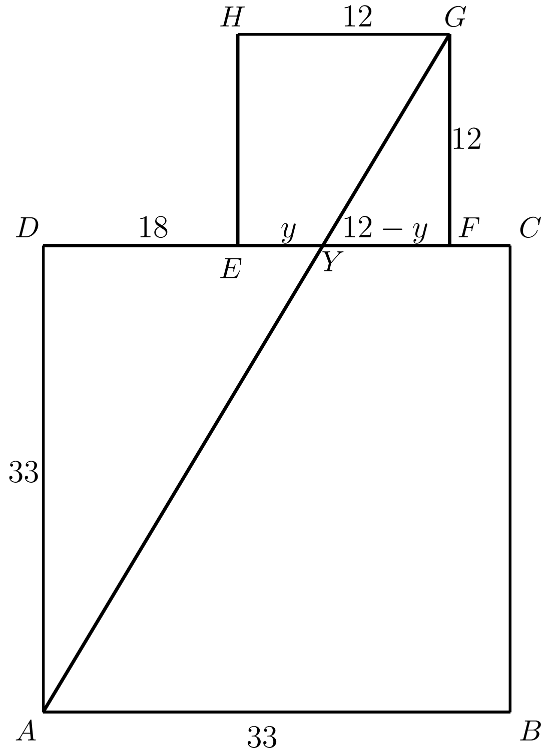
$$\frac{|\overline{EH}|}{|\overline{CB}|} = \frac{|\overline{EX}|}{|\overline{CX}|} \quad \Rightarrow \frac{12}{33} = \frac{x}{15-x}$$

Agora encontramos x:

$$\begin{array}{rcl} 12(15-x) & = & 33x \\ 4(15-x) & = & 11x \\ 60-4x & = & 11x \\ 15x & = & 60 \\ x & = & 4. \end{array}$$

Portanto, $|\overline{EX}| = 4$.

b) Seja Y a interseção da reta AG com o segmento DC. Para provar que A, X e G são colineares, basta mostrar que $Y = X$. E para isso, vamos calcular $|\overline{EY}|$, e depois ver que isso é igual a $|\overline{EX}|$. Denote $|\overline{EY}| = y$. E, portanto, $|\overline{FY}| = 12 - y$.



Analogamente ao caso anterior, vemos que os triângulos FYG e DYA são semelhantes. Portanto:

$$\frac{|\overline{FG}|}{|\overline{DA}|} = \frac{|\overline{FY}|}{|\overline{DY}|} \quad \Rightarrow \frac{12}{33} = \frac{12-y}{18+y}.$$

Agora encontramos y:

$$\begin{array}{rcl} 12(18+y) & = & 33(12-y) \\ 4(18+y) & = & 11(12-y) \\ 72+4y & = & 132-11y \\ 15y & = & 60 \\ y & = & 4. \end{array}$$

Portanto, $|\overline{EY}| = |\overline{EX}|$. Logo, $X = Y$, e concluímos que os pontos A, X e G são colineares.

$\boxed{28}$ ***Calculando médias*** – *Solução*

Primeiro notamos que a média dos 8 números é simplesmente a soma deles dividida por 8. Como a média é um número inteiro, a soma tem que ser múltipla de 8. Agora, como estamos somando 8 números distintos entre 1 e 11, esta soma tem que ser no mínimo $1+2+\ldots+8=36$ e no máximo $4+5+\ldots+11=60$. E como tem que ser múltipla de 8, as únicas somas possíveis são 40, 48, 56.

Vamos agora escrever a sequência como

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$$

e dividir em casos.

Caso 1) A soma é igual a 40:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_8 = 40.$$

Vamos tentar reconstruir a sequência a partir dos últimos números. Sabemos que a soma dos 7 primeiros números tem que ser múltipla de 7. Por outro lado, a soma dos 7 primeiros números é igual a 40 menos o último número, a_8 (lembre-se que 40 é a soma de todos os números). Ou seja,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = 40 - a_8.$$

Agora, $40 - a_8$ tem que ser múltiplo de 7, e como $1 \leq a_8 \leq 11$, vale que $29 \leq 40 - a_8 \leq 39$. Mas o único múltiplo de 7 entre 29 e 39 é 35 e, portanto, $a_8 = 5$ e

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = 35.$$

Agora repetimos o processo. A soma dos 6 primeiros números é $35 - a_7$, e tem que ser múltipla de 6. Como antes, temos que $24 \leq 35 - a_7 \leq 34$, e os múltiplos de 6 entre 24 e 34 são 24 e 30. Logo $a_7 = 5$ ou $a_7 = 11$. Mas como a_7 é diferente de a_8, temos que a única possibilidade é $a_7 = 11$. Portanto,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_6 = 24.$$

Continuando, a soma dos 5 primeiros números é $24 - a_6$, e tem que ser múltipla de 5. Como $1 \leq a_6 \leq 10$ (a_6 não pode ser 11, pois $a_7 = 11$), temos que $14 \leq 24 - a_6 \leq 23$, e os múltiplos de 5 entre 14 e 23 são 15 e 20. Logo, $a_6 = 4$ ou $a_6 = 9$.

Caso 1.1) Caso $a_6 = 4$, ficamos com

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 20.$$

Então, a soma dos quatro primeiros números é $20 - a_5$, e vale que $10 \leq 20 - a_5 \leq 19$. Como os únicos múltiplos de 4 entre 10 e 19 são 12 e 16, temos que $a_5 = 4$ ou $a_5 = 8$. Mas a_6 já é igual a 4, então $a_5 = 8$, e

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 12.$$

Portanto,

$$a_1 + a_2 + a_3 = 12 - a_4.$$

Agora notamos que $a_1 + a_2 + a_3$ é no mínimo $1 + 2 + 3 = 6$. Logo, $a_4 = 6$ ou $a_4 = 3$ (lembrando que $a_1 + a_2 + a_3$ tem que ser múltiplo de 3).

Se $a_4 = 6$, então $a_1 + a_2 + a_3 = 6$. Logo, $a_3 = 2$, pois $6 - a_3$ tem que ser par e a_3 não pode ser igual a $a_6 = 4$. E sobram 1 e 3 para os lugares de a_1 e a_2. Daí, temos as possíveis sequências:

$$1, 3, 2, 6, 8, 4, 11, 5 \quad \text{e} \quad 3, 1, 2, 6, 8, 4, 11, 5.$$

Se $a_4 = 3$, então $a_1 + a_2 + a_3 = 9$. Como $9 - a_3$ tem que ser par, concluímos que a_3 tem que ser ímpar e diferente de todos os ímpares já usados na sequência (que são 3, 5 e 11). Logo, $a_3 = 1$ ou $a_3 = 7$, mas se $a_3 = 7$, então $a_1 + a_2 = 2$, o que não dá pra acontecer. Assim, $a_3 = 1$ e $a_1 + a_2 = 8$. Agora o único par de números distintos que soma 8 que podemos ter é 2 e 6, pois 1 e 3 já foram usados. Logo, temos as possíveis sequências

$$2, 6, 1, 3, 8, 4, 11, 5 \quad \text{e} \quad 6, 2, 1, 3, 8, 4, 11, 5.$$

Caso 1.2) Se $a_6 = 9$, então

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 15.$$

Por outro lado, o número $5 = a_8$ já foi usado. Então, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ é no mínimo $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$, logo a_6 não pode ser 9.

Caso 2) A soma é igual a 48.

Como no caso 1, vemos que a soma dos sete primeiros números é $48 - a_8$. Como $37 \leq 48 - a_8 \leq 47$, temos que $a_8 = 6$ (o único múltiplo de 7 entre 37 e 47 é o 42). Logo,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = 42.$$

Continuando, a soma dos 6 primeiros números é $42 - a_7$, e temos que $31 \leq 42 - a_7 \leq 41$. O único múltiplo de 6 entre 31 e 41 é o 36, logo $a_7 = 6$, o que não pode acontecer, por $a_8 = 6$. Então não existe nenhuma sequência com soma 48.

Caso 3) A soma é igual a 56.

Como nos casos anteriores, a soma dos sete primeiros números é $56 - a_8$. Como $45 \leq 56 - a_8 \leq 55$, temos que $a_8 = 7$ (o único múltiplo de 7 entre 45 e 55 é o 49). Logo,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = 49.$$

Continuando, a soma dos seis primeiros números é $49 - a_7$. Daí, temos que $38 \leq 49 - a_7 \leq 48$, e os únicos múltiplos de 6 entre 38 e 48 são 42 e 48. Como a_7 não pode ser igual a $a_8 = 7$, temos que $a_7 = 1$ e

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_6 = 48.$$

Portanto, a soma dos cinco primeiros números é $48 - a_6$. Logo, $a_6 = 3$ ou $a_6 = 8$ (os únicos múltiplos de 5 entre 37 e 46 são 40 e 45).

Caso 3.1) Caso $a_6 = 3$, então

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 45.$$

Mas como $7 = a_8$, a maior soma possível destes 5 números é $6+8+9+10+11 = 44$, logo a_6 não pode ser 3.

Caso 3.2) Caso $a_6 = 8$, então

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 40.$$

Continuando com o processo anterior, vemos que a soma dos quatro primeiros números é $40 - a_5$ e os únicos múltiplos de 4 entre 29 e 38 são $32, 36$. Como a_5 não pode ser igual $8 = a_6$, então $a_5 = 4$. Portanto,

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 36.$$

Logo, $36 - a_4$ é múltiplo de 3 e, portanto, a_4 pode ser igual a 3, 6 e 9. Mas como a soma $a_1 + a_2 + a_3$ é no máximo $9 + 10 + 11 = 30$, temos que a_4 não pode ser 3. Logo se $a_4 = 6$, então $a_1 + a_2 + a_3 = 30$. Portanto, a_1, a_2 e a_3 têm que ser os números 9, 10 e 11 em alguma ordem. Como $a_1 + a_2 = 30 - a_3$, a_3 tem que ser par, temos que $a_3 = 10$. Logo, temos as sequências

$$9, 11, 10, 6, 4, 8, 1, 7 \quad \text{e} \quad 11, 9, 10, 6, 4, 8, 1, 7.$$

Agora, se $a_4 = 9$, então $a_1 + a_2 + a_3 = 27$, e como 7, 8 e 9 já foram usados, $a_1 + a_2 + a_3$ é no máximo $6 + 10 + 11 = 27$. Portanto, a_1, a_2 e a_3 têm que ser os números 6, 10 e 11 em alguma ordem. Como $30 - a_3$ tem que ser par, então $a_3 = 11$. Logo, temos as sequências

$$10, 6, 11, 9, 4, 8, 1, 7 \quad \text{e} \quad 6, 10, 11, 9, 4, 8, 1, 7.$$

Concluindo, todas as sequências possíveis escritas por Pedrinho são

$$\begin{array}{rrr} 1,3,2,6,8,4,11,5; & 3,1,2,6,8,4,11,5; & 2,6,1,3,8,4,11,5; \\ 6,2,1,3,8,4,11,5; & 9,11,10,6,4,8,1,7; & 11,9,10,6,4,8,1,7; \\ 10,6,11,9,4,8,1,7; & 6,10,11,9,4,8,1,7. & \end{array}$$

29 ***Pizza para quantos?*** – *Solução*

Sejam x e y o número de rapazes e moças, respectivamente. Sabemos que o número total de pedaços consumidos foi no mínimo 49 (4 pizzas e um pedaço da última pizza) e no máximo 59 (4 pizzas mais 11 pedaços, lembre que sobrou pelo menos um pedaço da última pizza). Por outro lado,

$$\begin{aligned} 7x + 3y &\leq 59 \\ 6x + 2y &\geq 49. \end{aligned}$$

Multiplicando a última equação por -1, temos que trocar a desigualdade, ficando com

$$\begin{aligned} 7x + 3y &\leq 59 \\ -6x - 2y &\leq -49. \end{aligned}$$

E somando as duas desigualdades, chegamos a

$$x + y \leq 10.$$

Substituindo na segunda desigualdade, ficamos com

$$4x + 10 + 10 \geq 4x + (x + y) + (x + y) = 6x + 2y \geq 49.$$

Logo, $4x \geq 29$, e portanto $x \geq 8$. Por outro lado, da primeira equação temos que

$$7x \leq 7x + 3y \leq 59.$$

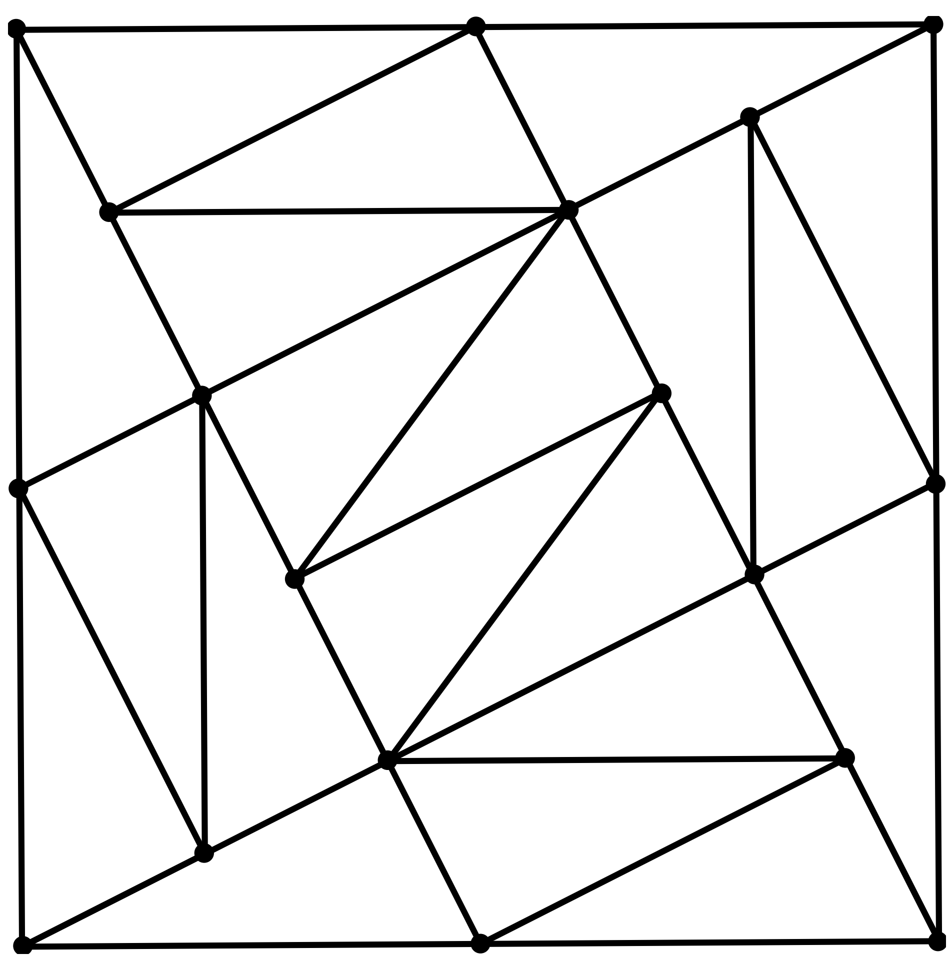
Daí, $7x \leq 59$, que implica $x \leq 8$. Portanto, $x = 8$ e, substituindo, ficamos com

$$3y \leq 3 \quad \text{e} \quad 2y \geq 1.$$

Isso nos dá, $y = 1$. Portanto, foram 8 rapazes e 1 moça à pizzaria.

$\boxed{30}$ ***Montando quadrados*** – *Solução*

Cada peça tem área $\frac{1\times 2}{2}$ cm$^2 = 1$ cm^2. Logo, se usarmos 20 das peças, teremos um quadrado de área 20 cm^2. Portanto, seu lado mede $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm. Por outro lado, pelo Teorema de Pitágoras, vale que a hipotenusa de cada triângulo retângulo mede $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ cm. Daqui, vemos que para construir esse quadrado, vamos ter que usar as hipotenusas para formar os lados do quadrado. Uma possível solução é a seguinte:



NÍVEL 3 – SOLUÇÕES

1 *Minhoca rápida* – *Solução*

a) A cada dia, a minhoca avança 5 metros e recua 3 metros. Portanto, no final do dia a minhoca avança $5 - 3 = 2$ metros. Depois de 15 dias, a minhoca estará a $15 \times 2 = 30$ metros do ponto de partida.

b) A cada dia, a minhoca anda $5 + 3 = 8$ metros. Portanto, após estes 15 dias, a minhoca terá andado $8 \times 15 = 120$ metros.

c) Esta minhoca anda da seguinte maneira:

Dia	**Posição**
1º Dia	$1 - \frac{1}{2}$
2º Dia	$(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{3}$
3º Dia	$(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = 1 - \frac{1}{4}$
4º Dia	$(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) = 1 - \frac{1}{5}$
$\vdots$	$\vdots$
n**º Dia**	$1 - \frac{1}{n+1}$

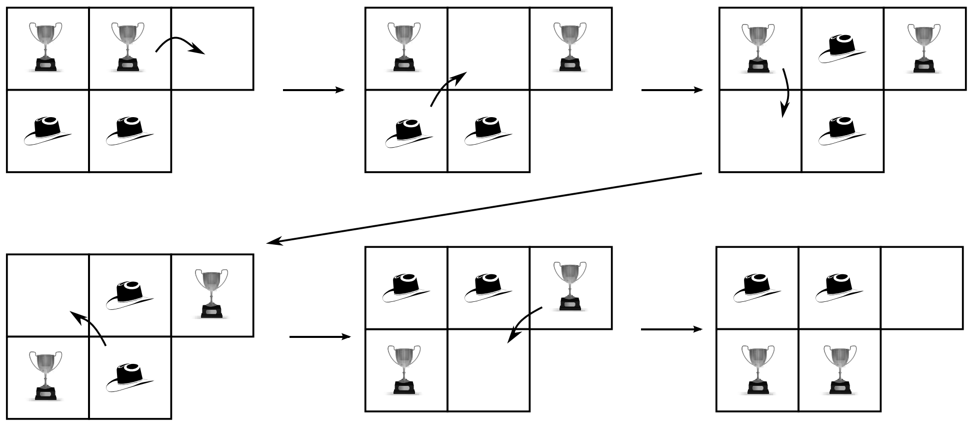
Portanto, após 1000 dias, a minhoca estará a $1 - \frac{1}{1001} = \frac{1000}{1001}$ metros da posição inicial.

d) Como no n-ésimo dia a minhoca está a uma distância de $1 - \frac{1}{n+1}$ metros da posição inicial, ela nunca estará a 2 metros da posição inicial, pois, para qualquer número natural n, temos:

$$1 - \frac{1}{n+1} < 1 < 2\,.$$

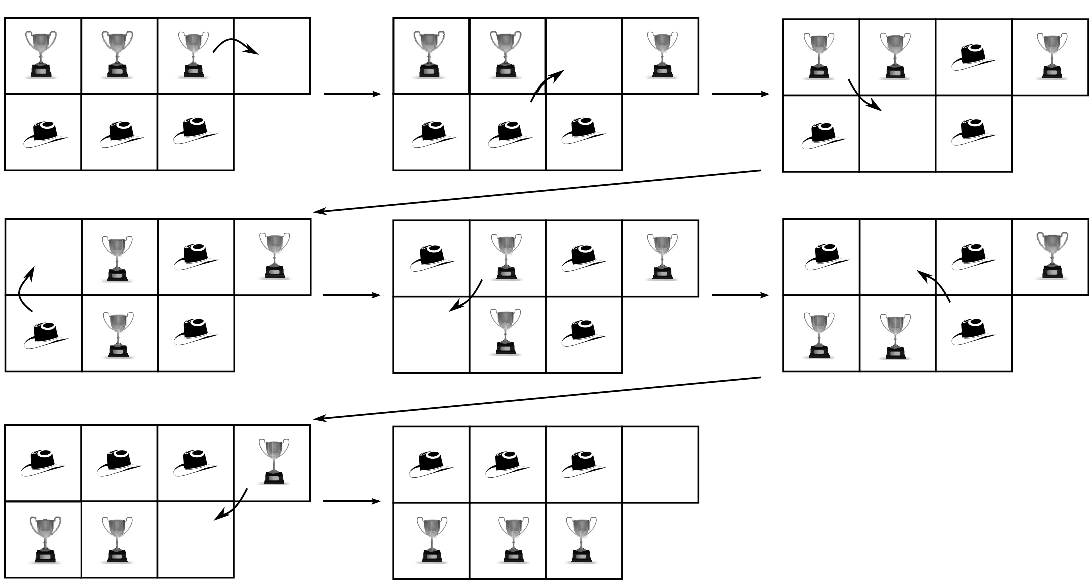
2 *Trocando posições* – *Solução*

a) Abaixo, mostramos uma sequência de cinco movimentos para trocar os chapéus com os troféus (há outra!).



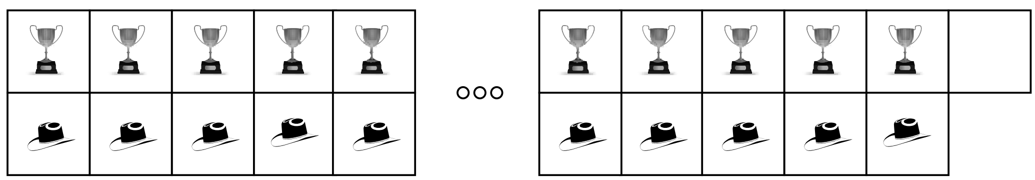
O argumento para mostrar que não é possível trocá-los com menos do que 5 movimentos é o seguinte: no primeiro movimento, precisamos mover um troféu ou um chapéu para a casa vazia acima à direita. Após este movimento, todos os objetos estarão fora de suas casas de destino. Como são quatro objetos, serão necessários pelo menos quatro movimentos para colocá-los em seus lugares. Como já foi feito um movimento, teremos $1+4=5$ movimentos no mínimo para trocar os chapéus com os troféus.

b) Abaixo mostramos uma sequência de sete movimentos para trocar os chapéus de lugar com os troféus:

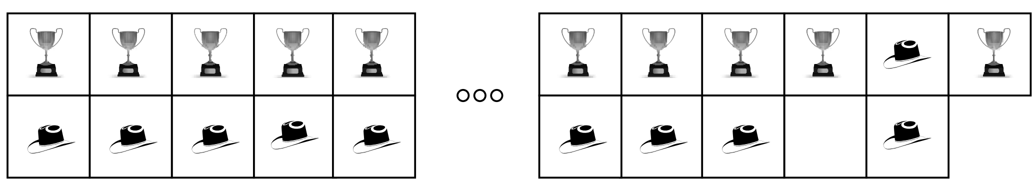


O mesmo argumento de antes se aplica para concluírmos que sete é o mínimo de movimentos para trocar os chapéus de lugar com os troféus. No primeiro movimento, temos de mover um chapéu ou um troféu para a casa vazia. Neste momento, todos os seis objetos estarão fora de seus lugares de destino. Portanto, para colocá-los em suas posições serão necessários pelo menos seis movimentos. Daí, teremos $6 + 1 = 7$ movimentos no mínimo.

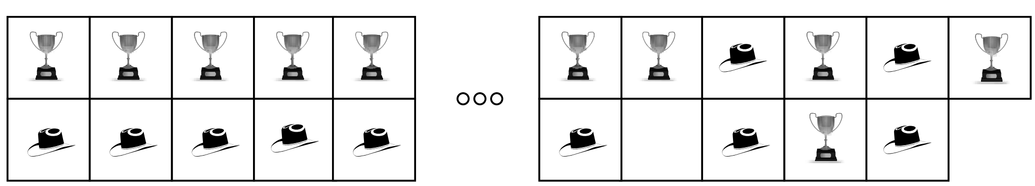
c) Se repetirmos o padrão descrito acima, conseguiremos trocar os chapéus e troféus com 2001 movimentos! A ideia é a seguinte. Começamos com a configuração



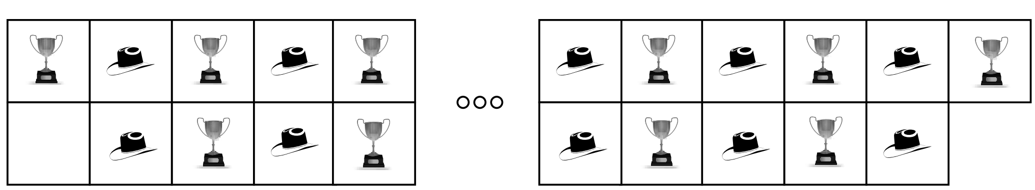
Em seguida, por meio de 2 movimentos, atingimos a configuração



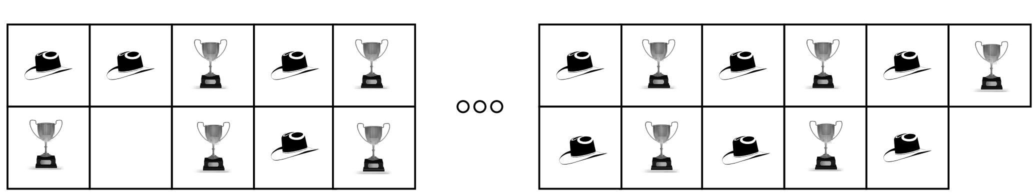
E com mais dois movimentos, atingimos a configuração



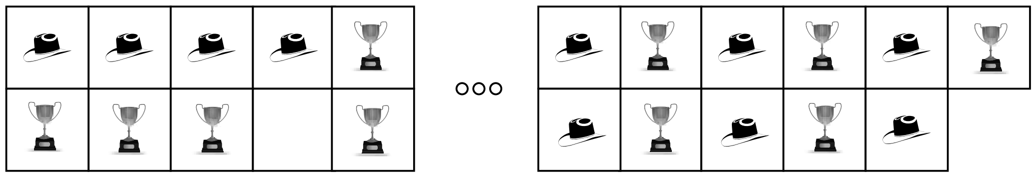
Portanto, depois de 1000 movimentos atingimos a configuração



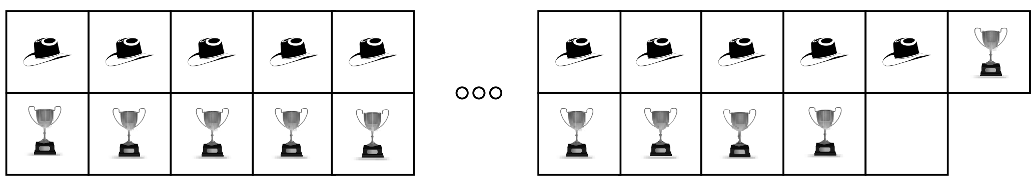
Agora vamos voltando com a casa vazia! Com mais dois movimentos (depois desses 1000 movimentos), obtemos a configuração



Com mais dois movimentos, obtemos a configuração



Portanto, depois de 2000 movimentos (contando aqueles 1000 anteriores), obtemos a configuração



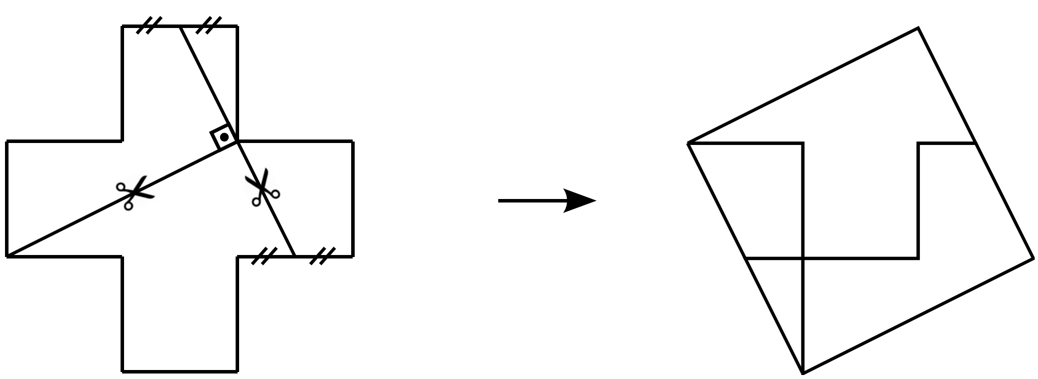
E com mais um movimento, concluímos! Logo, fizemos 2001 movimentos. O argumento para mostrar que não é possível fazer a troca com menos do que isso é o mesmo dos anteriores.

3 ***Corte na medida*** – *Solução*

a) A área do quadrado obtido deve ser a mesma da cruz de cartolina. Como a cruz de cartolina pode ser dividida em cinco quadrados de lados iguais a um, sua área será igual a 5 cm^2.

b) Para que a área do quadrado obtido seja igual a 5 cm^2, é necessário que seu lado seja igual a $\sqrt{5}$ cm.

c) Os dois cortes que devem ser feitos são:



4 ***Par ou ímpar maluco*** – *Solução*

a) Temos que o produto de número par por um número ímpar é sempre par! Portanto, se Dinah pedir par e escrever no papel um número par, ela certamente ganhará.

b) Dinah escolhe um número natural, digamos $3q_1 + r_1$, onde q_1 e r_1 são naturais e r_1 é o resto na divisão desse número por três. Ou seja, r_1 pode ser 1 ou 2 (não pode ser zero pela regra do jogo). O mesmo para Artur, ou seja, ele escolhe um número natural da forma $3q_2 + r_2$, onde r_2 pode ser 1 ou 2. O produto desses dois números será:

$$(3q_1 + r_1)(3q_2 + r_2) = 3(3q_1q_2 + q_1r_2 + q_2r_1) + r_1r_2.$$

Ou seja, quando dividimos o resultado por três, o resto na divisão por 3 será igual ao resto que obtemos quando dividimos r_1r_2 por 3. Temos os casos:

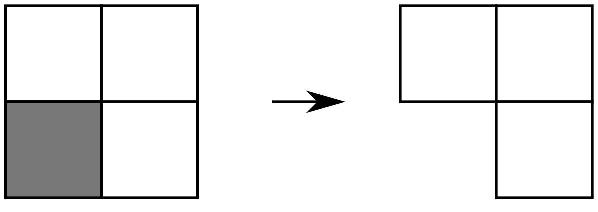
r_1	r_2	Resto na divisão por 3 do resultado
1	1	1
1	2	2
2	1	2
2	2	1

Logo, Dinah não tem estratégia vencedora. Para qualquer número que Dinah escolha, Artur tem uma opção que o torna vencedor.

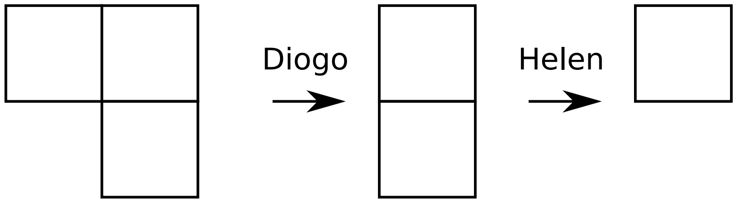
c) Como são quatro casos (veja a tabela no item anterior) e Dinah ganha em dois casos e Artur ganha em dois casos, concluímos que os dois têm a mesma probabilidade de ganhar.

5 ***Jogo do tira*** – *Solução*

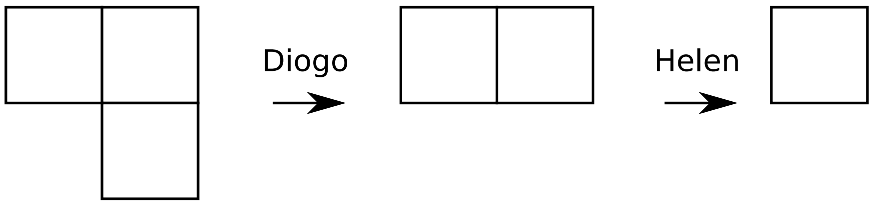
a) Helen começa tirando o quadrado abaixo:



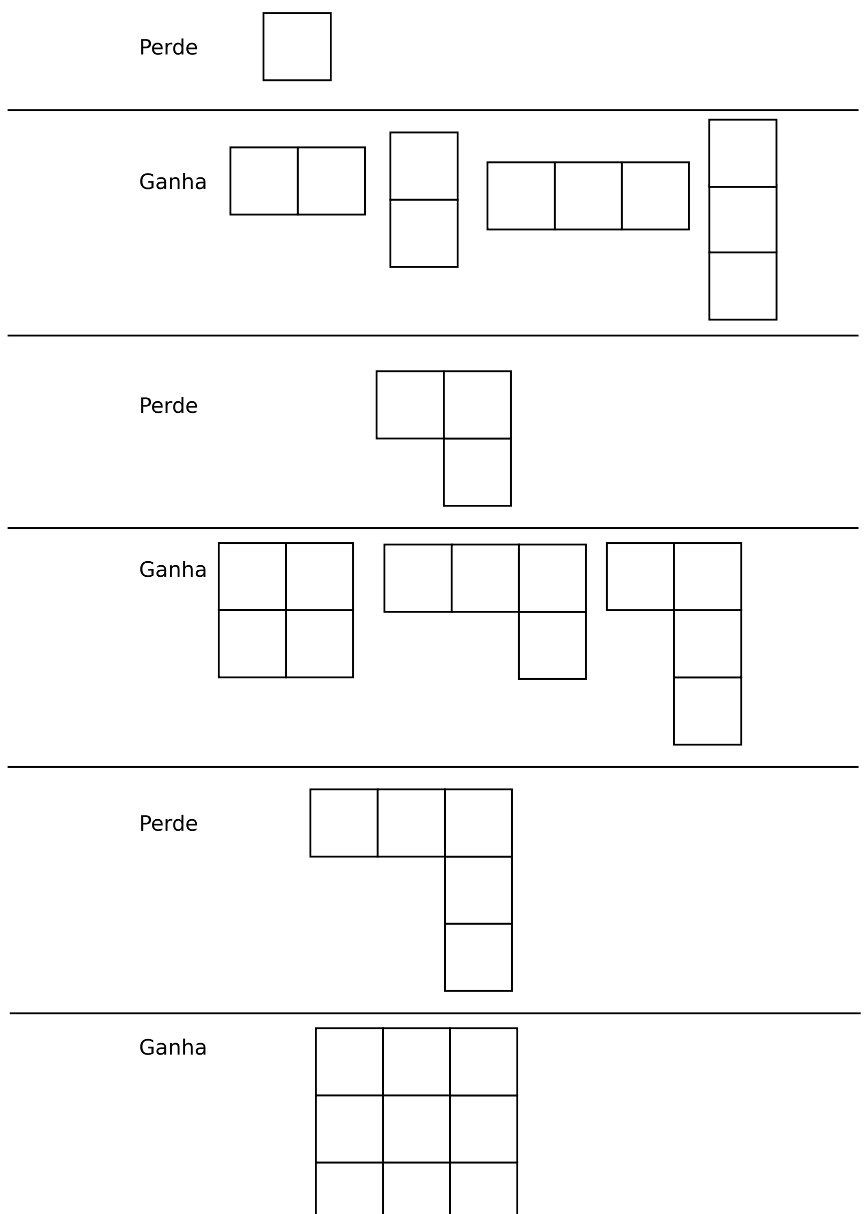
Diogo tem duas opções agora: se tira o quadrado abaixo, então Helen tira o quadrado seguinte e ganha a partida, pois Diogo terá que tirar o último quadrado.



E se Diogo tira o quadrado a seguir, então Helen tira o quadrado seguinte e também ganha.



b) Vamos descrever as configurações que fazem perder o jogador que as tem (em sua vez de jogar), o que também nos mostrará qual é a estratégia vencedora. Vejamos:



6 *Cortando a corda – Solução*

Nessa questão todos os comprimentos são dados em metros e as áreas em metros quadrados.

a) Um pedaço de corda tem comprimento x e outro pedaço de corda tem comprimento $10 - x$. Como um quadrado tem quatro lados de tamanhos iguais, um quadrado terá lado de comprimento igual a $\frac{x}{4}$ e outro quadrado terá lado de comprimento igual a $\frac{10-x}{4}$.

A área de um quadrado de lado ℓ é igual a ℓ^2. Portanto, um quadrado terá área igual a $\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$ enquanto o outro quadrado terá área igual a $\left(\frac{10-x}{4}\right)^2 = \frac{100-20x+x^2}{16}$.

b) Seja $S(x)$ a soma das áreas dos dois quadrados. Pelo item anterior, temos que

$$S(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{100 - 20x + x^2}{16} = \frac{100 - 20x + 2x^2}{16} = \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{25}{4}\,,$$

é uma função do segundo grau. O mínimo de uma função do tipo

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

com $a > 0$ é atingido em $x = \frac{-b}{2a}$. Assim, a área mínima será atingida se

$$x = -\frac{(-\frac{5}{4})}{2\frac{1}{8}} = 5.$$

Ou seja, se a corda for cortada exatamente no meio!

c) Pelo item anterior, sabemos que para minimizar a soma das áreas é necessário cortar exatamente no meio. Bem, afirmamos que para minimizar a área com nove cortes (ou seja, criando dez quadrados) é necessário que os pedaços de corda sejam todos iguais. Para mostrar isso, vejamos o seguinte argumento: se dois dos dez pedaços de corda fossem diferentes, seria possível diminuir a área cortando os pedaços de corda de modo que esses dois fossem iguais (estamos usando o item anterior). Portanto, dois pedaços de corda quaisquer devem ser iguais. Logo, todos devem ser iguais!

7 *Calculadora de Cincolândia – Solução*

a) Mônica começa digitando o número 7. Daí,

$$7 \xrightarrow{\square} 7^2 = 49 \xrightarrow{\triangle} 49 - 5 = 44\,.$$

Logo, o resultado final que aparece na calculadora é o número 44.

b) Se um número natural x deixa resto 4 quando dividido por 5, isso quer dizer que x é da forma

$$x = 5q + 4,$$

onde q é um número natural. Elevando ao quadrado, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 &= (5q+4)^2 \\ &= 25q^2 + 2\cdot 5q\cdot 4 + 4^2 \\ &= 5(5q^2+8q)+16 \\ &= 5(5q^2+8q)+15+1 \\ &= 5(5q^2+8q+3)+1 \end{aligned}$$

o que quer dizer que x^2 deixa resto 1 na divisão por 5.

c) O número 9 deixa resto 4 na divisão por 5, pois $9 = 5\cdot 1+4$. O número 7 deixa resto 2 na divisão por 5, pois $7 = 5\cdot 1+2$.

Observe que se um número deixa resto 1 na divisão por 5, o seu quadrado também deixa resto 1 na divisão por 5. De fato, seja x um número que deixa resto 1 na divisão por 5. Daí, $x = 5q+1$. Portanto,

$$\begin{aligned} x^2 &= (5q+1)^2 \\ &= 25q^2 + 2\cdot 5q\cdot 1 + 1^2 \\ &= 5(5q^2+2q)+1 \end{aligned}$$

o que mostra que x^2 também deixa resto 1 na divisão por 5.

Começamos com o número 9 na tela da calculadora. Se apertarmos a tecla $\square$, o resultado deixará resto 1 na divisão por 5, pelo item anterior. Se apertarmos a tecla $\triangle$, o resultado continuará deixando resto 4 na divisão por 5, pois subtrair 5 não muda o resto na divisão por 5. Se em algum momento o resto for 1, então continuará sendo 1, para sempre, pois nenhuma das duas operações $\square$ ou $\triangle$ alterará o resto na divisão por 5.

Assim, começando com o 9, o resto na divisão por 5 será sempre 4 ou 1. Como 7 deixa resto 2 na divisão por 5, não é possível obtê-lo!

8 *Algum dia ele ganha?* – *Solução*

a) Para que Pietro não tenha ganho até o terceiro dia, é necessário que ele tenha perdido no primeiro, no segundo e no terceiro dia. A probabilidade de que Pietro ganhe no primeiro dia é $\frac{1}{2}$. Logo, a probabilidade de que Pietro tenha perdido no primeiro dia é

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\,.$$

A probabilidade de que Pietro ganhe no segundo dia é $\frac{1}{3}$. Logo, a probabilidade de que Pietro tenha perdido no segundo dia é

$$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\,.$$

A probabilidade de que Pietro ganhe no terceiro dia é $\frac{1}{4}$. Logo, a probabilidade de que Pietro tenha perdido no terceiro dia é

$$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\,.$$

Portanto, a probabilidade de que Pietro tenha perdido no primeiro, segundo e terceiro dia é igual ao produto dessas probabilidades, que nos dá

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\,.$$

b) Repetimos o mesmo argumento de antes! Agora até o quinto dia, o que nos dá como probabilidade de Pietro não haver ganhado:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{6}\,.$$

c) Pensando indutivamente, a probabilidade de que Pietro não tenha ganho até o $2013^{\underline{o}}$ dia é igual a

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2011}{2012}\cdot\frac{2012}{2013}\cdot\frac{2013}{2014}=\frac{1}{2014}\,.$$

9 ***Área máxima*** – *Solução*

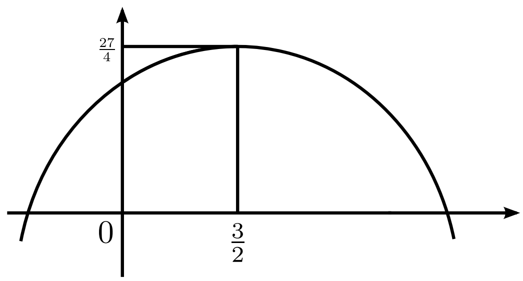
a) Chamemos de x o comprimento do segmento AP e denotaremos por $f(x)$ o valor da área do quadrilátero $BCQP$ em função de x, medida em centímetros quadrados. Como o comprimento de AP é a metade do comprimento do segmento AQ, temos que o valor máximo que pode ser assumido por x é $3/2$ cm. O nosso objetivo é encontrar uma expressão para $f(x)$.
Como o segmento AQ mede o dobro do segmento AP, temos que o seu comprimento é igual a $2x$. Logo o segmento QD mede $3-2x$. Daí concluímos que a área do triângulo APQ é dada, em centímetros quadrados, por $(x\times 2x)/2=x^2$ e a área do triângulo QDC por $[3(3-2x)]/2$.
Como a área da região hachurada é igual à área do quadrado $ABCD$ ($9\,\text{cm}^2$) menos a soma das áreas dos triângulos APQ e QDC, temos que $f(x)$ será dada, em centímetros quadrados, por:

$$f(x)=9-\frac{3(3-2x)}{2}-x^2=-x^2+3x+\frac{9}{2},$$

para $x\in[0,\,3/2]$.

b) A função do segundo grau $f(x)=-x^2-3x+9/2$ obtida no item anterior fornece a área do quadrilátero $BCQP$ em termos do valor do comprimento do segmento

AP que denotamos por x. O seu gráfico é uma parábola côncava para baixo, conforme mostra a figura abaixo:



Assim, o nosso objetivo é encontrar o máximo assumido por essa função com x variando entre 0 e $3/2$. Para uma parábola que é o gráfico de uma função do tipo $h(x) = ax^2 + bx + c$, a coordenada x do vértice é dada por $x_v = \frac{-b}{2a}$. Se a parábola é côncava para baixo, então a função correspondente atinge o máximo exatamente para $x = x_v$. No nosso caso, com $a = -1$ e $b = 3$, temos que $x_v = 3/2$. Como $3/2$ pertence ao intervalo estipulado para os valores que x pode assumir, temos que o valor máximo assumido por f é igual a $f(3/2) = 27/4$ cm^2.

10 ***Uns e mais uns*** – *Solução*

Uma solução pode ser feita usando soma de progressões geométricas. Mas daremos outra solução que não precisará disso! Observe. Chamemos de S a soma que queremos calcular, ou seja,

$$S = 1 + 11 + 111 + 1111 + \cdots + \underbrace{1111\ldots11}_{n \text{ uns}}.$$

Quanto vale $9 \times S$? Basta trocar cada dígito um por um dígito nove!

$$9S = 9 + 99 + 999 + 9999 + \cdots + \underbrace{9999\ldots99}_{n \text{ noves}}.$$

Agora vamos escrever $9 = 10 - 1$. E fazemos o mesmo com $99 = 100 - 1$, $999 = 1000 - 1$ e assim por diante. Ou seja,

$$\begin{array}{ccccc}
9 & = & 10-1 & = & 10^1-1 \\
99 & = & 100-1 & = & 10^2-1 \\
999 & = & 1000-1 & = & 10^3-1 \\
9999 & = & 10000-1 & = & 10^4-1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\underbrace{9999\cdots9}_{n \text{ noves}} & = & 1\underbrace{000\cdots0}_{n \text{ zeros}}-1 & = & 10^n-1
\end{array}$$

Fazendo essas trocas em $9S$, obtemos

$$9S = (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + (10^4-1) + \cdots + (10^n-1).$$

Agrupando todos os "menos uns", obtemos

$$\begin{aligned} 9S &= (10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + \cdots + 10^n) - (\underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ uns}}) \\ &= 10 \cdot \underbrace{111111\cdots1}_{n \text{ uns}} - n\,. \end{aligned}$$

Para escrever melhor o número acima, vamos multiplicar e dividir por nove o termo com muitos "uns". Observe:

$$\begin{aligned} 9S &= 10 \times \frac{9}{9}\underbrace{111111\cdots1}_{n \text{ uns}} - n \\ &= \frac{10}{9}\underbrace{99999\cdots9}_{n \text{ noves}} - n \\ &= \frac{10}{9}(10^n - 1) - n. \end{aligned}$$

Logo,

$$9S = \frac{10}{9}(10^n - 1) - n\,.$$

Passando o fator nove para o outro lado da equação, temos

$$S = \frac{10}{81}(10^n - 1) - \frac{n}{9}\,,$$

obtendo assim o valor desejado!

11 *Apertos de mão* – *Solução*

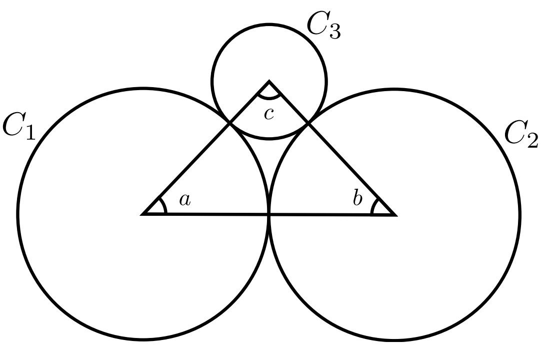
a) Um aperto de mão é dado entre duas pessoas. Logo, quando somamos os apertos de mão de todas as pessoas, cada aperto de mão é contado duas vezes! Logo, a soma de quantas vezes cada pessoa apertou a mão de alguém é par, pois é o dobro de algum número.

b) Como são 99 pessoas, se cada uma apertasse a mão de alguém 3 vezes, isso daria um total de $3 \times 99 = 297$ apertos de mão. Mas como vimos no item anterior, este total deve ser par, pois cada aperto de mão entre duas pessoas foi contado duas vezes (se fulano apertou a mão de sicrano, então esse aperto de mão foi contado uma vez quando estávamos somando os apertos de mão de fulano, e foi contado novamente quando estávamos somando os apertos de mão de sicrano).

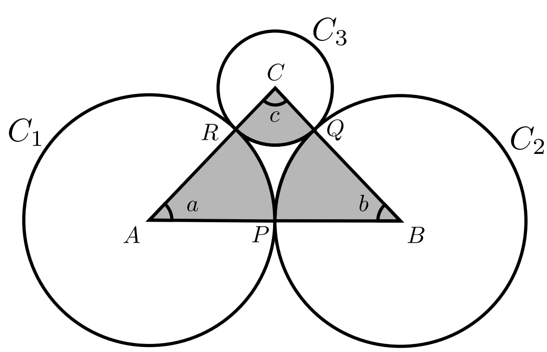
Por outro lado, 297 é ímpar! Logo, não é possível.

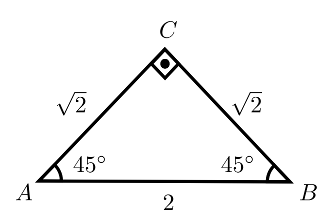
12 ***Círculo sobre círculo*** – *Solução*

a) Sejam A, B e C os centros das circunferências C_1, C_2 e C_3 respectivamente. E considere o triângulo cujos vértices são dados por esses pontos como na figura abaixo.

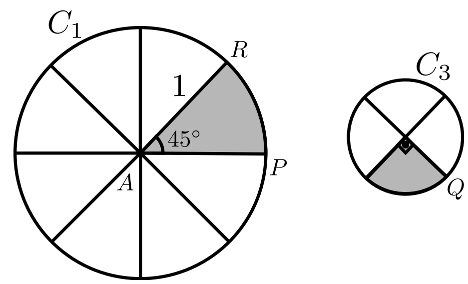


Chamemos de P o ponto em que C_1 tangencia C_2, de Q o ponto em que C_2 tangencia C_3 e R o ponto em que C_3 tangencia C_1. Note que a área da região procurada pode ser encontrada subtraindo-se da área do triângulo ABC a soma das áreas dos setores circulares APR, BPQ e CQR, conforme mostrado na figura abaixo:





Como os raios das circunferências C_1 e C_2 são iguais a 1, temos que o comprimento dos segmentos AP e PB é dado por $|AP| = 1$ e $|PB| = 1$. Logo, o segmento AB tem comprimento $|AB| = |AP| + |PB| = 2$. Como a circunferência C_3 tem raio igual a $\sqrt{2} - 1$ temos que $|CQ| = \sqrt{2} - 1$. Logo, o comprimento do segmento CB é dado por $|CB| = |CQ| + |QB| = \sqrt{2}$. De maneira análoga, temos que $|CA| = \sqrt{2}$. Segue daí que o triângulo ABC é isósceles e tem dois lados de comprimento $\sqrt{2}$ e um lado de comprimento 2. Como $2^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2$ temos que $|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2$, isto é, os lados do triângulo ABC satisfazem a relação dada pelo Teorema de Pitágoras. Assim, temos que esse triângulo é retângulo, sendo sua hipotenusa o lado AB. Assim, o ângulo c mostrado na figura acima mede $90°$. Como ele também é isósceles, os outros ângulos medem $45°$. Em particular a sua área é igual à metade do produto dos catetos, isto é $(\sqrt{2} \times \sqrt{2})/2 = 1$. Podemos agora calcular a área dos setores circulares, mostrados na figura abaixo:



Como $a = 45°$ temos que a área do setor circular APR é igual a $1/8$ da área do disco delimitado por C_1, isto é

$$\text{Área do setor } APR = \frac{1}{8}\pi 1^2 = \frac{\pi}{8}.$$

Analogamente, temos que

$$\text{Área do setor } BPQ = \frac{1}{8}\pi 1^2 = \frac{\pi}{8}.$$

Como $c = 45°$ temos que a área do setor circular CQR é igual a $1/4$ da área do disco delimitado pela circunferência C_3, logo:

$$\text{Área do setor } CQR = \frac{1}{4}\pi(\sqrt{2}-1)^2 = \frac{(3-2\sqrt{2})\pi}{4}.$$

Logo, obtemos que a área da região encontrada por Emanuelle é igual a

$$1 - \pi\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 - \pi\frac{(2-\sqrt{2})}{2}.$$

13 ***O treinamento de Julian*** – *Solução*

Seja t o tempo, em minutos, que Julian demora para percorrer de bicicleta um quilômetro. Como ele vai de bicicleta ao triplo da velocidade com que caminha, então ele caminha um quilômetro em $3t$ minutos, e como ele corre ao dobro da velocidade com que caminha, então ele corre um quilômetro em $3t/2$ minutos. Assim, ele levou

$$t + 3t + \frac{3t}{2} \; = \; \frac{11t}{2}$$

minutos para percorrer os três quilômetros da pista. Se ele tivesse percorrido os três quilômetros da pista em bicicleta, ele haveria demorado $3t$ minutos. Assim, conforme o enunciado do problema, temos (em minutos)

$$\frac{11t}{2} - 3t \; = \; 10$$

e, resolvendo a equação anterior, obtemos $t = 4$ minutos. Finalmente, Julian corre um quilômetro em $3t/2 = 6$ minutos.

14 ***Peões rebeldes*** – *Solução*

Três peças devem ser colocadas na primeira linha, vamos chamá-las de α, β e θ como na seguinte figura:

	1	2	3	4
a	α	β	P	θ
b	P			
c				P
d		P		

Na casa $(b, 2)$ deve ser colocada uma peça diferente de β. Suponhamos primeiro que em $(b, 2)$ colocamos a peça α. É imediato que na casa $(c, 2)$ devemos colocar uma peça θ.

	1	2	3	4
a	α	β	P	θ
b	P	α		
c		θ		P
d		P		

Observe que na casa $(b, 4)$ não pode estar uma peça α, porque já há uma peça α na linha b, nem uma peça θ, porque já há uma peça θ na coluna 4. Isto implica que em $(b, 4)$ deve ir uma peça β e, em consequência, em $(b, 3)$ e $(d, 4)$ devem ir uma peça θ e uma peça α respectivamente.

	1	2	3	4
a	α	β	P	θ
b	P	α	θ	β
c		θ		P
d		P		α

A peça em $(d, 3)$ deve ser distinta de θ e α, porque já há uma peça θ na coluna 3 e uma peça α na linha d. Portanto em $(d, 3)$ devemos colocar uma peça β.

	1	2	3	4
a	α	β	P	θ
b	P	α	θ	β
c		θ		P
d		P	β	α

Agora é claro que só existe um modo de poder completar o tabuleiro. Concluímos que somente existe um modo de completar o tabuleiro se colocarmos uma peça α na posição $(b, 2)$.

	1	2	3	4
a	α	β	P	θ
b	P	α	θ	β
c	β	θ	α	P
d	θ	P	β	α

Vamos supor agora que em $(b, 2)$ colocamos uma peça θ. Nesse caso em $(c, 2)$ é necessário colocar uma peça α.

	1	2	3	4
a	α	β	P	θ
b	P	θ		
c		α		P
d		P		

Para as posições $(b, 3)$ e $(b, 4)$ devemos usar as peças α e β. Temos, assim, duas alternativas. Suponhamos primeiro que em $b - 3$ colocamos uma peça α e em $(b, 4)$ colocamos uma peça β. Em consequência, em $(d, 4)$ deve ir uma peça α.

	1	2	3	4
a	α	β	P	θ
b	P	θ	α	β
c		α		P
d		P		α

Finalmente, temos duas formas de completar o tabuleiro.

	1	2	3	4
a	α	β	P	θ
b	P	θ	α	β
c	β	α	θ	P
d	θ	P	β	α

	1	2	3	4
a	α	β	P	θ
b	P	θ	α	β
c	θ	α	β	P
d	β	P	θ	α

Suponhamos agora que em $(b, 3)$ colocamos uma peça β e em $(b, 4)$ colocamos uma peça α. Imediatamente vemos que em $(d, 4)$ devemos colocar uma peça β.

	1	2	3	4
a	α	β	P	θ
b	P	θ	β	α
c		α		P
d		P		β

Na casa $(d, 1)$ não pode ter uma peça α nem uma peça β porque já há uma peça α na coluna 1 e uma peça β na linha d. Portanto devemos colocar uma peça θ em $(d, 1)$ e assim somente existirá um modo de poder completar o tabuleiro.

	1	2	3	4
a	α	β	P	θ
b	P	θ	β	α
c	β	α	θ	P
d	θ	P	α	β

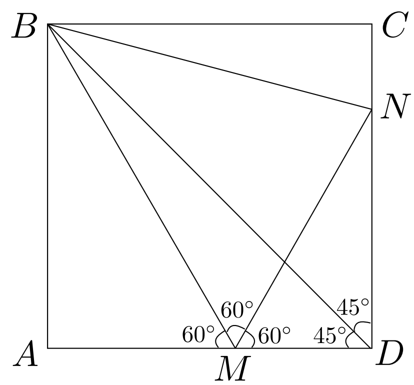
Assim obtivemos, no total, 4 maneiras de colocar as peças no tabuleiro de modo que as peças α, β e θ sejam as peças colocadas na primeira linha. Finalmente α é alguma das 3 peças, β alguma das outras 2 peças e θ será a única peça que resta. Temos assim 3×2 possibilidades para o trio (α, β, θ). A resposta é portanto

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

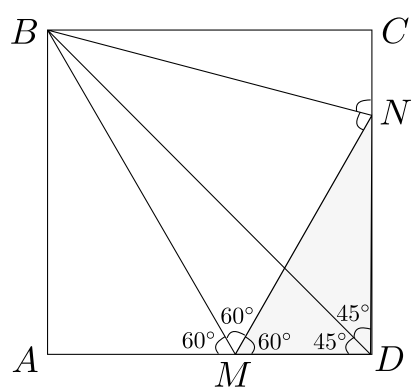
modos de colocar as peças no tabuleiro.

15 ***Ângulos no quadrado*** – *Solução*

Observe que $\measuredangle BMN = (180 - 60 - 60)^\circ = 60^\circ$. Em particular, MB é uma bissetriz do ângulo AMN. Se traçarmos o segmento $\overline{BD}$ vemos que tal segmento é bissetriz do ângulo reto ADC.



Concluímos assim que o ponto B é o excentro do triângulo MND. Isso implica que NB é necessariamente a bissetriz do ângulo MNC.



Como a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo MDN deve ser 180° obtemos que

$$\measuredangle MNC = \measuredangle DMN + \measuredangle MDN = (60 + 90)^\circ$$

e, portanto $\measuredangle MNB = \measuredangle MNC/2 = 75^\circ$. Finalmente, usamos que a soma dos ângulos internos do triângulo BMN é 180° para concluir que $\measuredangle MBN = (180 - 60 - 75)^\circ = 45^\circ$.

16 ***Carla escreve, Diana apaga*** – *Solução*

a) Se Diana decidir não apagar o número 11 então o produto dos números restantes será da forma $P = 11 \times A$. Como 11 é o único múltiplo de 11 dentre os números escritos por Carla, então A é o produto de números não divisíveis por 11, e logo A não é múltiplo de 11. Assim, P seria múltiplo de 11 mas não seria múltiplo de 11^2, logo P não seria quadrado perfeito. De modo análogo, podemos ver que Diana deve também apagar os números 13, 17 e 19.

b) Se Diana apaga somente os números 11, 13, 17 e 19, o produto dos 17 números restantes seria

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10 \times 12 \times 14 \times 15 \times 16 \times 18 \times 20 \times 21 = \left(2^9 \times 3^4 \times 5^2 \times 7\right)^2 \times 21.$$

Esse número não é um quadrado perfeito e então ela precisa apagar pelo menos mais um número. Da fatoração acima é simples ver que se Diana apaga também o número 21 ela conseguirá seu objetivo. Assim, a menor quantidade de números que Diana deve apagar é 5.

17 ***Papai Noel*** – *Solução*

Para cada um dos 8 brinquedos, do número 3 ao número 10, devemos decidir se ele vai pertencer a Arnaldo, a Bernaldo ou deve ser deixado para Papai Noel. Se multiplicarmos então

$$\underbrace{3 \times 3 \times \cdots \times 3}_{\text{8 vezes}}$$

contaremos as formas de dividir os brinquedos entre Arnaldo, Bernaldo e Papai Noel, incluindo os casos em que Papai Noel fica sem nenhum brinquedo. Restará então contar o número de formas de dividir todos os brinquedos entre Arnaldo e Bernaldo (sem deixar nada para Papai Noel), e subtrair esse número de 3^8.

Para dividir os brinquedos entre Arnaldo e Bernaldo devemos decidir, por cada um dos 8 brinquedos, para qual dos dois o brinquedo vai. Assim temos

$$\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{\text{8 vezes}}$$

formas de dividir os brinquedos entre Arnaldo e Bernaldo. Finalmente a resposta é

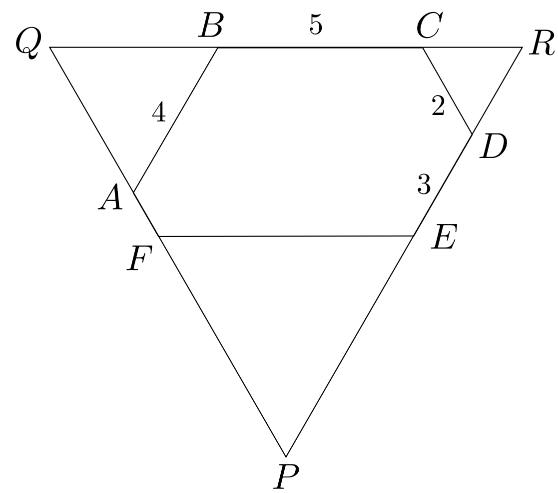
$$3^8 - 2^8 = 6305$$

formas de dividir os brinquedos.

18 ***Hexágono equiângulo*** – *Solução*

a) A soma das medidas dos ângulos internos de um hexágono é $4 \times 180°$. Então $6 \times \alpha = 4 \times 180°$ e, portanto, $\alpha = 120°$.

b) Prolongando os segmentos AF, ED e BC, conseguimos a seguinte figura:



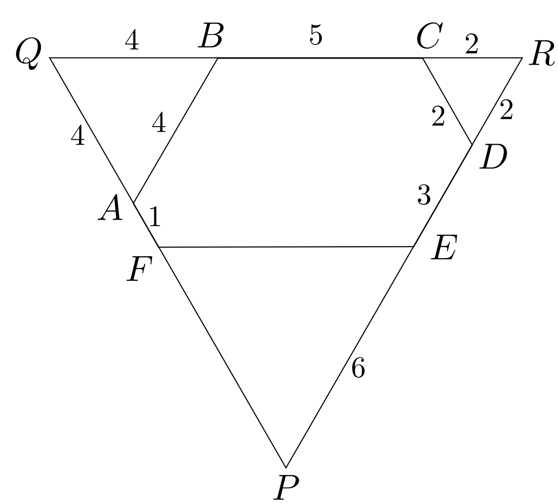
Como $\measuredangle FAB = \measuredangle ABC = 120°$, segue-se que $\measuredangle QAB = \measuredangle QBA = 60°$. Concluímos assim que o triângulo QAB é equilátero. De modo análogo, concluímos que os triângulos RDC e PFE são equiláteros. Mais ainda, o triângulo PQR também é equilátero por ter todos os ângulos internos iguais. A medida do lado do triângulo equilátero PQR é

$$|QB| + |BC| + |CR| = 4 + 5 + 2 = 11.$$

Portanto, também temos que

$$11 = |RP| = 2 + 3 + |EP|,$$

o que implica que $|EP| = 6$. Temos assim que $|EF| = |PF| = |EP| = 6$, enquanto que $|QA| = |AB| = 4$. Finalmente, para que $|QP| = |QA| + |AF| + |FP| = 4 + |AF| + 6$ seja igual a 11, é necessário que $|FA| = 1$.



c) A área do hexágono pode ser calculada como a área do triângulo PQR menos a soma das áreas dos triângulos QAB, RCD e PFE. Lembre-se que a área de um triângulo equilátero de lado ℓ é $\ell^2\sqrt{3}/4$. Daí, obtemos que a área do hexágono é

$$\frac{11^2\sqrt{3}}{4} - \left(\frac{4^2\sqrt{3}}{4} + \frac{2^2\sqrt{3}}{4} + \frac{6^2\sqrt{3}}{4}\right) = (11^2 - 4^2 - 2^2 - 6^2)\frac{\sqrt{3}}{4} = 65\frac{\sqrt{3}}{4}\ .$$

19 ***A lei pirata*** – *Solução*

a) Seja N o número de moedas que há no tesouro. Quando Barbaroxa escolhe 99 piratas para dividir as N moedas, sobram 51 moedas para ele, ou seja, ele consegue dividir $N-51$ moedas entre 99 piratas, ou equivalentemente, o número $N-51$ é divisível por 99. Em particular, o número $N-51+99 = N+48$ é também divisível por 99.

De modo análogo, podemos concluir que $N-29$ é divisível por 77. Logo, o número $N-29+77 = N+48$ é também divisível por 77. Como $N+48$ é divisível por 77 e por 99, então $N+48$ é divisível pelo mínimo múltiplo comum de 77 e 99, ou seja, 693.

Concluímos que $N+48$ é um múltiplo de 693 menor que $1000+48 = 1048$, e daí que $N+48 = 693$. Ou seja, $N = 645$.

b) Seja n o número de piratas que escolhera Barbaroxa. Para fazer a divisão das moedas, Barbaroxa deve dividir o número $N = 645$ por n, digamos $645 = qn + r$, e ele ficará com r moedas (q e r são números naturais). Note que

$$(q+1)n > qn + r \ = \ 645 \ \geq \ qn\ . \qquad (*)$$

Da desigualdade na esquerda, temos que $(q+1)100 \geq (q+1)n > 645$, e então $q \geq 6$. Analisemos agora os possíveis valores de q.

• Se $q = 6$: Da desigualdade na esquerda de (*), obtemos $n > 645/7 > 92$. Nesse caso, $r = 645 - 6n \leq 645 - 6(93) = 87$ e, quando $n = 93$, $r = 87$.

• Se $q = 7$: Da desigualdade na esquerda de (*), obtemos $n > 645/8 > 80$. Nesse caso, $r = 645 - 7n \leq 645 - 7(81) = 78$ e, quando $n = 81$, $r = 78$.

• Se $q \geq 8$: Da desigualdade na direita de (*), obtemos $645 \geq qn \geq 8n$, e então $81 > 645/8 \geq n > r$.

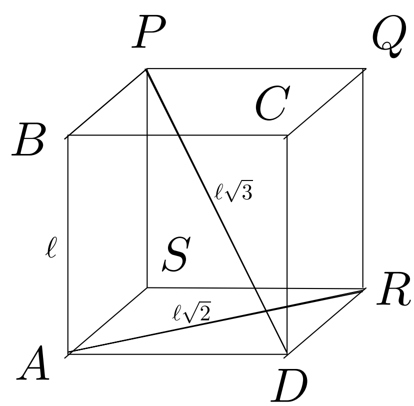
Dessa análise, podemos concluir que Barbaroxa pode obter no máximo $r = 87$ moedas. Para isto, ele deve escolher $n = 93$ piratas.

20 *Triângulos equiláteros no cubo* – *Solução*

Sobre o cubo existem somente 3 distâncias possíveis entre os vértices:

$$AB = \ell\,, \quad AR = \ell\sqrt{2} \quad \text{e} \quad PD = \ell\sqrt{3}\,.$$

Um triângulo equilátero que usa os vértices do cubo devia então ter alguma dessas distâncias como a medida do seu lado.



Vejamos se existem triângulos equiláteros de lado ℓ. Observe que se a distância entre dois vértices do cubo é ℓ, necessariamente eles estão unidos por uma aresta do cubo. Mas duas arestas do cubo são sempre perpendiculares. Então, não existem triângulos equiláteros de lado ℓ.

Vejamos agora se existem triângulos equiláteros de lado $\ell\sqrt{3}$. Os únicos pares de vértices à distância $\ell\sqrt{3}$ são $\{A, Q\}$, $\{B, R\}$, $\{S, C\}$ e $\{PD\}$. Como não existem dois pares com algum vértice em comum, concluímos que não é possível ter um triângulo equilátero de lado $\ell\sqrt{3}$.

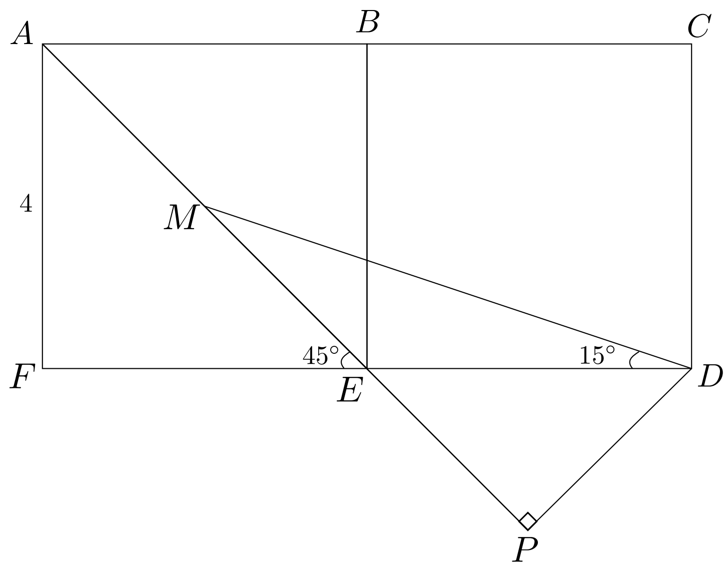
Contemos finalmente os triângulos equiláteros de lado $\ell\sqrt{2}$. Primeiro aqueles que têm A como vértice. Os vértices à distância $\ell\sqrt{2}$ de A são P, R e C. Vemos que escolhendo qualquer par em $\{P, R, C\}$ obtemos um triângulo equilátero usando esse dois vértices junto com A. Contamos assim 3 triângulos equiláteros que usam o vértice A. Agora, se multiplicamos 8 vértices vezes 3 triângulos por cada vértice, consideraríamos todos os triângulos de lado $\ell\sqrt{2}$ e cada um deles estaria sendo contado exatamente 3 vezes (uma vez por cada vértice do triângulo contado). Concluímos, assim, que são

$$\frac{8 \times 3}{3} = 8$$

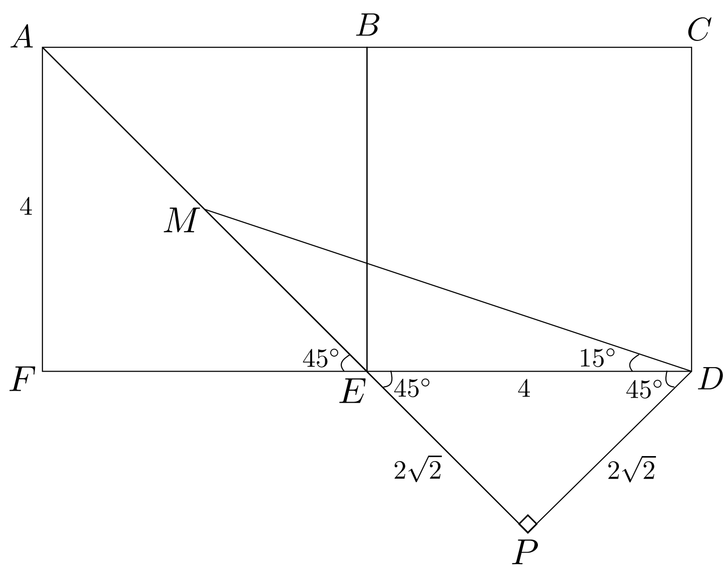
os triângulos de lado $\ell\sqrt{2}$. A resposta é então: 8 triângulos equiláteros.

21 ***Quadrados vizinhos*** *– Solução*

Como $\overline{AE}$ é a diagonal do quadrado $ABEF$, então $\measuredangle AEF = 45°$. Prolonguemos o segmento $\overline{AE}$ para formar o triângulo retângulo MPD como mostra a figura.



Observe que $\measuredangle PED = \measuredangle AEF = 45°$ e, portanto, o triângulo retângulo EPD é isósceles. A hipotenusa do triângulo EPD mede 4 (que é lado do quadrado $BCDE$). Daí, os catetos medem $|EP| = |PD| = 2\sqrt{2}$.



Finalmente, $\measuredangle MDP = (15 + 45)°$ e, portanto, no triângulo retângulo MPD os ângulos internos são $30°$ e $60°$, e vale a seguinte relação

$$|MD| = 2|PD|.$$

Assim, provamos que $|MD| = 2(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$.

22 ***O engano de Raul*** – *Solução*

a) Note que

$$a^2 < A \;=\; a^2+4b+1 \;<\; a^2+4a+1 \;<\; (a+2)^2.$$

Assim, A é um quadrado perfeito entre os quadrados perfeitos a^2 e $(a+2)^2$, e então $A=(a+1)^2$.
b) Pelo item anterior,

$$a^2+4b+1 \;=\; A \;=\; (a+1)^2 \;=\; a^2+2a+1,$$

e então $a=2b$. Substituindo em $B=b^2+4a+1$, obtemos $B=b^2+8b+1$. Note agora que

$$(b+1)^2 \;=\; b^2+2b+1 \;<\; b^2+8b+1 \;=\; B \;<\; b^2+8b+16 \;=\; (b+4)^2.$$

Isto é, B é um quadrado perfeito entre os quadrados perfeitos $(b+1)^2$ e $(b+4)^2$. Temos assim dois possíveis casos: $B=(b+2)^2$ ou $B=(b+3)^2$.

Caso I: $B=(b+2)^2$. Nesse caso, teríamos

$$b^2+4b+4 \;=\; (b+2)^2 \;=\; B \;=\; b^2+8b+1,$$

e, portanto, $b=3/4$ não seria um número inteiro.

Caso II: $B=(b+3)^2$. Nesse caso, teríamos

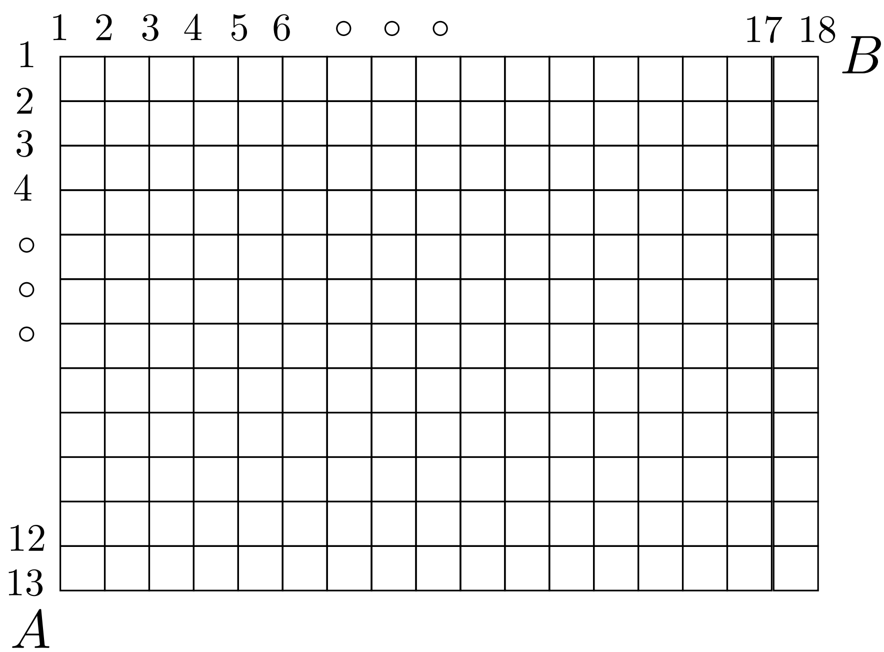
$$b^2+6b+9 \;=\; (b+3)^2 \;=\; B \;=\; b^2+8b+1,$$

e daí $b=4$ e $a=8$. Finalmente,

$$A=8^2+4(4)+1=9^2 \quad \text{e} \quad B=4^2+4(8)+1=7^2.$$

23 *A diagonal do quadriculado* – *Solução*

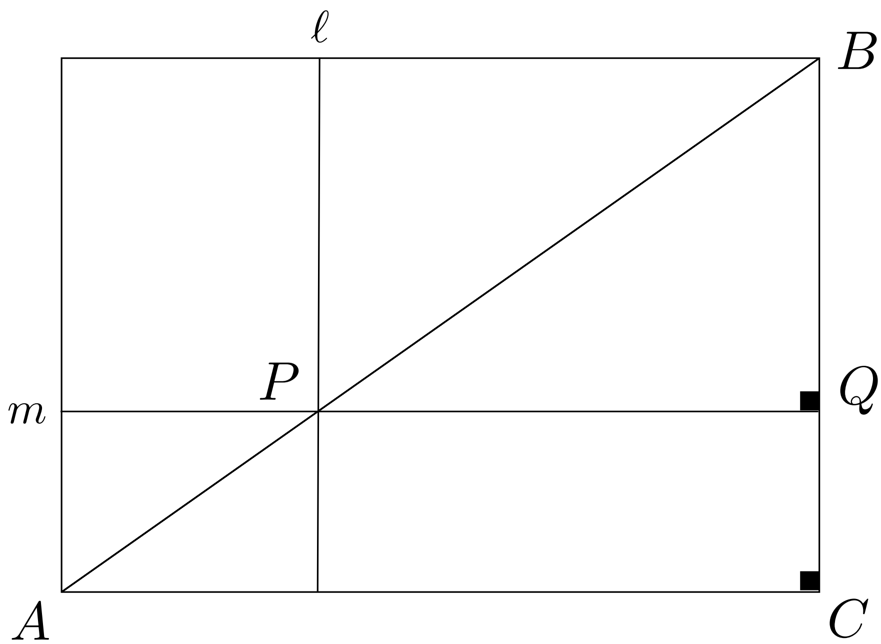
Vamos enumerar as linhas verticais e as linhas horizontais do quadriculado do seguinte modo:



A diagonal AB intersecta cada linha vertical em exatamente um ponto. Com isso, contaríamos 18 pontos de interseção. Também AB intersecta cada linha horizontal em exatamente um ponto. Com isso, contaríamos 13 pontos de interseção. Sabemos que os pontos A e B são pontos de interseção em comum. Portanto, na soma $18+13$, estamos contando cada interseção duas vezes. Se não existissem outros pontos de interseção em comum a resposta seria

$$18 + 13 - 2 = 29.$$

Suponhamos que existisse um outro ponto de interseção P, como mostrado no gráfico.



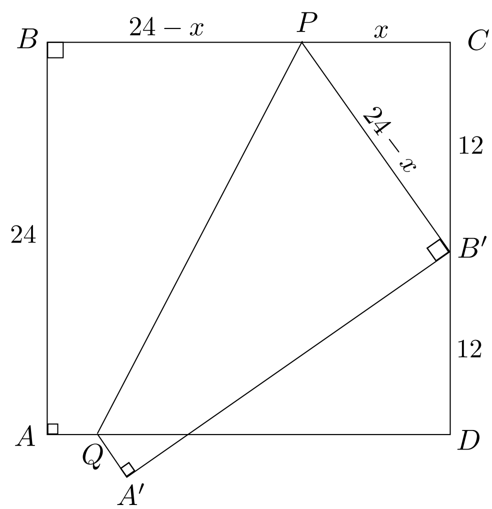
Digamos que o lado de cada quadradinho meça $1\ u$. Então é claro que $|AC| = 17$ u e $|BC| = 12\ u$. Os triângulos ABC e PBQ são semelhantes porque possuem os mesmos ângulos. Portanto, $\frac{|BQ|}{|QP|} = \frac{|BC|}{|CA|}$ ou, equivalentemente,

$$BQ = \frac{12 \times QP}{17}.$$

Se P pertencesse a uma linha vertical e a uma linha horizontal, então tanto QP quanto BQ deveriam ser números inteiros (quando escritos em termos de u). Para que $12 \times |QP|/17$ seja inteiro, necessariamente 17 deve dividir $|QP|$. Mas se $0 < |QP| < 17$, isso é impossível. Concluímos assim que tal P não existe. Portanto, a resposta final são 29 pontos de interseção de AB com o quadriculado.

24 ***Dobrando o quadrado*** – *Solução*

a) Chamemos x o comprimento do segmento $\overline{PC}$. Como o lado do quadrado mede 24, então $|PB| = 24 - x$ e também $|PB'| = 24 - x$.

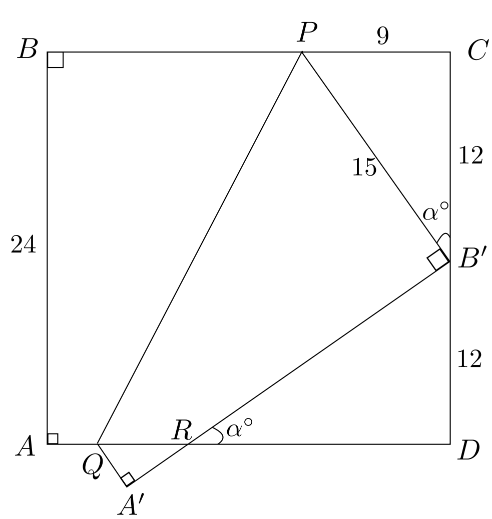


Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo PCB', obtemos a relação

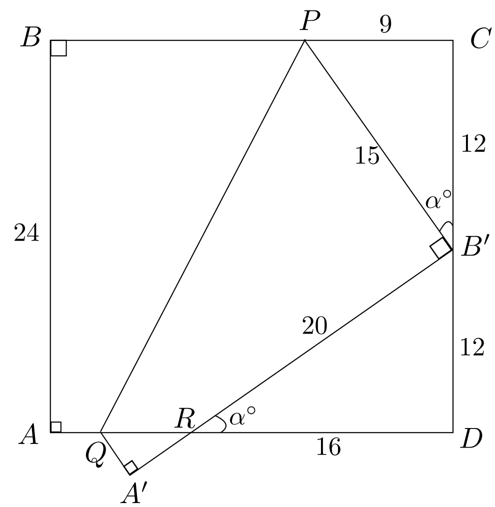
$$x^2 + 12^2 = (24 - x)^2.$$

Assim, mostramos que $|PC| = 9$. Observe também que $|PB'| = 15$ (isso será usado nos próximos itens).

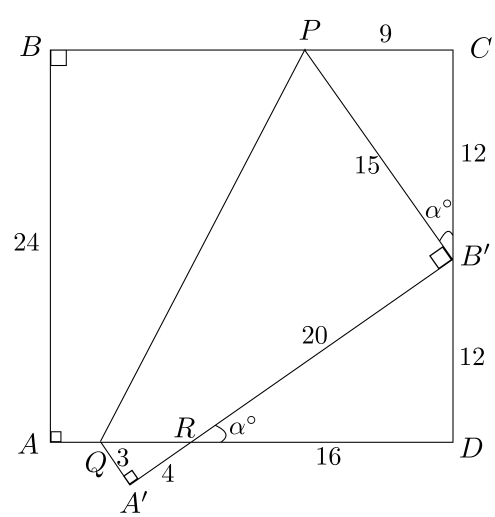
b) Chamemos $\alpha°$ a medida do ângulo $PB'C$. Então $\measuredangle RB'D = (90-\alpha)°$ e, portanto, $\measuredangle DRB' = \alpha°$.



Isso mostra que os triângulos PCB' e $B'DR$ são semelhantes. Usando as relações de semelhança, vemos que $|RD| = 12 \times 12/9 = 16$ e então $|RB'| = 20$ (por Pitágoras).

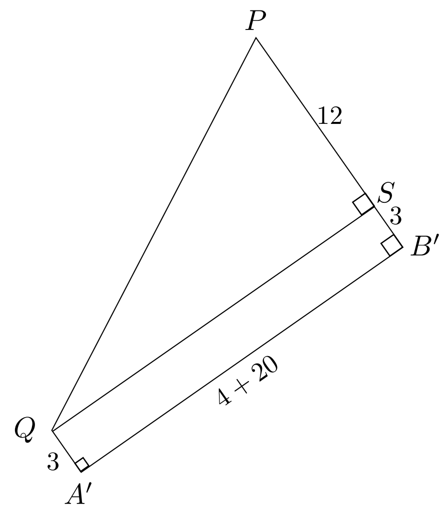


Dado que $|A'B'| = |AB| = 24$, obtemos que $|A'R| = 4$. Além disso, podemos ver que $\measuredangle QRA' = \measuredangle DRB' = \alpha^\circ$ e, portanto, são também semelhantes os triângulos RDB' e $RA'Q$. Usando a relação de semelhança, obtemos que $|QA'| = 4 \times 12/16 = 3$.



Finalmente, $|AQ| = |A'Q| = 3$.

c) Para calcular PQ, é suficiente observar o quadrilátero $A'QPB'$. Traçamos o segmento $\overline{QS}$ perpendicular ao segmento $\overline{PB'}$ de modo que $|QA'| = |SB'| = 3$.



Usando Pitágoras no triângulo PSQ temos

$$|PQ|^2 = 24^2 + 12^2.$$

Deste modo, $|PQ| = 12\sqrt{5}$.

25 ***Somando cubos*** – *Solução*

a) Vale que

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1.$$

Então podemos calcular a soma

$$(2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + (4^2 - 3^2) + \ldots + ((n+1)^2 - n^2)$$

de duas maneiras. Primeiro vemos que a maioria dos fatores vão se cancelar, por exemplo, o 2^2 se cancela com o -2^2 que aparece logo depois; o mesmo vale para o 3^2. Na verdade, os únicos termos que não serão cancelados são o -1^2 e o $(n+1)^2$ (isso é chamado de uma soma telescópica). Portanto, essa soma vale $(n+1)^2 - 1$. Por outro lado, usando a diferença que calculamos acima, podemos reescrever a soma como

$$(2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 3 + 1) + \ldots (2 \cdot n + 1) = 2(1 + 2 + 3 \ldots + n) + n = 2S_n + n.$$

Portanto, concluímos que $2S_n + n = (n+1)^2 - 1$. Sabendo disso, podemos achar uma fórmula para S_n:

$$\begin{aligned} 2S_n + n &= (n+1)^2 - 1 \\ 2S_n &= n^2 + 2n + 1 - 1 - n \\ 2S_n &= n^2 + n \\ S_n &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

b) Repetindo o processo anterior, calculamos

$$(n+1)^3 - n^3 = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - n^3 = 3n^2 + 3n + 1.$$

Calculando a soma

$$(2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + (4^3 - 3^3) + \ldots + ((n+1)^3 - n^3)$$

de modo telescópico, vemos que ela é igual a $(n+1)^3 - 1$. Por outro lado, podemos reescrevê-la como

$$(3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1) + (3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1) \ldots + (3n^2 + 3n + 1) = 3Q_n + 3S_n + n.$$

Logo, concluímos que

$$3Q_n + 3S_n + n = (n+1)^3 - 1.$$

Substituindo o valor de S_n que encontramos anteriormente, ficamos com

$$\begin{aligned}
3Q_n + 3\left(\frac{n^2+n}{2}\right) + n &= n^3 + 3n^2 + 3n \\
3Q_n &= \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n - 3n^2 - 3n - 2n}{2} \\
3Q_n &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} \\
Q_n &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\
Q_n &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

c) Por fim, calculamos o valor de C_n. Seguindo com o raciocínio, vemos que

$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.$$

Calculando a soma

$$(2^4 - 1^4) + (3^4 - 2^4) + \ldots + ((n+1)^4 - n^4)$$

de modo telescópico, vemos que ela é igual a $(n+1)^4 - 1$. Por outro lado, podemos reescrevê-la como

$$(4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1) + (4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1) + \ldots + (4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) = 4C_n + 6Q_n + 4S_n + n.$$

Substituindo os valores de S_n e Q_n encontrados acima,

$$\begin{aligned}
4C_n + 6\left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}\right) + 4\left(\frac{n^2+n}{2}\right) + n &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n \\
4C_n + (2n^3 + 3n^2 + n) + (2n^2 + 2n) + n &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n \\
4C_n &= n^4 + 2n^3 + n^2 \\
C_n &= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} \\
C_n &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Então, podemos concluir claramente que $C_n = S_n^2$ para todo valor de n natural. Portanto, a conjectura de Pedrinho estava certa.

26 *Contando tabuleiros* – *Solução*

Para os tabuleiros 3×3, dividiremos a solução em casos de acordo com a quantidade de números 1 por linha:

• Caso 1: não há números 1. Neste caso, só temos um tabuleiro:

0	0	0
0	0	0
0	0	0

• Caso 2: temos um número 1 por linha. Neste caso, temos que escolher um número 1 em cada linha. Para a primeira linha, temos 3 escolhas (cada uma das casas desta linha). Sem perda de generalidade, podemos supor que escolhemos a primeira casa. Note que na coluna que este 1 foi escolhido só podemos ter zeros, pois a soma em cada coluna também tem que ser 1.

1	0	0
0	$\star$	$\star$
0	$\star$	$\star$

Agora, para a segunda linha só vamos ter duas escolhas possíveis (não podemos colocar dois números 1 na mesma coluna), enquanto que para a última linha só teremos uma. Então, neste caso, teremos $3 \times 2 \times 1 = 6$ tabuleiros.

• Caso 3: agora, vemos que a quantidade de tabuleiros em que cada linha tem dois números 1 é igual à quantidade de tabuleiros com um número 1 em cada linha. Isso é verdade porque, dado um tabuleiro com dois números 1 em cada linha, basta trocarmos os zeros por uns e os números uns por zeros, e obteremos um tabuleiro com apenas um número 1 em cada linha.

• Caso 4: o mesmo vale para a quantidade de tabuleiros só com uns, que é igual à quantidade de tabuleiros só com zeros. Portanto

$$a_3 = 1 + 6 + 6 + 1 = 14.$$

Para calcular a_4, faremos uma contagem semelhante ao caso do a_3. Se não houver números 1, só teremos um tabuleiro formado por zeros. O mesmo vale se não tivermos nenhum zero no tabuleiro. Se tivermos só um número 1 em cada linha, basta fazer uma conta análoga ao caso do a_3. Logo, temos 4 escolhas para a primeira linha, 3 escolhas para a segunda linha (não podemos ter dois números 1 na mesma coluna), 2 escolhas para a terceira linha e 1 escolha para a última linha. Daí, temos $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ tabuleiros com um número 1 em cada linha. A mesma conta funciona para o caso com um zero em cada linha.

Agora só falta o caso em que temos dois números 1 em cada linha. Temos então que colocar dois números na primeira linha. Podemos fazer isso de

$$\frac{4 \times 3}{2} = 6$$

maneiras. Sem perda de generalidade, vamos supor que a primeira linha seja da seguinte forma

1	1	0	0

Na primeira coluna deve haver mais um 1, o que pode ser feito de três maneiras:

1	1	0	0
$\star$			
$\star$			
$\star$			

De novo, sem perda de generalidade, podemos supor que o tabuleiro seja da forma

1	1	0	0
1			
0			
0			

Agora, dividimos em dois casos:

1	1	0	0
1	1		
0			
0			

1	1	0	0
1	0		
0			
0			

No primeiro caso acima, é fácil ver que só podemos completar de um jeito, pois já temos dois números 1 na segunda coluna e na segunda linha, então temos que completá-las com zeros:

1	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1
0	0	1	1

Logo, para este caso nós temos 6×3 maneiras de preencher o tabuleiro, lembrando que 6 é o número de maneiras de se colocarem dois números 1 na primeira linha e 3 é a quantidade de escolhas para a posição do outro número 1 na primeira coluna.

Já no segundo caso, ficamos com um tabuleiro do tipo:

1	1	0	0
1	0	$\bullet$	$\bullet$
0	$\star$		
0	$\star$		

Temos 2 maneiras de escolher onde fica o 1 na segunda linha (substituindo um dos $\bullet$ acima) e 2 maneiras de escolher onde fica o 1 na segunda coluna (substituindo uma das $\star$ acima). Sem perda de generalidade, vamos assumir que ficamos com um tabuleiro do tipo:

1	1	0	0
1	0	1	0
0	1		
0	0	$\star$	$\star$

Agora, o tabuleiro está determinado. De fato, as duas estrelinhas acima têm que ser números 1, pois temos que ter dois números 1 na última linha. Terminar a partir daí é fácil:

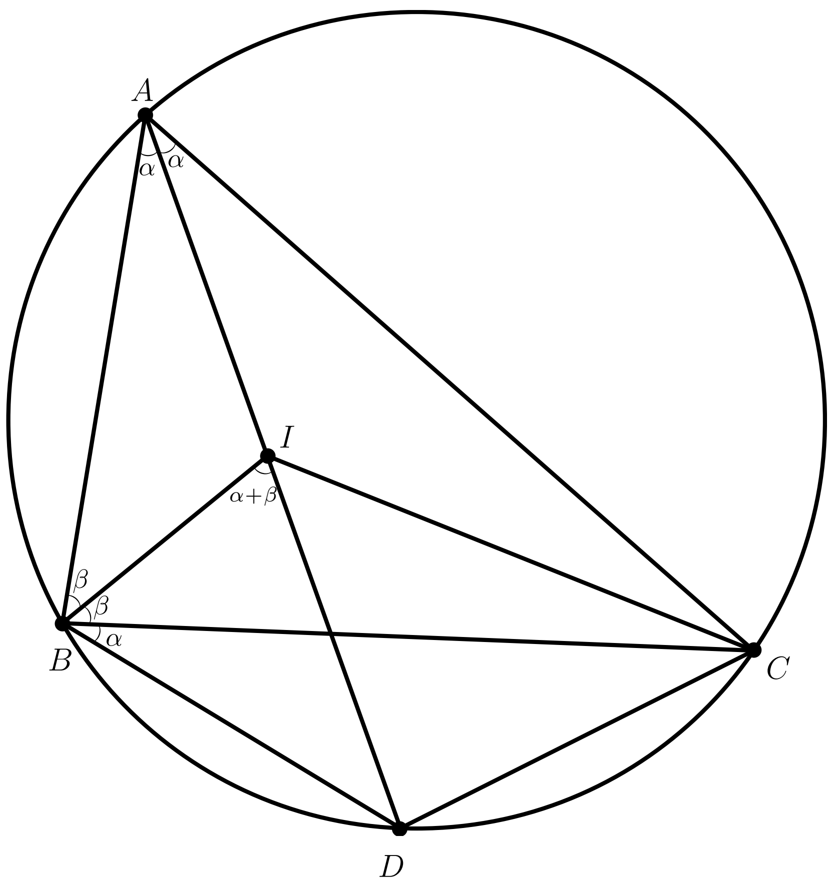
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1

Então, neste caso temos 6 escolhas para a primeira linha, depois 3 para a primeira coluna. Em seguida, mais 2 escolhas para a segunda linha e 2 para a segunda coluna. Ficando com $6 \times 3 \times 2 \times 2 = 72$ escolhas. Então, no total, ficamos com

$$a_4 = 1 + 24 + (72 + 18) + 24 + 1 = 140.$$

27 *Distância até o incentro* – *Solução*

Como I é o incentro do triângulo ABC, então os segmentos AI, BI e CI são bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Sejam então $\alpha = \angle BAI = \angle CAI$ e $\beta = \angle ABI = \angle CBI$.



Como o ângulo $\angle BID$ é ângulo externo do triângulo ABI, temos que

$$\angle BID = \angle BAI + \angle ABI = \alpha + \beta.$$

Por outro lado, o ângulo $\angle DBC$ está "olhando para o arco $\overset{\frown}{DC}$", logo é igual ao ângulo $\angle CAI = \alpha$. Portanto, vale que

$$\angle IBD = \angle IBC + \angle CBD = \beta + \alpha.$$

Assim, segue que $\angle IBD = \angle BID$. Portanto, o triângulo IBD é isósceles, o que implica que $|\overline{DB}| = |\overline{DI}|$. Analogamente, se prova que $|\overline{DC}| = |\overline{DI}|$.

28 ***Produto igual à soma*** – *Solução*

Sejam x e y os números escritos por Pedrinho. Então o número que Pedrinho calculou foi $2xy$, enquanto que Joãozinho calculou $21 + 2x + y$. Como eles encontraram o mesmo resultado, vale que:

$$2xy = 2x + y + 21.$$

Vamos agora manipular a equação acima:

$$\begin{aligned} 2xy - 2x &= y + 21 \\ 2x(y-1) &= y + 21. \end{aligned}$$

No segundo passo, colocamos $2x$ em evidência. A ideia agora é fazer aparecer um $y - 1$ no lado direito. Para isso basta somar e diminuir 1.

$$\begin{aligned} 2x(y-1) &= y - 1 + 1 + 21 \\ 2x(y-1) &= (y-1) + 22 \\ 2x(y-1) - (y-1) &= 22 \\ (2x-1)(y-1) &= 22. \end{aligned}$$

No último passo, colocamos o $(y - 1)$ em evidência. Usando que x e y são inteiros positivos, temos que $2x - 1$ e $y - 1$ são inteiros que não podem ser negativos. Portanto, temos dois números inteiros que, multiplicados, dão 22. Logo, temos que

$$\begin{array}{ccc} 2x-1=1 & \text{e} & y-1=22 \quad \text{ou} \\ 2x-1=2 & \text{e} & y-1=11 \quad \text{ou} \\ 2x-1=11 & \text{e} & y-1=2 \quad \text{ou} \\ 2x-1=22 & \text{e} & y-1=1. \end{array}$$

Mas como $2x - 1$ é sempre um número ímpar, o segundo e quarto casos acima não podem acontecer. Portanto, os números escritos por Pedrinho são 1 e 23 ou 6 e 3.

29 ***Colorindo palitos*** – *Solução*

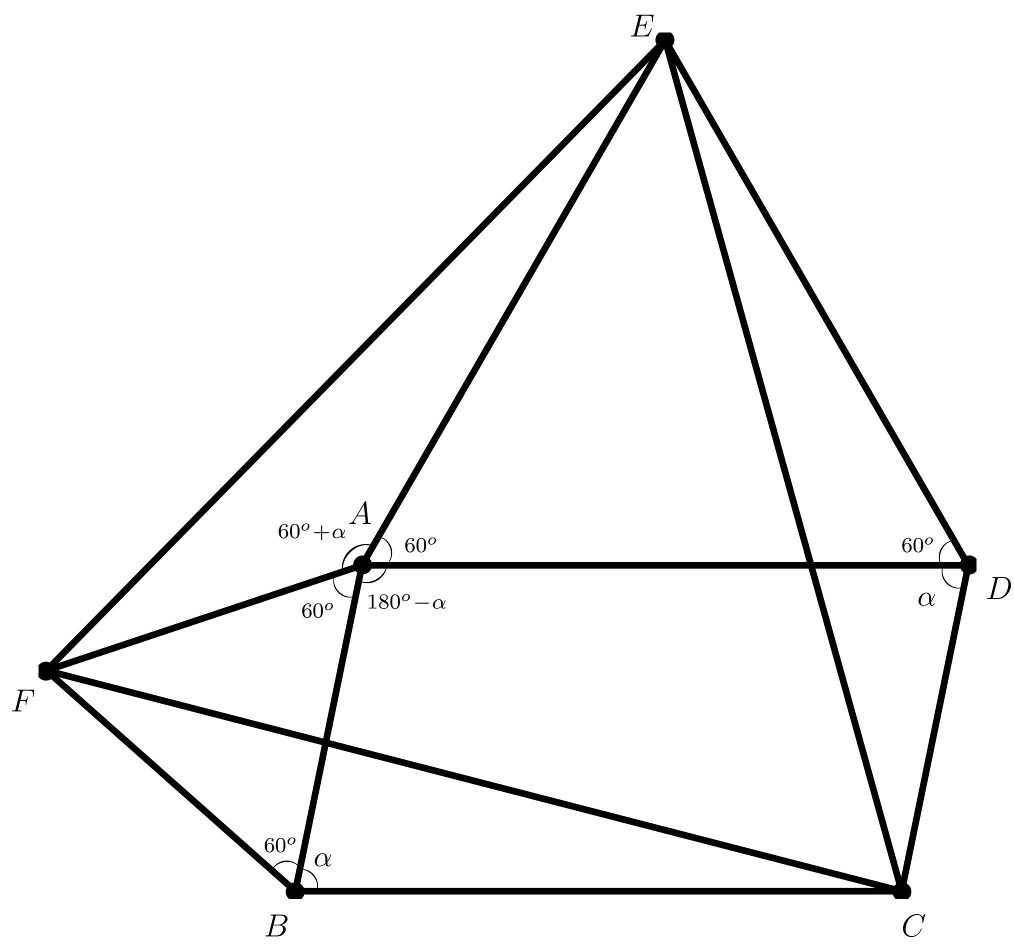
Começamos pintando os palitos de dentro do hexágono. Cada um desses palitos pode ser pintado com 3 cores distintas. Temos então 3^6 maneiras de pintar estes palitos interiores.

Notamos agora que cada um dos seis triângulos formados podem ser completados de duas maneiras diferentes, independentemente das cores dos dois palitos pintados. Se pintamos os dois palitos que formam este triângulo de uma mesma cor, digamos azul, então o palito que sobra pode ser pintado de vermelho ou preto. Por outro lado, se pintamos os dois palitos de cores diferentes, digamos azul e vermelho, então o palito que sobra só pode ser pintado de azul ou vermelho. Logo, o número total de maneiras de pintar o arranjo é igual a $3^6 \times 2^6 = 46656$.

30 ***Triângulos equiláteros*** – *Solução*

Seja $\alpha = \angle ABC$. Como $ABCD$ é um paralelogramo, ele tem ângulos opostos iguais, logo $\angle ADC = \alpha$, e ângulos adjacentes suplementares, logo $\angle BAD = 180^o - \angle ABC = 180 - \alpha$. Portanto conseguimos calcular o ângulo $\angle FAE$, usando o fato de que todo triângulo equilátero tem ângulos de 60^o. Logo,

$$\begin{aligned} \angle FAE + \angle EAD + \angle DAB + \angle FAB &= 360^o \\ \angle FAE + 60^o + 180^o - \alpha + 60^o &= 360^o \\ \angle FAE &= 60^o + \alpha. \end{aligned}$$



Portanto, os ângulos $\angle FAE$, $\angle FBC$ e $\angle CDE$ são iguais a $60^o + \alpha$.

Mais ainda, todo paralelogramo tem lados opostos iguais, logo $|\overline{AB}| = |\overline{DC}|$, e como o triângulo ABF é equilátero, vale que

$$|\overline{DC}| = |\overline{AB}| = |\overline{AF}| = |\overline{BF}|.$$

Analogamente, temos que

$$|\overline{BC}| = |\overline{AD}| = |\overline{AE}| = |\overline{DE}|.$$

Logo, concluímos que os triângulos FAE, FBC e CDE são congruentes pelo caso lado-ângulo-lado. Portanto, vale que

$$|\overline{EF}| = |\overline{CF}| = |\overline{EC}|.$$

Logo, o triângulo FCE é equilátero.

ÍNDICE DE PROBLEMAS