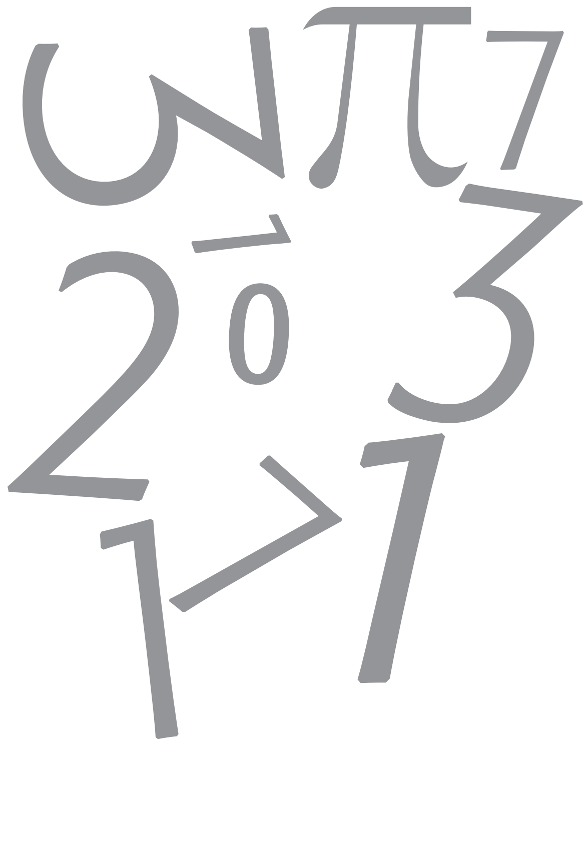


OBMEP - Banco de Questões 2013

Johel Beltrán, Jonathan Farfán
Marcelo Hilário e Tertuliano Franco

Banco de Questões 2013

Impresso no Brasil/Printed in Brazil
Primeira edição e impressão

Texto e diagramação: Johel Beltrán, Jonathan Farfán, Marcelo Hilário, Tertuliano Franco

Este livro foi escrito usando o sistema LaTeX.

Capa: Rogério Kaiser

IMPA/OBMEP
Banco de Questões 2013
Rio de Janeiro, IMPA, 2013
184 páginas
ISBN 978-85-244-0348-4

Distribuição
IMPA/OBMEP
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
E-mail: contato@obmep.org.br
Página: www.obmep.org.br

CONTEÚDO

Apresentação	**7**
Prefácio	**9**
Nível 1 – Enunciados	**13**
Nível 2 – Enunciados	**35**
Nível 3 – Enunciados	**53**
Nível 1 – Soluções	**73**
Nível 2 – Soluções	**105**
Nível 3 – Soluções	**137**
Índice de Problemas	**167**

APRESENTAÇÃO

Desde sua primeira edição em 2005, a OBMEP oferece a todas as escolas públicas do país um Banco de Questões com problemas e desafios de matemática para alunos e professores. O Banco pretende despertar o prazer pela matemática, estimular o aluno interessado com perguntas instigantes e proporcionar um treinamento para as provas da OBMEP.

O Banco de Questões deste ano apresenta uma coleção de problemas concebidos e resolvidos pelos professores Johel Beltrán (PUCP), Jonathan Farfán (PUCP), Marcelo Hilário (UFMG) e Tertuliano Franco (UFBA).

A edição do Banco de Questões deste ano assim como todas as edições anteriores e as apostilas do Programa de Iniciação Científica da OBMEP estão disponíveis na página `www.obmep.org.br`.

Se você, leitor, encontrar uma solução para algum problema diferente da solução apresentada ao final do Banco de Questões, não deixe de mandá-la para o endereço `bancodequestoes@obmep.org.br`, pois ela poderá ser publicada na página da OBMEP!

Boa diversão,

Claudio Landim
Coordenador Geral da OBMEP

PREFÁCIO

Querido leitor/leitora,

O Banco de Questões deste ano da OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – vem com noventa questões, sendo trinta de cada nível. Sugerimos que o leitor não se limite a fazer questões apenas de um nível. Há questões no Nível 3 possivelmente mais fáceis do que determinadas questões do Nível 1, por exemplo. E não desanime se alguma questão lhe parecer complicada. Pule para outra, repense, reflita... assim funciona a Matemática, com persistência, reflexão. E também com busca pela estética, por soluções não apenas corretas, mas também bonitas.

Para facilitar a busca de questões em meio ao livro, há um sumário no início, e também um índice remissivo ao final com os nomes dos problemas e respectivas páginas onde aparecem seus enunciados e soluções. Além disso, as questões do Nível 1 são numeradas como $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, etc. As questões do Nível 2 são numeradas como $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, etc. E as questões do Nível 3 são numeradas como $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, etc.

De modo algum as soluções dos problemas aqui apresentados são as únicas possíveis e/ou as melhores. Incentivamos fortemente o leitor a tentar as suas próprias soluções, usando as soluções aqui apresentadas como um apoio.

Aproveitamos para agradecer a colaboração de todos os envolvidos neste projeto.

Esperamos que desfrutem!

Johel Beltrán, Jonathan Farfán, Marcelo Hilário e Tertuliano Franco

“Hoje eu vim, minha nega
sem saber nada da vida
querendo aprender contigo
a forma de se viver
as coisas estão no mundo
só que eu preciso aprender.”

Paulinho da Viola, trecho da música
“Coisas do Mundo, Minha Nega”

NÍVEL 1 – ENUNCIADOS

1 *Água na medida certa*

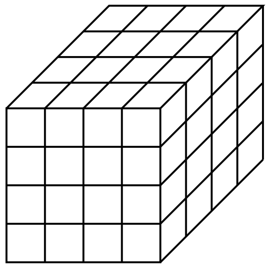
Fábio precisa obter exatamente quatro litros de água. Para isso ele usará apenas os dois únicos baldes de água que tem em sua casa e uma torneira. Sabendo que um dos baldes que Fábio tem em sua casa tem capacidade de três litros, e outro tem capacidade de cinco litros, determine uma maneira com a qual Fábio pode obter a quantidade de água que necessita.

2 *Laranjas e goiabas*

Numa quitanda, há três caixas. Uma contém apenas laranjas, outra contém apenas goiabas, e a terceira contém laranjas e goiabas. Ives, que trabalha nesta quitanda, escreveu em uma caixa "Laranjas", em outra "Goiabas" e em outra "Laranjas e Goiabas", de maneira que cada nome estivesse na caixa errada. Pedindo a Ives que retire e mostre apenas uma fruta de apenas uma caixa, é possível saber como reescrever todos os nomes nas caixas de maneira correta. Explique como!

3 *Cubos e cubos*

Bráulia cortou um cubo em muitos cubinhos de aresta 1 cm, através de cortes paralelos às suas faces. Por exemplo, se este cubo tivesse 4 cm de lado, os cortes produziriam:



Entretanto, o comprimento da aresta deste cubo é desconhecido.

a) Após cortar o cubo, Bráulia contou os cubinhos de 1 cm de lado, os quais eram 512. Qual era o comprimento da aresta do cubo?

b) Laura faz o mesmo com outro cubo, para o qual também é desconhecido o comprimento da aresta. Após o corte, Laura conta 512 cubinhos que antes não tinham nenhuma face em contato com o exterior do cubo. Qual era o comprimento do cubo?

4 *Qual a unidade?*

Qual o algarismo das unidades do número $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots 3^{2013}$?

Lembre-se, por exemplo, que $3^2 = 3 \times 3 = 9$. E $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$. Lembre-se também que o algarismo das unidades de um número é o último à direita dele. Por exemplo, o algarismo das unidades de 376564534539 é 9.

5 *Pintando um cubo*

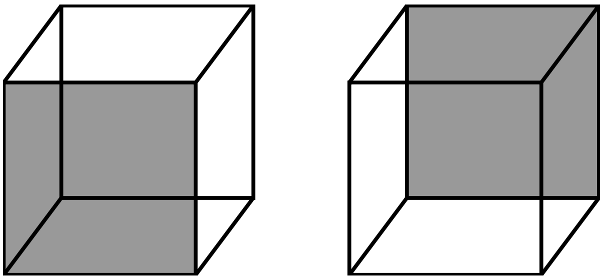
Mônica tem seis cores para pintar as faces de um cubo. De quantas maneiras ela pode fazer isso se:

a) Todas as faces têm a mesma cor?

b) Cinco faces têm a mesma cor e uma face tem uma cor diferente das restantes?

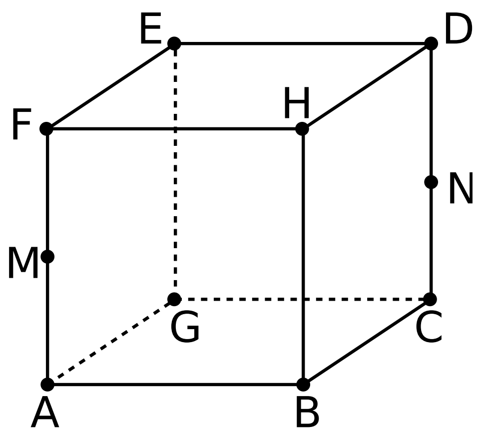
c) Todas as faces têm cores diferentes?

Observação: lembre-se, por exemplo, que as duas pinturas abaixo são iguais, pois se girarmos uma delas de maneira apropriada, obteremos a outra!



6 *Formiga esperta*

Uma formiga esperta, que passeia sobre a superfície do cubo abaixo, faz sempre o menor caminho possível entre dois pontos. O cubo tem arestas de tamanho 1 cm.



Qual distância a formiga esperta percorrerá se ela for:

a) Do vértice A ao vértice B?

b) Do ponto M ao ponto N?

c) Do vértice A ao vértice D?

7 *Soma de felinos*

Emílio gosta de propor desafios matemáticos e de animais. Ele escreveu num papel a seguinte soma:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{G} & \mathbf{A} & \mathbf{T} & \mathbf{O} \\ + & \mathbf{P} & \mathbf{U} & \mathbf{M} & \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{P} & \mathbf{U} & \mathbf{M} & \mathbf{A} & \mathbf{S} \end{array}$$

Emílio disse que a soma acima representa uma soma correta de dois números, onde cada letra representa um algarismo distinto.

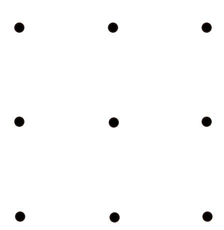
a) Qual é o algarismo representado pela letra **P**?

b) Quais são os algarismos representados pelas letras **G** e **U**?

c) Qual o número representado pela palavra **PUMAS**?

8 *Três pontos colineares*

Nove pontos são desenhados em uma folha de papel, como mostrados na seguinte figura:

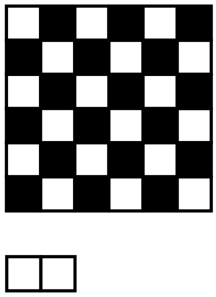


a) De quantas maneiras é possível escolher três pontos colineares?

b) De quantas maneiras é possível escolher quatro pontos de modo que três deles sejam colineares?

9 *Tabuleiros e dominós*

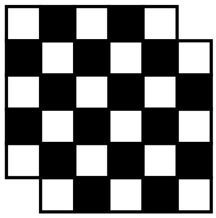
Wanderson tem um tabuleiro 6×6 e peças de dominó como ilustrado na figura abaixo.



Cada uma das duas faces da peça de dominó é quadrada e tem a mesma área de cada uma das casas do tabuleiro, que também são quadradas.

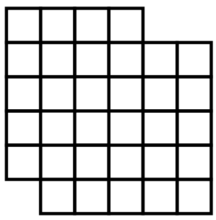
a) Wanderson quer cobrir todo o tabuleiro utilizando suas peças de dominó de forma que cada face das peças de dominó fique posicionada sobre uma casa do tabuleiro. Quantas peças de dominó Wanderson precisará para fazê-lo?

b) Renato recorta do tabuleiro de Wanderson duas faces de forma que o novo tabuleiro tenha 34 casas como desenhado abaixo:

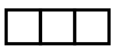


Logo após, Renato desafia Wanderson a cobrir o novo tabuleiro usando as suas peças de dominó. Existe algum modo de Wanderson vencer o desafio?

c) Renato agora troca o tabuleiro de Wanderson pelo tabuleiro desenhado abaixo:



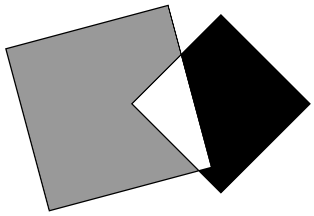
Ele troca também as peças de dominó pelas novas peças 3×1 desenhadas abaixo:



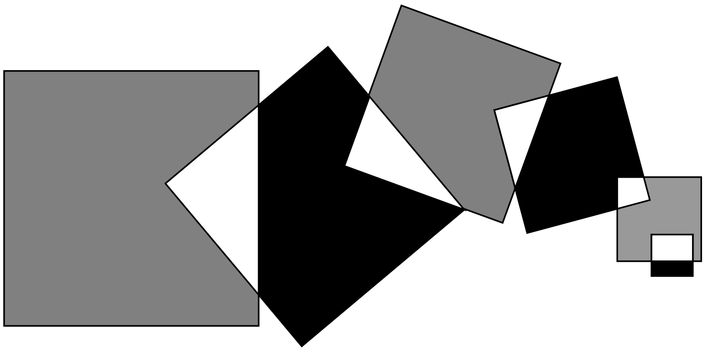
Feito isso, ele repete o desafio feito a Wanderson, agora com o novo tabuleiro e as novas peças. Existe algum modo de Wanderson vencer este novo desafio?

10 *Diferença de áreas*

a) Na figura abaixo mostram-se dois quadrados sobrepostos. O maior tem lado igual a 4, e o menor tem lado igual a 3. Quanto é a área da região pintada de cinza menos a área da região pintada de preto?



b) Na figura abaixo estão desenhados seis quadrados, cujos lados, da esquerda para a direita, são iguais a 6, 5, 4, 3, 2 e 1, respectivamente. Quanto é a área pintada de cinza menos a área da região pintada de preto?



11 *Faltam três*

Aureliano escreve uma lista contendo cinco números, sendo o primeiro deles o 6 e o último deles o 8. O produto dos três primeiros números é 648, o produto dos três centrais é 432, e o produto dos três últimos é 288. Qual é a lista de Aureliano?

12 *Números especiais*

Um número é chamado de especial se ele não contém o algarismo zero e, além disso, a soma de seus algarismos é igual ao dobro do primeiro algarismo. Por exemplo, o número 8161 é especial, pois:

- nenhum de seus algarismos é o zero;
- a soma de todos os seus algarismos é $8+1+6+1=16$;
- o dobro de seu primeiro algarismo é $8\times 2=16$.

a) Existe um número especial de cinco algarismos que seja par? Por quê? Caso exista, dê um exemplo.

b) Qual é o menor número especial de quatro algarismos?

c) Qual é o maior número especial?

d) Qual é o maior número especial que tem todos os algarismos distintos?

13 *O número grande* N

José Arcádio gosta de brincar com números. Em uma grande folha de papel, ele escreve os números inteiros desde o 1 até o 2013 um depois do outro, formando assim um número grande N.

$$N = 1234567891011121314\ldots 201120122013$$

a) Quantos algarismos tem o número grande N que foi escrito por José Arcádio?

b) Qual é o 2013^{o} algarismo no número grande N escrito por José Arcádio?

14 *Vai dar galho*

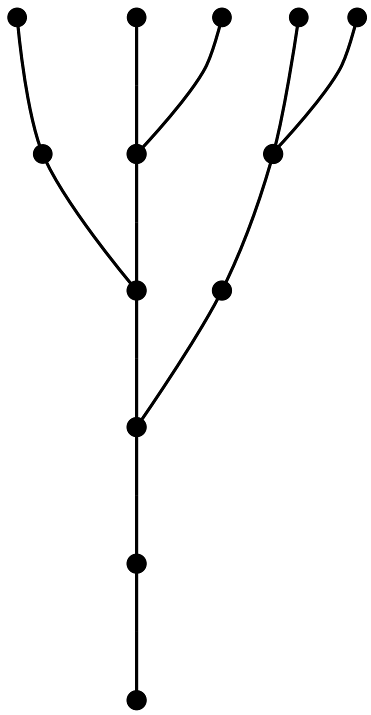
A árvore do professor Fernando cresce de acordo com a seguinte regra:

• na primeira semana a árvore começa a crescer com apenas um galho;

• após crescer por duas semanas, esse galho dá origem a um novo galho por semana;

• cada novo galho gerado continua a crescer, e após crescer por duas semanas dá origem a um novo galho por semana.

A figura abaixo ilustra a árvore do professor Fernando após cinco semanas passadas do início do seu crescimento.



Note que após três semanas havia dois galhos; após quatro semanas havia três galhos e após cinco semanas havia cinco galhos.

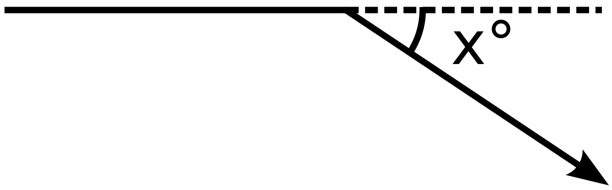
a) Quantos galhos haverá após seis semanas?

b) Quantos galhos haverá após sete semanas?

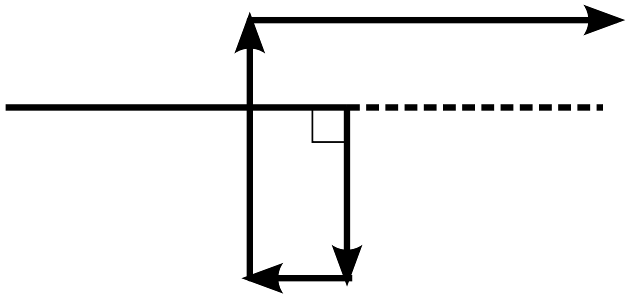
c) Quantos galhos haverá após treze semanas?

15 *Vira vira robô*

Um certo robô só anda para a frente ou vira à direita, com um ângulo de x graus em relação à direção original com que estava andando, conforme é mostrado na figura abaixo:



Para retornar à direção e ao sentido original, o robô precisa virar à direita um certo número de vezes. Por exemplo, se $x = 90°$, então o robô precisa virar à direita quatro vezes:



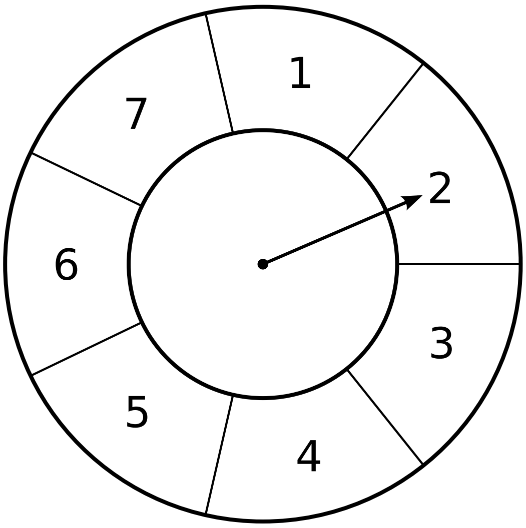
a) Quantas vezes o robô precisa virar à direita se $x = 60°$?

b) Quantas vezes o robô precisa virar à direita se $x = 42°$?

c) E se $x = 47°$?

16 *Relógio matemático*

No jogo “Relógio Matemático” inicialmente um ponteiro aponta para um dos sete números contidos nas casas do relógio ilustrado na figura abaixo. Em cada rodada, o jogador deve verificar qual o número apontado pela seta e depois deslocá-la, em sentido horário, pela quantidade de casas indicada pelo número para o qual a seta aponta no início da rodada.



Por exemplo, caso o ponteiro aponte inicialmente para a casa de número 2, o jogador deverá, na primeira rodada, movê-lo duas unidades no sentido horário, de forma que ele passará a apontar para a casa de número 4.

a) Iniciando-se na casa de número 1, quantas rodadas são necessárias até que o ponteiro retorne novamente a essa casa pela primeira vez?

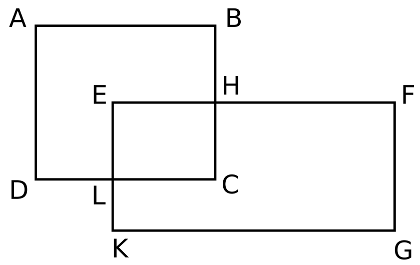
b) Ao iniciar-se o jogo com o ponteiro inicialmente posicionado na casa de número 6, qual será sua posição após uma rodada?

c) Qual é o único número para o qual, ao iniciar-se o jogo a partir dele, a seta apontará novamente para ele em uma rodada?

d) O jogador decide trocar o relógio mostrado na figura acima por um relógio contendo 128 casas. Iniciando-se da casa de número 127, quantas rodadas serão necessárias para que o ponteiro atinja a casa de número 128 pela primeira vez?

17 *Desenhos bem desenhados*

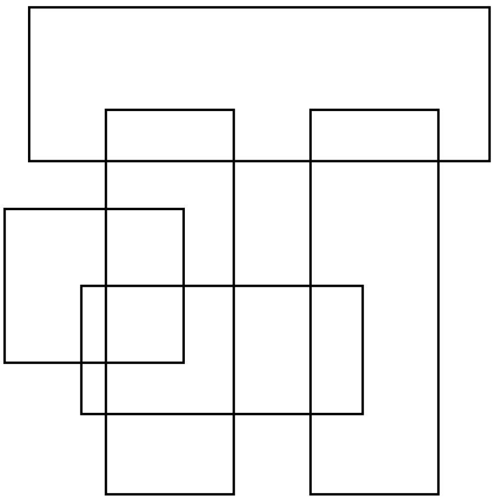
Dizemos que um desenho é bem desenhado quando pode ser feito sem tirar o lápis do papel e sem passar o lápis duas vezes por cima de uma mesma linha. Por exemplo, o desenho abaixo é bem desenhado,



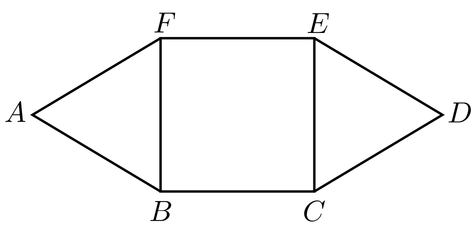
pois pode ser desenhado, por exemplo, seguindo a ordem dos vértices

$$A \to B \to H \to F \to G \to K \to L \to C \to H \to E \to L \to D \to A$$

a) Mostre que o desenho abaixo é bem desenhado:

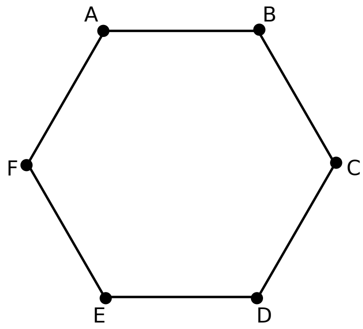


b) O desenho a seguir é bem desenhado? Justifique.



18 *Clarissa divide um hexágono*

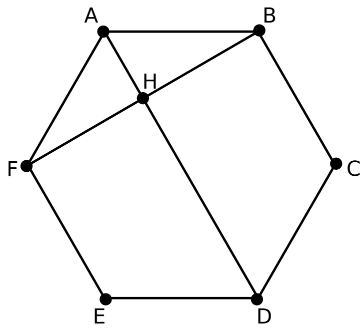
Clarissa desenhou o hexágono abaixo e marcou os seus vértices com as letras A, B, C, D, E e F.



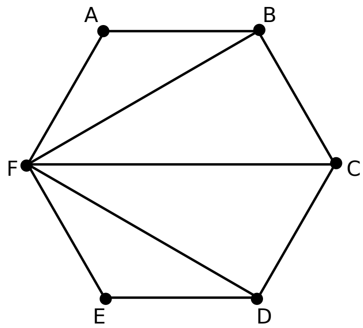
Em seguida ela declarou que alguns pontos do hexágono seriam chamados de legais. Um ponto do hexágono de Clarissa é chamado de legal se ele satisfaz alguma das propriedades abaixo:

- esse ponto é um dos vértices do hexágono;
- esse ponto é a interseção entre duas diagonais do hexágono;
- esse ponto é a interseção entre qualquer segmento de reta ligando dois outros pontos legais.

Por exemplo, na figura abaixo, os pontos A, B, D e F são pontos legais, já que são, todos eles, vértices do hexágono de Clarissa. O ponto H também é um ponto legal porque é a interseção da diagonal $\overline{AB}$, com a diagonal $\overline{BF}$.

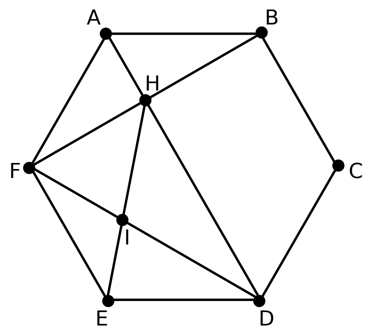


Clarissa diz que um triângulo contido em seu hexágono é legal se todos os seus vértices são pontos legais. Por exemplo, na figura abaixo o hexágono de Clarissa está dividido em quatro triângulos legais.



a) Clarissa quer dividir um hexágono em seis triângulos legais. Mostre como ela pode fazê-lo.

b) Explique por que o ponto I na figura abaixo é um ponto legal.



c) Mostre uma maneira com a qual Clarissa pode dividir o hexágono em 10 triângulos legais.

d) Mostre uma maneira com a qual Clarissa pode dividir o hexágono em 2014 triângulos legais.

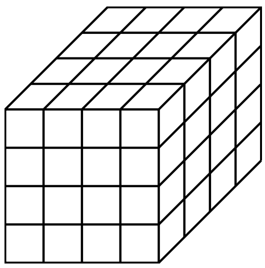
19 *Número ímpar de divisores*

O número natural preferido por Vladas possui uma quantidade ímpar de divisores. Mostre que esse número é um quadrado perfeito.

Sugestão: Note que se o número d é um divisor do número n, então $\frac{n}{d}$ também é divisor de n. Por exemplo, 6 é divisor de 24. Logo, $24/6 = 4$, que também é divisor de 24.

20 *Aline pinta o cubo*

Aline ganhou de presente um cubo composto por $4 \times 4 \times 4$ cubinhos brancos, como na figura a seguir.



Sem separar os pequenos cubinhos, Aline decidiu pintar todas as faces do seu cubo com tinta vermelha.

a) Diga quantos cubinhos ficaram com exatamente uma de suas faces pintada em vermelho.

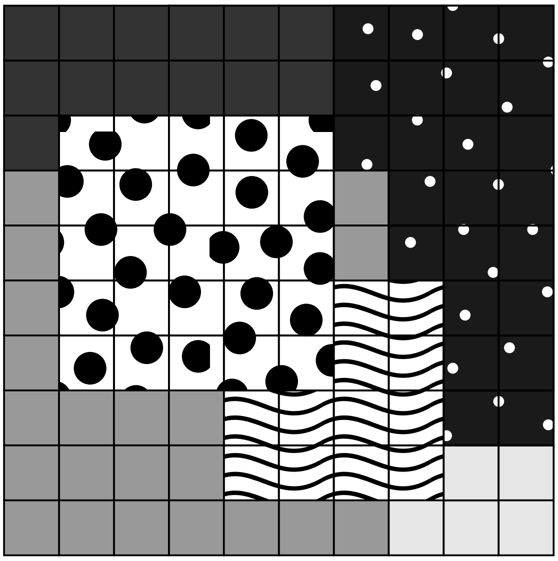
b) Diga quantos cubinhos ficaram com exatamente duas das suas faces pintadas em vermelho.

Tempos depois, Aline pediu ao seu pai um cubo ainda maior para pintar da mesma maneira que ela havia feito com o cubo anterior.

c) Após realizar a pintura, Aline separou os cubinhos. Ela notou que a quantidade de cubinhos que ficaram sem nenhuma face pintada em vermelho é igual ao triplo da quantidade de cubinhos que ficaram com duas faces pintadas em vermelho. Descubra o tamanho do novo cubo que Aline recebeu.

21 *O segundo quadrado*

Julio recebeu um tabuleiro 10×10 e seis quadrados todos de diferentes pinturas. Sabe-se que Julio posicionou os seis quadrados sobre o tabuleiro, um de cada vez, de forma que todas as casas do tabuleiro fossem cobertas por, pelo menos, um quadrado. Ao final, Julio formou a seguinte figura:



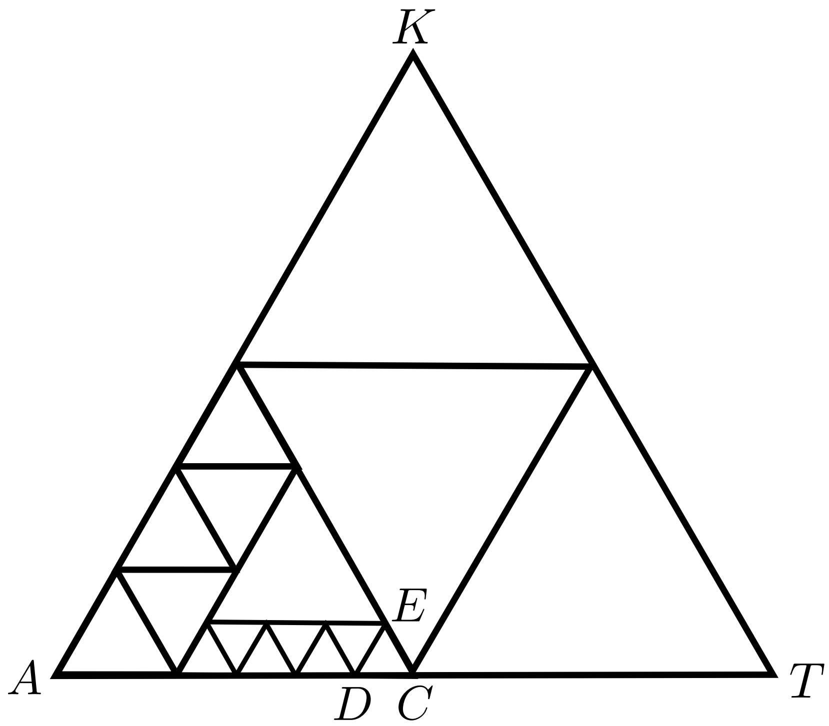
a) Diga quais foram os dois últimos quadrados colocados por Julio.

b) Diga qual é o tamanho do segundo quadrado colocado por Julio.

c) É possível dizer o tamanho do primeiro quadrado colocado por Julio?

22 *Triângulos pequenos e grandes*

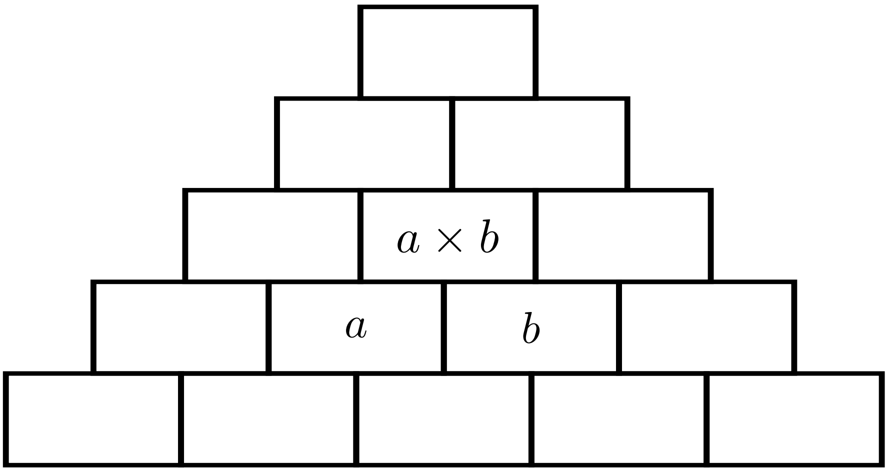
Neste desenho todos os triângulos são equiláteros.



Sendo o perímetro do triângulo AKT igual a 108 cm, calcule o perímetro do triângulo DEC.

23 *Pirâmide de números*

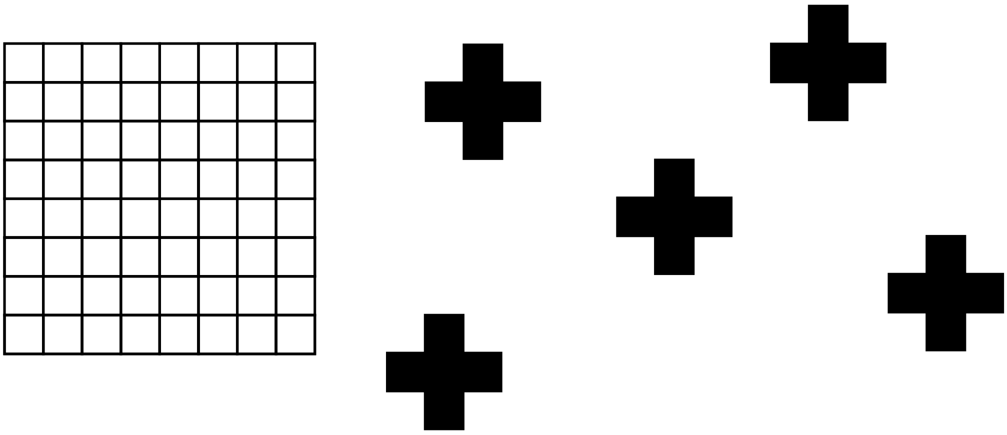
Aline gosta de brincar com números naturais. Em uma de suas brincadeiras, ela coloca um número natural em cada um dos blocos da pirâmide ilustrada abaixo. Além disso os números são colocados de modo que o produto dos números em dois blocos vizinhos do mesmo nível coincida com o número colocado no bloco acima desses. Por exemplo, na figura abaixo, caso Aline coloque os números a e b nos blocos vizinhos indicados então ela deverá colocar o número $a \times b$ naquele bloco que se localiza acima desses.



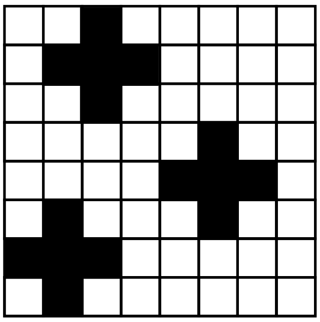
Encontre uma maneira na qual Aline possa colocar os números de modo que os 5 números colocados na base da pirâmide sejam distintos e o número colocado no bloco do topo seja o 140026320.

24 *Cruzes sobre o tabuleiro*

Luana precisa colocar sobre um tabuleiro de 8×8 cruzes do formato desenhado a seguir,



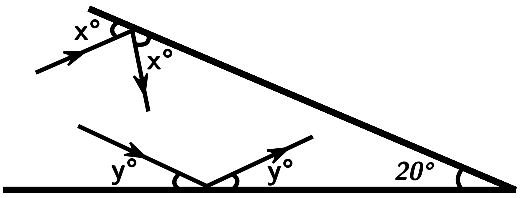
de modo que duas cruzes não ocupem o mesmo quadrinho. Por exemplo:



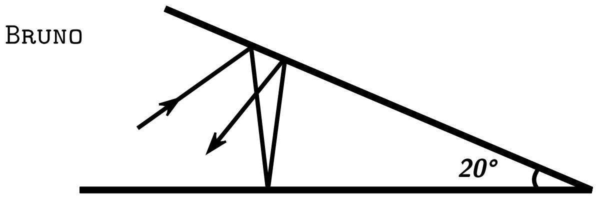
No máximo, quantas cruzes Luana pode colocar sobre o tabuleiro?

25 *Quantos rebotes?*

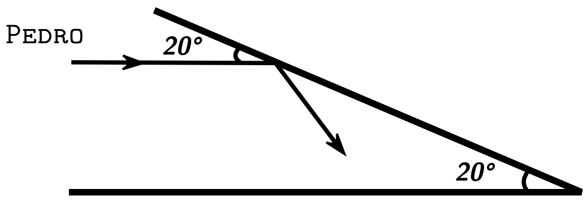
Bruno e Pedro jogam sinuca sobre uma mesa estranha. Ela contém duas paredes que se encontram formando um ângulo de $20°$. Eles observaram que as reflexões da bola contra as paredes são perfeitas, isto é, caso a sua trajetória de incidência faça um ângulo de $x°$ com a parede então o ângulo que a trajetória refletida faz com a parede também será igual a $x°$. A figura abaixo ilustra essa regra de reflexão.



Brincando com a bola, eles perceberam que é possível que, após refletir algumas vezes na parede da mesa, a trajetória da bola intersecte a si própria. Por exemplo, Bruno lançou uma bola de modo que, depois de 3 reflexões, a sua trajetória intersectou-se a si mesma, como ilustra a figura abaixo.



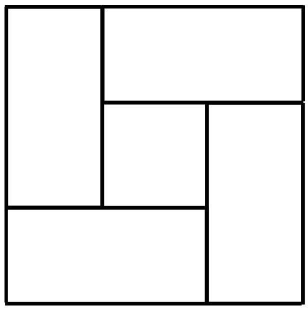
Depois de Bruno, Pedro lançou a bola da maneira mostrada na seguinte figura:



Diga quantas reflexões sofreu a bola enviada por Pedro antes que a sua trajetória intersectasse a si própria.

26 *Divisão do terreno*

Dona Lígia tem um terreno em forma de quadrado. Ela decide dividi-lo em cinco regiões, sendo quatro retângulos e um quadrado como ilustrado na figura abaixo:



Na figura acima temos que:

- O quadrado do centro tem área igual a $64\ \mathrm{m}^2$;
- Os lados maiores dos quatro retângulos têm o mesmo comprimento;
- As cinco regiões têm o mesmo perímetro.

Determine a área do terreno de Dona Lígia.

27 *Pão e vinho*

Dezesseis pessoas fazem fila na padaria. O dono da padaria oferece vinho à freguesia. Uma garrafa é entregue à primeira pessoa da fila e passada de pessoa a pessoa desde a primeira da fila até a última, sem retornar. Por quatro vezes a garrafa foi passada de uma mulher a uma mulher, por três vezes de uma mulher a um homem e por seis vezes de um homem a um homem.

a) Por quantas vezes a garrafa foi passada de um freguês a outro?

b) Quantas vezes foi a garrafa passada de um homem na fila a uma mulher na fila?

c) A primeira pessoa da fila é homem ou mulher? E a última pessoa da fila?

28 *Greve de quadrados e cubos*

Um número natural é chamado de quadrado se pode ser escrito como o produto de dois números iguais. Por exemplo, 9 é um quadrado, pois $9 = 3 \times 3$. Os primeiros quadrados são 1, 4, 9, 16, $25, \ldots$. Um número natural é chamado de cubo se pode ser escrito como o produto de três números iguais. Por exemplo, 8 é um cubo, pois $8 = 2 \times 2 \times 2$. Os primeiros cubos são 1, 8, 27, 64, $125 \ldots$.

Em um certo dia, os números quadrados e cubos decidiram entrar em greve. Foi assim que os demais números naturais tiveram que assumir novas posições:

$$\underbrace{2}_{1^{\underline{a}}\text{ posição}}, \underbrace{3}_{2^{\underline{a}}\text{ posição}}, \underbrace{5}_{3^{\underline{a}}\text{ posição}}, \underbrace{6}_{4^{\underline{a}}\text{ posição}}, \underbrace{7}_{5^{\underline{a}}\text{ posição}}, \underbrace{10}_{6^{\underline{a}}\text{ posição}}, \underbrace{11}_{7^{\underline{a}}\text{ posição}}, \ldots$$

a) Qual é o número que ficou na $12^{\underline{a}}$ posição?

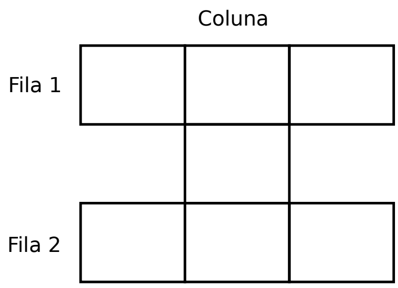
b) Quais são os números menores ou iguais a 2013 que são ao mesmo tempo quadrados e cubos?

c) Qual é a nova posição ocupada pelo número 2013?

d) Descubra qual é o número que ficou na $2013^{\underline{a}}$ posição.

29 *Ximena e o tabuleiro*

Ximena deve escolher sete números diferentes da lista 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 para serem colocados no tabuleiro da figura a seguir. Ela deve colocar um número em cada casa de modo que o produto dos números na Fila 1 coincida com o produto dos números na Fila 2 e que coincida também com o produto dos três números colocados na única coluna do tabuleiro.

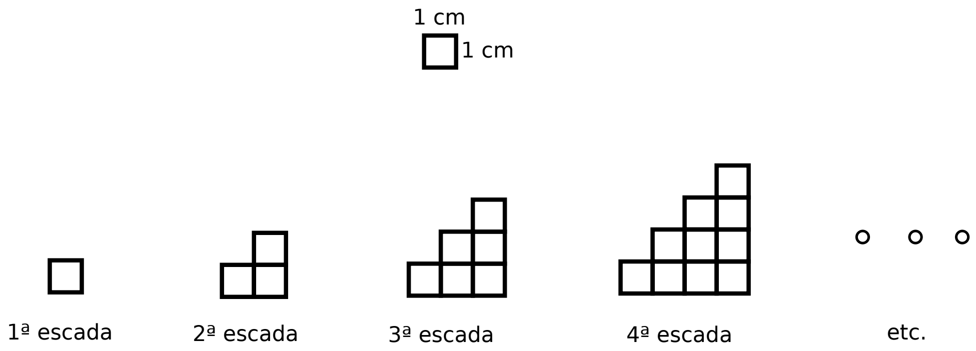


a) Quais são os números que Ximena deve escolher?

b) Mostre a Ximena uma forma de conseguir seu objetivo.

30 *Vamos construir escadas*

Utilizando-se quadradinhos de 1 cm de lado são construídas escadas conforme a figura abaixo:



a) Calcule a área total e o perímetro da quinta escada construída.

b) Precisamos de uma escada de 78 cm^2 de área. Qual escada devemos escolher?

c) Precisamos de uma escada de 100 cm de perímetro. Qual escada devemos escolher?

NÍVEL 2 – ENUNCIADOS

$\boxed{1}$ *Tartaruga corredora*

Uma tartaruga corredora anda em linha reta da seguinte maneira. No primeiro trecho do caminho, que mede $\frac{1}{2}$ m, ela corre à velocidade de 3 m/s. No segundo trecho, que mede $\frac{1}{3}$ m, ela corre à velocidade de 4 m/s. No terceiro trecho, que mede $\frac{1}{4}$ m, ela corre à velocidade de 5 m/s e assim por diante.

a) Qual o tempo que a tartaruga leva para percorrer o primeiro trecho? Escreva o resultado como diferença de duas frações unitárias, ou seja, frações com numerador igual a 1.

b) Faça o mesmo com respeito ao segundo trecho.

c) Calcule o tempo que a tartaruga leva para percorrer os 2013 primeiros trechos.

$\boxed{2}$ *Gato late, cachorro mia?*

Na cidade de Trocalândia, 20% dos gatos pensam que são cachorros e 25% dos cachorros pensam que são gatos. Certo dia, um psicólogo veterinário resolve testar todos os gatos e cachorros de Trocalândia, verificando que 30% do total pensava ser gato. Que proporção dos animais testados era de cães?

3 *Os funcionários do hospital*

Um hospital tem os seguintes funcionários:

Sara Dores da Costa: reumatologista
Iná Lemos: pneumologista
Ester Elisa: enfermeira
Ema Thomas: traumatologista
Ana Lisa: psicanalista
Inácio Filho: obstetra

a) De quantas maneiras os funcionários podem fazer uma fila?

b) De quantas maneiras os mesmos funcionários podem sentar numa mesa redonda? Lembre-se que, numa mesa redonda, se todos se mudam para a cadeira da esquerda, a mesa continua igual!

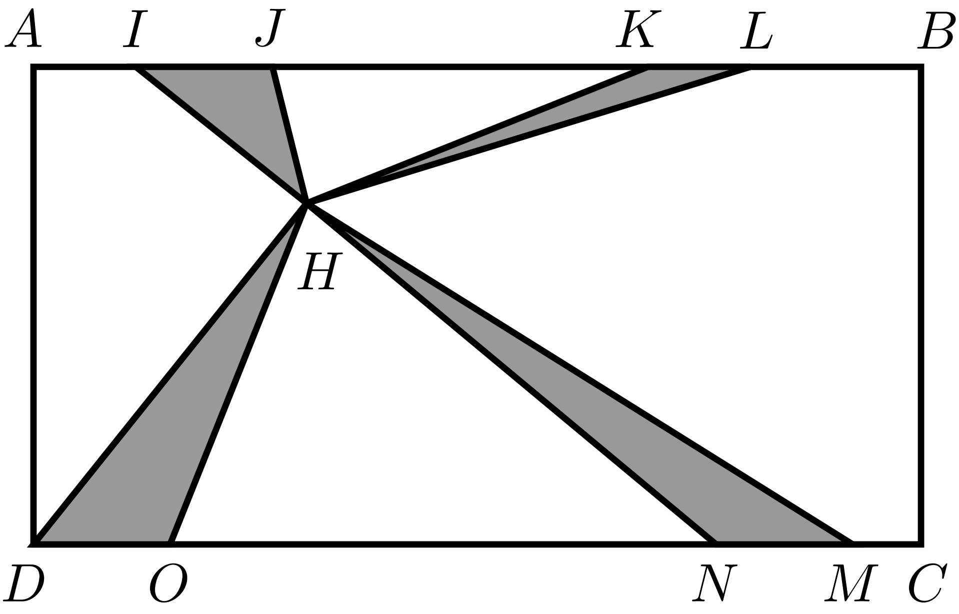
c) E de quantas maneiras os funcionários podem compor uma comissão formada por presidente, vice-presidente e suplente?

4 *A Lista de Pedro*

Pedro escreveu a lista de todos os números inteiros positivos menores que 10000 nos quais cada um dos algarismos 1 e 2 aparecem uma única vez. Por exemplo, 1234, 231, 102 foram escritos na lista, mas 1102 e 235 não estão na lista. Quantos números há na lista escrita por Pedro?

5 *Área em cinza*

Na figura a seguir, $ABCD$ é um retângulo, e o comprimento do segmento BC é igual a 2. Além disso, os comprimentos dos segmentos IJ, KL, DO e NM são todos iguais a 1. Determine a área da região pintada de cinza.



6 *Quantos andares?*

Um prédio tem três escadas diferentes, todas começando na base do prédio e terminando no topo. Uma escada tem 104 degraus, outra tem 117 degraus, e a outra tem 156 degraus. Sempre que os degraus das três escadas estão na mesma altura, há um andar. Quantos andares tem o prédio?

7 *Pulga pula*

Uma pulga, que está no ponto A de uma reta, pula exatamente 1 m de cada vez, sem nunca sair dessa reta.

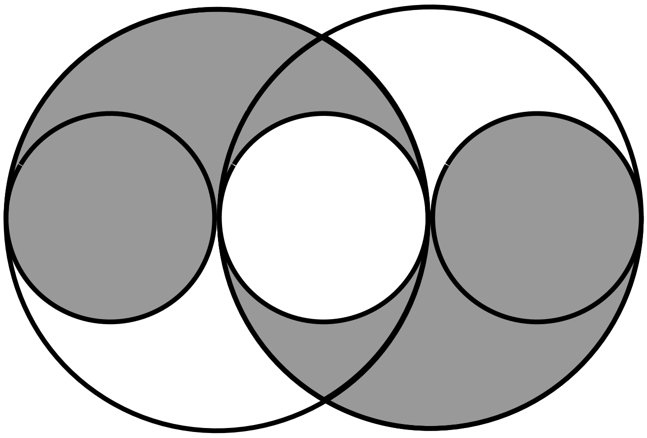
a) Se a pulga quer chegar no ponto B localizado sobre a reta, a uma distância de 5 m à direita de A, com exatamente 7 pulos, de quantas maneiras ela pode fazer isso?

b) Se a pulga quer chegar no ponto C localizado sobre a reta, a uma distância 5 m à direita de A, com exatamente 9 pulos, de quantas maneiras ela pode fazer isso?

c) É possível que a pulga chegue no ponto D localizado sobre a reta a uma distância de 2013 m de A, com exatamente 2028 pulos? Justifique.

8 *Círculos e círculos*

Abaixo, veem-se círculos grandes e pequenos. Os círculos grandes têm raio 2, e os círculos pequenos têm raio 1. Qual a área da região pintada de cinza?



Observação: A área de um círculo de raio r é igual a πr^2.

9 *Rodízio de veículos*

Na cidade de Autolândia, a numeração de placas de carros é feita através de números de três dígitos, portanto indo da placa 000 até a placa 999. Para diminuir a poluição, o prefeito Pietro decidiu implementar um rodízio de carros, estabelecendo os dias nos quais as pessoas podem usar seus carros. As regras do rodízio são:

- **Segunda-feira:** somente carros com placa ímpar;
- **Terça-feira:** somente carros com placa cuja soma dos três dígitos é maior ou igual a 11;
- **Quarta-feira:** somente carros com placa cujo número é múltiplo de 3;
- **Quinta-feira:** somente carros com placa cuja soma dos três dígitos é menor ou igual a 14;
- **Sexta-feira:** somente carros com placa contendo pelo menos dois dígitos iguais;
- **Sábado:** somente carros cujo número na placa for estritamente menor do que 500;
- **Domingo:** somente carros cuja placa tenha os três dígitos menores ou iguais a 5.

a) Em quais dias o carro com a placa 729 pode circular?

b) Maria, a esposa do prefeito, quer um carro que possa circular todos os dias exceto aos domingos. Qual placa ela deve ter?

c) O prefeito Pietro precisa de uma placa que o permita circular todos os dias. Que placa ele deve ter?

d) Por que todos os habitantes de Autolândia podem circular pelo menos uma vez por semana?

$\boxed{10}$ *Cubo do dia*

Patrícia quer escrever algarismos nas faces de dois cubos de madeira de tal modo que qualquer dia do mês possa ser representado juntando um algarismo de uma face de um dos cubos e outro algarismo de uma face do outro cubo. Por exemplo, para representar o dia primeiro, Patrícia junta os cubos de modo a mostrar as faces:

0	**1**

Para representar o dia 26, Patrícia junta os cubos de maneira adequada mostrando as faces:

2	**6**

O algarismo 6 pode ser usado para representar o 9, bastando para isso girar a face. Lembre-se também que os dias de um mês vão de 01 até 31.

a) Quais algarismos devem ser escritos em ambos os cubos?

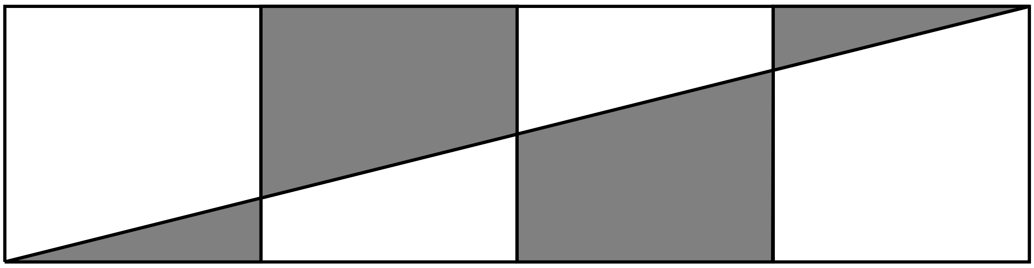
b) Encontre quais algarismos devem ser escritos em cada cubo.

$\boxed{11}$ *Área do losango*

Considere um retângulo $ABCD$ onde os comprimentos dos lados são $\overline{AB} = 4$ e $\overline{BC} = 8$. Sobre os lados BC e AD se fixam os pontos M e N, respectivamente, de modo que o quadrilátero $BMDN$ seja um losango. Calcule a área deste losango.

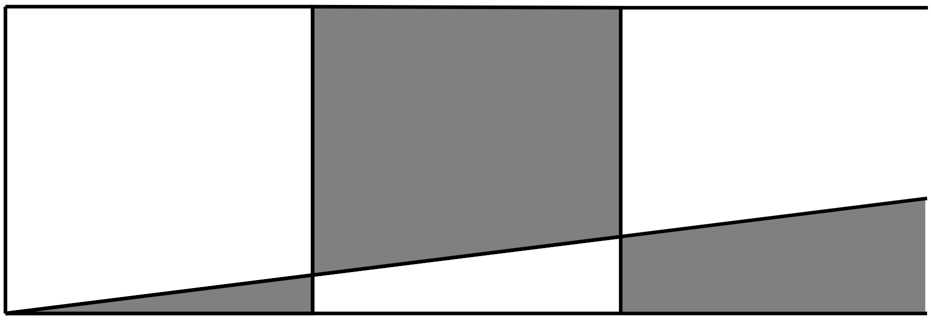
12 *Adriana pinta o muro*

Adriana gosta de pintar figuras geométricas. Ela pintou a frente de um muro da sua casa da seguinte forma:



a) O muro é retangular, tem altura 1 m e largura 4 m. Os quatro quadrados interiores têm lado 1 m. Que área tem a região que ela pintou em cinza?

b) Adriana gostou da brincadeira, e resolveu pintar, de forma parecida, a frente de outro muro retangular, o qual tem 1 m de altura e 32 m de largura. Ela divide este muro retangular em 32 quadrados de lado 1 m e depois traça uma diagonal. Em seguida, pinta as regiões de forma alternada, como no muro anterior. Abaixo, está representada a parte mais à esquerda do muro:



Que área do muro está pintada de cinza? (A área total pintada de cinza, não apenas a parte do muro mostrada acima).

13 *O lema de Quatrolândia*

No país da Quatrolândia, o número quatro representa a liberdade e o lema do país é a seguinte multiplicação:

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{S} & \mathbf{E} & \mathbf{R} & \mathbf{V} & \mathbf{I} & \mathbf{L} \\ & & & & \times & 4 \\ \hline \mathbf{L} & \mathbf{I} & \mathbf{V} & \mathbf{R} & \mathbf{E} & \mathbf{S} \end{array}$$

Na multiplicação acima, cada letra representa um algarismo, possivelmente com repetição.

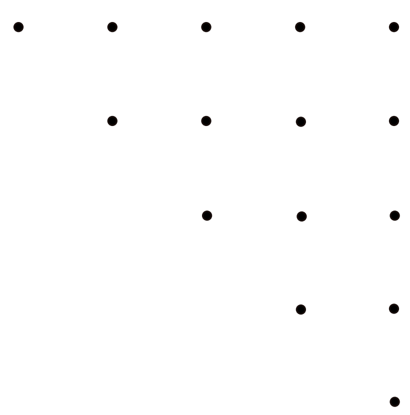
a) Mostre que a letra **S** representa o algarismo 2 e que a letra **L** representa o algarismo 8.

b) Mostre que a letra **E** representa o algarismo 1 e que a letra **I** representa o algarismo 7.

c) Mostre que o número **LIVRES** é igual a 219978.

14 *Quantos quadrados?*

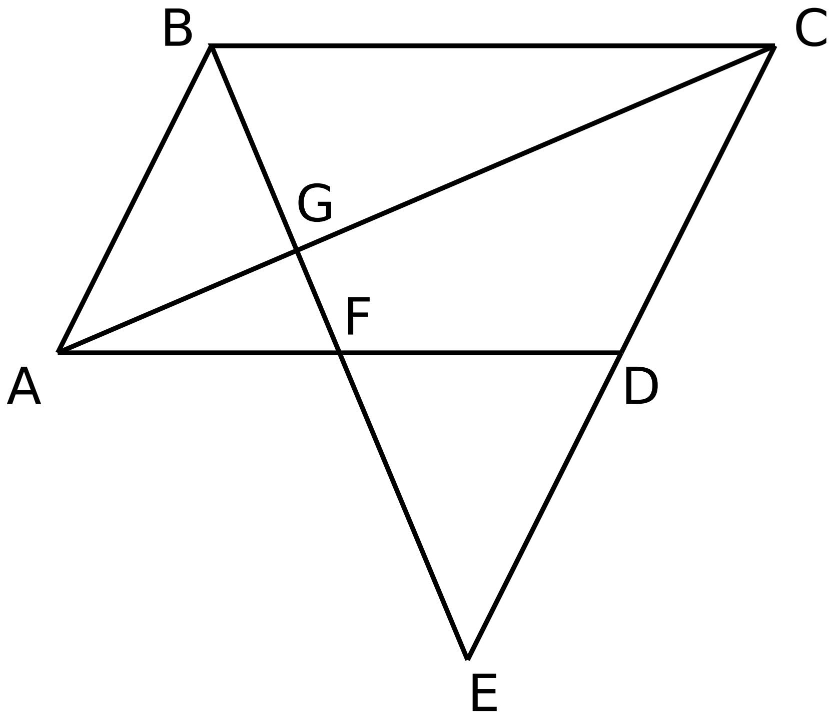
O professor Ciconete desenhou no quadro os seguintes pontos:



Em seguida, ele perguntou aos seus alunos quantos quadrados com vértices em tais pontos é possível desenhar. Qual é a resposta correta para a pergunta do professor Ciconete?

15 *Paralelogramo*

Na figura a seguir, $ABCD$ é um paralelogramo, ou seja, é um quadrilátero cujos lados opostos têm o mesmo comprimento (e são paralelos). Além disso, o segmento BE tem comprimento 6, e os segmentos CD e DE têm o mesmo comprimento. Qual o comprimento do segmento FG?



16 *Os* 50 *números de Vanessa*

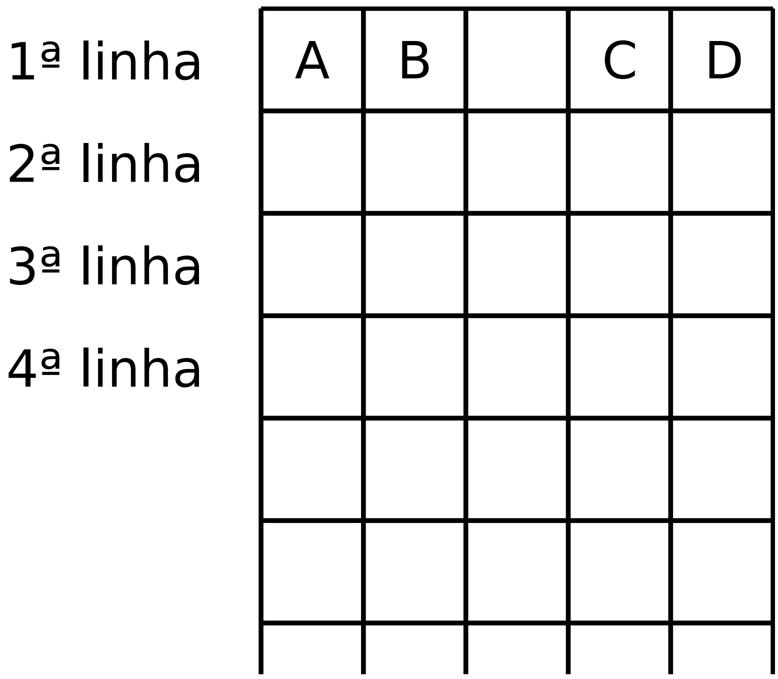
Vanessa deseja escolher 50 números inteiros positivos distintos menores do que 100 e tais que a soma de quaisquer dois números escolhidos por ela seja sempre distinta de 99 e de 100.

a) Mostre como Vanessa pode atingir o seu objetivo.

b) Mostre que há somente uma maneira pela qual Vanessa pode escolher esses 50 números para atingir o seu objetivo.

17 *Pintando tabuleiro*

Um tabuleiro de tamanho 2013×5 (ou seja, com 2013 linhas e 5 colunas) deve ser pintado com as cores A, B, C, D. Algumas casas na primeira linha já foram pintadas, conforme mostra a figura abaixo (as casas não representadas na figura não foram pintadas ainda). Para continuar a pintar o tabuleiro, devemos seguir a seguinte regra: quadrados vizinhos (aqueles que compartilham um lado ou um vértice) não podem ter a mesma cor.



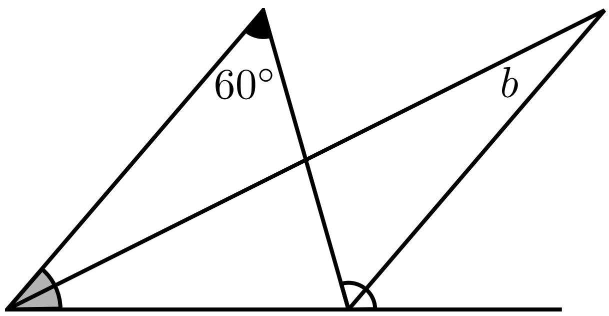
a) Descreva de que maneiras podemos completar a pintura das duas primeiras linhas.

b) De quantas maneiras podemos pintar o tabuleiro inteiro?

c) Descreva quais são as possíveis pinturas para a linha de número 2013.

18 *Ângulo*

Na figura a seguir, os ângulos marcados em cinza têm a mesma medida. Do mesmo modo, os ângulos marcados em branco também têm a mesma medida. Determine a medida do ângulo b.



19 *Qual é o número?*

Juarez utilizou os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 para escrever o número $\overline{abcde}$ de cinco algarismos distintos. Sem revelar qual é esse número, ele disse a Luciana que:

- o número $\overline{abc}$ é divisível por 4;
- o número $\overline{bcd}$ é divisível por 5;
- o número $\overline{cde}$ é divisível por 3.

Em seguida, Luciana disse a Juarez que é possível descobrir qual é o número $\overline{abcde}$. Mostre que Luciana está correta, isto é, encontre o número $\overline{abcde}$.

$\boxed{20}$ *Cinco amigos, cinco corridas*

Os cinco amigos Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo disputaram entre si cinco corridas. Em cada corrida, o ganhador recebeu cinco pontos, o segundo colocado quatro pontos e assim sucessivamente até o último colocado, que recebeu apenas um ponto. Para obter a pontuação final de cada corredor, foram somadas as pontuações obtidas nas cinco corridas. Na pontuação final, Arnaldo ficou em primeiro lugar com 19 pontos, seguido de Bernaldo com 16 pontos. O terceiro, quarto e quinto lugares foram ocupados por Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo, respectivamente. Não houve empate em nenhuma corrida e nem na pontuação final. Mas um fato curioso é que nem Arnaldo e tampouco Bernaldo ganharam sequer uma das cinco corridas.

a) Mostre que, em cada corrida tanto Arnaldo quanto Bernaldo obtiveram sempre o segundo e o terceiro lugar (em alguma ordem).

b) Diga quantos pontos conseguiu Cernaldo.

c) Quantas corridas ganhou cada um dos corredores?

$\boxed{21}$ *Superquadrados*

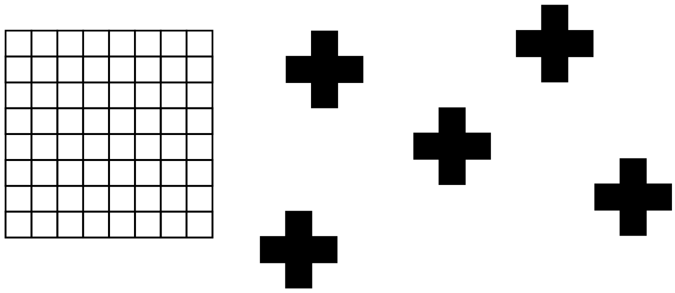
Um número natural N maior que 10 é chamado "superquadrado" se o número formado por cada dois algarismos consecutivos do número N (considerados na mesma ordem) é sempre um quadrado perfeito. Por exemplo, 8164 é "superquadrado" porque os números 81, 16 e 64 são quadrados perfeitos. Outros exemplos de superquadrados são 25 e 649.

a) Quantos números "superquadrados" existem?

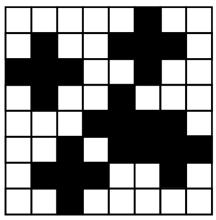
b) Qual é o maior número "superquadrado"?

22 *Araceli contra Florinda*

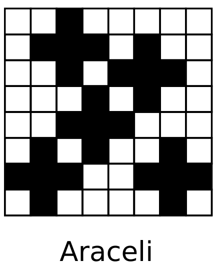
Araceli e Florinda brincam de colocar cruzes sobre um tabuleiro de dimensões 8×8. Cada uma das cruzes é constituída por cinco quadradinhos de lado igual ao lado das casas do tabuleiro como ilustrado na figura abaixo:

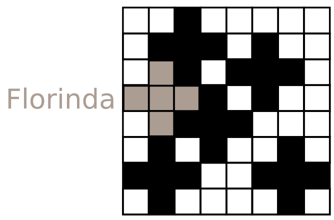


Como regra da brincadeira, não pode haver sobreposições entre as cruzes colocadas, isto é, nenhuma cruz pode ser colocada de forma que algum dos seus quadradinhos fique posicionado sobre um quadradinho de alguma cruz colocada anteriormente. Quando ainda não há nenhuma cruz sobre o tabuleiro, Araceli decide colocar algumas cruzes de modo que Florinda não consiga adicionar nenhuma outra cruz. Por exemplo, Araceli poderia colocar cinco cruzes da seguinte maneira:



Mas, caso Araceli colocasse as cinco cruzes da maneira ilustrada na figura abaixo, Florinda ainda teria oportunidade de colocar mais uma cruz:



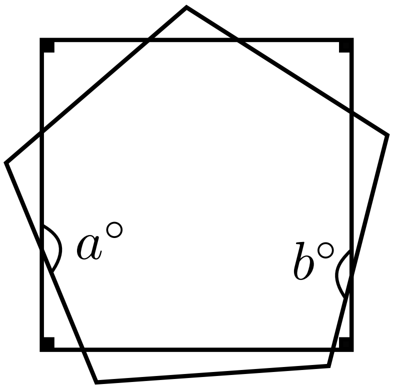


a) Mostre a Araceli um modo de atingir o seu objetivo usando 4 cruzes.

b) Mostre que Araceli não poderia atingir o seu objetivo usando apenas 3 cruzes.

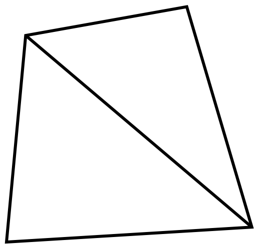
23 *Pentágono regular*

A figura abaixo é composta por um quadrado e um pentágono regular.

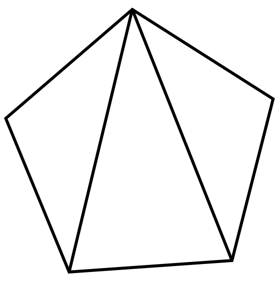


Calcule a soma dos ângulos a° e b°.

Fatos que ajudam. (Você pode usá-los!). A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180°. Além disso, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre igual a 360°. Para ver isso, basta dividir o quadrilátero em dois triângulos, ligando dois vértices opostos.



Cada triângulo tem 180° como soma dos ângulos internos, daí obtemos $180^\circ \times 2 = 360^\circ$ como soma dos ângulos internos do quadrilátero. E a soma dos ângulos internos de um pentágono é igual a $180^\circ \times 3 = 540^\circ$, pois podemos dividir um pentágono qualquer em três triângulos como mostra a figura a seguir.



$\boxed{24}$ *Um após um*

Considere a lista de números a_1, a_2, $\ldots$, onde

$$a_n = \underbrace{111111\ldots1}_{3^n \text{ algarismos}},$$

ou seja, $a_1 = \underbrace{111}_{\text{três uns}}$, $a_2 = \underbrace{111111111}_{\text{nove uns}}$, $a_3 = \underbrace{111\ldots1}_{\text{vinte e sete uns}}$, e assim por diante.

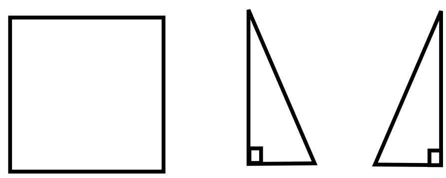
a) Mostre que a_1 é múltiplo de 3 mas não de 9.

b) Mostre que a_2 é múltiplo de 9 mas não de 27.

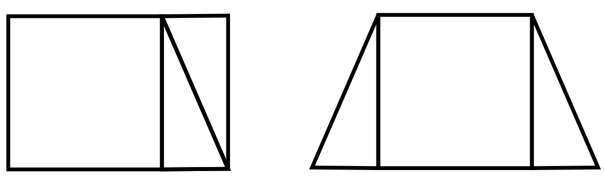
c) Mostre que a_3 é múltiplo de 27 mas não de 81.

$\boxed{25}$ *Retângulo ou trapézio*

A figura abaixo contém um quadrado e dois triângulos retângulos congruentes.



Com esses polígonos formamos um retângulo e um trapézio como mostra a figura seguinte:



Sabendo que o perímetro do retângulo é 58, e que o perímetro do trapézio é 60, calcule o lado do quadrado.

Observação: Um triângulo é dito retângulo se um dos seus ângulos mede 90°. Dois triângulos são ditos congruentes quando os dois possuem lados com os mesmos comprimentos.

26 *Sabotando os planos do Chris*

Sobre um tabuleiro de $n \times n$, Chris planeja desenhar três **O**'s. Ele deseja fazê-lo de modo que cada **O** fique dentro de um quadradinho e de modo que os três quadradinhos utilizados estejam dispostos no formato de um L. A seguinte figura mostra alguns exemplos com $n = 4$.

O	O		
	O		

	O	O	
	O		

	O		
	O	O	

Nosso objetivo será sabotar o plano de Chris! Chegaremos antes que ele e marcaremos alguns dos quadradinhos com um **X**, não permitindo assim que ele desenhe os seus **O**'s dentro desses quadradinhos. Por exemplo, em um tabuleiro de 3×3 podemos marcar cinco quadradinhos como mostra a figura seguinte.

X		X
	X	
X		X

Vemos que assim não há uma maneira pela qual Chris possa cumprir com seu plano.

a) Para $n = 2$, qual é a quantidade mínima de quadradinhos que devemos marcar com um **X** para sabotar o plano de Chris?

b) Para $n = 3$, encontre um modo de sabotar o plano de Chris marcando exatamente quatro quadradinhos com um **X**.

c) Para $n = 4$, encontre um modo de sabotar o plano de Chris marcando exatamente oito quadradinhos.

d) Para $n = 4$, mostre que é impossível sabotar o plano de Chris marcando apenas sete quadradinhos com um **X**. (Sugestão: use o item a)).

$\boxed{27}$ *Kiara e Yndira*

Sobre um quadro negro, Kiara escreveu 20 números inteiros, todos eles diferentes de zero. Em seguida, para cada par de números escritos por Kiara, Yndira escreveu sobre o mesmo quadro o respectivo produto entre eles (inclusive, se o resultado de algum produto já estava escrito, Yndira o repetiu).

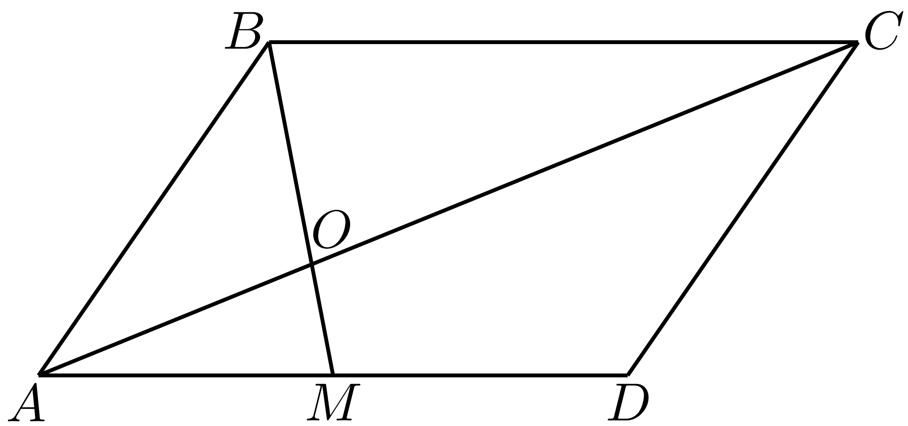
Por exemplo, caso os números 2, 3, 4 e 6 estivessem entre aqueles escritos por Kiara, então Yndira teria escrito os números 6, 8, 12, 12, 18 e 24, pois temos que $6 = 2 \times 3$, $8 = 2 \times 4$, $12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$, $18 = 3 \times 6$ e $24 = 4 \times 6$. Note que o número 6 teria sido escrito novamente mesmo já tendo sido escrito por Kiara, enquanto que o número 12 teria sido escrito duas vezes por Yndira.

a) No total, quantos números foram escritos por Kiara e Yndira sobre o quadro negro?

b) Suponhamos que, do total de números escritos sobre o quadro, exatamente 120 são positivos. Se Kiara escreveu mais números positivos do que negativos, diga quantos dos números escritos por Kiara eram positivos.

$\boxed{28}$ *A área do quadrilátero*

Na figura abaixo, $ABCD$ é um paralelogramo, e M é o ponto médio do segmento AD.



Se a área do quadrilátero $MOCD$ é igual a 5 cm^2, calcule a área do triângulo AOM.

29 *Abrindo e fechando portas*

Os 50 primeiros números naturais atravessarão um corredor que contém 50 portas numeradas de 1 a 50, todas elas inicialmente trancadas. O primeiro a atravessar será o número 1, o segundo será o número 2, em seguida o número 3 e assim por diante, até o número 50 que será o último a atravessar. Ao atravessar o corredor, o número n carregará consigo as chaves das portas numeradas com múltiplo de n. Assim, por exemplo, o número 1 carregará as chaves de todas as portas, enquanto que o número 2 carregará somente as chaves das portas com numeração par e o número 25 carregará somente as chaves das portas numeradas com 25 e 50. Durante o seu percurso, cada número usa as chaves que possui para trancar as portas que estiverem abertas e destrancar aquelas que estiverem fechadas.

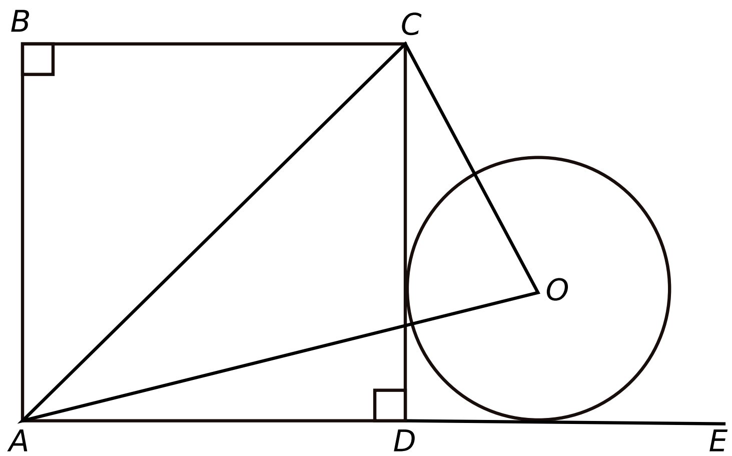
a) Quais serão as portas destrancadas pelo número 15?

b) Mostre que, depois do número 50 ter percorrido o corredor, a porta de número 10 ficará destrancada enquanto que a porta de número 9 ficará trancada.

c) Depois do número 50 ter percorrido o corredor, quais serão as portas destrancadas?

30 *Use as paralelas*

Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado, e a circunferência de centro O é tangente aos segmentos DE e CD.



a) Mostre que se L_1 é a reta que passa por AC e L_2 é a reta que passa por DO, então L_1 e L_2 são paralelas.

b) Sabendo que a área do quadrado $ABCD$ é igual a 36 cm^2, calcule a área do triângulo ACO.

NÍVEL 3 – ENUNCIADOS

1 *Quadrado mágico*

Um quadrado mágico é uma tabela quadrada na qual a soma dos números em qualquer linha ou coluna é constante. Por exemplo,

1	5	9
8	3	4
6	7	2

é um quadrado mágico, o qual usa os números de 1 a 9. Como o leitor pode verificar, a soma em qualquer linha ou coluna é sempre igual a 15.

a) O quadrado abaixo é parte de um quadrado mágico que usa os números ímpares entre 1 e 17. Descubra qual número X deve ser.

	1	
5		13
X		3

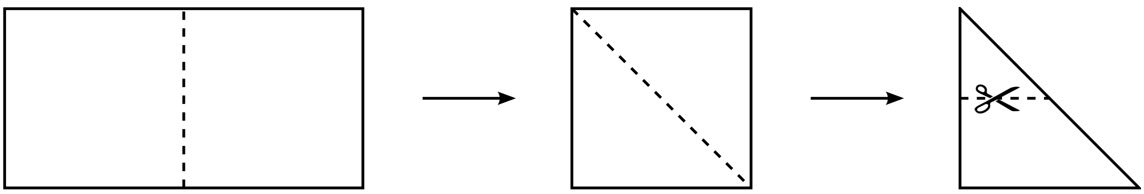
b) Um quadrado mágico é dito hipermágico quando a soma em qualquer linha, coluna, ou diagonal, é constante. Escreva os números de 1 a 9 no quadrado abaixo de modo que ele se torne hipermágico.

2 *Clube de ciclistas*

Os ciclistas têm aversão ao número zero (porque é oval) e ao número oito (porque assim ficam as rodas após os acidentes). Quantos sócios podem se inscrever num clube de ciclistas se cada um deve possuir uma identificação de três dígitos, sem usar o dígito zero nem o dígito oito?

3 *Tesoura e papel*

Uma folha de papel é retangular, com base igual a 20 cm e altura 10 cm. Esta folha é dobrada nas linhas pontilhadas conforme a figura abaixo, e no final recortada por uma tesoura na linha indicada, a qual é paralela à base e está na metade da altura do triângulo.



a) Depois de cortar no local indicado, em quantas partes a folha ficou dividida?

b) Qual a área da maior parte?

4 *A corrida de Cordisburgo*

Na cidade de Cordisburgo, foi realizada uma corrida de bicicleta num circuito circular, da qual participaram três ciclistas, Guimarães, Rosa e João. Na primeira hora da corrida, Guimarães fez exatamente 230 voltas completas, João fez exatamente 111 voltas completas, porém não se sabe quantas voltas Rosa realizou, sabe-se apenas que foi um número inteiro e que Rosa deu mais voltas que João e menos do que Guimarães. Além disso, cada um deles andou com velocidade constante, e todos partiram juntos do mesmo ponto. Considerando também as ultrapassagens feitas no tempo inicial, quantas ultrapassagens no total foram feitas nessa primeira hora de corrida?

5 *Múltiplos de* 3 *e quadrados*

Escreve-se, em ordem crescente, cada um dos múltiplos de 3 cuja soma com 1 é um quadrado perfeito:

$$3, 15, 24, 48, \ldots$$

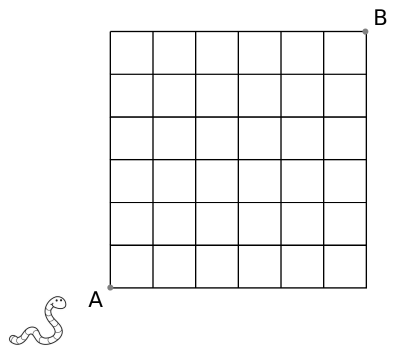
a) Qual é o próximo número que aparecerá, nesta sequência, depois do 48?

b) Qual é o oitavo número desta sequência?

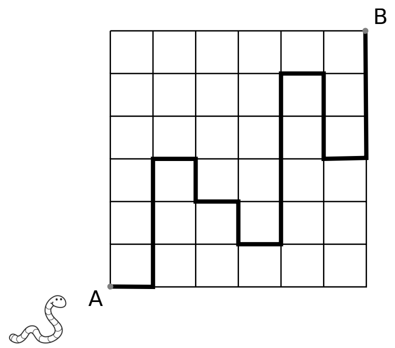
c) Qual é o número que aparecerá, nesta sequência, na 2013ª posição?

6 *Minhoca matemática*

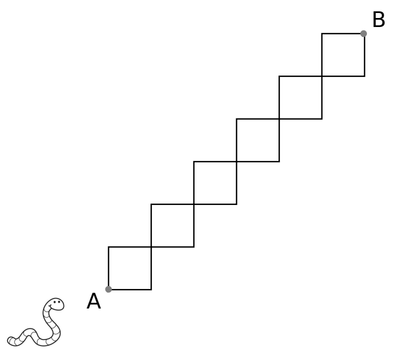
Uma minhoca matemática parte do ponto A e chega no ponto B da figura abaixo.



Esta minhoca matemática se move sempre sobre as linhas pretas do desenho acima, e nunca passa sobre um lugar no qual ela já esteve anteriormente. Além disso, esta minhoca pode andar para baixo, para cima e para a direita, mas não para a esquerda. Por exemplo, um caminho possível para que a minhoca matemática vá do ponto A ao ponto B poderia ser:



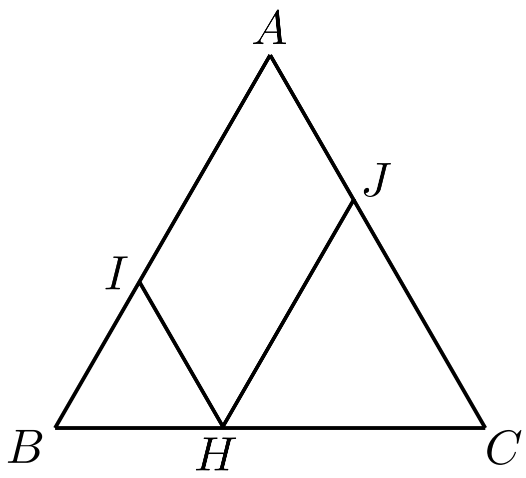
a) De quantas maneiras diferentes a minhoca matemática pode ir do ponto A ao ponto B através de caminhos contidos nos segmentos mostrados na figura abaixo? (seguindo as regras descritas anteriormente).



b) Qual o número total de maneiras que a minhoca matemática pode ir do ponto A ao ponto B? (seguindo as regras anteriores, para qualquer caminho, não apenas os do item a)).

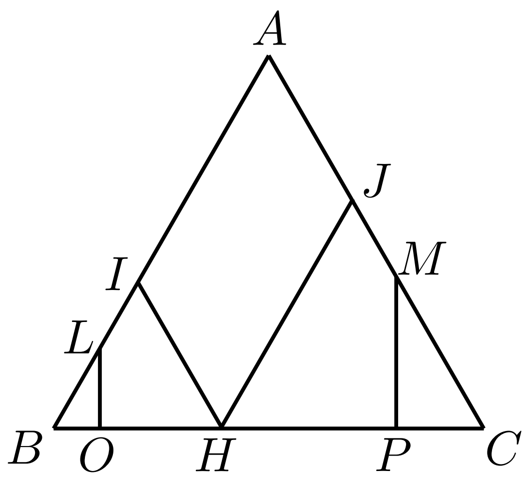
7 *Equiláteros*

O triângulo ABC abaixo é equilátero, ou seja, tem seus três lados de mesmo comprimento e todos seus ângulos iguais a $60°$. O senhor Simas marca um ponto H qualquer no lado BC do triângulo. Em seguida, ele traça um segmento paralelo ao lado AC, começando em H e terminando no ponto I sobre o lado AB. Em seguida, traça um segmento paralelo ao lado AB, começando em H e terminando no ponto J sobre o lado AC, conforme a figura abaixo:



a) Sabendo que o lado AB tem comprimento igual a 1, calcule o perímetro do quadrilátero $AIHJ$.

b) O senhor Simas segue desenhando, como mostra a figura a seguir, e traça os segmentos LO e MP de maneira perpendicular ao lado BC.

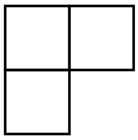


Seja d o comprimento do segmento IL, seja f o comprimento do segmento JM e seja x o comprimento do segmento OP. Mostre que

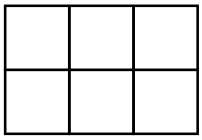
$$x = \frac{1 + d + f}{2}.$$

8 *Tridominós*

Um tridominó é a figura a seguir, que é composta por três quadrados.



Podemos juntar tridominós para formar figuras. Por exemplo, podemos juntar dois tridominós para formar um retângulo 2×3, conforme observa-se abaixo:



a) Mostre que não é possível juntar tridominós (sem sobrepô-los) de maneira a formar um quadrado 3×3.

b) Mostre que não é possível juntar tridominós (sem sobrepô-los) de maneira a formar um quadrado 4×4.

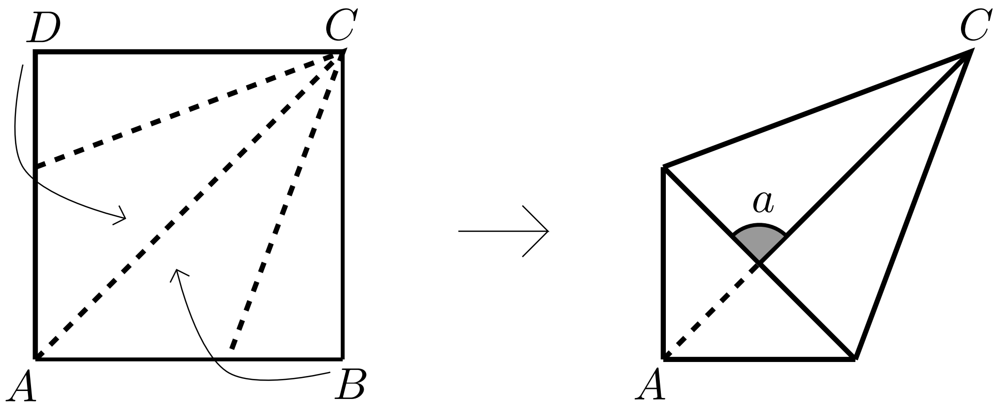
c) Qual o número mínimo de tridominós necessários para formar um quadrado? Justifique.

9 *Nascimento?*

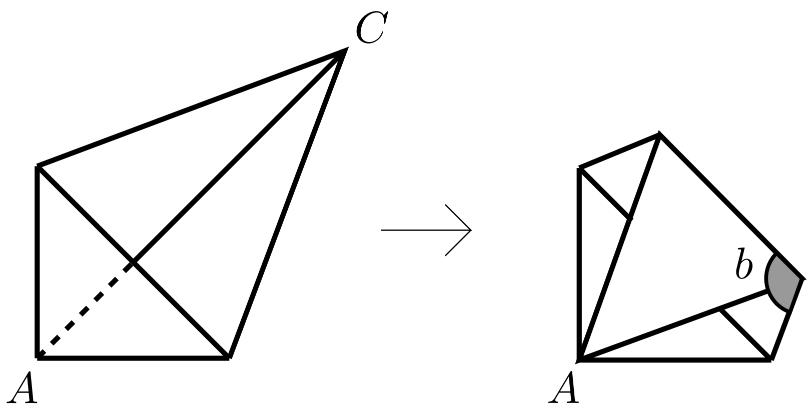
O personagem histórico mexicano Benito Juárez nasceu na primeira metade do século XIX (o século XIX vai do ano 1801 ao ano 1900). Sabendo que Benito Juárez completou x anos no ano x^2, qual foi o ano do seu nascimento?

10 *Dobrando papel*

Júlio Daniel tem um quadrado de papel com vértices A, B, C e D. Ele primeiro dobra este quadrado de papel $ABCD$ levando os vértices B e D até a diagonal, como mostra a figura a seguir:



E em seguida, Júlio Daniel leva o vértice C até o vértice A, obtendo assim um pentágono, como é mostrado a seguir:



a) Mostre que o ângulo a mede $90°$.

b) Determine a medida do ângulo b.

11 *Gato em cachorro*

O professor Guilherme criou três estranhas máquinas. A máquina A transforma um gato em um cachorro com probabilidade $\frac{1}{3}$. A máquina B transforma um gato em um cachorro com probabilidade $\frac{2}{5}$. A máquina C transforma um gato em um cachorro com probabilidade $\frac{1}{4}$. E se o animal é um cachorro, nenhuma das máquinas faz transformação alguma.

O professor Guilherme colocou um gato na máquina A, depois colocou o animal resultante da máquina A na máquina B e, por fim, colocou o animal resultante da máquina B na máquina C. Qual a probabilidade de ter saído um cachorro da máquina C?

12 *Dez quadrados perfeitos*

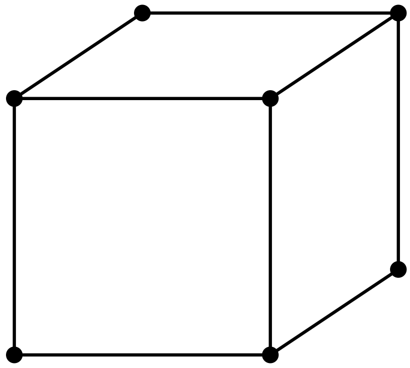
Seja a um número inteiro positivo tal que há exatamente 10 quadrados perfeitos maiores que a e menores que $2a$.

a) Encontre o menor valor possível de a.

b) Encontre o maior valor possível de a.

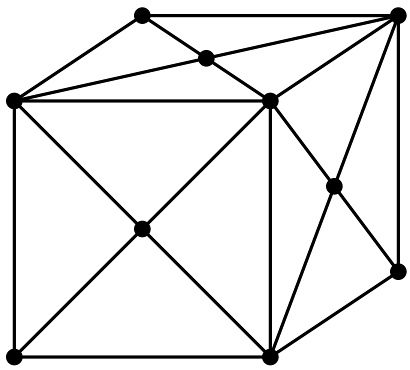
13 *Menores caminhos*

A figura a seguir mostra um cubo de aresta 1.



a) Qual o menor comprimento possível para um caminho formado por arestas do cubo que passa por todos os 8 vértices?

A figura abaixo mostra um cubo de aresta 1 no qual todas as 12 diagonais da face foram desenhadas. Assim, criou-se uma rede com 14 vértices (os 8 vértices do cubo e os 6 centros da face) e 36 arestas (as 12 do cubo e mais 4 sobre cada uma das 6 faces).



b) Qual o menor comprimento possível para um caminho formado por arestas dessa rede que passa por todos os 14 vértices?

14 *Um desafio matemático*

Daniel inventou uma brincadeira na qual é permitido apenas realizar as seguintes operações:

- somar quatro unidades;
- multiplicar por quatro;
- elevar ao quadrado.

Começando de um certo número, Daniel desafia um amigo a obter um outro número realizando sucessivamente qualquer uma das operações permitidas.

Por exemplo, Daniel desafiou Alan a obter o número 152 a partir do número 3. Alan então conseguiu vencer o desafio realizando as seguintes operações:

$$3 \xrightarrow[\text{por 4}]{\text{multiplica}} 12 \xrightarrow[\text{quadrado}]{\text{eleva ao}} 144 \xrightarrow{\text{soma 4}} 148 \xrightarrow{\text{soma 4}} 152.$$

a) Daniel desafiou Alan a obter o número 340 a partir do número 3. Alan conseguiu vencer o desafio da maneira ilustrada abaixo:

$$3 \longrightarrow 9 \longrightarrow 81 \longrightarrow 85 \longrightarrow 340.$$

Descreva qual foi a operação utilizada por Alan em cada uma das etapas.

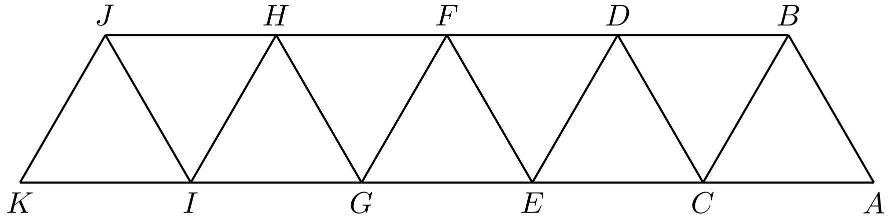
b) Mostre que Alan poderia também obter o número 340 começando do número 5.

c) Suponha que Alan começa um desafio a partir de um número cuja divisão por 4 deixa resto 1. Mostre que após qualquer etapa do desafio o número obtido pode ter apenas resto 1 ou 0.

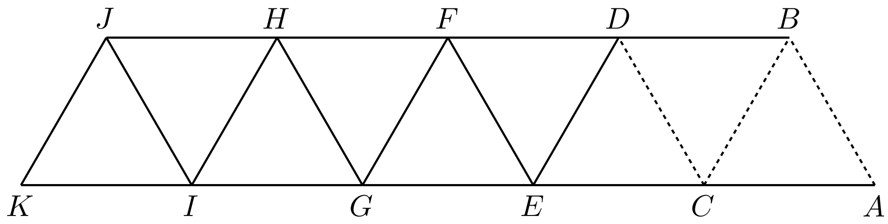
d) Mostre que é possível vencer o desafio de obter o número 43 a partir do número 3. Mostre também que não é possível vencê-lo começando do número 5.

15 *Caminhos inusitados*

Considere o diagrama ilustrado abaixo:



Augusto gosta de contar caminhos partindo de algum ponto, chegando no ponto A e nunca passando por um mesmo vértice duas vezes. Para isso, ele representa um caminho pela sequência dos pontos que o caminho visita. Por exemplo, o caminho pontilhado na figura abaixo é representado pela sequência $DCBA$.



Augusto chama um caminho de inusitado se a sequência que representa esse caminho está ordenada de maneira alfabética decrescente. Em outras palavras, o caminho é inusitado se nunca anda para a esquerda, seja subindo ou descendo. Por exemplo, o caminho $DCBA$ é inusitado. Já o caminho $DBCA$ não é inusitado, já que a letra C aparece antes da letra B.

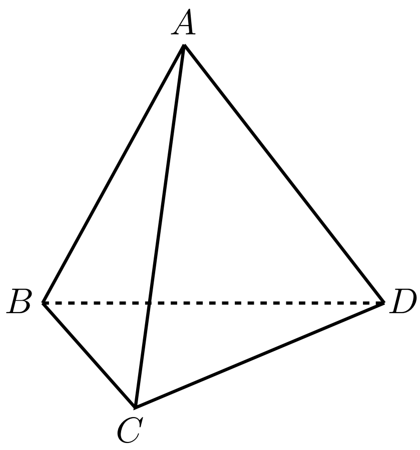
a) Quantos caminhos inusitados existem começando em D e terminando em A?

b) Mostre que o número de caminhos inusitados começando em E é a soma do número de caminhos inusitados começando em D com o número de caminhos inusitados começando em C.

c) Augusto calculou o número de caminhos inusitados saindo de K e chegando em A. Qual é esse número?

16 *Tetraedro dentro de cubo*

Um tetraedro regular é um sólido de quatro faces, sendo todas elas triângulos equiláteros de mesmo tamanho. A figura abaixo mostra um tetraedro regular.



O comprimento de qualquer aresta de um tetraedro regular é o mesmo. Por exemplo, no tetraedro acima, $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{CD} = \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{BD}$. Mostre como colocar um tetraedro de lado $\sqrt{2}$ inteiramente dentro de um cubo de lado 1.

17 *Achou?*

a) Encontre todos os números inteiros positivos de dois algarismos $\overline{ab}$ tais que:

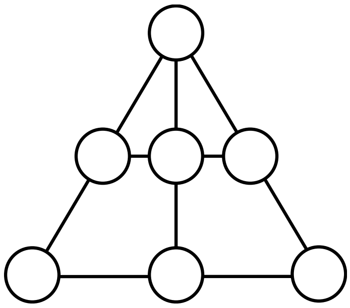
$$(a+1)(b+1) = \overline{ab} + 1.$$

b) Encontre todos os números inteiros positivos de três algarismos $\overline{abc}$ tais que:

$$(a+1)(b+1)(c+1) = \overline{abc} + 1.$$

18 *Os números de Luana*

No interior de cada um dos círculos que aparecem na figura abaixo, a pequena Luana colocou um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.



Ela o fez de modo que todos os números foram usados. O seu irmão mais velho, Pedro, olhou para cada trio de círculos colineares e somou os três números neles colocados. Pedro observou que a soma resultava ser sempre a mesma.

a) Mostre que o número colocado por Luana no círculo do topo é 4 e que a soma constante observada por Pedro é igual a 12.

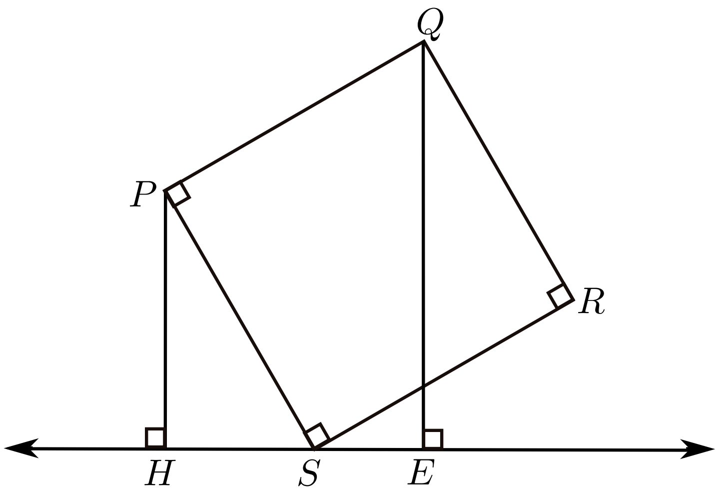
b) Encontre uma maneira pela qual Luana poderia ter conseguido realizar tal proeza.

19 *Os amigos de Ernaldo*

Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo são estudantes de distintas partes do Brasil que foram escolhidos para representar o seu país nas olimpíadas internacionais. Depois de várias semanas de treino, algumas amizades foram formadas. Perguntamos, então, a cada um deles quantos amigos tinham feito no grupo. Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo responderam, respectivamente, que tinham feito 1, 2, 3 e 4 amigos dentro do grupo. Quantos dos integrantes do grupo são amigos de Ernaldo?

20 *Quem inclinou o quadrado?*

Na figura, $PQRS$ é um quadrado, $\overline{QE} = 17$, e $\overline{PH} = 12$.



Calcule $\overline{SE}$.

21 *Quatro números para quatro casas*

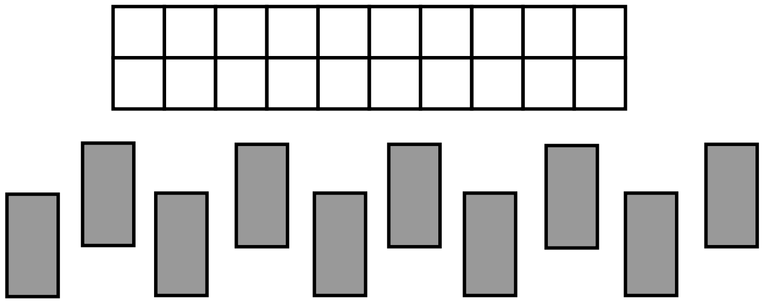
Os números x, y, z e w na figura são números inteiros todos diferentes entre si, maiores do que 1, e foram colocados nas casas abaixo de modo que cada número (a partir de y) é divisor do número na casa da esquerda.

x	y	z	w

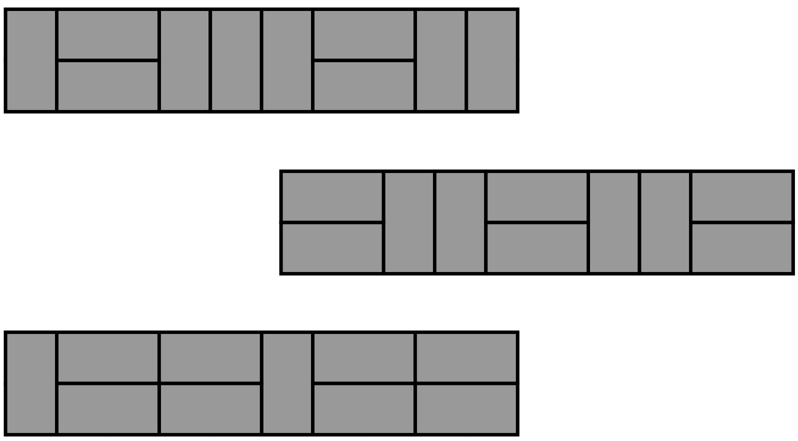
Descubra todas as soluções possíveis para x, y, z e w sabendo que a soma deles é 329.

22 *O presente do pequeno Abel*

O pequeno Abel ganhou de presente um tabuleiro $2 \times n$ e n fichas de tamanho 2×1. Por exemplo, a figura a seguir mostra o caso em que $n = 10$, isto é, quando Abel tem um tabuleiro 2×10 e 10 fichas de tamanho 2×1.



Ele brinca de preencher o tabuleiro usando as n fichas. Por exemplo, para $n = 10$ Abel poderia preenchê-lo dos modos ilustrados a seguir:



Observe, no entanto, que existem muitas outras maneiras pelas quais Abel pode preencher o seu tabuleiro.

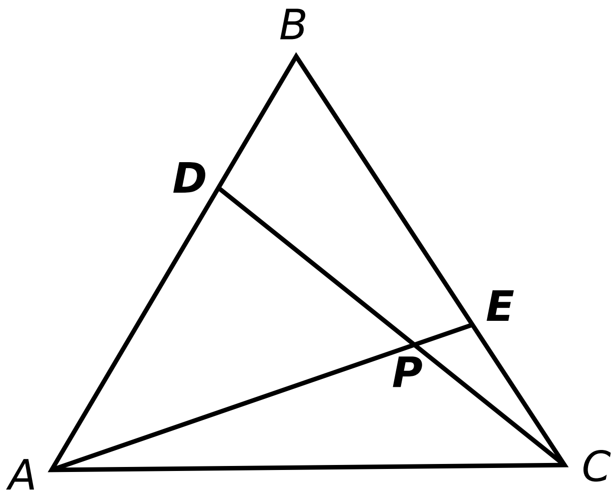
a) Calcule o número total de maneiras pelas quais Abel pode preencher o seu tabuleiro nos casos em que $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$, isto é, no caso em que os tabuleiros têm dimensões 2×1, 2×2 e 2×3.

b) Seja a_n a quantidade de maneiras pelas quais Abel pode preencher um tabuleiro $2 \times n$ utilizando n fichas 2×1. Mostre que $a_{10} = a_9 + a_8$.

c) Calcule o número total de maneiras pelas quais Abel pode preencher o seu tabuleiro quando $n = 10$.

23 *Calcule* $\measuredangle APC$

Nos lados AB e BC de um triângulo equilátero ABC, fixam-se dois pontos D e E, respectivamente, de modo que $\overline{AD} = \overline{BE}$.



Se os segmentos AE e CD se cortam no ponto P, determine $\measuredangle APC$.

24 *Alguém quer batata?*

Um comerciante recebeu quatro sacos de batatas e deseja medir o peso de cada um deles. Ele sabe que os pesos desses sacos em quilogramas são quantidades inteiras e distintas. Suponha que os pesos dos sacos (em quilogramas) sejam a, b, c e d, com $a < b < c < d$.

a) Mostre que, ao pesar os sacos de dois em dois, o maior resultado é $c + d$, e que o segundo maior é $b + d$. Mostre também que o menor resultado é $a + b$ e o segundo menor é $a + c$.

b) A balança do comerciante quebrou. Assim ela só consegue indicar pesos maiores ou iguais do que 100 quilogramas. Ele decide então pesar os sacos de dois em dois realizando assim seis pesagens. Em quatro das pesagens ele obteve como medidas (em quilogramas): 101, 112, 116 e 127. Nas outras duas, ele só conseguiu descobrir que as somas eram menores ou iguais a 100 quilogramas. Encontre os pesos dos quatro sacos.

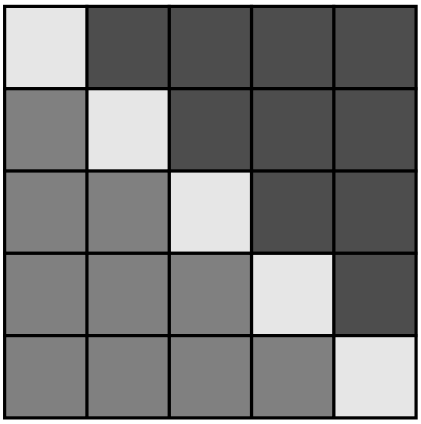
25 *Consecutivos em casas vizinhas*

Sobre um tabuleiro de 5×5 casas foram distribuídos os números $1, 2, 3, \ldots, 25$ de modo tal que cada casa seja ocupada por um único número e que dois números consecutivos sempre estejam colocados em casas vizinhas. A figura a seguir mostra um exemplo de como distribuir esses números.

3	4	5	24	23
2	1	6	25	22
9	8	7	20	21
10	13	14	19	18
11	12	15	16	17

a) Mostre que, em qualquer distribuição cumprindo tal condição, todos os números colocados nas casas das duas diagonais são ímpares.

Vamos chamar de diagonal principal a diagonal do tabuleiro pintada em branco na figura seguinte.



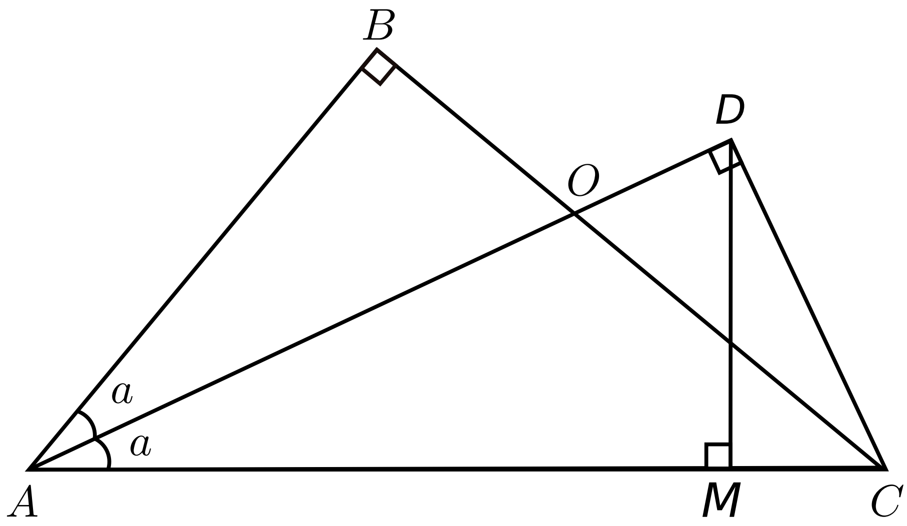
Note que a diagonal principal divide o tabuleiro em duas zonas, uma superior e outra inferior.

b) Sejam x e y dois números em $\{1, 2, \ldots, 25\}$ tais que $x < y$. Mostre que se x e y pertencem a zonas distintas, então existe um número z situado na diagonal principal tal que $x \leq z \leq y$.

c) Determine qual é o menor valor que pode ser assumido pela soma dos números que são colocados sobre a diagonal principal quando distribuem-se números sobre o tabuleiro, respeitando a condição do problema.

26 *Congruências e semelhanças*

Na figura abaixo, $\overline{OC} = 12$ e $\overline{DM} = 10$.



Calcule $\overline{BO}$.

27 *Números ziguezague*

Um número inteiro positivo é chamado *ziguezague*, se satisfaz as seguintes três condições:

• Seus algarismos são não nulos e distintos.
• Não possui três algarismos consecutivos em ordem crescente.
• Não possui três algarismos consecutivos em ordem decrescente.

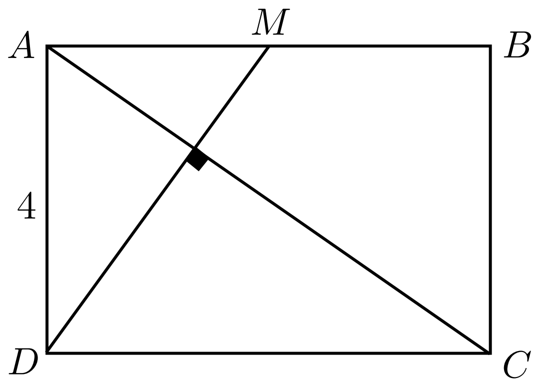
Por exemplo, 14385 e 2917 são ziguezague, mas 2564 e 71544 não.

a) Encontre o maior número ziguezague.

b) Quantos números ziguezague de quatro algarismos existem?

28 *Área do retângulo*

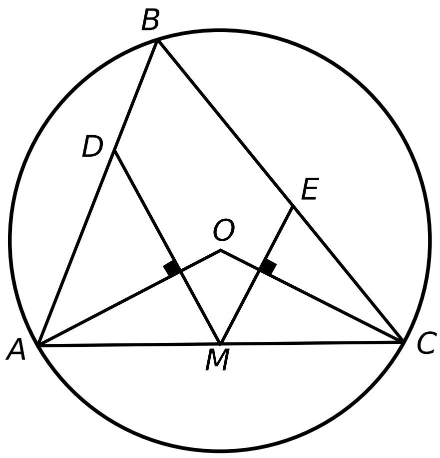
A figura mostra um retângulo $ABCD$ de lado $\overline{AD} = 4$ e onde o ponto M é o ponto médio do segmento AB.



Sabendo que os segmentos AC e DM são ortogonais, calcule a área do retângulo $ABCD$.

29 *Calcule* $\overline{AM}$

Na figura abaixo, ABC é um triângulo acutângulo, O é o centro da circunferência e M é o ponto médio de AC.



Sendo $\overline{DM} = 9$ e $\overline{ME} = 4$, calcule $\overline{AM}$.

30 *Lendo os pensamentos de Ivan*

Sergio pediu para Ivan pensar em um número inteiro positivo. Depois, pediu para Ivan calcular a soma de seus algarismos e, finalmente, elevar ao quadrado o resultado. Sem falar o número em que pensou inicialmente, Ivan contou que obteve como resultado final x. Mostre a Sergio como chegar às seguintes conclusões:

a) Se Ivan tivesse pensado em um número com 3 ou menos algarismos, então x seria menor do que 730.

b) Se Ivan tivesse pensado em um número com 4 algarismos, então x seria menor do que o número no qual Ivan pensou.

c) Se Ivan tivesse pensado em um número com 5 ou mais algarismos, então x seria menor do que o número que Ivan pensou.

Sergio fez depois o seguinte: Considerou o número x que Ivan disse, calculou a soma dos seus algarismos e elevou ao quadrado o resultado. Quando Sergio falou para Ivan o número que obteve, Ivan disse com surpresa que esse foi o número que havia pensado.

d) Determine todos os possíveis valores para o número que Ivan pensou.

NÍVEL 1 – SOLUÇÕES

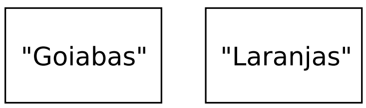
1 ***Água na medida certa*** – *Solução*

O primeiro procedimento que Fábio deve tomar é encher completamente o balde de três litros e, em seguida, transferir todo o seu conteúdo para o balde de cinco litros. Feito isso, ele terá três litros de água dentro do balde de cinco litros, enquanto o balde de três litros estará vazio. Depois desse primeiro procedimento, Fábio deve então encher totalmente o balde de três litros mais uma vez e, em seguida, transferir o conteúdo desse balde novamente para o balde de cinco litros até que esse segundo esteja completamente cheio. Em seguida ele descarta toda a água contida no balde de cinco litros. E transfere toda a água contida no balde de três litros para o balde de cinco litros. Após essa etapa, Fábio terá o balde de três litros vazio enquanto o de cinco litros conterá um litro de água. Finalmente Fábio deverá encher totalmente o balde de três litros e transferir todo o conteúdo para o balde de cinco litros, obtendo no final uma quantidade de quatro litros de água no balde de cinco litros enquanto que o balde de três litros estará vazio.

2 ***Laranjas e goiabas*** – *Solução*

Primeiro, pedimos a Ives que retire uma fruta da caixa onde está escrito "Laranjas e Goiabas". Temos dois casos possíveis, ou Ives mostra uma laranja ou Ives mostra uma goiaba.

Primeiro caso: Ives mostra uma laranja. Como todos os nomes estão em caixas erradas, isso significa que nesta caixa onde está escrito "Laranjas e Goiabas" há apenas laranjas. Resta descobrir o conteúdo das outras duas caixas:



Novamente, como todos os nome estão errados, na caixa onde está escrito "Goiabas", não pode haver somente goiabas. Logo, a caixa onde está escrito "Goiabas" é a que contém laranjas e goiabas. E a caixa restante, onde está escrito "Laranjas", é a que contém apenas goiabas.

Segundo caso: Ives mostra uma goiaba. O raciocínio é o mesmo do caso anterior. Na caixa onde está escrito "Laranjas e goiabas" deve haver apenas goiabas. Logo, na caixa onde está escrito "Laranjas", deve haver laranjas e goiabas, e na caixa onde está escrito "Goiabas", haverá somente laranjas.

3 ***Cubos e cubos*** – *Solução*

a) Como $512 = 8^3$, então o comprimento da aresta do cubo antes de ser cortado era de 8 cm.

b) Os cubinhos que não tinham nenhuma face em contato com o exterior do cubo original formavam também um cubo. Como foram contados 512 cubinhos deste tipo, isso quer dizer que este cubo interior tinha aresta 8 cm (usando a resposta do item anterior). O cubo interior tem aresta duas unidades menor do que o cubo original. Logo, o comprimento da aresta do cubo original era de 10 cm.

4 ***Qual a unidade?*** – *Solução*

Note que

$3^1 = 3$, cujo algarismo das unidades é 3.
$3^2 = 9$, cujo algarismo das unidades é 9.
$3^3 = 27$, cujo algarismo das unidades é 7.
$3^4 = 81$, cujo algarismo das unidades é 1.
$3^5 = 243$, cujo algarismo das unidades é 3.
$3^6 = 729$, cujo algarismo das unidades é 9.
$3^7 = 2187$, cujo algarismo das unidades é 7.
$3^8 = 6561$, cujo algarismo das unidades é 1.

Aí já podemos notar que a cada quatro potências, os algarismos das unidades se repetem (sempre 3, 9, 7 e 1, nessa ordem). E também que, como $3 + 7 = 10$ e $1 + 9 = 10$, esses grupos de quatro números não influenciam o algarismo das unidades, porque somar um número que termina em zero não muda o algarismo das unidades.

Dividindo 2013 por 4, notamos que o resto é 1. Logo, o algarismo das unidades de $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{2013}$ é 3.

5 ***Pintando um cubo*** – *Solução*

a) Como todas as faces devem ter a mesma cor, só podemos pintar o dado com uma cor. Como são seis cores a escolher, são seis maneiras distintas de pintar o cubo.

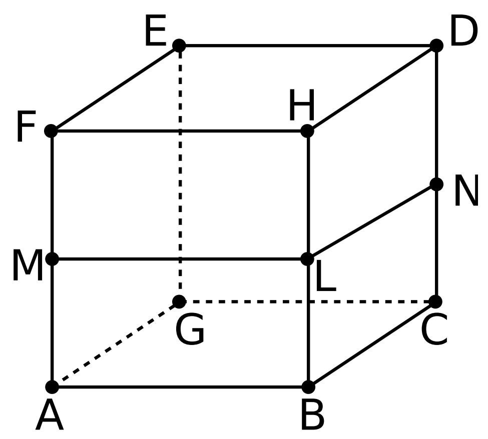
b) Pinte uma face com uma das seis cores possíveis. Há seis possibilidades para isso. Para cada uma dessas possibilidades, as demais faces podem ser pintadas, todas com a mesma cor, de uma das cinco cores restantes. Logo, temos $6 \times 5 = 30$ possibilidades. Note que não importa qual foi a face inicial escolhida, pois sempre podemos girar o cubo de forma adequada e mostrar que as pinturas são as mesmas.

c) Se pintarmos o cubo parado em uma certa posição, vamos ter: seis possibilidades para a primeira face; cinco para a segunda; quatro para a terceira; três para a quarta; dois para a quinta e uma para a última, que dá $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$. Porém, nesta maneira, estamos contando uma mesma pintura várias vezes, pois, girando o cubo, a pintura não muda. Vamos contar quantas vezes estamos contando repetidamente cada pintura. Fixe uma cor, digamos, azul. Esta face pintada de azul pode ser colocada em seis posições diferentes. Em cada uma delas, podemos rotacionar o cubo em quatro posições distintas (mantendo fixa a posição da face azul). Daí, concluímos que são $6 \times 4 = 24$ o número de vezes que contamos uma mesma pintura. Logo, 720 dividido por 24 dá 30 maneiras diferentes de pintar o cubo.

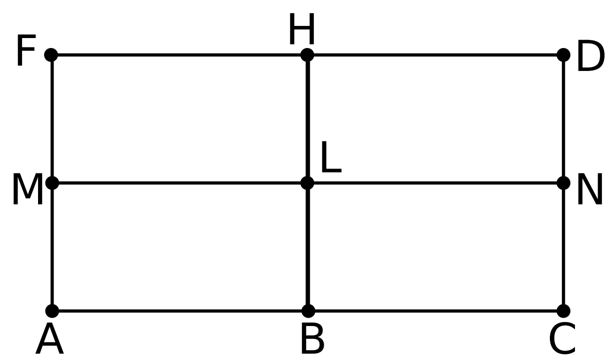
6 ***Formiga esperta*** – *Solução*

a) Como o cubo tem arestas de tamanho 1, a distância entre A a B é igual a 1 cm.

b) O menor caminho entre M e N é feito indo em linha reta de M até L, e depois, novamente em linha reta, de L até N. Veja a figura abaixo:

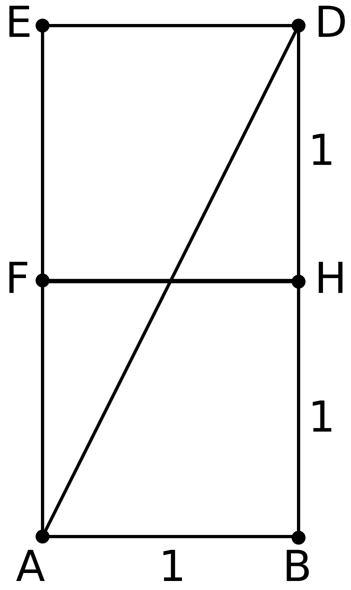


A razão disso é simples: se colocarmos as faces $ABHF$ e $BCDH$ num mesmo plano, o caminho $M \to L \to N$ é uma linha reta! Logo, é o menor caminho entre dois pontos. Veja a figura abaixo:



Logo, a distância a ser percorrida neste caso é de 2 cm.

c) Repetindo a ideia do item anterior, vamos colocar as faces $ABHF$ e $FHDE$ num mesmo plano, veja a figura a seguir:



Logo, a menor distância entre A e D será dada pelo Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}&\overline{AD}^2 = 1^2 + (1+1)^2\\ &\Longrightarrow \overline{AD}^2 = 5\\ &\Longrightarrow \overline{AD} = \sqrt{5}\,.\end{aligned}$$

Como a formiga é esperta, ela fará este menor caminho e percorrerá $\sqrt{5}$ cm!

7 ***Soma de felinos*** – *Solução*

a) Como o número **PUMAS** tem cinco algarismos, e os números **GATO** e **PUMA** têm apenas quatro algarismos, então, obrigatoriamente, o primeiro algarismo do número **PUMAS** é igual a 1, ou seja, $\mathbf{P} = 1$.

b) Para descobrir o valor de **U**, temos que notar que existem duas possibilidades:

$$\mathbf{G} + 1 = 10 + \mathbf{U} \qquad \text{ou} \qquad 1 + \mathbf{G} + 1 = 10 + \mathbf{U}.$$

Note que o segundo caso só pode acontecer se $\mathbf{A} + \mathbf{U}$ for maior ou igual a 9.

No primeiro caso, temos que $\mathbf{G} = 9 + \mathbf{U}$, o que só é possível se $\mathbf{G} = 9$ e $\mathbf{U} = 0$.

No segundo caso, $\mathbf{G} = 8 + \mathbf{U}$ o que só poderia ocorrer se **U** fosse igual a 1 ou 0. Mas **U** não pode ser igual a 1, pois já temos que $\mathbf{P} = 1$. Assim, concluímos que a única possibilidade restante é $\mathbf{U} = 0$ e $\mathbf{G} = 8$. Mas sendo $\mathbf{U} = 0$, não poderia ocorrer $\mathbf{A} + \mathbf{U} = 10$. Logo deveríamos ter que $\mathbf{A} + \mathbf{U} = 9$ o que nos forneceria $\mathbf{A} = 9$. Mas isso também não pode ocorrer, já que teríamos $\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{U} = 9$. Assim, o segundo caso deve ser descartado.

Concluímos então que vale o primeiro caso, isto é, $\mathbf{U} = 0$ e $\mathbf{G} = 9$.

c) Pelos itens *a*) e *b*), já sabemos que $\mathbf{P} = 1$, $\mathbf{G} = 9$ e $\mathbf{U} = 0$. Logo, a operação

$$\begin{array}{cccccc} & & \mathbf{G} & \mathbf{A} & \mathbf{T} & \mathbf{O}\\ + & & \mathbf{P} & \mathbf{U} & \mathbf{M} & \mathbf{A}\\ \hline & \mathbf{P} & \mathbf{U} & \mathbf{M} & \mathbf{A} & \mathbf{S}\end{array}$$

pode ser reescrita como:

$$\begin{array}{ccccc} & 9 & \mathbf{A} & \mathbf{T} & \mathbf{O} \\ + & 1 & 0 & \mathbf{M} & \mathbf{A} \\ \hline 1 & 0 & \mathbf{M} & \mathbf{A} & \mathbf{S} \end{array}$$

Assim, vale também que

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{T} & \mathbf{O} \\ + & \mathbf{M} & \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{M} & \mathbf{A} & \mathbf{S} \end{array}$$

Como $\mathbf{A} \neq \mathbf{M}$, isso só pode acontecer se $\mathbf{A} + 1 = \mathbf{M}$. A partir disso, temos duas possibilidades:

$$\mathbf{M} + \mathbf{T} = 10 + \mathbf{A} \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{M} + \mathbf{T} + 1 = 10 + \mathbf{A}.$$

(Note que o segundo caso acontece quando $\mathbf{O} + \mathbf{A} \geq 10$). Como $\mathbf{A} + 1 = \mathbf{M}$ o primeiro caso nos dá que $\mathbf{T} = 9$, o que não pode acontecer, pois já temos $\mathbf{G} = 9$.

Assim, concluímos que vale o segundo caso: $\mathbf{M} + \mathbf{T} + 1 = 10 + \mathbf{A}$. Como também vale que $\mathbf{A} + 1 = \mathbf{M}$, podemos concluir que $\mathbf{T} = 8$. Lembrando ainda que $\mathbf{O} + \mathbf{A} \geq 10$, e sabendo que $\mathbf{S} \neq 0$ e $\mathbf{S} \neq 1$ devemos ter $\mathbf{O} + \mathbf{A} \geq 12$.

Sendo $\mathbf{T} = 8$, então:

$$\mathbf{A} \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{S} \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Como $\mathbf{A} + 1 = \mathbf{M}$, não poderia ser $\mathbf{A} = 7$ pois, nesse caso, teríamos $\mathbf{M} = 8$, o que é impossível, pois já sabemos que $\mathbf{T} = 8$.

Assim, de fato, temos que:

$$\mathbf{A} \in \{2, 3, 4, 5, 6\} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{S} \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Como $\mathbf{O} + \mathbf{A} \geq 12$, e $\mathbf{O} \neq \mathbf{A}$, só nos resta a escolha

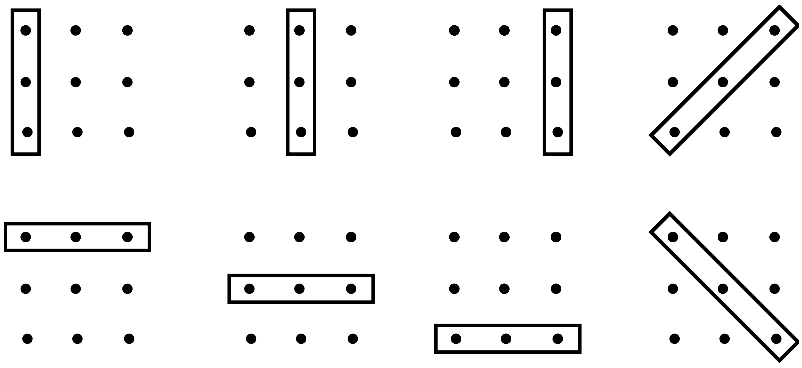
$$\mathbf{A} = 5 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{O} = 7,$$

o que ainda nos fornece $\mathbf{S} = 2$. Mais ainda, como $\mathbf{A} + 1 = \mathbf{M}$, vale $\mathbf{M} = 6$.

Dessa maneira, o número **PUMAS** é igual a 10652.

8 ***Três pontos colineares*** – *Solução*

a) Existem oito maneiras de se escolherem três pontos colineares como ilustrado na figura a seguir:



b) Para escolhermos um conjunto de quatro pontos contendo três pontos colineares podemos adotar um procedimento composto pelos dois passos abaixo:

(1) primeiro, escolhemos três pontos colineares;

(2) fixados estes três pontos colineares, escolhemos um dos outros 6 pontos que restam.

Observe que dessa forma é possível gerar todos os conjuntos de quatro pontos que contêm três pontos colineares. Além disso, cada escolha desse tipo produz um conjunto distinto daquele produzido pelas demais escolhas. Agora podemos contar quantas escolhas são possíveis. Pelo item *a)* acima sabemos que há oito escolhas no primeiro passo do procedimento. Fixada uma escolha no primeiro passo do procedimento, existem seis escolhas possíveis no segundo passo. Assim, no total, há $8 \times 6 = 48$ escolhas. Logo existem 48 conjuntos de quatro pontos contendo três pontos colineares.

9 ***Tabuleiros e dominós*** – *Solução*

a) Começamos colorindo as peças de dominó de Wanderson em preto e branco como desenhado abaixo:

Note que o tabuleiro de Wanderson pode ser então dividido em exatamente 18 pares de casas coloridos como as peças de dominó. Logo, é possível cobrir o tabuleiro usando exatamente 18 peças.

b) Consideramos novamente as peças de dominó pintadas como na resolução do item anterior:

Se fosse possível cobrir o tabuleiro com as peças de dominó teríamos no final utilizado a mesma quantidade de faces pretas e brancas, pois cada peça contém uma de cada face. Porém o novo tabuleiro tem 16 casas pretas e 18 peças brancas. Dessa forma é impossível cobri-lo com as peças de dominó, sendo assim impossível que Wanderson vença o novo desafio.

c) Vamos numerar as casas de um tabuleiro 6×6 da maneira ilustrada na figura abaixo:

3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3

Note que cada número aparece exatamente 12 vezes nessa numeração. Seguindo a mesma regra de numeração o novo tabuleiro teria os seguintes números associados às suas casas:

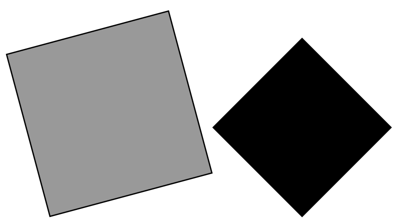
3	1	2	3		
2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1
	2	3	1	2	3

Se posicionarmos uma das novas peças de três faces cobrindo exatamente três casas do tabuleiro, então cada face dessa peça ficaria posicionada sobre um dos números 1, 2 ou 3. Mais ainda, faces distintas da mesma peça ficariam posicionadas sobre números distintos. Logo, se fosse possível cobrir todo esse tabuleiro com as peças de três faces, então cada um dos números 1, 2 e 3 teria que ficar abaixo da mesma quantidade de faces. Isso só seria possível se o tabuleiro tivesse a mesma quantidade de faces numeradas com cada um desses números. Porém isso não é verdade, já que o tabuleiro possui 12 faces com o número 3, 11 com o número 2 e apenas 10 com o número 1.

Isso nos mostra que é impossível que Wanderson vença esse novo desafio proposto por Renato.

10 ***Diferença de áreas*** – *Solução*

a) O quadrado de lado 4 tem área igual a $4 \times 4 = 16$, e o quadrado de lado 3 tem área igual a $3 \times 3 = 9$. Note que a diferença entre a área da região pintada de cinza e a área da região pintada de preto não muda quando movemos os quadrados, pois ao fazer isso, as áreas das regiões cinza e preta aumentam ou diminuem da mesma quantidade. Logo, o resultado procurado é o mesmo que teríamos se os quadrados não tivessem nenhuma sobreposição:



Disso, concluímos que a diferença entre as áreas das regiões cinza e preta é $16-9 = 7$.

Outra solução seria: seja C a área da região pintada em cinza, seja B a área da região branca e seja P a área da região pintada de preto. Temos que $C + B = 16$ e $B + P = 9$. Logo, fazendo a subtração dessas equações,

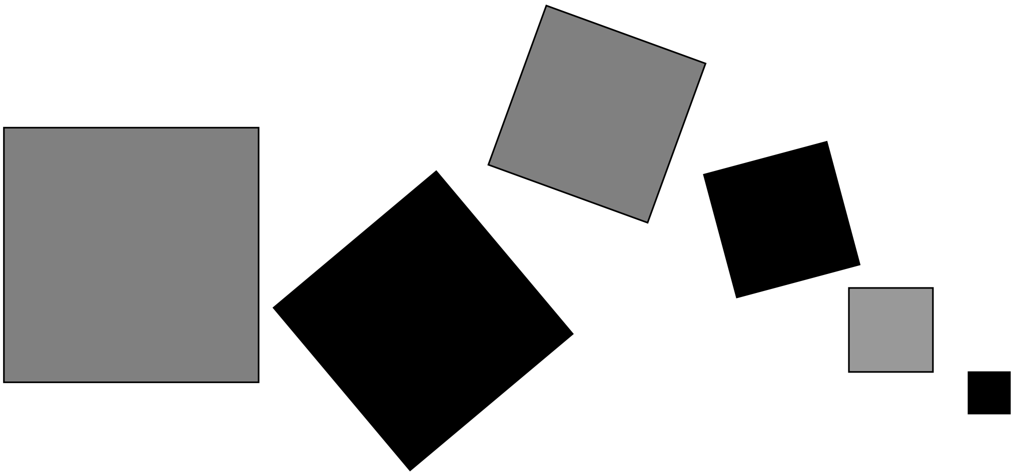
$$C + B - (B + P) = 16 - 9 = 7$$

e, portanto,

$$C - P = 7$$

é o valor procurado.

b) Aplicando a mesma ideia do item anterior, mover qualquer quadrado não muda a diferença entre a soma das áreas das regiões pintadas de cinza e a soma das áreas das regiões pintadas de preto, pois sempre que movemos algum quadrado, aumentamos ou diminuímos as áreas de cada cor da mesma quantidade. Logo, o resultado procurado é o mesmo que teríamos para a situação onde os quadrados não têm qualquer sobreposição:



Logo, o resultado procurado é $6 \times 6 + 4 \times 4 + 2 \times 2$ menos $5 \times 5 + 3 \times 3 + 1 \times 1$, que é igual a 21.

$\boxed{11}$ ***Faltam três*** *– Solução*

Vamos chamar de a, b e c o segundo, terceiro e quarto números da lista, respectivamente. Como o primeiro número da lista é o 6 e o último é o 8, a lista pode ser representada como:

$$6,\ a,\ b,\ c,\ 8.$$

Como o produto dos três primeiros termos é igual a 648, o produto dos três números do meio é igual a 432 e o produto dos três útimos números é igual a 288, temos que:

$$6 \times a \times b = 648\ , \quad a \times b \times c = 432 \quad \text{e} \quad b \times c \times 8 = 288.$$

Dividindo os dois lados da primeira equação por 6, obtemos que:

$$a \times b = 108. \qquad (.1)$$

Substituindo (.1) na segunda equação, temos $432 = (a \times b) \times c = 108 \times c$, logo:

$$108 \times c = 432.$$

Dividindo os dois lados dessa equação por 108, obtemos que $c = 4$. Usando o valor de $c = 4$ na equação, $b \times c \times 8 = 288$, obtemos que $b \times 4 \times 8 = 288$, logo

$$b \times 32 = 288.$$

Dividindo os dois lados por 32 obtemos que $b = 9$. Finalmente, podemos substituir $b = 9$ na equação (.1) para concluir que

$$a \times 9 = 108.$$

Dividindo os dois lados por 9 obtemos que $a = 12$. Logo, a lista procurada é:

$$6,\ 12,\ 9,\ 4,\ 8.$$

12 ***Números especiais*** – *Solução*

a) Existem. Por exemplo, o número 51112 é especial, pois o zero não aparece entre seus algarismos e, além disso, o dobro de seu primeiro algarismos é $2 \times 5 = 10$, igual à soma de seus algarimos, dada por $5 + 1 + 1 + 1 + 2 = 10$.

b) O maior número especial é o 9111111111. Nenhum outro número maior do que ele pode ser especial, vejamos o porquê disso. Se tivermos outro número especial também com 10 algarimos (o 9111111111 tem 10 algarismos) maior do que o 9111111111, este número teria algum algarismo diferente. O primeiro algarismo 9 não pode ser, porque 9 é o maior algarismo. Se algum outro é diferente, a soma de seus algarismos seria maior do que 18. Logo, não há um número de 10 algarismos maior do que o 9111111111.

Se um número tem mais de 10 algarismos, todos diferentes de zero, então a soma de seus algarismos é maior do que 10. Logo, a soma de seus algarismos não pode ser o dobro de nenhum algarismo. Daí concluímos que 9111111111 é o maior número especial.

c) O menor número especial de quatro algarismos é o 3111. Nenhum outro número $ABCD$ de quatro algarismos, menor do que ele, poderia ser especial, pois a soma de seus últimos algarismos, $A + B + C + D$ seria maior ou igual a 4. Logo, o primeiro algarismo A é maior ou igual a 2. Se tivéssemos $A = 2$, então teríamos $2 + B + C + D = 4$, e portanto $B + C + D = 2$, o que é impossível, pois nenhum algarismo é zero.

d) Note que, se dois números tem quantidades diferentes de algarismos, então o maior deles sempre é o que tem mais algarismos. Logo, começaremos buscando qual será a maior quantidade possível de algarismos.

Dizer que o dobro do primeiro algarismo é igual à soma de todos os algarismos é o mesmo que dizer que o primeiro algarismo é igual à soma dos demais algarismos. Como $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, nenhum número especial com algarismos todos distintos pode ter cinco algarismos, já que a soma dos quatro últimos seria maior do que 9, o maior dígito possível. Logo, podemos buscar apenas números especiais com menos de cinco algarismos.

Vamos escolher o primeiro algarismo como o maior possível. Logo, este deve ser o 9. Os três algarismos restantes devem ser distintos e somar 9. Logo, o número será da forma $9BCD$, com $B+C+D=9$. Para que B seja o maior possível, escolhemos $B=6$ (se B for maior do que isso, não há como encontrar C e D). Logo, teremos $C+D=3$. Escolhendo C como o maior possível, teremos $C=2$ e daí $D=1$. Portanto, o maior número especial com todos os algarismos distintos é o 9621.

13 ***O número grande*** *N– Solução*

a) Sejam a e b quaisquer números naturais com $a<b$. Note que a quantidade de números compreendidos entre dois números a e b (contando a e b inclusive) é igual a $b-a+1$. Assim, por exemplo, entre 2 e 4 existem $4-2+1=3$ números, a saber 2, 3 e 4. Da mesma forma, entre 20 e 30 existem $30-20+1$ números.

No conjunto $\{1,2,3,\ldots,2013\}$, os números que possuem apenas um algarismo são aqueles compreendidos entre 1 e 9 (inclusive), que são $9-1+1$ números no total. De maneira análoga, os números que possuem dois algarismos são aqueles compreendidos entre 10 e 9 (inclusive), que são $99-10+1$ no total. Finalmente os números que possuem três algarismos são aqueles compreendidos entre 100 e 999 (inclusive), que são $999-100+1$ no total. Números que possuem quatro algarismos são aqueles compreendidos entre 1000 e 2013 (inclusive), que são $2013-1000+1$ no total.

Resumindo, temos que:
- existem $(9-1+1)=9$ números de 1 algarismo;
- existem $(99-10+1)=90$ números de 2 algarismos;
- existem $(999-100+1)=900$ números de 3 algarismos;
- existem $(2013-1000+1)=1014$ números de 4 algarismos.

Então para descobrir a quantidade de algarismos que o número grande N contém, devemos somar a contribuição dos números de um, dois, três e quatro algarismos obtendo assim

$$1\times 9+2\times 90+3\times 900+4\times 1014=6945$$

algarismos no total.

b) A parte do número N formada pelo enfileiramento dos números de 1 e 2 algarismos, usa um total de $9+2\times 90=189$ algarismos:

$$N=\underbrace{1234567891011121314...979899}_{\text{189 algarismos}}100101\ldots 201120122013.$$

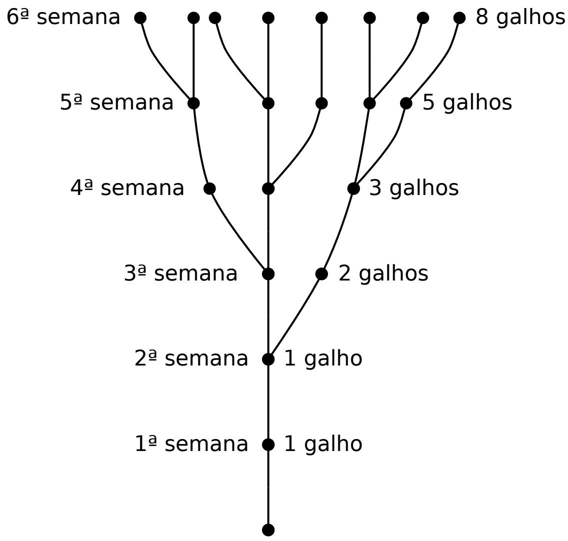
Restam contar $2013-189=1824$ algarismos. Observe que $1824=3\times 608$ assim, devemos enfileirar os primeiros 608 números de 3 algarismos a fim de obter os próximos 1824 algarismos do número grande N, começando então do número 100 e acabando no número 707:

$$N=\underbrace{1234567891011121314...979899}_{\text{189 algarismos}}\underbrace{100101\ldots 705706707}_{\text{1824 algarismos}}609610\ldots 201120122013.$$

Isso mostra que o algarismo que ocupa a posição 2013 é o último algarismo do número 707, ou seja o 7.

14 *Vai dar galho* – *Solução*

a) Seguindo as regras de crescimento da árvore do professor Fernando podemos continuar o desenho mostrado no enunciado do problema para obter uma ilustração dessa árvore após a sexta semana de crescimento:



Essa figura mostra que após a sexta semana de crescimento temos um total de oito galhos.

b) Note que a sequência que determina o número de galhos por semana de crescimento é a seguinte:

$$1,\ 1,\ ,2,\ 3,\ 5,\ 8,\ldots$$

Essa sequência satisfaz a seguinte regra: a partir de seu terceiro termo, cada termo é a soma dos dois termos anteriores. Por exemplo, o terceiro termo é 2 que é igual à soma do primeiro termo 1 com o segundo termo 1. Também o quarto termo é 3 que é igual à soma do terceiro termo 2 com o segundo termo 1.

A quantidade de galhos presentes após a sétima semana de crescimento será dada pelo sétimo termo da sequência. Para gerar esse sétimo termo precisamos então somar o sexto termo (8) com o quinto termo (5). Isso, é o sétimo termo da sequência é igual a $8 + 5 = 13$.

c) A quantidade de galhos após 13 semanas de crescimento será dada pelo décimo terceiro termo da sequência que aparece na solução do item *b*). Lembrando que cada termo naquela sequência será dado pela soma dos dois termos anteriores, podemos gerar os demais termos da seguinte forma:

- **sexto termo:** 8;
- **sétimo termo:** 13;
- **oitavo termo:** $8 + 13 = 21$;
- **nono termo:** $13 + 21 = 34$;
- **décimo termo:** $21 + 34 = 55$;
- **décimo primeiro termo:** $34 + 55 = 89$;
- **décimo segundo termo:** $55 + 89 = 144$;
- **décimo terceiro termo:** $89 + 144 = 233$;

Assim, a quantidade de galhos após 13 semanas é igual a 233.

Observação: A sequência obtida foi:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ldots$$

Que é a famosa sequência de Fibonacci!

15 *Vira vira robô* – *Solução*

a) A cada vez que o robô vira à direita, a direção ao longo da qual ele se movimenta varia em $60°$ no sentido horário. Assim a variação total da direção do seu movimento após um certo número de viradas é sempre um múltiplo de $60°$.

Após virar seis vezes, a variação total na direção do seu movimento será de $6 \times 60° = 360°$ no sentido horário. Porém girar um ângulo de $360°$ significa voltar à direção e sentido originais. Assim, após virar seis vezes, a direção e o sentido do movimento do robô serão iguais à direção e ao sentido original.

b) A variação total da direção do movimento do robô após um certo número de viradas é sempre um múltiplo de $42°$. Note que $360°$ não é um múltiplo de $42°$. Assim é impossível que o robô varie a direção e o sentido do seu movimento por $360°$ virando cada vez à direita por um ângulo de $42°$.

No entanto, logo que a variação total do ângulo de seu movimento seja igual a um múltiplo de $360°$, então o robô terá novamente retornado à direção e sentido originais de movimento. Assim, vamos procurar o menor número que seja, ao mesmo, tempo múltiplo de $42°$ e de $360°$.

Notando que $42 = 6 \times 7$ e que $360 = 6^2 \times 10$ temos que o mínimo múltiplo comum (mdc) entre 42 e 360 é igual a $6^2 \times 7 \times 10 = 2520$.
Como $2520° = 42° \times 60$, é necessário que o robô vire à direita 60 vezes para que a variação total da direção do seu movimento no sentido horário seja igual a $2520°$. Assim, somente após virar 60 vezes o robô retornará à direção e ao sentido originais do seu movimento.

c) Assim como no item anterior, devemos encontrar o menor múltiplo de $47°$ que seja também um múltiplo de $360°$. Como 47 e 360 são números primos entre si, o mmc entre eles é igual a 47×360. Isso quer dizer que o robô deve virar 360 vezes para que o seu movimento retorne à direção e ao sentido originais.

16 *Relógio matemático* – *Solução*

a) Iniciando-se da casa de número 1, após a primeira rodada, o ponteiro deverá apontar para a casa de número $1 + 1 = 2$. Realizando-se uma nova rodada, o ponteiro deverá mover-se por duas casas no sentido horário, apontando então para a casa de número $2+2 = 4$. Ao realizar a terceira rodada, o ponteiro será deslocado, a partir da casa de número 4, quatro casas no sentido horário. Isso equivale a deslocá-lo por três casas e depois por mais uma casa adicional. Após deslocar-se três dessas casas o ponteiro será posicionado na casa de número $4 + 3 = 7$, devendo agora deslocar-se, adicionalmente, uma casa no sentido horário. Ao movimentar-se essa casa adicional, o ponteiro será posicionado na casa de número 1, retornando assim à sua posição inicial. Dessa forma, o número total de passos necessários até o primeiro retorno à casa inicial será igual a três.

b) Iniciando-se da casa de número 6, o jogador deverá mover o ponteiro por seis casas no sentido horário. Isso equivale a movê-lo, primeiramente por uma casa, e depois por outras cinco casas adicionais. Ao movê-lo por uma casa, a posição do ponteiro será $6 + 1 = 7$. Agora, ao movê-lo por mais cinco casas, a sua posição final será igual a 5.

c) Ao iniciar-se o jogo a partir da casa de número 7, o jogador deverá mover o ponteiro por sete casas no sentido horário, terminando assim, exatamente na casa de número 7. Pelo item *a)* já sabemos que iniciando-se dos números 1, 2 e 4, o ponteiro não retorna ao número inicial na primeira rodada. Pelo item *b)*, sabemos também que, ao começar do número 6, o ponteiro não apontará novamente para o número 6 após uma rodada. Iniciando-se do número 3, o ponteiro apontará para o número 6 após uma rodada. Finalmente, iniciando-se do número 5, o ponteiro apontará para a casa de número 3 após uma rodada. Assim, a casa de número 7 é a única que satisfaz a propriedade que aparece no enunciado desse item.

d) Seja $n = 128$ e note que $127 = n - 1$. Ao iniciar-se o jogo da casa de número $n - 1 = 127$, o ponteiro deverá mover-se 127 casas no sentido horário. Isso equivale a mover-se por uma casa até atingir a casa de número 128 e depois pelas 126 casas adicionais atingindo, ao final, a casa de número $n - 2 = 126$. Assim, após uma rodada, o ponteiro terá movido-se da casa $n - 1$ para a casa $n - 2$.

Na segunda rodada, o ponteiro inicia-se na casa de número $n - 2 = 126$. Logo, deve mover-se por duas casas até atingir a casa de número 128 e depois deve mover-se pelas 124 casas adicionais atingindo, ao final, a casa de número 124. Assim, ao final da segunda rodada, o ponteiro haverá movido-se da casa de número $n-2$ para a casa de número $n - 4$.

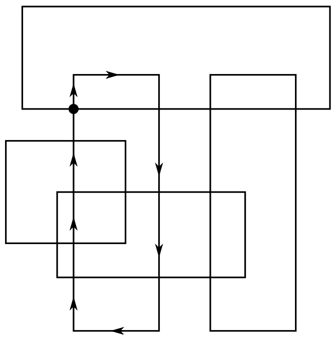
Repetindo-se o mesmo argumento, vemos que, ao sair da casa de número $n-4$, o ponteiro deverá mover-se para casa de número $n-8$ e dessa para a casa de número $n - 16$ e assim por diante até atingir a casa de número $n - 64$, o que ocorrerá depois de seis rodadas.

Note que $n-64 = 128-64 = 64$, logo após seis rodadas, o ponteiro encontra-se na casa de número 64. A partir da casa de número 64, o ponteiro move-se 64 casas no sentido horário atingindo a casa de número $64 + 64 = 128$. Assim o ponteiro atinge a casa de número 128 pela primeira vez após, exatamente, sete rodadas.

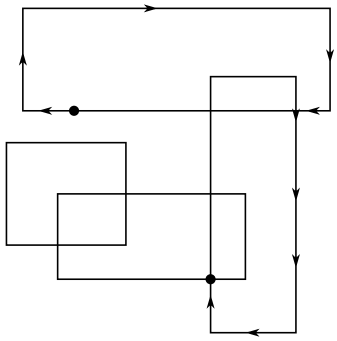
Observação: Note que $128 = 2^7$. O leitor interessado pode generalizar a solução desse problema para mostrar que, se o relógio tem $n = 2^k$ casas, então iniciando-se na casa de número $n - 1$ a casa de número n será atingida pela primeira vez após k rodadas.

17 ***Desenhos bem desenhados*** – *Solução*

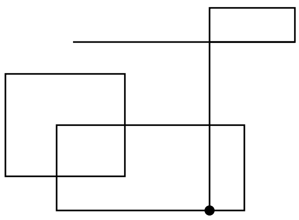
a) Faremos algo equivalente a desenhar (bem) a figura. Sem tirar a borracha do papel, apagaremos cada uma das linhas, sem passar a borracha duas vezes numa mesma linha. Começaremos no ponto marcado na figura e faremos, com a borracha, o percurso marcado pelas setas.



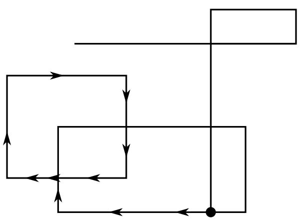
Após este passo, chegamos ao ponto inicial, sem o retângulo que acabamos de apagar. Continuando, fazemos agora o percurso:



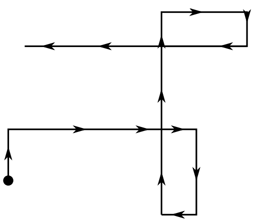
Neste momento, apagando o caminho que já fizemos, temos a figura abaixo, onde o ponto marcado corresponde ao ponto onde paramos a borracha.



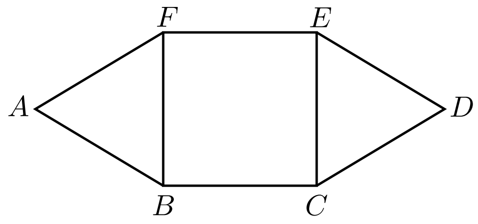
Continuando de onde paramos a borracha, fazemos o caminho abaixo:



E a partir dele, terminamos de apagar a figura inteira:



b) A figura



não pode ser bem desenhada. Vejamos o porquê disso. O vértice F tem três segmentos ligados a ele. Temos dois casos a analisar: ou o desenho começa nesse vértice F, ou o desenho começa em outro vértice.

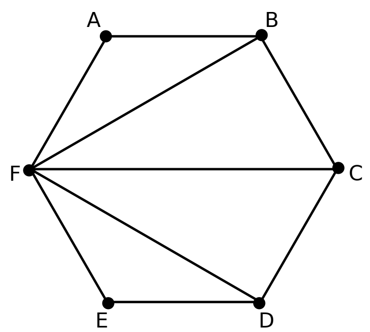
Se o desenho começa no vértice F, um dos segmentos ligados a F é de saída, outro é de entrada e o terceiro de saída novamente. Logo, o desenho não pode terminar nele. Entretanto, E, C e B também têm três segmentos ligados a eles. Logo, cada um deles deveria ser o ponto final do caminho (pois teriam dois segmentos de entrada e um de saída). Como o caminho só pode ter um ponto final, há uma contradição, o que mostra que o desenho não pode começar em F.

Se o desenho não começa em F, mas começa em alguns dos vértices B, C ou E, o argumento é o mesmo que apresentamos para o caso em que ele começa em F. Se o caminho começa em A, como A tem dois segmentos ligados a ele, um deve ser de entrada e outro de saída. Logo, A deve ser o ponto final do caminho. Mas F tem três segmentos ligados a ele, então seriam dois de entrada e um de saída, o que significa que F é que deveria ser o ponto final do caminho, novamente uma contradição.

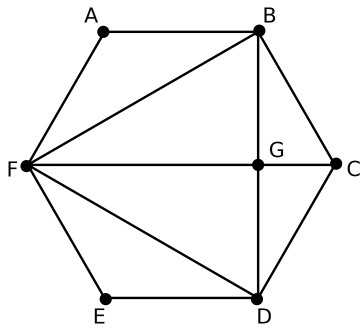
E se o ponto inicial for o D, o argumento é o mesmo que apresentamos acima para o caso em que o ponto inicial é o A.

$\boxed{18}$ ***Clarissa divide um hexágono*** – *Solução*

a) Considere a figura abaixo que aparece no enunciado do problema:



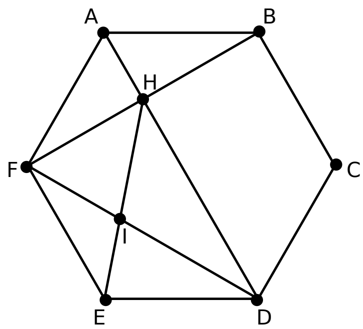
Nessa figura existem quatro triângulos legais. Se adicionarmos a diagonal $\overline{BD}$, será criado mais um ponto legal G e cada um dos triângulos FBC e FCD serão divididos em dois triângulos legais, cada um. Assim, será obtido um total de seis triângulos legais como mostra a figura a seguir:



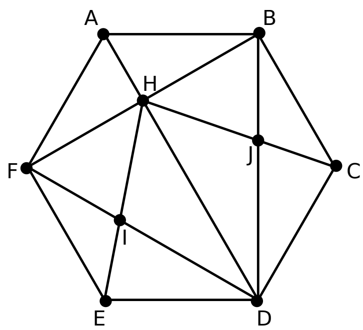
Observação: Existem outras soluções!

b) Os pontos D, E e F são legais porque são vértices do hexágono da Clarissa. O ponto H também é legal, pois é a interseção da diagonal $\overline{AD}$ com a diagonal $\overline{BF}$. O ponto I é a interseção do segmento de reta HE com o segmento de reta DF. Como esses segmentos conectam pontos legais, o ponto I é também um ponto legal.

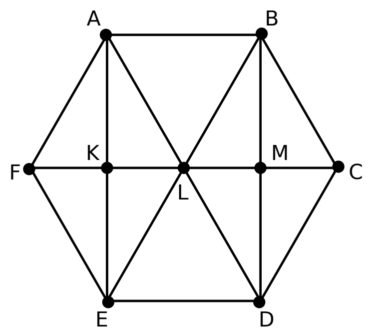
c) Uma das maneiras possíveis é, a partir da figura abaixo, ligar o ponto H ao ponto C e o ponto B ao ponto D, como mostrado a seguir:



obtendo assim a seguinte figura na qual o hexágono está dividido em 10 triângulos legais:



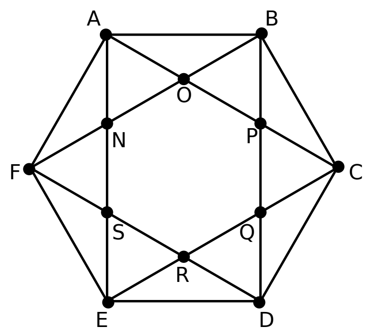
Uma segunda solução seria traçar as diagonais $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$, obtendo a divisão do hexágono nos 10 triângulos legais desenhados a seguir:



Observação: Outras soluções são possíveis!

d) Ilustramos aqui uma possível maneira com a qual Clarissa pode proceder. Outras soluções são possíveis.

Clarissa deve começar traçando as diagonais $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{DF}$ $\overline{EA}$ e $\overline{FB}$ em seu hexágono. Assim ela vai obter a seguinte figura:



Na figura acima o hexágono de Clarissa está dividido em 12 triângulos legais e em mais um hexágono com vértices N, O, P, Q, R, S, sendo todos esses vértices legais.

Clarissa deve agora repetir o mesmo procedimento no novo hexágono obtendo assim mais 12 triângulos legais e um hexágono ainda menor cujos vértices são, todos eles, legais.

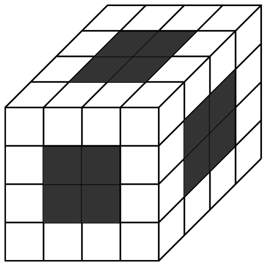
Concluímos que, a cada vez que Clarissa repetir esse procedimento, um total de 12 triângulos legais será acrescentado na figura e restará ainda um hexágono cujos vértices são pontos legais (sempre contido no hexágono obtido na etapa anterior). Dessa forma, após 167 repetições, Clarissa haverá dividido o seu hexágono em $167 \times 12 = 2004$ triângulos legais e ainda um hexágono restante. Ela deve, em seguida, dividir esse hexágono restante em 10 triângulos legais usando, por exemplo, o procedimento obtido no item *b*). Ao final de todo esse processo ela haverá dividido o seu hexágono em $2004 + 10 = 2014$ triângulos legais.

19 ***Número ímpar de divisores*** – *Solução*

Chamemos de n o número preferido por Vladas. Observe que, se d é divisor de n, então $\frac{n}{d}$ também é um divisor de n. Se para todo divisor d de n tivéssemos que $d \neq \frac{n}{d}$, então haveria um número par de divisores de n, pois poderíamos agrupar os pares d e $\frac{n}{d}$. Como o número preferido por Vladas tem uma quantidade ímpar de divisores, concluímos que, para algum dos seus divisores d, vale que $d = \frac{n}{d}$, e então $n = d^2$, logo n é um quadrado perfeito.

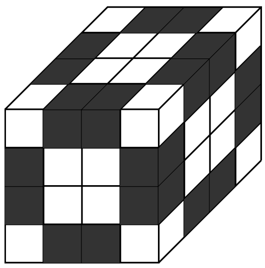
20 ***Aline pinta o cubo*** – *Solução*

a) Em cada face do cubo, os cubinhos que ficam com uma face pintada em vermelho são aqueles quatro que estão no centro, isto é que não têm nenhuma aresta contida em uma aresta do cubo grande. A figura abaixo ilustra quais são esses cubinhos.



Como o cubo tem seis faces, e cada face tem quatro desses cubos, temos, no total, $4 \times 6 = 24$ cubinhos contendo apenas uma face pintada em vermelho.

b) Em cada face do cubo, os cubinhos que ficam com duas faces pintadas em vermelho são aqueles oito que possuem apenas uma aresta contida em alguma aresta do cubo grande. A figura abaixo ilustra quais são esses cubinhos.



Note que esses cubinhos são contados duas vezes, uma por cada face do cubo grande na qual elas pertencem. Portanto, temos uma quantidade de $\frac{8\times 6}{2} = 24$ cubinhos que ficam com duas faces pintadas em vermelho.

c) Em um cubo de lado n, os cubos que ficarão sem nenhuma face pintada em vermelho são aqueles que fazem parte do subcubo de lado $n-2$ que resta quando tiramos todos os cubinhos da superfície do cubo original. Como o subcubo de lado $n-2$ é constituído por $(n-2)^3$, temos então que a quantidade de cubinhos sem nenhuma face pintada é igual a $(n-2)^3$.

Seguindo o mesmo raciocínio do item *b)*, temos que, em cada face do cubo de lado n, há $4 \times (n-2)$ cubinhos com exatamente duas faces pintadas em vermelho. Novamente eles são contados duas vezes, uma por cada face do cubo de lado n à qual eles pertencem. Há, assim, $\frac{4\times(n-2)\times 6}{2}$ cubinhos com exatamente duas faces pintadas em vermelho.

Como a quantidade de cubinhos que ficaram sem nenhuma face pintada em vermelho é igual ao triplo da quantidade de cubinhos que ficaram com duas faces pintadas em vermelho, temos que

$$(n-2)^3 = 3 \times \left[\frac{4 \times (n-2) \times 6}{2}\right].$$

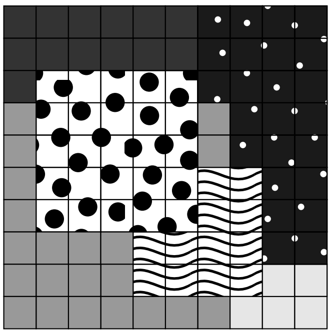
Como o novo cubo de Aline é maior que o cubo que ela tinha anteriormente, vale que $n > 2$ portanto podemos simplificar a equação obtendo:

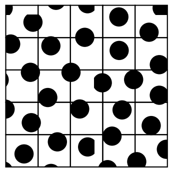
$$(n-2)^2 = \frac{3 \times 4 \times 6}{2} = 36.$$

Tomando a raiz quadrada dos dois lados obtemos que $n - 2 = 6$, logo temos que $n = 8$.

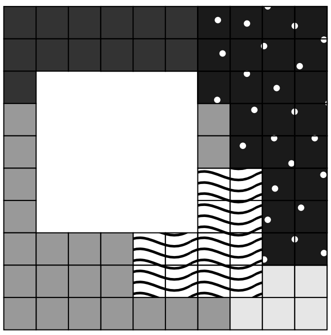
21 ***O segundo quadrado*** – *Solução*

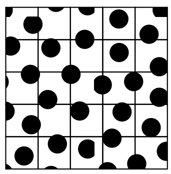
a) Observe que o último quadrado colocado por Julio não pode ter nenhuma região coberta por algum outro quadrado, logo ele pode ser completamente visualizado. Na figura abaixo, o único quadrado que pode ser visualizado completamente é o quadrado 5×5 que aparece separadamente no lado direito.



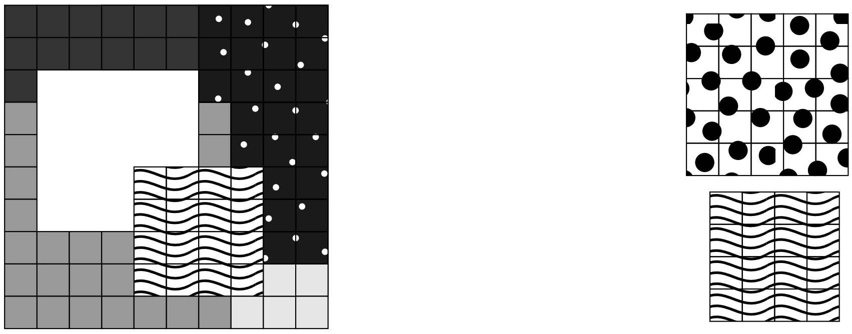


Logo, esse deve ser o último quadrado colocado por Julio. Ao retirarmos esse quadrado de sobre o tabuleiro, deve-se conseguir descobrir qual foi o penúltimo quadrado colocado por Julio. De fato obtemos a seguinte figura



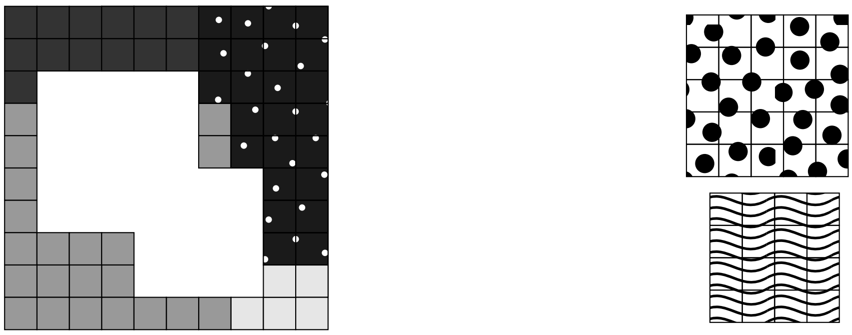


na qual usando somente quadradinhos da zona branca, deveria ser possível reconstruir o penúltimo quadrado colocado por Julio. Na figura acima, o único quadrado que pode ser reconstruído adicionando-se quadradinhos da zona branca é o quadrado de 4×4 ilustrado na figura a seguir:

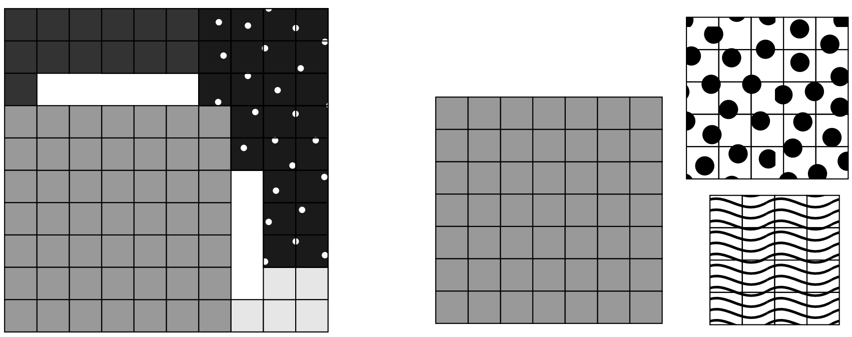


Este é, portanto, o penúltimo quadrado colocado.

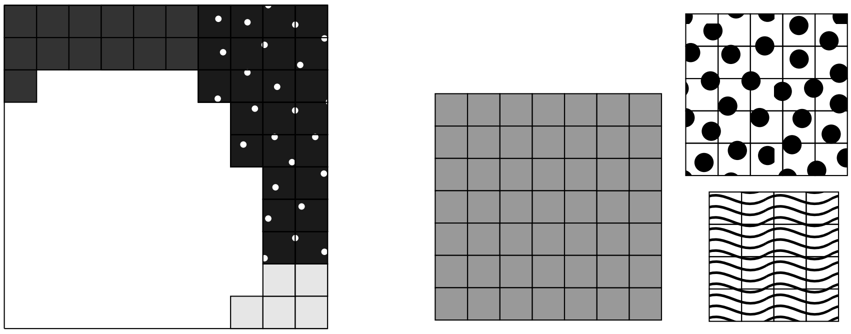
b) No item anterior descobrimos quais foram os dois últimos quadrados posicionados por Julio sobre o tabuleiro. Retirando esses dois últimos quadrados, devemos conseguir descobrir qual é o antipenúltimo quadrado colocado por Julio. Como Julio usou seis quadrados então o antipenúltimo deles é o quarto quadrado colocado por Julio. Na seguinte figura



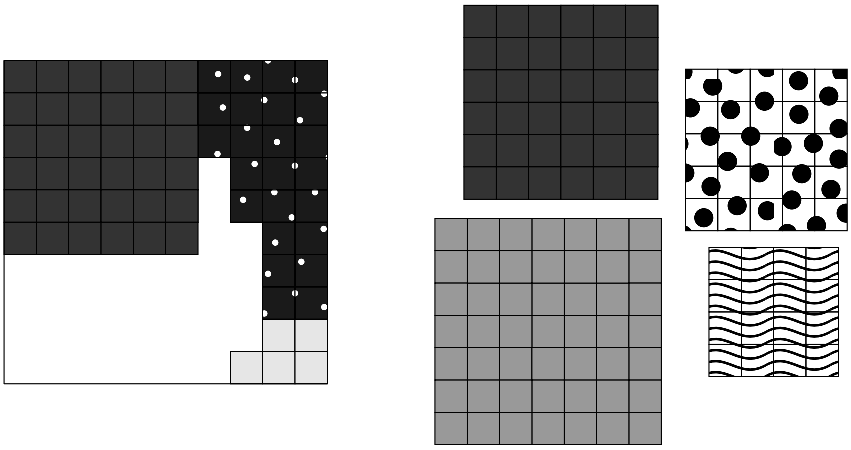
o quarto quadrado colocado por Julio deve ser aquele que é possível de ser reconstruído adicionando-se apenas os quadradinhos da zona branca. O único que pode ser reconstruído dessa maneira é o quadrado de 7×7 que aparece na figura abaixo:



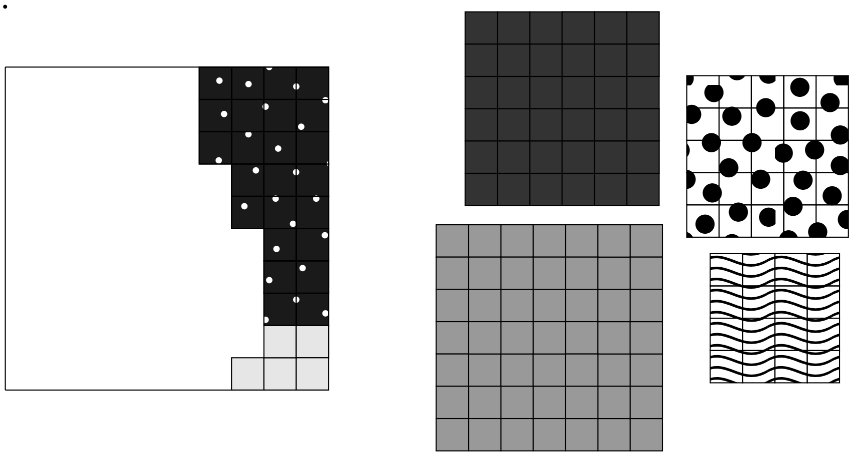
Continuaremos usando o mesmo mecanismo. Retirando-se então os três últimos quadrados que foram colocados por Julio, obtemos a seguinte zona branca:



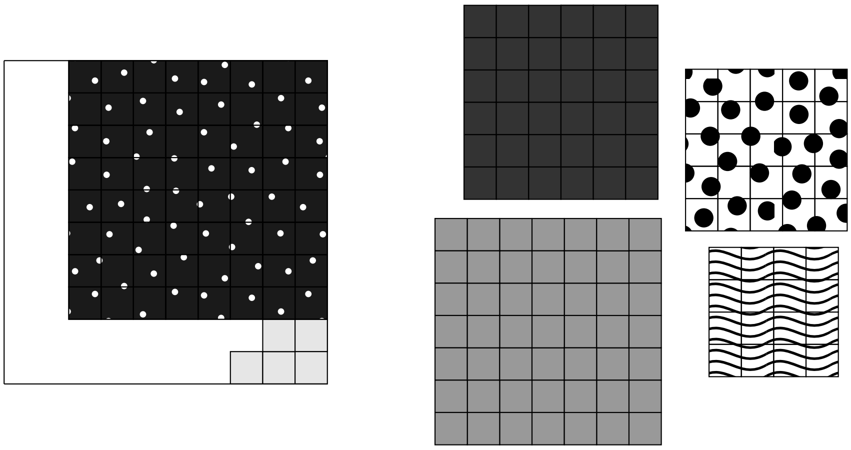
Agora, o único quadrado que pode ser completado usando apenas os quadradinhos da zona branca ilustrada acima é o quadrado de 6×6 que aparece na figura abaixo:



Esse quadrado foi, portanto, o terceiro quadrado colocado por Julio. Depois de retirar os quatro últimos quadrados encontrados acima, ficamos com a seguinte zona branca:

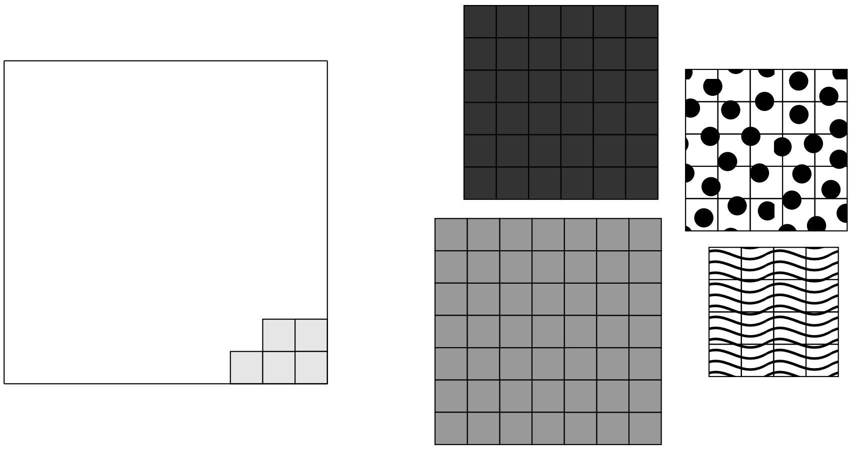


Finalmente, o único quadrado que pode ser completado com quadradinhos da zona branca é o quadrado de 8×8:



O tamanho do segundo quadrado colocado por Julio é então 8×8.

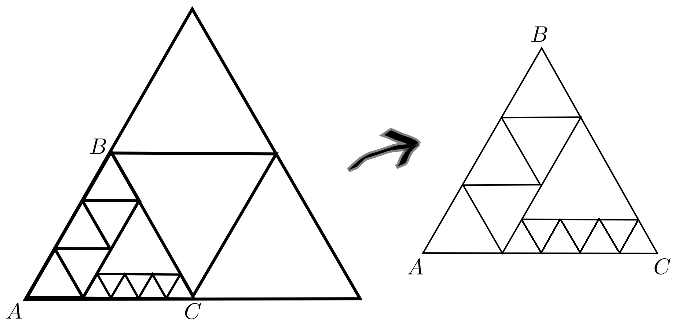
c) Seguimos o mesmo raciocínio dos itens anteriores. Se retirarmos todos os quadrados, exceto o primeiro quadrado colocado, obteremos a seguinte zona branca:



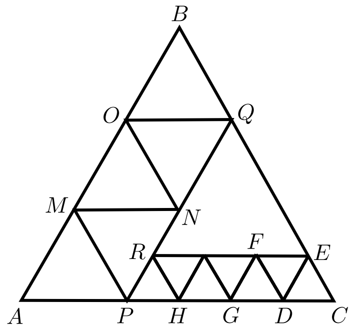
Vemos que, adicionando quadradinhos da zona branca aos quadradinhos que restam poderíamos formar um quadrado de tamanho $n \times n$, para qualquer n pertencente a $\{3, 4, 5, \ldots, 10\}$. Logo é impossível saber exatamente o tamanho do primeiro quadrado colocado por Julio.

22 ***Triângulos pequenos e grandes*** – *Solução*

Vamos começar olhando o triângulo ABC.



Daremos nomes aos pontos do triângulo ABC como indicado na figura seguinte:



Note que o quadrilátero $PREC$ contém sete triângulos equiláteros em seu interior. Vamos mostrar que o comprimento dos lados desses sete triângulos são todos iguais (isto é, que esses sete triângulos são congruentes). De fato, os triângulos FED e DEC são equiláteros e possuem um lado em comum. Logo os três lados de cada um desses triângulos devem ter o mesmo comprimento. Do mesmo modo, os triângulos GFD e FED são equiláteros e possuem um lado comum, logo têm lados com o mesmo comprimento. Repetindo esse argumento para cada par de triângulos com lado comum no quadrilátero $PREC$, podemos concluir que todos os sete triângulos são congruentes.

Chamemos de x a medida em centímetros do comprimento do lado do triângulo equilátero DEC. Note, em particular, que o comprimento do segmento PR é igual a x, já que ele é um dos lados do triângulo PRH. Como o segmento PC é constituído pela base de quatro triângulos congruentes a DEC, temos que $\overline{PC} = 4 \times x$. Da mesma forma, o segmento RE sendo constituído pela base de três triângulos congruentes a DEC, tem comprimento igual a $\overline{RE} = 3 \times x$. O triângulo RQE é equilátero e sua base tem comprimento igual a $\overline{RE} = 3 \times x$. Logo, os seus demais lados têm também comprimento igual a $3 \times x$, o que nos fornece: $\overline{RQ} = \overline{RE} = 3x$. Então

$$\overline{PQ} = \overline{PR} + \overline{RQ} = x + 3 \times x = 4 \times x. \tag{.2}$$

Repetindo o mesmo argumento que foi usado para o quadrilátero $PREC$, podemos concluir que o tamanho dos lados de todos os cinco triângulos que estão contidos no quadrilátero $ABQP$ coincidem (isto é, esses cinco triângulos são congruentes). Em particular,

$$\overline{AM} = \overline{PN} = \overline{NQ}\cdot$$

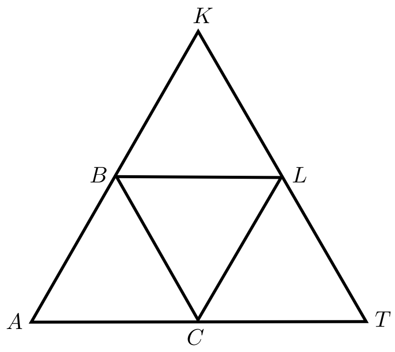
Como $\overline{PN} = \overline{NQ}$ e $\overline{PQ} = \overline{PN} + \overline{NQ}$, temos que

$$\overline{PQ} = 2\overline{PN} = 2\overline{NQ} = 2\overline{AM}.$$

Logo, $\overline{AM} = \frac{\overline{PQ}}{2} = 2 \times x$. Assim, concluímos que

$$\overline{AB} = 3 \times \overline{AM} = 6 \times x. \tag{.3}$$

Observemos agora o triângulo original:

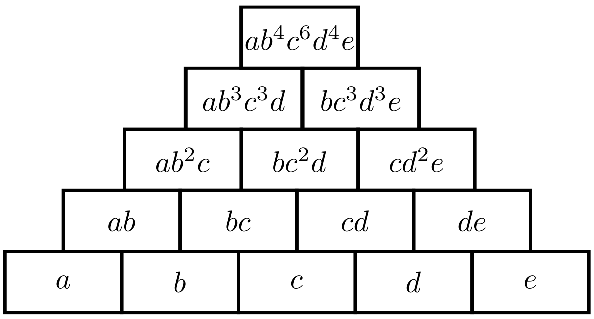


Os triângulos ABC e BCL são equiláteros com um lado comum. Portanto eles são congruentes. Pelo mesmo motivo, os triângulos BCL e BLK são congruentes. Então, usando (.3), temos que $\overline{AB} = \overline{BK} = 6 \times x$. Assim, vale que $\overline{AK} = \overline{AB} + \overline{BK}$, isto é, o lado do triângulo AKT tem comprimento igual a $12 \times x$ e o seu perímetro é portanto igual a $36 \times x$.

Ora, sabemos que o perímetro do triângulo ABC é igual a 108 cm. Logo, vale que $36 \times x = 108$ cm, de onde concluímos que $x = 3$ cm. Observe que o perímetro de um triângulo equilátero é igual a três vezes o comprimento do seu lado. Como x foi definido como sendo o comprimento do lado do triângulo DEC, o perímetro desse triângulo é igual a $3 \times x = 9$ cm.

23 ***Pirâmide de números*** – *Solução*

Iniciamos colocando os números a, b, c, d e e na base da pirâmide, conforme a figura abaixo.



Usando a regra estabelecida podemos determinar quais serão os números que devem ser colocados no segundo nível da pirâmide: para cada bloco do segundo nível, basta multiplicar os números que foram colocados nos dois blocos da base que se encontram logo abaixo desse bloco. Assim o segundo nível da pirâmide será preenchido pelos números ab, bc, cd e de, conforme a figura acima. Procedendo da mesma forma para os outros níveis podemos preencher todos os demais blocos da pirâmide conforme a figura anterior.

Concluímos assim que o número $a \times b^4 \times c^6 \times d^4 \times e$ será aquele colocado no bloco no topo da pirâmide. Assim devemos ter que $a \times b^4 \times c^6 \times d^4 \times e = 140026320$.

Fatorando o número 140026320 obtemos que $140026320 = 1 \times 2^4 \times 3^6 \times 7^4 \times 5$. Logo, devemos ter que

$$a \times b^4 \times c^6 \times d^4 \times e = 140026320 = 1 \times 2^4 \times 3^6 \times 7^4 \times 5.$$

Logo

$$a \times b^4 \times c^6 \times d^4 \times e = 1 \times 2^4 \times 3^6 \times 7^4 \times 5.$$

Uma possível escolha para os valores de a, b, c, d e e é então obtida igualando-se fator por fator na expressão acima na ordem em que eles aparecem. Dessa forma podemos escolher: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 7$ e $e = 5$.

Observação: Existem outras escolhas possíveis. De fato, decorre da expressão

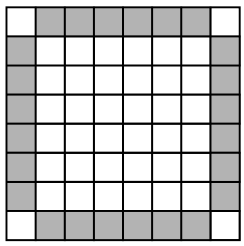
$$a \times b^4 \times c^6 \times d^4 \times e = 140026320 = 1 \times 2^4 \times 3^6 \times 7^4 \times 5$$

encontrada acima, que $c = 3$, que $\{b, d\} = \{2, 7\}$ e que $\{a, e\} = \{1, 5\}$. Consequentemente, os números da base são 1, 2, 3, 5 e 7, e as possíveis respostas são:

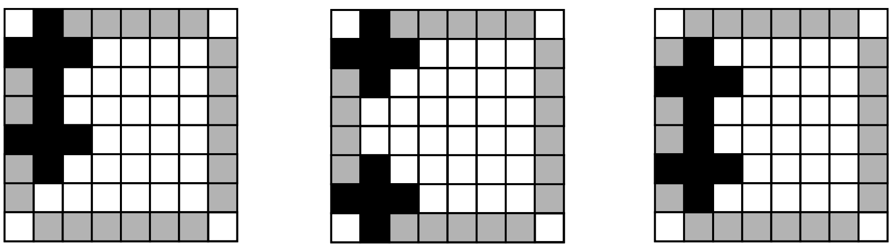
$$\begin{array}{llllll} a = 1\,, & b = 2\,, & c = 3\,, & d = 7\,, & e = 5 & \text{ou} \\ a = 1\,, & b = 7\,, & c = 3\,, & d = 2\,, & e = 5 & \text{ou} \\ a = 5\,, & b = 2\,, & c = 3\,, & d = 7\,, & e = 1 & \text{ou} \\ a = 5\,, & b = 7\,, & c = 3\,, & d = 2\,, & e = 1\,. & \end{array}$$

24 ***Cruzes sobre o tabuleiro*** – *Solução*

Vamos começar procurando uma estimativa de quantos quadradinhos no máximo podem ser cobertos usando as cruzes. Primeiro, observamos que os quatro quadradinhos das esquinas nunca podem ser cobertos. Agora olhemos para os seguintes quadradinhos pintados.

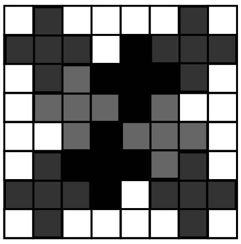


Em cada lado do tabuleiro, dos 6 quadradinhos pintados, note que no máximo 2 podem ser cobertos com cruzes. Por exemplo, no lado esquerdo, vemos os seguintes casos:



Isso dá um máximo de 8 dos quadradinhos pintados que podem ser cobertos por cruzes. E somando os 36 quadradinhos que restam, dá um máximo de 44 quadradinhos do tabuleiro que podem ser cobertos por cruzes. Mas note que cada cruz cobre exatamente 5 quadradinhos. O número de quadradinhos cobertos pelas cruzes deve ser portanto divisível por 5. Concluímos assim que o máximo de quadradinhos do tabuleiro que podem ser cobertos pelas cruzes é 40. Isso significa que o máximo de cruzes que poderiam ser colocadas é $40/5 = 8$.

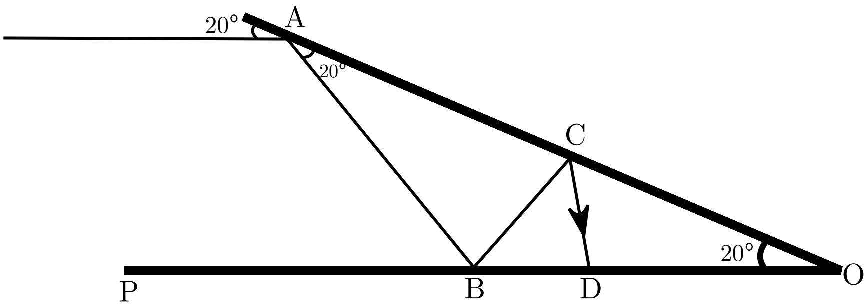
Devemos mostrar agora alguma configuração de 8 cruzes sobre o tabuleiro para mostrar que 8 é precisamente o máximo. Seguindo as observações feitas antes, podemos construir o seguinte exemplo.



Observação: No exemplo acima, as cores das cruzes foram alteradas para melhor distinguir a configuração.

25 ***Quantos rebotes?*** – *Solução*

Depois do terceiro rebote, observaremos o seguinte desenho:

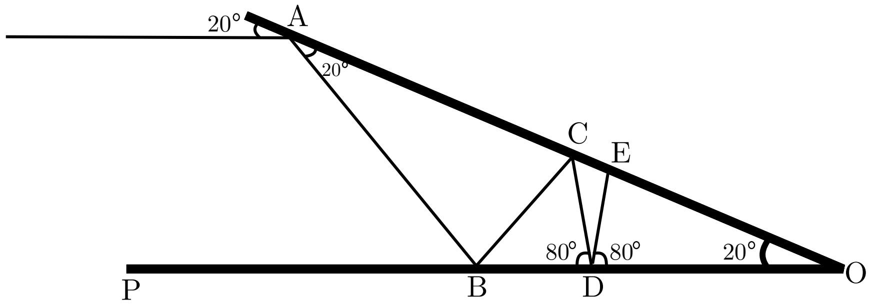


Vemos no desenho que $\measuredangle BAO = 20°$, já que os rebotes são perfeitos.

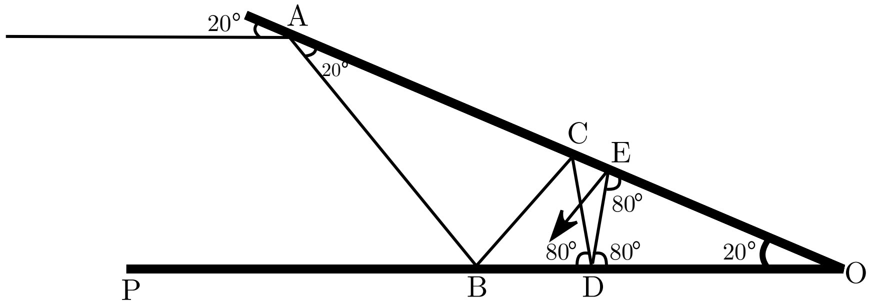
Lembremos que a soma dos ângulos interiores de um triângulo é $180°$. Em consequência, a soma dos ângulos interiores de dois vértices de um triângulo coincide com o ângulo exterior do terceiro vértice. Usaremos esse fato sistematicamente.

Aplicando esse fato no triângulo ABO, temos $\measuredangle ABP = \measuredangle BAO + \measuredangle AOB = 40°$. Usando que o rebote é perfeito, concluímos que $\measuredangle CBD = \measuredangle ABP = 40°$.

Podemos usar agora o fato antes mencionado no triângulo BCO, e assim concluir que $\measuredangle BCA = \measuredangle CBO + \measuredangle BOC = 40° + 20° = 60°$. Sabendo que o rebote é perfeito, temos que $\measuredangle BCA = \measuredangle DCO = 60°$. Logo, no triângulo CDO, temos que $\measuredangle CDB = \measuredangle DCO + \measuredangle COD = 60° + 20° = 80°$. O quarto rebote é perfeito, portanto $\measuredangle EDO = \measuredangle CDB = 80°$, onde E é o ponto mostrado na figura a seguir.



Como a soma de ângulos interiores no triângulo EDO deve ser $180°$, então $\measuredangle DEO = 80°$. Decorre daí que depois do quinto rebote (no ponto E), a trajetória retornará de modo a cortar a si mesma.

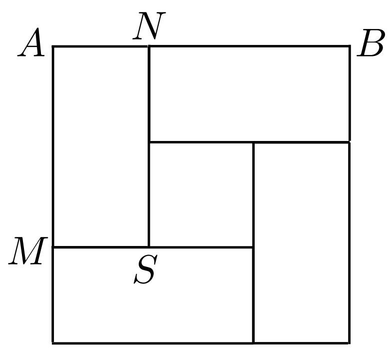


Portanto, a resposta são 5 rebotes.

26 ***Divisão do terreno*** – *Solução*

Como a área do quadrado do centro é igual a 64 m^2, então o seu lado mede 8 m. Como o perímetro de um quadrado é igual a quatro vezes o comprimento do seu lado, concluímos que o perímetro do quadrado central é igual a 32 m.

Como as cinco regiões têm o mesmo perímetro, concluímos que o perímetro de cada retângulo também é igual a 32 m. Observe agora a seguinte figura:



Através dela vemos que $MA + AN$ é igual à metade do perímetro do retângulo $MANS$.
Portanto,

$$MA + AN = 16 \text{ m}. \qquad (.4)$$

Mas os lados maiores dos retângulos são iguais, logo $MA = NB$. Assim, podemos substituir MA por NB na equação (.4) para obter que $NB + AN = 16$ m. Concluímos então que o lado do terreno mede $NB + AN = 16$ m. Como o terreno tem forma de quadrado, a área do terreno é $(16 \text{ m})^2 = 256 \text{ m}^2$.

27 ***Pão e vinho*** – *Solução*

a) A cada vez que uma pessoa da fila passa a garrafa uma outra deve recebê-la. À excessão da primeira pessoa da fila, cada uma das pessoas recebe a garrafa de outra pessoa da fila exatamente uma vez. Como existem 16 pessoas na fila, a garrafa é recebida então por 15 vezes, logo é também passada por 15 vezes.
b) Por 4 vezes a garrafa foi passada de uma mulher a uma mulher, 3 vezes de uma mulher a um homem e 6 vezes de um homem a um homem. Essas transferências contabilizam um total de $4+3+6 = 13$ vezes. Pelo item anterior, o total de vezes em que a garrafa é transferida é igual a 15. Portanto, a garrafa foi passada $15 - 13 = 2$ vezes de um homem a uma mulher.

c) (*Primeira Solução*) Sejam $N(h,h) = 6$, $N(h,m) = 2$, $N(m,h) = 3$ e $N(m,m) = 4$ respectivamente as quantidades de vezes nas quais a garrafa foi passada de um homem a um outro homem, de um homem a uma mulher, de uma mulher para um homem e de uma mulher para outra mulher. Observe que:

- a garrafa foi recebida por homens um total de $N(h,h) + N(m,h) = 9$ vezes;
- a garrafa foi passada por um homem um total de $N(h,h) + N(h,m) = 8$ vezes.

Como homens receberam a garrafa mais vezes do que a passaram, temos que a última pessoa da fila é um homem, já que essa é a única pessoa da fila que recebe a garrafa de alguém da fila mas não a passa.

Observe agora que:

- a garrafa foi recebida por mulheres um total de $N(h,m) + N(m,m) = 6$ vezes;
- a garrafa foi passada por uma mulher um total de $N(m,h) + N(m,m) = 7$ vezes.

Como mulheres receberam a garrafa menos vezes do que a passaram, a primeira pessoa da fila deve ser uma mulher, já que essa é a única pessoa que passa a garrafa sem tê-la recebido de alguém da fila.
(*Segunda solução*) Enumeremos as 16 pessoas na ordem em que aparecem na fila:

$$\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{15}, p_{16}\}.$$

Acima, cada p com um número como índice representa uma pessoa. Como são 16 pessoas, os índices vão de 1 até 16. Não se assuste, é apenas uma notação, uma forma de representar o problema!

Podemos dividir agora o conjunto de 16 pessoas em grupos do mesmo sexo e de modo que grupos consecutivos sejam formados por pessoas de sexo distinto:

$$\{p_1, \ldots, p_{16}\} = \underbrace{\{p_1, p_2, \ldots, p_{k_1}\}}_{\text{mesmo sexo A}} \cup \underbrace{\{p_{k_1+1}, p_{k_1+2}, \ldots, p_{k_2}\}}_{\text{mesmo sexo B}} \cup \cdots \cup \underbrace{\{p_{k_\ell+1}, p_{k_\ell+2}, \ldots, p_{15}, p_{16}\}}_{\text{mesmo sexo (A ou B)}}.$$

O número total de vezes que a garrafa foi passada entre pessoas de sexo diferente é $3 + 2 = 5$. Então devemos ter exatamente 6 grupos:

$$\underbrace{\{p_1, \ldots, p_{k_1}\}}_{\text{mesmo sexo A}} \cup \underbrace{\{p_{k_1+1}, \ldots, p_{k_2}\}}_{\text{mesmo sexo B}} \cup \underbrace{\{p_{k_2+1}, \ldots, p_{k_3}\}}_{\text{mesmo sexo A}} \cup$$
$$\cup \underbrace{\{p_{k_3+1}, \ldots, p_{k_4}\}}_{\text{mesmo sexo B}} \cup \underbrace{\{p_{k_4+1}, \ldots, p_{k_5}\}}_{\text{mesmo sexo A}} \cup \underbrace{\{p_{k_5+1}, \ldots, p_{16}\}}_{\text{mesmo sexo B}}$$

Fica claro agora que para ter 3 passagens de garrafa de uma mulher a um homem, necessariamente as pessoas dos grupos de sexo A são mulheres e as do grupo B são homens. Portanto, a primeira pessoa da fila é uma mulher enquanto a última é um homem.

28 ***Greve de quadrados e cubos*** – *Solução*

a) Vamos sublinhar os números que são quadrados ou cubos:

$$\underline{\underline{1}}\,, 2\,, 3\,, \underline{4}\,, 5\,, 6\,, 7\,, \underline{8}\,, \underline{9}\,, 10\,, 11\,, 12\,, 13\,, 14\,, 15\,, \underline{\underline{16}}\,, 17\,, \ldots$$

Contando as posições dos números que não foram sublinhados, observamos que o número que ficou na 12ª posição é o número 17.

b) Observe que $12^3 < 2013 < 13^3$. Assim, os cubos menores ou iguais a 2013 são:

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3\ 4^3\ 5^3,\ 6^3,\ 7^3,\ 8^3,\ 9^3,\ 10^3,\ 11^3,\ 12^3.$$

Precisamos procurar quais desses são também quadrados.

Claramente, $1^3 = 1 = 1^2$, logo 1 é também um quadrado.

Note que $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ não pode ser um quadrado, já que é um produto de uma quantidade ímpar do fator primo 2. Por motivos análogos, temos que 3^3, 5^3, 7^3 e 11^3 não podem ser quadrados. Observe que também $8^3 = (2^3)^3 = 2^9$ é um produto de uma quantidade ímpar do fator primo 2.

Temos que

$$4^3 = (2^2)^3 = 2^6 = (2^3)^2 = 8^2.$$

Logo $4^3 = 8^2 = 64$ é um cubo e um quadrado ao mesmo tempo.

De maneira análoga, temos que

$$9^3 = (3^2)^3 = 3^6 = (3^3)^2 = 27^2,$$

logo $9^3 = 27^2 = 729$ é um cubo e um quadrado simultaneamente.

Finalmente, temos que $6^3 = (2 \times 3)^3 = 2^3 \times 3^3$ não pode ser um quadrado, já que a sua fatoração em fatores primos contém o termo 3^3 que não é quadrado. Pelo mesmo motivo, $12^3 = (4 \times 3)^3 = 2^6 \times 3^3$ não é quadrado.
Concluímos que os únicos números menores ou iguais do que 2013 que são quadrados e primos, simultaneamente, são 1, 64 e 729.

c) Observe que

$$44^2 < 2013 < 45^2 \text{ e } 12^3 < 2013 < 13^3.$$

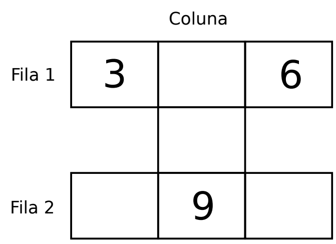
Isso mostra que, no conjunto $\{1, 2, \ldots, 2013\}$, existem 44 quadrados e 12 cubos. Dentre eles, existem números que são ao mesmo tempo quadrados e cubos. Pelo item anterior, esses números são 1^6, 2^6 e 3^6. Concluímos que existem $44 + 12 - 3 = 53$ números no conjunto $\{1, 2, \ldots, 2013\}$ que estão em greve. Portanto, o número 2013 ocupará a posição de número $2013 - 53 = 1960$.

d) Vimos no item anterior, que o número 2013 ocupará a posição $2013 - 53 = 1960$. Para obter o novo número que ocupa a $2013^{\underline{a}}$ precisamos então estudar as seguintes 53 posições. Os primeiros quadrados maiores que 2013 são $45^2 = 2025$ e $46^2 = 2116$, enquanto que o primeiro cubo maior que 2013 é $13^3 = 2197$. Logo, dentre os números $\{2013{+}1, \ldots, 2013{+}53\}$ somente o número 2025 está em greve. Assim, a nova posição do número $2013 + 53$ será $1960 + 53 - 1 = 2012$. Concluímos que o número que estará na posição 2013 é o número $2013 + 53 + 1 = 2067$.

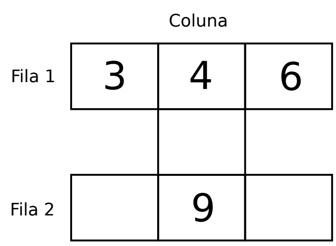
$\boxed{29}$ ***Ximena e o tabuleiro*** – *Solução*

a) Vamos chamar de p o produto comum. Se o número 5 fosse usado por Ximena, então p seria necessariamente múltiplo de 5. Mas não é possível colocar o 5 de modo que pertença às Filas 1 e 2 e à coluna de forma simultânea. Portanto, Ximena não pode usar o número 5. O mesmo argumento mostra que Ximena não pode usar o número 7. Devemos então colocar os números 1, 2, 3, 4, 6, 8 e 9 nas casas do tabuleiro.

b) Já que o número 9 deve ser usado, segue-se que p é divisível por 9. Os únicos números múltiplos de 3 são 3, 6 e 9. Um jeito de colocar esses números para que p seja divisível por 9 é o seguinte:



O produto dos dois números que falta colocar na coluna deve coincidir com o produto dos dois números que falta colocar na Fila 2, porque ambos os produtos coincidem com $p/9$. Como o produto desses 4 números que faltam ser colocados deve ser $1 \times 2 \times 4 \times 8 = 64$, decorre que $p/9$ deve ser $\sqrt{64} = 8$. Segue-se que $p = 72$. Agora, a Fila 1 deve ser necessariamente completada com o número 4 para que o produto dos números desta fila seja 72.



Logo, o centro da coluna deve ser completada com o número 2, para se ter 72 como produto na coluna. Finalmente, os números 1 e 8 podem ser colocados nos lugares que faltam em qualquer ordem:

		Coluna	
Fila 1	3	4	6
		2	
Fila 2	1	9	8

Assim o tabuleiro de Ximena ficou pronto!

30 ***Vamos construir escadas*** – *Solução*

a) Começamos com uma observação: A primeira escada é composta de apenas um quadradinho. A segunda escada é obtida, a partir da primeira adicionando um novo nível contendo dois quadradinhos. Assim ela tem $1+2=3$ quadradinhos. A terceira escada é obtida, a partir da segunda adicionando um novo nível contendo três quadradinhos, logo ela tem $1+2+3=6$ quadradinhos. Esse mesmo racicínio funciona para as demais escadas.

Assim, para calcular a área da quinta escada, observamos que temos 5 quadradinhos no primeiro nível, 4 quadradinhos no segundo nível, 3 quadradinhos no terceiro nível, 2 quadradinhos no segundo nível, e um quadradinho no primeiro nível. No total, a escada está constituída por $1+2+3+4+5=15$ quadradinhos. Cada quadradinho tem 1 cm^2 de área. Portanto, a área total da escada é 15 cm^2.

Para calcular o perímetro podemos contar o número de segmentos verticais e o número de segmentos horizontais que compõem o contorno da quinta escada.

Como temos cinco degraus, há 5 segmentos verticais e mais 5 segmentos horizontais compondo os degraus. Note ainda que para cada segmento horizontal em um degrau, existe um segmento horizontal na base da escada. De maneira análoga, para cada segmento vertical em um degrau, existe um segmento vertical na lateral direita da escada. No total, temos então $5+5$ segmentos verticais e $5+5$ segmentos horizontais. Portanto, o perímetro total da escada é $(5+5+5+5)=20$ cm.

Observação: Podemos generalizar o argumento para calcular a área e o perímetro da n-ésima escada. Nesse caso, na base da escada, teremos n quadradinhos, no segundo nível teremos $n-1$, e assim sucessivamente, até termos 1 quadradinho no topo. Então, a n-ésima escada está constituída por $1+2+\cdots+n$ quadradinhos.

Para calcular esta soma, escrevemos os números como a seguir, repetindo os números da soma ao contrário:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n-2 & + & n-1 & + & n \\ n & + & n-1 & + & n-2 & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Observe que a soma de dois números numa coluna qualquer dá sempre $n+1$. Logo, se somarmos todos os números acima, como temos n linhas, teremos como resposta $n(n+1)$. Como cada número aparece duas vezes na soma acima, o resultado $n(n+1)$ corresponde a duas vezes a soma que queremos. Ou seja,

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Assim, a escada estará constituída por $\frac{n(n+1)}{2}$ quadradinhos. Concluímos que

$$\text{A área da } n\text{-ésima é } \frac{n(n+1)}{2} \text{ cm}^2. \quad (.5)$$

Por outro lado, na n-ésima escada podemos contar $n + n$ linhas verticais e $n + n$ linhas horizontais. Concluímos assim que

$$\text{o perímetro da } n\text{-ésima escada é } 4n \text{ cm}. \quad (.6)$$

b) Por (.5), para conseguir uma escada de 78 cm^2 precisamos que $n(n+1) = 2 \times 78 = 12 \times 13$. Portanto, a escada de número 12 é aquela que tem 78 cm^2 de área.

c) Por (.6), para conseguir uma escada de 100 cm, precisamos que $4n = 100$. Portanto, a escada de número 25 é a escada que tem 100 cm de perímetro.

NÍVEL 2 – SOLUÇÕES

$\boxed{1}$ ***Tartaruga corredora*** – *Solução*

a) Como velocidade é a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto, temos que, no primeiro trecho,

$$3 = \frac{\frac{1}{2}}{t}$$

e daí obtemos $t = \frac{1}{6}\,\text{s}$. Para escrever $\frac{1}{6}$ como diferença de duas frações unitárias, basta notar que

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}.$$

b) Fazendo o mesmo do item anterior, obtemos

$$4 = \frac{\frac{1}{3}}{t}$$

e daí obtemos $t = \frac{1}{4\cdot 3}\,\text{s} = \frac{1}{12}\,\text{s}$. Para escrever $\frac{1}{12}$ como diferença de duas frações unitárias, basta notar que

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}.$$

c) Os dois itens anteriores sugerem que os tempos percorridos em cada trecho são, de maneira ordenada, $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \frac{1}{5} - \frac{1}{4}, \ldots$ Para ver isso, basta notar que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Logo, somando os tempos gastos do primeiro até o 2013º trecho, obtemos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2014} - \frac{1}{2015}\right).$$

Nessa soma, muitos termos se cancelam (o segundo de cada parênteses com o primeiro do próximo parênteses). Logo, obtemos como soma do tempo gasto nos 2013 primeiros termos o valor $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2015})\,\text{s}$.

$\boxed{2}$ *Gato late, cachorro mia?* – *Solução*

Sejam C e G, respectivamente, o número de cães e gatos de Trocalândia. O número de gatos que pensam que são gatos é

$$\frac{80G}{100}.$$

O número de cachorros que pensam que são gatos é

$$\frac{25C}{100}.$$

Logo, o número total de animais que pensam que são gatos é

$$\frac{80G+25C}{100}.$$

Conforme diz o psicólogo veterinário,

$$\begin{aligned}\frac{80G+25C}{100}=\frac{30}{100}(G+C) &\Longrightarrow 80G+25C=30G+30C\\ &\Longrightarrow 80G-30G=30C-25C\\ &\Longrightarrow 10G=C\,.\end{aligned}$$

Portanto, a proporção de cães é

$$\frac{C}{C+G}=\frac{10G}{10G+G}=\frac{10}{11},$$

sendo a resposta final $10/11$.

$\boxed{3}$ *Os funcionários do hospital* – *Solução*

a) Para ser o primeiro da fila, podemos escolher qualquer um dos seis funcionários. Logo, há 6 possibilidades. Escolhido o primeiro da fila, restam cinco funcionários a serem escolhidos para ser o segundo da fila (porque um já foi escolhido). Para o terceiro lugar termos 4 possibilidades, e assim por diante. Logo, há

$$6\times5\times4\times3\times2\times1=720$$

maneiras distintas de organizar a fila.

b) Numa mesa redonda, só importa a posição relativa, como foi dito no enunciado. Se movermos cada funcionário para a cadeira à sua esquerda, a mesa continua igual. Quantas vezes podemos fazer isso? De 6, já que são seis funcionários. Se numerarmos as cadeiras, teríamos a mesma resposta do item anterior, 720. Como podemos girar as pessoas para a cadeira ao lado 6 vezes, concluímos que o número de maneiras de colocar os funcionários na mesa é $720/6=120$.

c) Podemos escolher o presidente de 6 maneiras, já que são 6 funcionários. Para cada uma dessas escolhas, teremos 5 possibilidades para escolher o vice. E para uma dessas, 4 para o suplente. Logo, são $6\times5\times4=120$ maneiras de escolher a comissão.

$\boxed{4}$ ***A Lista de Pedro*** – *Solução*

Notemos que um número natural menor do que 10000 pode ser representado por exatamente quatro algarismos escolhidos em $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, possivelmente com repetições. Assim, temos quatro posições para serem preenchidas com esses algarismos. Por exemplo, o número 12 seria representado por 0012, isto é, o algarismo 0 foi escolhido para preencher a primeira e a segunda posição, o algarismo 1 foi escolhido para a terceira e o algarismo 2 foi escolhido para a quarta.
Os números da lista de Pedro devem conter, obrigatoriamente os dígitos 1 e 2. Assim, para formar um número da lista de Pedro podemos seguir o seguinte procedimento:

1. Escolhemos a posição do algarismo 1 dentre as quatro possíveis.
2. Escolhemos a posição do algarismo 2 dentre as três que restam.
3. Preenchemos cada uma das duas posições restantes com um dos oito algarismos escolhido no conjunto $\{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, podendo haver repetição.

Note que qualquer número da lista de Pedro é obtido desse modo e, para que dois procedimentos resultem no mesmo número, é necessário que as escolhas em cada passo coincidam. Logo, para contar a quantidade de números presentes na lista, basta contar a quantidade de escolhas possíveis nesse procedimento.

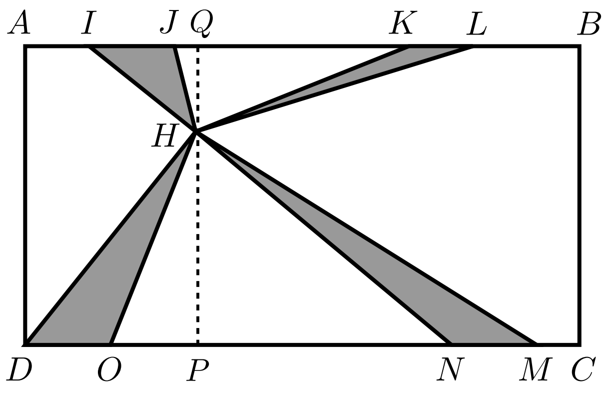
Para o primeiro passo do procedimento temos quatro escolhas. Fixada uma escolha para o primeiro passo, temos três escolhas para o segundo passo. Fixadas as escolhas para os primeiro e segundo passos, para o último passo teremos 8×8 alternativas, já que temos oito algarismos para escolher para cada uma das posições e pode haver repetição. No total teremos $4 \times 3 \times 8 \times 8 = 768$ formas de realizar o procedimento e, portanto, a lista de Pedro tem 768 números.

$\boxed{5}$ ***Área em cinza*** – *Solução*

A área da região em cinza é a soma da área dos triângulos IJH, KLH, DOH e NMH. Lembramos que a área de um triângulo é dada por

$$\text{área} = \frac{\text{base } \times \text{altura}}{2}.$$

Traçando um segmento paralelo aos lados AB e CD pelo ponto H, obtemos os pontos P e Q mostrados na figura abaixo:



Note que a altura dos triângulos IJH e KLH é igual ao comprimento $\overline{HQ}$. Por outro lado, a altura dos triângulos DOH e NMH é igual ao comprimento $\overline{HP}$. Assim, temos que a área de cada um dos triângulos IJH e KLH é dada por

$$\frac{1\times\overline{HQ}}{2},$$

enquanto que a área de cada um dos triângulos DOH e NMH é dada por

$$\frac{1\times\overline{HP}}{2}.$$

Assim, a soma das áreas dos quatro triângulos é dada por:

$$2\times\frac{1}{2}\times\overline{HQ}+2\times\frac{1}{2}\times\overline{HP}$$

que é igual a

$$\overline{HP}+\overline{HQ}.$$

Como a soma $\overline{HQ}+\overline{HP}$ é igual ao comprimento do lado BC, temos que a área total em cinza é igual a 2.

$\boxed{6}$ ***Quantos andares?*** – *Solução*

Vamos chamar de A, B e C as três escadas, que têm 104, 117 e 156 degraus, respectivamente. Seja a o número de degraus da escada A entre cada dois andares, b o número de degraus da escada B entre cada dois andares, e c o número de degraus da escada C entre cada dois andares. Dividindo o número total de degraus de uma escada pelo número de degraus que esta escada tem entre cada dois andares, obtem-se o número de andares! Logo,

$$\frac{104}{a}=\frac{117}{b}=\frac{156}{c}=d$$

onde d é o número de andares do prédio. Ou seja, d é um divisor comum de 104, 117 e 156. Além disso, d deve ser o maior possível, pois a, b e c são os menores possíveis! Logo, d é o maior divisor comum (mdc) de 104, 117 e 156. Calculando o mdc de 104, 117 e 156, obtemos o número 13 como resposta. Logo, o número de andares deste prédio é 13.

$\boxed{7}$ ***Pulga pula*** – *Solução*

a) Para chegar em B, a pulga deve dar exatamente um passo para a esquerda, e seis para a direita, em qualquer ordem. Como esse passo para a esquerda pode ser dado em qualquer momento, há 7 momentos possíveis para dá-lo! Logo, são 7 maneiras distintas da pulga chegar em B com 7 passos.

b) Para chegar em C, a pulga deve dar 7 passos para a direita e 2 para a esquerda, em qualquer ordem. De quantas maneiras a pulga pode fazer isso? Uma maneira é listar todas, são 36.

Outra maneira, mais interessante, é pensar da forma seguinte: de quantas formas podemos ordenar 9 objetos distintos? A resposta é $9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$. E se há 7 objetos iguais de um tipo e 2 de outro tipo? Então, da maneira anterior, estaríamos contando cada configuração muitas vezes. De fato, estaríamos contando $7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$ vezes por causa de um tipo de objeto repetido e estaríamos contando 2×1 vezes por causa do outro. Daí, basta fazer

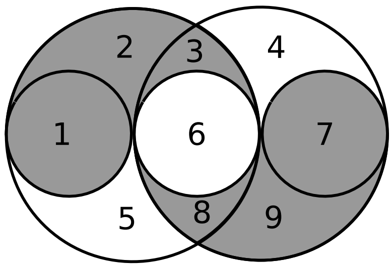
$$\frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{(7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1)\times(2\times 1)}=\frac{9\times 8}{2\times 1}=36,$$

e, portanto, são 36 maneiras. Podemos agora pensar em um objeto de um tipo como sendo um salto para a direita, e o objeto do outro tipo como sendo um salto para a esquerda. Assim, cada maneira de ordenar os objetos, corresponde a uma maneira de ordenar os saltos da pulga. Concluímos que a pulga tem 36 maneiras distintas de chegar em C.

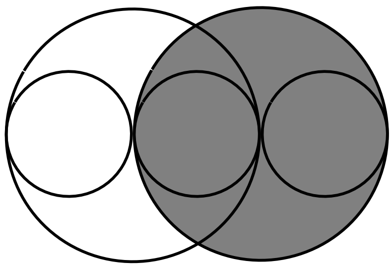
c) A resposta é não! Porque $2028-2013=15$, que é ímpar.

$\boxed{8}$ ***Círculos e círculos*** – *Solução*

Vamos numerar as regiões:



As regiões 2 e 4 têm mesma área, pois uma pode ser obtida refletindo a outra. Além disso, as regiões 1 e 6 também possuem mesma área. Logo, a área da região em cinza acima é a mesma da região pintada em cinza abaixo:



A área da região pintada em cinza acima é a área do círculo de raio 2, logo, igual a $\pi 2^2=4\pi$.

$\boxed{9}$ ***Rodízio de veículos*** – *Solução*

a) Como o número 729 é ímpar, o carro com a placa de número 729 pode circular às segundas-feiras. Como $7+2+9=18$, o carro também pode circular às terças-feiras, mas não às quintas-feiras. Como 729 é múltiplo de 3, este carro também pode circular às quartas-feiras. Como 729 não possui dígitos iguais, é maior do que 500, e tem um dígito maior do que 6, ele não pode circular às sextas-feiras, sábados e domingos.

b) O leitor pode verificar que a resposta para essa questão é o número 363. Vamos em seguida mostrar uma maneira de se chegar a essa resposta.

Seja ABC o número da placa do carro de Maria. Como o carro deve circular aos sábados, devemos ter

$$A \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Além disso, o carro deve circular às terças-feiras e quintas-feiras. Logo,

$$A + B + C \in \{11, 12, 13, 14\}.$$

Mais ainda, para circular às segundas-feiras, devemos ter que

$$C \in \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

Vamos dividir as possibilidades em quatro casos:

Primeiro caso: $A = 0$.

Nesse caso, temos que $B + C = A + B + C \in \{11, 12, 13, 14\}$. É impossível obter essa igualdade se $B = 0$ ou $C = 0$. Logo, devemos supor que $B \neq 0$ e que $C \neq 0$. Em particular, vale que $B \neq A$ e $C \neq A$. Como o carro deve circular às sextas-feiras, então temos que $B = C$. Assim $2C = B + C \in \{11, 12, 13, 14\}$. Como, devemos ter $C \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, a única possibilidade é $ABC = 077$. Mas esse número não é um múltiplo de 3. Assim o carro com placa de número 077 está impedido de circular às quartas-feiras. Logo, esse caso deve ser descartado.

Segundo caso: $A = 1$.

Nesse caso, temos que $B + C = A + B + C - 1 \in \{10, 11, 12, 13\}$. Assim, se fosse $B = 1$, então deveríamos ter obrigatoriamente $C = 9$. Logo, teríamos $ABC = 119$ que não é um múltiplo de 3, logo não pode circular às quartas-feiras. Por outro lado, se fosse $C = 1$, então deveríamos ter obrigatoriamente $B = 9$ obtendo que $ABC = 191$ que também não é um múltiplo de 3. Em particular, vale que $B \neq A$ e $C \neq A$. Como o carro deve circular às sextas-feiras, então temos que $B = C$. Logo, $2C = B + C =\in \{10, 11, 12, 13\}$. Como devemos ter $C \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, a única escolha possível é $C = 5$. Assim, temos que $ABC = 155$ que não é um múltiplo de 3. Deste modo, esse caso deve ser descartado.

Terceiro caso: $A = 2$.

Nesse caso, temos que $B+C = A+B+C-2 \in \{9, 10, 11, 12\}$. Assim, se fosse $B = 2$ então as únicas escolhas possíveis para C seriam $C = 7$ ou $C = 9$. Logo, deveríamos ter $ABC = 227$ ou $ABC = 229$. Como nenhum deles é um múltiplo de 3, temos que descartar a opção $B = 2$. Também $C \neq 2$, já que C deve ser ímpar. Em particular, temos que $B \neq A$ e $C \neq A$. Como o carro deve circular às sextas-feiras, então temos que $B = C$. Logo, $2C = B + C \in \{9, 10, 11, 12\}$. Como devemos ter $C \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, a única escolha possível é $C = 5$. Assim, temos que $ABC = 255$. Porém um carro contendo a placa com esse número não estaria impedido de circular aos domingos, pois satisfaria a exigência de que todos os dígitos são menores do que 6. Assim, esse caso deve ser descartado.

Quarto caso: $A = 3$.

Nesse caso temos que $B + C = A + B + C - 3 \in \{8, 910, 11\}$. Assim, se fosse $B = 3$ então as únicas escolhas possíveis para C seriam $C = 5$ ou $C = 7$. Logo, deveríamos ter $ABC = 335$ ou $ABC = 337$. Como nenhum deles é um múltiplo de 3, temos que descartar a opção $B = 3$. Se fosse também $C \neq 3$, então em particular teríamos que $B \neq A$ e $C \neq A$. Para que o carro possa circular às sextas-feiras deveríamos ter $B = C$. Logo $2C = B + C \in \{8, 9, 10, 11\}$. Como deveríamos ter $C \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, a única escolha possível é $C = 5$. Logo, teríamos $ABC = 355$, que não é um múltiplo de 3. Assim, temos também que descartar a opção $C \neq 3$. Como $B + C \in \{8, 9, 10, 11\}$, vale que $B \in \{5, 6, 7, 8\}$. Logo, as escolhas possíveis para o valor de ABC são 353, 363, 373 e 383. Dessas, a única que é um múltiplo de 3 é o 363. Logo, todas as outras opções devem ser descartadas. Como 363 possui um dígito que não é menor do que 6, o carro que contém esse número em sua placa não pode circular aos domingos. Assim, esse é o número procurado. Para mostrar que essa é a única escolha de placa possível, vamos descartar também o próximo caso.

Quinto caso: $A = 4$.

Nesse caso, temos que $B + C = A + B + C - 4 \in \{7, 8, 9, 10\}$. Assim, se fosse $B = 4$ então as únicas escolhas possíveis para C seriam $C = 3$ ou $C = 5$. Então as opções possíveis são $ABC = 443$ ou $ABC = 445$ que não são múltiplos de 3. Como C deve ser ímpar temos que $C \neq 4$, logo devemos ter $C = B$. Dessa forma $2C = B + C\{7, 8, 9, 10\}$. A única opção possível é $C = 5$. Nesse caso, $ABC = 455$ que não é um múltiplo de 3. Deste modo, não pode ser $A = 4$.

c) O leitor pode verificar que a resposta para essa questão é o número 255. Vamos em seguida mostrar uma maneira de se chegar a essa resposta, que se assemelha muito com o procedimento no item anterior.

Seja ABC o número da placa do carro do prefeito Pietro. Como o carro deve circular aos sábados, devemos ter

$$A \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Além disso o carro deve circular às terças-feiras e segundas-feiras, logo

$$A + B + C \in \{11, 12, 13, 14\}.$$

Mais ainda, para circular às segundas-feiras, devemos ter que

$$C \in \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

Vamos dividir as possibilidades em quatro casos:

Primeiro caso: $A = 0$ (igual ao do item *c*)).

Nesse caso, temos que $B + C = A + B + C \in \{11, 12, 13, 14\}$. É impossível obter essa igualdade se $B = 0$ ou $C = 0$. Portanto, devemos supor que $B \neq 0$ e que $C \neq 0$. Em particular, vale que $B \neq A$ e $C \neq A$. Como o carro deve circular às sextas-feiras, temos que $B = C$. Assim, $2C = B + C \in \{11, 12, 13, 14\}$. Como devemos ter $C \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, a única possibilidade é $ABC = 077$. Mas esse número não é um múltiplo de 3. Assim, o carro com placa de número 077 está impedido de circular às quartas-feiras. Logo, esse caso deve ser descartado.

Segundo caso: $A = 1$ (igual ao do item *c*)).

Nesse caso, temos que $B + C = A + B + C - 1 \in \{10, 11, 12, 13\}$. Assim, se fosse $B = 1$, então deveríamos ter obrigatoriamente $C = 9$. Logo teríamos $ABC = 119$

que não é um múltiplo de 3, logo não podendo circular às quartas-feiras. Por outro lado, se fosse $C = 1$, então deveríamos ter obrigatoriamente $B = 9$, obtendo que $ABC = 191$ que também não é um múltiplo de 3. Em particular, vale que $B \neq A$ e $C \neq A$. Como o carro deve circular às sextas-feiras, então temos que $B = C$. Logo, $2C = B + C \in \{10, 11, 12, 13\}$. Como devemos ter $C \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, a única escolha possível é $C = 5$. Assim, temos que $ABC = 155$ que não é um múltiplo de 3. Logo, esse caso deve ser descartado.

Terceiro caso: $A = 2$.

Nesse caso, temos que $B + C = A + B + C - 2 \in \{9, 10, 11, 12\}$. Assim, se fosse $B = 2$ então as únicas escolhas possíveis para C seriam $C = 7$ ou $C = 9$. Logo, deveríamos ter $ABC = 227$ ou $ABC = 229$. Como nenhum deles é um múltiplo de 3, temos que descartar a opção $B = 2$. Também $C \neq 2$, já que C deve ser ímpar. Em particular, temos que $B \neq A$ e $C \neq A$. Como o carro deve circular às sextas-feiras, então temos que $B = C$. Logo $2C = B + C \in \{9, 10, 11, 12\}$. Como devemos ter $C \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, a única escolha possível é $C = 5$. Assim, temos que $ABC = 255$. Esse número é um múltiplo de 3, logo pode circular também às quartas-feiras. Um carro contendo a placa com esse número pode ainda circular aos domingos, pois satisfaz a exigência de que todos os dígitos são menores do que 6. Assim, essa é a placa procurada. Para mostrar que essa é a única escolha de placa possível vamos descartar também os próximos dois casos.

Quarto caso: $A = 3$.

Nesse caso, temos que $B+C = A+B+C-3 \in \{8, 9, 10, 11\}$. Assim, se fosse $B = 3$ então as únicas escolhas possíveis para C seriam $C = 5$ ou $C = 7$. Logo deveríamos ter $ABC = 335$ ou $ABC = 337$. Como nenhum deles é um múltiplo de 3, temos que descartar a opção $B = 3$. Se fosse também $C \neq 3$, então em particular teríamos que $B \neq A$ e $C \neq A$. Para que o carro possa circular às sextas-feiras deveríamos ter $B = C$. Logo, $2C = B + C \in \{8, 9, 10, 11\}$. Como deveríamos ter $C \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, a única escolha possível é $C = 5$. Logo teríamos $ABC = 355$, que não é um múltiplo de 3. Assim, temos também que descartar a opção $C \neq 3$. Como $B+C \in \{8, 9, 10, 11\}$ vale que $B \in \{5, 6, 7, 8\}$. Logo as escolhas possíveis para o valor de ABC são 353, 363, 373 e 383. Dessas, a única que é um múltiplo de 3 é o 363. Logo, todas as outras opções devem ser descartadas. Como 363 possui um dígito que não é menor do que 6 o carro que contém esse número em sua placa não pode circular aos domingos. Assim esse caso deve ser também descartado.

Quinto caso: $A = 4$ (igual ao do item *c*)).

Nesse caso, temos que $B + C = A + B + C - 4 \in \{7, 8, 9, 10\}$. Assim, se fosse $B = 4$ então as únicas escolhas possíveis para C seriam $C = 3$ ou $C = 5$. Então as opções possíveis são $ABC = 443$ ou $ABC = 445$, que não são múltiplos de 3. Como C deve ser ímpar temos que $C \neq 4$, logo devemos ter $C = B$. Dessa forma, $2C = B + C \in \{7, 8, 9, 10\}$. A única opção possível é $C = 5$. Nesse caso, $ABC = 455$ que não é um múltiplo de 3. Assim, não pode ser $A = 4$.

d) Carros com placas cuja soma dos números é maior do que 10 podem circular às terças-feiras. Assim, caso um carro não possa circular às terças-feiras a sua placa contém um número cuja soma dos algarismos é menor do que 10 e, em consequência, menor também do que 15. Assim, esse carro pode circular às quintas-feiras. Deste modo, qualquer carro que seja impedido de circular às terças-feiras pode circular às quintas-feiras.

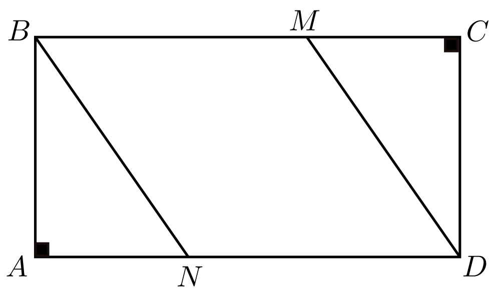
$\boxed{10}$ ***Cubo do dia*** – *Solução*

a) Os dias do mês que são escritos com dois algarismos iguais são 11 e 22. Logo, o 1 e o 2 devem aparecer em ambos os cubos. Além disso, embora não exista um dia 00 no mês, o zero deve aparecer em ambos os cubos, vejamos o porquê disso. Se o zero estivesse em apenas um dos cubos, para formar os dias de 01 até 09, no outro cubo deveriam estar os algarismos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (note que o 9 não foi incluído, porque o 6 pode ser usado para representá-lo). Como são apenas seis faces no cubo, e são oito elementos no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, isso é impossível. Logo, o zero deve aparecer em ambos os cubos. Falta mostrar que nenhum outro algarismo é escrito em ambos os cubos. Como já sabemos que os algarismos $0, 1, 2$ aparecem em ambos os cubos, restam seis faces a serem preenchidas com algarismos. Como ainda temos os seis algarismos $3, 4, 5, 6, 7, 8$ para distribuir (o 9 é representado usando o 6 invertido) nas faces, fica claro que não podemos repetir mais nenhum algarismo em dois cubos diferentes.

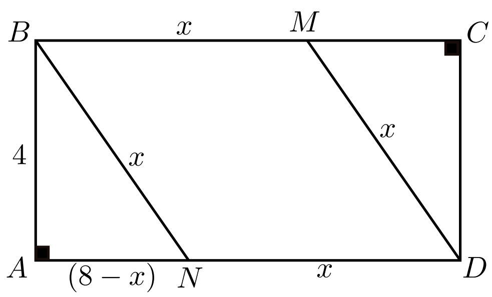
b) Há muitas soluções possíveis. Sabendo que 0, 1 e 2 aparecem em ambos os cubos, podemos distribuir os algarismos 3, 4, 5, 6, 7 e 8 de qualquer maneira nas faces restantes. Por exemplo, um cubo poderia ter em suas faces os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5 e o outro cubo os algarismos 0, 1, 2, 6, 7 e 8.

$\boxed{11}$ ***Área do losango*** – *Solução*

Observe o seguinte desenho:



Como $BMDN$ é um losango, então os comprimentos dos segmentos BM, MD, DN e NB são iguais a um mesmo valor, digamos a x. Pelo dado do problema, $\overline{AD} = 8$, logo $\overline{AN} = 8 - x$.



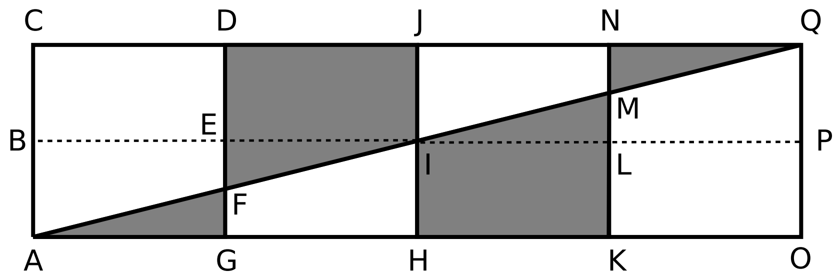
Podemos agora aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo BAN:

$$4^2 + (8 - x)^2 = x^2.$$

Resolvendo a equação obtemos $x = 5$. Finalmente, a área do losango resulta $4 \times x = 4 \times 5 = 20$.

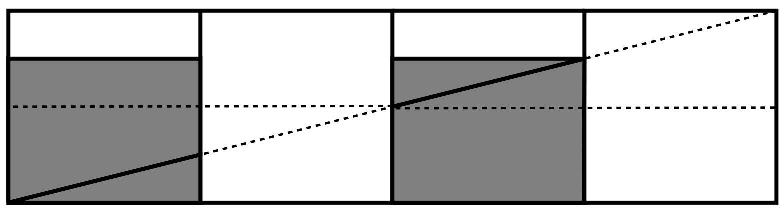
$\boxed{12}$ *Adriana pinta o muro* – *Solução*

a) A diagonal do retângulo corta o segmento JH em seu ponto médio, o ponto I, veja a figura a seguir. Além disso, os pontos B e P são os pontos médios dos lados AC e OQ do retângulo.



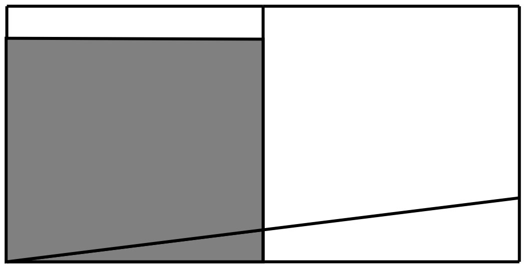
Observe também que F é o ponto médio de EG e M é o ponto médio de LN. Logo, o comprimento dos segmentos GF, FE, LM e MN são todos iguais a $\frac{1}{4}$ m. Há várias formas de calcular as áreas das quatros regiões em cinza (que são dois triângulos e dois trapézios). Vamos mostrar uma maneira um pouco diferente das maneiras usuais.

Deslizando o trapézio $FDJI$ para cima do triângulo AGF, e deslizando o triângulo MNQ para cima do trapézio $HKMI$, obtemos a seguinte figura:

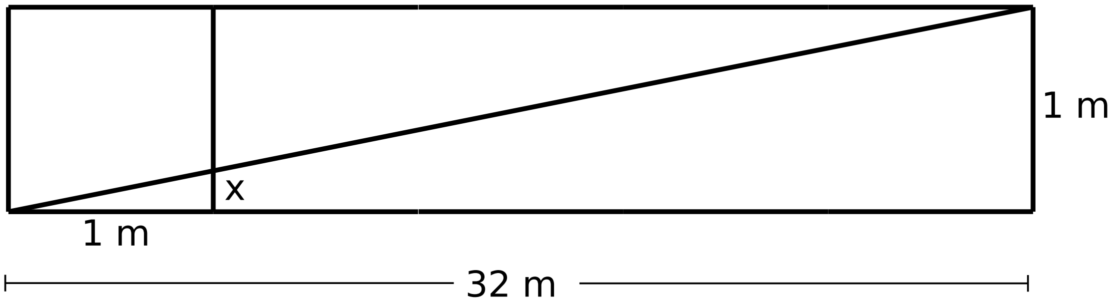


onde observamos dois retângulos de base 1 m e altura $\frac{3}{4}$ m. Logo, a área total das regiões pintadas de cinza é, em metros quadrados, igual a $2 \times \frac{3}{4} = 1,5$.

b) Vamos aplicar a mesma ideia da questão anterior. Primeiro dividimos os quadrados em grupos de dois. O primeiro e o segundo, depois o terceiro e o quarto, depois o quinto e o sexto, e assim por diante. Em seguida, tomamos cada figura pintada em cinza que se encontra em um quadrado de ordem par e a deslizamos para cima da figura pintada em cinza do seu quadrado vizinho à esquerda. Por exemplo, a figura pintada de cinza do segundo quadrado é deslizada para a esquerda e vai para cima da figura pintada de cinza do primeiro quadrado, formando a figura:



A região pintada em cinza forma agora um retângulo de base 1 m. Vamos descobrir a altura desse retângulo. Como o muro tem 32 m de largura e 1 m de altura, e cada quadrado dentro do muro tem lado 1 m, temos a figura:



Por semelhança de triângulos,

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{32}\,\text{m}.$$

Logo, $x = \frac{1}{32}$. Logo, a altura do retângulo formado pelas regiões cinzas no primeiro quadrado é, em metros, igual a $1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$. Como são 32 quadrados, teremos $\frac{32}{2} = 16$ retângulos cinzas, todos iguais (um no primeiro quadrado, outro no terceiro quadrado, outro no quinto, etc.). Portanto, a área total do muro pintada em cinza será, em metros quadrados, igual a $\frac{31}{32} \times 16 = \frac{31}{2}$.

$\boxed{13}$ *O lema de Quatrolândia* – *Solução*

a)

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{S} & \mathbf{E} & \mathbf{R} & \mathbf{V} & \mathbf{I} & \mathbf{L} \\ & & & & \times & 4 \\ \hline \mathbf{L} & \mathbf{I} & \mathbf{V} & \mathbf{R} & \mathbf{E} & \mathbf{S} \end{array}$$

Analisando a multiplicação acima, notamos que **S** é o algarismo mais à esquerda do número **SERVIL**. Como ambos os números **SERVIL** e **LIVRES** têm 6 algarismos, temos que as únicas opções possíveis para o algarismo **S** são **S** $= 1$ ou **S** $= 2$ pois, caso contrário, o número **LIVRES** teria mais algarismos que o número **SERVIL**. Note no entanto que, como o número **LIVRES** é um múltiplo de 4, temos que ele deve ser par, logo não pode terminar com o dígito 1. Segue daí que **S** $= 2$.

Como os algarismos **S** e **L** são aqueles localizados mais à direita nos dois números **SERVIL** e **LIVRES** respectivamente, então, o algarismo **L** é obtido do algarismo **S** após uma multiplicação por quatro seguida, possivelmente, de uma soma por um dos números 0, 1, 2 ou 3. Nesse caso, como $\mathbf{S} = 2$, então $\mathbf{S} \times 4 = 8$, logo para obter o algarismo **L** só podemos somar 0 ou 1, pois a soma por 2 ou 3 conduziria ao resultado 10 ou 11 respectivamente. Assim, as possibilidades para o valor do algarismo **L** são $\mathbf{L} = 2$ ou $\mathbf{L} = 9$. Note que como o último algarismo de **SERVIL** e **LIVRES** são **L** e **S** respectivamente, então temos que **S** tem que ser o algarismo das unidades de $\mathbf{L} \times 4$.

Temos as seguintes opções:

• $\mathbf{L} = 9$

Nesse caso, $\mathbf{L} \times 4 = 36$ que tem o algarismo das unidades igual a 6. Logo obteríamos $\mathbf{S} = 6$, o que é uma contradição com a suposição de que $\mathbf{S} = 2$.

• $\mathbf{L} = 8$

Nesse caso, $\mathbf{L} \times 4 = 32$ que tem o algarismo das unidades igual a 2. Logo $\mathbf{S} = 2$, o que está de acordo com a nossa escolha para **S**.

Os casos acima nos fazem concluir que a única escolha possível para **S** e **L** são $\mathbf{S} = 2$ e $\mathbf{L} = 8$ respectivamente.

b) Pelo item anterior temos que $\mathbf{S} = 2$ e $\mathbf{L} = 8$. Assim, o diagrama da multiplicação pode ser modificado para:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & & {\scriptstyle 3} & \\
2 & \mathbf{E} & \mathbf{R} & \mathbf{V} & \mathbf{I} & 8 \\
 & & & & \times & 4 \\
\hline
8 & \mathbf{I} & \mathbf{V} & \mathbf{R} & \mathbf{E} & 2
\end{array}
$$

Como os dois primeiros algarismos de **SERVIL** e **LIVRES** já estão determinados, podemos reduzir esse diagrama ao seguinte:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & {\scriptstyle 3} & \\
\mathbf{E} & \mathbf{R} & \mathbf{V} & \mathbf{I} & 8 \\
 & & & \times & 4 \\
\hline
\mathbf{I} & \mathbf{V} & \mathbf{R} & \mathbf{E} & 2
\end{array}
$$

Analisando a multiplicação acima, notamos que **E** é o algarismo mais à esquerda do número **ERVI**8. Como ambos os números **ERVI**8 e **IVRE**2 têm 5 algarismos, temos que as únicas opções possíveis para o algarismo **E** são $\mathbf{E} = 1$ ou $\mathbf{E} = 2$ pois, caso contrário, o número **IVRE**2 teria mais algarismos que o número **ERVI**8.

Vamos analisar os seguintes casos:

Primeiro caso: $\mathbf{E} = 2$.

$$
\begin{array}{ccccc}
\square & & & {\scriptstyle 3} & \\
\mathbf{E} & \mathbf{R} & \mathbf{V} & \mathbf{I} & 8 \\
 & & & \times & 4 \\
\hline
\mathbf{I} & \mathbf{V} & \mathbf{R} & \mathbf{E} & 2
\end{array}
$$

Como os algarismos **E** e **I** são aqueles localizados mais à direita nos dois números **ERVI**8 e **IVRE**2 respectivamente, então, o algarismo **I** é obtido do algarismo **E** após uma multiplicação por quatro seguida, possivelmente, de uma soma por um dos números 0, 1, 2 ou 3. Nesse caso, como estamos supondo que $\mathbf{E} = 2$, então $\mathbf{E} \times 4 = 8$, logo para obter o algarismo **I** só podemos somar 0 ou 1, pois a soma por 2 ou 3 conduziria ao resultado 10 ou 11 respectivamente. Assim, as possibilidades para o valor do algarismo **I** são $\mathbf{I} = 8$ ou $\mathbf{I} = 9$. Note que como os últimos algarismos de **ERVI**8 e **IVRE**8 são **E** e **I** respectivamente, então temos que **E** tem que ser o algarismo das unidades de $\mathbf{I} \times 4 + 3$.

Temos as seguintes opções:

• $\mathbf{I} = 9$

Nesse caso, $\mathbf{I} \times 4 + 3 = 39$ que tem o algarismo das unidades igual a 9. Logo obteríamos $\mathbf{E} = 9$, o que é uma contradição com a suposição de que $\mathbf{E} = 2$.

• $\mathbf{I} = 8$

Nesse caso, $\mathbf{I} \times 4 + 3 = 35$ que tem o algarismo das unidades igual a 5. Logo obteríamos $\mathbf{E} = 5$, o que é uma contradição com a suposição de que $\mathbf{E} = 5$.

Segundo caso: $\mathbf{E} = 1$.

Como os algarismos **E** e **I** são aqueles localizados mais à direita nos dois números **ERVI**8 e **IVRE**2 respectivamente, então, o algarismo **I** é obtido do algarismo **E** após uma multiplicação por quatro seguida, possivelmente, de uma soma por um dos números 0, 1, 2 ou 3 (que deve preencher o quadradinho $\square$ acima do algarismo **E** no diagrama acima). Sendo $E = 1$ então as opções possíveis para o valor de **I** seriam $\mathbf{I} = 4 = 4 \times \mathbf{E} + 0$, $\mathbf{I} = 5 = 4 \times \mathbf{E} + 1$, $\mathbf{I} = 6 = 4 \times \mathbf{E} + 2$ e $\mathbf{I} = 7 = 4 \times \mathbf{E} + 3$. Note que como o último algarismo de **ERVI**8 e **LIVRE**2 são **E** e **I** respectivamente, então temos que **E** tem que ser o algarismo das unidades de $\mathbf{I} \times 4 + 3$.

Temos as seguintes opções:

• $\mathbf{I} = 4$

Nesse caso, $\mathbf{I} \times 4 + 3 = 19$ que tem o algarismo das unidades igual a 9. Logo obteríamos $\mathbf{E} = 9$, o que é uma contradição com a suposição de que $\mathbf{E} = 1$.

• $\mathbf{I} = 5$

Nesse caso, $\mathbf{I} \times 4 + 3 = 23$ que tem o algarismo das unidades igual a 3. Logo obteríamos $\mathbf{E} = 3$, o que é uma contradição com a suposição de que $\mathbf{E} = 1$.

• $\mathbf{I} = 6$

Nesse caso, $\mathbf{I} \times 4 + 3 = 27$ que tem o algarismo das unidades igual a 7. Logo obteríamos $\mathbf{E} = 7$, o que é uma contradição com a suposição de que $\mathbf{E} = 7$.

• $\mathbf{I} = 7$

Nesse caso, $\mathbf{I} \times 4 + 3 = 31$ que tem o algarismo das unidades igual a 1. Logo obteríamos $\mathbf{E} = 1$ que está de acordo com a nossa escolha para valor de **E**. Observe que dentre todas essas opções a única que não conduziu a uma contradição foi a opção $\mathbf{I} = 7$. Assim devemos descartar todas as demais possibilidades e supor que $\mathbf{E} = 1$ e $\mathbf{I} = 7$.

c) Pelo item anterior temos que $\mathbf{E} = 7$ e $\mathbf{I} = 7$. Assim o diagrama apresentado no item anterior pode ser modificado pelo seguinte:

$$\begin{array}{ccccc} {\scriptstyle 3} & & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 3} & \\ 1 & \mathbf{R} & \mathbf{V} & 7 & 8 \\ & & & \times & 4 \\ \hline 7 & \mathbf{V} & \mathbf{R} & 1 & 2 \end{array}$$

Para facilitar ainda mais, podemos nos concentrar no diagrama mais simples abaixo:

$$\begin{array}{ccc} & \square & {\scriptstyle 3} \\ & \mathbf{R} & \mathbf{V} \\ & \times & 4 \\ \hline 3 & \mathbf{V} & \mathbf{R} \end{array}$$

onde o número que deve preencher o quadradinho é o 0, 1, 2 ou o 3.

Note que a multiplicação do algarismo **R** por 4 somado com o número que deve ocupar o quadradinho, deve resultar em um número que tem o algarismo das dezenas igual a 3 e o algarismo das unidades igual a **V**, isto é: $\mathbf{R} \times 4 + \square = 3\mathbf{V}$.

Isso só é possível se o algarismo **R** satisfizer que $\mathbf{R} = 7$, $\mathbf{R} = 8$ ou $\mathbf{R} = 9$. Dividimos o problema nos seguintes casos:

Primeiro caso: $\mathbf{R} = 7$.

Nesse caso, temos que $\mathbf{R} \times 4 + \square = 7 \times 4 + \square = 28 + \square = 3\mathbf{V}$, onde $\square \in \{0, 1, 2, 3\}$. Isso só pode ser verdade se o valor do número em $\square$ for igual a 2 ou 3.

Caso o valor do número em $\square$ seja igual a 2, temos que $28+\square = 30$, logo devemos ter $V = 0$. Mas esse valor para V é impossível, pois devemos ter que $\mathbf{V}\times 4+3 = \mathbf{R}$, o que não se verifica, já que o lado esquerdo é igual a $0 \times 4 + 2 = 2$ e estamos supondo que $\mathbf{R} = 7$.

Caso o valor do número em $\square$ seja igual a 3, temos que $28+\square = 31$, logo devemos ter $V = 1$. Mas esse valor para V é impossível, pois o diagrama que aparece acima ficaria escrito como:

$$\begin{array}{ccc} & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 3} \\ & 7 & 1 \\ & \times & 4 \\ \hline 3 & 1 & 7 \end{array}$$

que está claramente errado, já que o número 3 acima do algarismo 7 não poderia estar aparecendo.

Segundo caso: $\mathbf{R} = 8$.

Como $\mathbf{R} \times 4 + \square = 3\mathbf{V}$ e $\square \in \{0, 1, 2, 3\}$, temos que $\mathbf{V} = 2$, ou $\mathbf{V} = 3$, ou $\mathbf{V} = 4$ ou $\mathbf{V} = 5$.

No caso em que $\mathbf{V} = 2$, temos que $\mathbf{V} \times 4 + 3 = 11$, logo concluímos que $\mathbf{R} = 1$, o que contradiz a nossa escolha de $\mathbf{R} = 8$.

No caso em que $\mathbf{V} = 3$, temos que $\mathbf{V} \times 4 + 3 = 15$, logo concluímos que $\mathbf{R} = 5$, o que contradiz a nossa escolha de $\mathbf{R} = 8$.

No caso em que $\mathbf{V} = 4$, temos que $\mathbf{V} \times 4 + 3 = 19$, logo concluímos que $\mathbf{R} = 9$, o que contradiz a nossa escolha de $\mathbf{R} = 8$.

No caso em que $\mathbf{V} = 5$, temos que $\mathbf{V} \times 4 + 3 = 23$, logo concluímos que $\mathbf{R} = 3$, o que contradiz a nossa escolha de $\mathbf{R} = 8$.

Terceiro caso: $\mathbf{R} = 9$.

Como $\mathbf{R} \times 4 + \square = 3\mathbf{V}$, e $\square \in \{0, 1, 2, 3\}$ temos que $\mathbf{V} = 6$, ou $\mathbf{V} = 7$, ou $\mathbf{V} = 8$ ou $\mathbf{V} = 9$.

No caso em que $\mathbf{V} = 6$, temos que $\mathbf{V} \times 4 + 3 = 27$, logo concluímos que $\mathbf{R} = 7$, o que contradiz a nossa escolha de $\mathbf{R} = 8$.

No caso em que $\mathbf{V} = 7$, temos que $\mathbf{V} \times 4 + 3 = 31$, logo concluímos que $\mathbf{R} = 1$, o que contradiz a nossa escolha de $\mathbf{R} = 8$.

No caso em que $\mathbf{V} = 8$, temos que $\mathbf{V} \times 4 + 3 = 35$, logo concluímos que $\mathbf{R} = 5$, o que contradiz a nossa escolha de $\mathbf{R} = 8$.

No caso em que $\mathbf{V} = 9$, temos que $\mathbf{V} \times 4 + 3 = 39$, logo concluímos que $\mathbf{R} = 9$, o que está de acordo com a nossa escolha para $\mathbf{R}$.

Assim, obtemos que a única escolha que não nos conduziu a uma contradição foi a escolha $\mathbf{R} = 9$ e $\mathbf{V} = 9$. Juntamente com as soluções dos itens anteriores, obtemos que

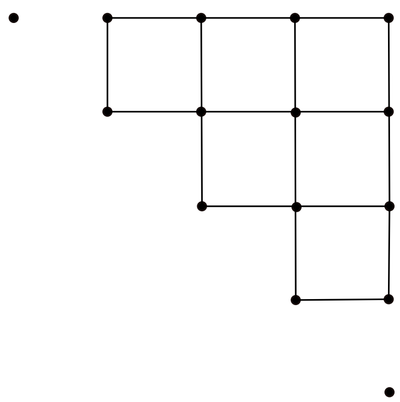
$$\mathbf{SERVIL} = 219978 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{LIVRES} = 879912$$

é a única possibilidade que não nos levou a uma contradição.

Assim devemos mostrar que $219978 \times 4 = 879912$ o que o leitor pode facilmente verificar.

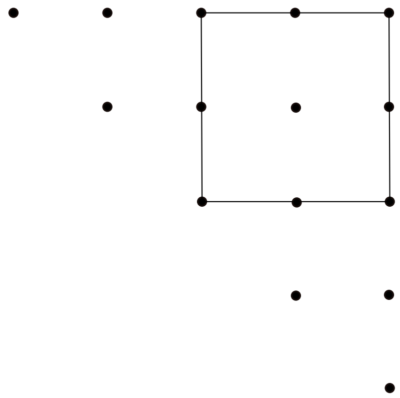
14 ***Quantos quadrados?*** – *Solução*

Considere primeiramente os quadrados de lado 1 como desenhado na figura abaixo:



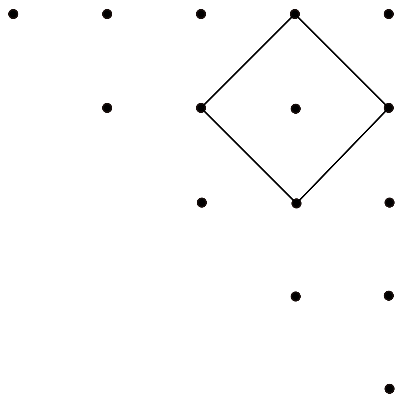
Uma simples contagem nos mostra que existem seis desses quadrados.

Podemos também desenhar um quadrado de lado 2 cujos vértices são pontos do reticulado, como na figura a seguir:

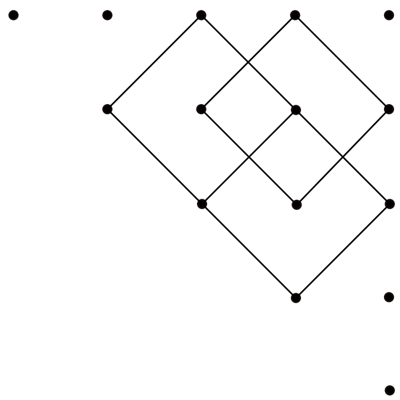


Note que é impossível desenhar um segundo quadrado de lado 2, assim quantidade total de tais quadrados é igual a um.

Agora temos que contar também o número de quadrados orientados em uma direção diferente, como mostra a figura abaixo:



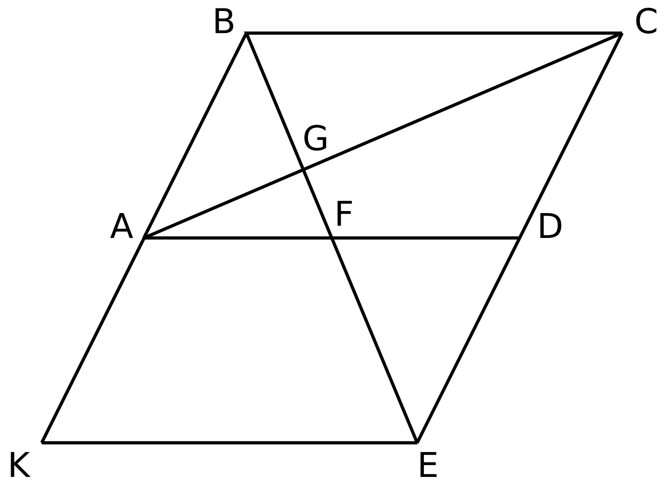
A próxima figura mostra que existem três desses quadrados:



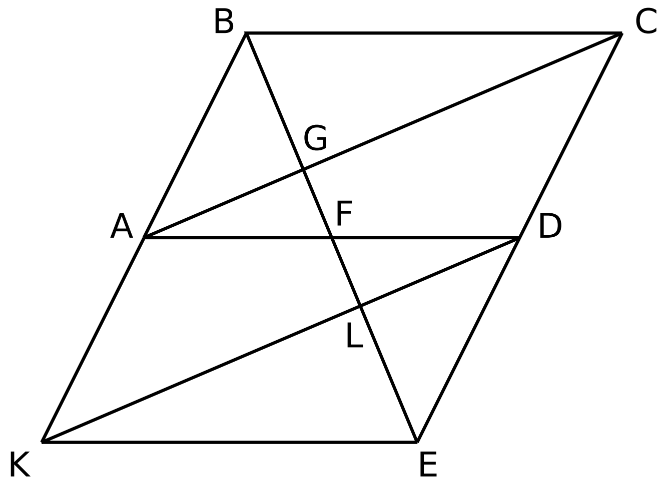
Assim, concluímos que a resposta para a pergunta do professor Ciconete é $6 + 1 + 3 = 10$.

$\boxed{15}$ ***Paralelogramo*** – *Solução*

Vamos desenhar um outro paralelogramo embaixo do paralelogramo $ABCD$. Na figura abaixo, podemos observar um outro paralelogramo $ADEK$, que é congruente ao paralelogramo $BCDA$ e tem um lado comum AD.



Agora, traçamos a diagonal KD do paralelogramo $AEDK$, conforme pode-se observar abaixo:



Como os paralelogramos são congruentes, temos que $\overline{BG} = \overline{LE}$. Além disso, também podemos ver que os segmentos BC, AD e KE são paralelos. Como $\overline{BA} = \overline{AK}$, concluímos daí que $\overline{BG} = \overline{GL} = \overline{LE}$. Como

$$\overline{BG} + \overline{GL} + \overline{LE} = 6$$

temos que cada um deles tem comprimento igual a 2. Como $\overline{GF} = \overline{FL}$ e $\overline{GF} + \overline{FL} = 2$, obtemos então que $\overline{FG} = 1$.

$\boxed{16}$ ***Os*** 50 ***números de Vanessa*** – *Solução*

a) Basta que ela escolha os números $50, 51, 52, \ldots, 99$. Com efeito, se $a < b$ são dois desses números, então $a \geq 50$ e $b \geq 51$. Somando essas duas desigualdades obtemos $a + b \geq 101$ e, em particular, a soma $a + b$ não pode ser igual a 99 ou a 100.

b) Consideremos os seguintes 49 pares de números:

$$\{1,99\},\{2,98\},\{3,97\},\ldots,\{48,52\},\{49,51\}.$$

Vanessa pode escolher no máximo um número de cada um desses pares (já que em caso contrário ela escolheria dois números com soma 100). Então ela pode escolher no máximo 49 dentre os números

$$1,2,\ldots,48,49,51,52,\ldots,100\ .$$

Como ela tem que escolher 50 números no total, então ela é obrigada a escolher exatamente um número de cada um desses pares e também o único número restante, ou seja, o 50.

Agora, observe que como ela tem que escolher o número 50, então não pode escolher o 49 (já que nesse caso teria escolhido dois números com soma 99). Mas como ela tem que escolher um número do par $\{49,51\}$, então ela deve escolher o número 51.

Da mesma maneira, como ela tem que escolher o 51, então não pode escolher o 48, e logo deve escolher o número 52. Continuando com esse procedimento, chegaremos à conclusão de que ela deve escolher necessariamente os números 50, 51, 52, $\ldots$, 99.

$\boxed{17}$ ***Pintando tabuleiro*** – *Solução*

a) A casa que falta pintar na primeira linha tem vizinhas pintadas de B e C. Logo, só pode ser pintada de A ou D. Vamos analisar o caso em que ela é pintada de A, conforme figura abaixo.

1ª linha	A	B	A	C	D
2ª linha					

Neste caso, a casa logo abaixo da que pintamos de A pode ser pintada somente da cor D, pois tem casas vizinhas das cores A, B e C. Pintando-a da cor D, chegamos a:

1ª linha	A	B	A	C	D
2ª linha			D		

A casa vizinha à esquerda da casa que pintamos de D, tendo vizinhos das cores B, A e D, só pode ser pintada de C. E a casa vizinha à direita só pode ser pintada de B. Daí, chegamos a:

1ª linha	A	B	A	C	D
2ª linha		C	D	B	

Por fim, pintando as casas que faltam, chegamos à pintura:

1ª linha	A	B	A	C	D
2ª linha	D	C	D	B	A

E se houvéssemos começado com a cor D na primeira casa que pintamos? Nesse caso, teríamos chegado a

1ª linha	A	B	D	C	D
2ª linha	D	C	A	B	A

Daí, estas são as duas pinturas possíveis das duas primeiras linhas.

b) Continuando a pintura que começamos no item anterior, chegamos às duas pinturas para as oito primeiras linhas:

1ª linha	A	B	D	C	D
2ª linha	D	C	A	B	A
3ª linha	A	B	D	C	D
4ª linha	D	C	A	B	A
5ª linha	A	B	D	C	D
6ª linha	D	C	A	B	A
7ª linha	A	B	D	C	D
8ª linha	D	C	A	B	A

1ª linha	A	B	A	C	D
2ª linha	D	C	D	B	A
3ª linha	A	B	A	C	D
4ª linha	D	C	D	B	A
5ª linha	A	B	A	C	D
6ª linha	D	C	D	B	A
7ª linha	A	B	A	C	D
8ª linha	D	C	D	B	A

Note que a cada duas linhas, o padrão se repete. Seguindo cada um dos casos, concluímos que há apenas duas pinturas possíveis para o tabuleiro inteiro.

c) Como foi dito no item anterior, em cada um dos dois casos possíveis, a pintura das linhas se repete a cada duas linhas. Logo, dividindo 2013 por 2, obtemos $2013 = 1006 \times 2 + 1$. Assim concluímos que a pintura da linha de número 2013 é igual à pintura da primeira linha. Logo, as duas pinturas que podem aparecer na linha de número 2013 são:

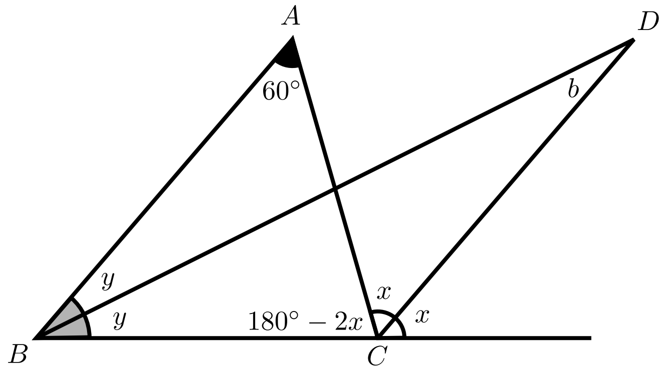
A	B	A	C	D

e

A	B	D	C	D

18 ***Ângulo*** – *Solução*

Sejam x e y as medidas dos ângulos em branco e cinza, respectivamente, como mostra a figura:



Lembre-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a $180°$. Somando os três ângulos do triângulo BCD, obtemos

$$y + b + (180° - 2x) + x = 180°.$$

Rearrumando a equação anterior, temos

$$y + b = x.$$

Somando os ângulos do triângulo ABC, obtemos

$$60° + 2y + 180° - 2x = 180°.$$

Rearrumando a equação anterior, obtemos

$$x = y + 30°.$$

Logo, temos o sistema de equações

$$\begin{cases} y + b = x \\ y + 30° = x \end{cases}$$

de onde concluímos que $b = 30°$.

19 ***Qual é o número?*** – *Solução*

Todo número divisível por 5 tem o algarismo das unidades igual a 5 ou igual a 0. Como o algarismo 0 não foi usado por Juarez então para que $\overline{bcd}$ seja divisível por 5, devemos ter, necessariamente $d = 5$.

Todo número divisível por 3 é tal que a soma dos seus algarismos também é divisível por 3. Assim, como $\overline{cde}$ é divisível por 3, temos que $c + d + e$ é também divisível por 3. Por outro lado, como $d = 5$ então c e d são menores do que 5. Logo, $c + d + e$ é menor do que 15. Também vale que c e d são maiores ou igual do que 1, logo $c+d+e$ também é maior do que 6. Os únicos múltiplos de três que são maiores ou iguais do que 6 e menores do que 15 são o 9 e o 12. Logo $c + d + e$ pode assumir

apenas os valores 9, 12. Usando novamente o fato de que $d = 5$, temos que $c + e$ pode assumir apenas os valores, 4 ou 7.
Todo número divisível por 4 que contenha três ou mais algarismos é tal que o número formado pelos seus algarismos da dezena e da unidade (nessa ordem) é também divisível por 4. Assim, como $\overline{abc}$ é divisível por 4, temos que o número $\overline{bc}$ é também divisível por 4. Em particular, c deve ser par, já que todo número divisível por quatro é também par.
Como c é par, então vale que $c = 2$ ou $c = 4$. Vamos mostrar agora que isso implica que não pode ser o caso que $c + e$ seja igual a 4. De fato, caso seja $c = 2$ então para que $c + e$ fosse igual a 4, deveríamos ter que $e = 2$, o que seria impossível visto que $e \neq c$. Caso seja $c = 4$, então para que $c + e$ fosse igual a 4, deveríamos ter que $e = 0$, o que seria também impossível, já que o algarismo 0 não foi usado por Juarez. Assim, obrigatoriamente temos que $c + d = 7$.
Até aqui já descobrimos que:

(1) c é par;

(2) $c + e = 7$

(3) $\overline{bc}$ é divisível por 4.

Como $d = 5$ então $e \neq 5$. Então pelo item (2) acima, temos que $c \neq 2$. Portanto, o único valor par possível para c é 4. Concluímos assim que $c = 4$ e $e = 3$.
Os valores possíveis que restam para b são 1 e 2. Mas, pelo item (3), concluímos que $b = 2$ pois, se fosse $b = 1$, então $\overline{bc}$ seria igual a 14 que não é um múltiplo de 4.
Finalmente, temos que $a = 1$. Logo o número escrito por Juarez é o $\overline{abcde} = 12453$.

$\boxed{20}$ ***Cinco amigos, cinco corridas*** – *Solução*

a) Como Arnaldo e Bernaldo obtiveram, respectivamente, 19 pontos e 16 pontos como pontuação final, o total de pontos por eles obtidos foi igual a 35. Como nenhum deles ganhou sequer uma das corridas, então, em cada uma das corridas, a soma dos pontos por eles obtidos foi, no máximo, igual a $4 + 3 = 7$. Como $7 \times 5 = 35$ então, para que eles tenham obtido 35 pontos em cinco corridas, é necessário que, juntos, eles tenham obtido invariavelmente 7 pontos por corrida. Assim é necessário que eles tenham ocupado sempre os segundo e terceiro lugares.

b) Em cada uma das cinco corridas são distribuídos $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ pontos. Assim, o total de pontos distribuídos nas cinco corridas é igual a $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times 5 = 75$ pontos. Já que o total de pontos obtidos por Arnaldo e Bernaldo é igual a 35, então o total de pontos obtidos por Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo é igual a $75 - 35 = 40$.
Se o total de pontos obtidos pelo terceiro colocado fosse igual a 14, seria impossível que a soma dos pontos obtidos por Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo fosse igual a 40. De fato, o total de pontos obtidos por Dernaldo e Ernaldo seria menor ou igual a 13 e 12 respectivamente. No entando, $14 + 13 + 12 = 39 < 40$. Assim, o total de pontos obtidos por Dernaldo deve ser maior do que 14. No entanto, Bernaldo obteve 16 pontos e, como Cernaldo obteve menos pontos que ele, a única possibilidade é que Cernaldo tenha obtido 15 pontos.

c) Do item a), temos que as segunda e terceira posições foram ocupadas por Arnaldo e Bernaldo em todas as corridas. Assim, caso Cernaldo tivesse ganhado apenas uma corrida, o máximo de pontos que ele poderia ter obtido seria igual a $5+2+2+2+2=13$ (que corresponde a cinco pontos obtidos na sua vitória somados com, no máximo dois pontos nas demais corridas).
Então, para que Cernaldo tenha conseguido 15 pontos, ele deveria ter vencido exatamente duas corridas. De fato, o único modo pelo qual Cernaldo pôde ter conseguido somar 15 pontos é o seguinte:

Cernaldo chegou primeiro em duas corridas, quarto em duas e quinto em uma.

Como Cernaldo obteve 15 pontos, a soma dos pontos obtidos por Dernaldo e Ernaldo é igual a $40-15=25$. Assim, para que Dernaldo seja o quarto colocado na classificação final, a quantidade de pontos acumulados por ele deve ser ao menos igual a 13. Se Dernaldo tivesse vencido somente uma das corridas, o máximo de pontos que ele poderia ter obtido seria igual a $5+2+2+2+1=12$ (lembre-se de que Cernaldo chegou duas vezes em quarto lugar, logo Dernaldo não pode ter chegado mais do que três vezes em quarto lugar). Portanto, Dernaldo deve ter vencido duas corridas. Concluímos assim que Cernaldo e Dernaldo venceram duas corridas cada um. Por fim, Ernaldo venceu uma das cinco corridas.

$\boxed{21}$ ***Superquadrados*** – *Solução*

a) Será útil adiante que observemos a lista de todos os quadrados perfeitos de dois dígitos:

$$16\,,\quad 25\,,\quad 36\,,\quad 49\,,\quad 64\,,\quad 81\,. \qquad (.1)$$

O número formado pelos primeiros dois algarismos de um superquadrado deve ser algum número da lista (.1). Assim, começemos contando os superquadrados a partir do número 16.

• O número 16 é um superquadrado. Se queremos acrescentar um algarismo à direita de 16 para formar um novo superquadrado, é necessário que tal algarismo seja um 4, porque 64 é o único número da lista (.1) começando com 6. Assim, vemos que o único superquadrado de 3 algarismos começando com 16 é 164.

Sendo agora 49 o único número da lista (.1) começando com 4, então o dígito 9 é o único que pode ser acrescentado à direita de 164 para formar um novo superquadrado.

Agora, nenhum número da lista (.1) começa com 9, portanto, não é possível criar um novo superquadrado adicionando um dígito à direita de 1649. Obtemos assim que a lista de superquadrados que começam com 16 é

$$16\,,\quad 164\,,\quad 1649.$$

• Como não existem números na lista (.1) começando com o dígito 5, temos que o único superquadrado que começa com 25 é

$$25.$$

• Seguindo o mesmo raciocínio utilizado acima para encontrar os superquadrados que começam com 16, vemos que os superquadrados começando com 36 são

$$36\,,\quad 364\,,\quad 3649.$$

• Similar ao caso do 25, o único superquadrado que tem 49 como seus primeiros dois algarismos é o próprio

$$49.$$

• Os superquadrados começando com 64 são

$$64\,,\quad 649.$$

• E finalmente, os superquadrados começando com 81 são

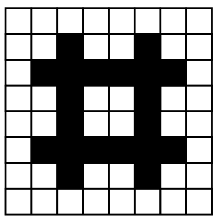
$$81\,,\quad 816\,,\quad 8164\,,\quad 81649.$$

Contando os superquadrados obtidos acima em cada um dos casos, concluímos que existem 14 superquadrados:

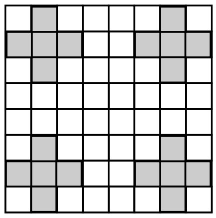
b) Pelo item anterior temos que o maior de todos superquadrados é o número 81649.

$\boxed{22}$ ***Araceli contra Florinda*** – *Solução*

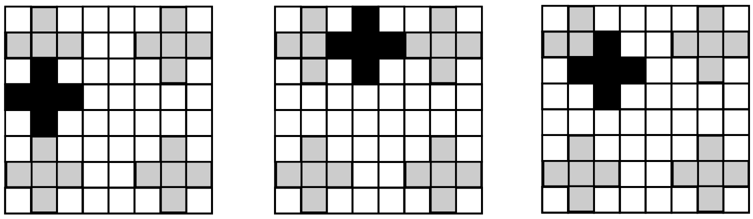
a) A figura abaixo mostra um modo pelo qual Araceli poderia atingir o seu objetivo usando quatro cruzes:



b) Observe que Florinda poderá cobrir as posições coloridas em cinza na figura abaixo por cruzes, caso Araceli não posicione cruzes que cubram algumas dessas posições.



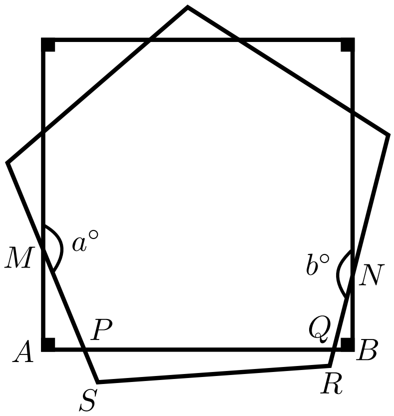
Então as cruzes colocadas por Araceli precisam estar posicionadas de forma a cobrir ao menos um quadradinho de cada uma dessas cruzes coloridas em cinza. Observe que é impossível que Araceli posicione uma cruz que cubra quadradinhos de duas cruzes pintadas em cinza:



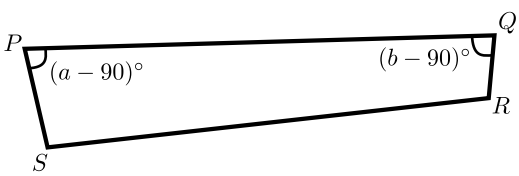
Isso significa que Araceli precisa usar ao menos uma cruz por cada cruz colorida em cinza. Portanto, Araceli precisa utilizar ao menos quatro cruzes para conseguir seu objetivo.

23 ***Pentágono regular*** – *Solução*

Observe o triângulo APM na seguinte figura:



Como $A\hat{M}P = (180 - a)°$, e a soma dos ângulos internos de um triângulo vale $180°$, então $A\hat{P}M = (a - 90)°$. Aplicando o mesmo argumento ao triângulo BQN, obtemos que $B\hat{Q}N = (b - 90)°$. Note que $S\hat{P}Q = A\hat{P}M = (a - 90)°$ e que $P\hat{Q}R = B\hat{Q}N = (b - 90)°$ já que $S\hat{P}Q$ e $A\hat{P}M$ são ângulos opostos pelo vértice P e, analogamente, $P\hat{Q}R$ e $B\hat{Q}N$ são opostos pelo vértice Q.
Vamos nos concentrar no quadrilátero $SPQR$ ilustrado abaixo:



Sendo o pentágono regular, todos os seus cinco ângulos internos são iguais, assim a soma dos seus ângulos internos é igual a $5 \times P\hat{S}R$. Como a soma dos ângulos internos do pentágono é igual a $540°$, logo temos que $5 \times P\hat{S}R = 540°$ de onde obtemos que $P\hat{S}R = 108°$. Como a medida de $Q\hat{R}S$ é igual à de $P\hat{S}R$, temos que $Q\hat{R}S = 180°$.

A soma dos ângulos internos do quadrilátero $PQRS$ é igual a $360°$. Portanto,

$$(a-90)° + (b-90)° + 108° + 108° = 360°,$$

logo, temos que $(a+b)° - 180° + 108° + 108° = 360°$ de onde concluímos que $a° + b° = 324°$.

$\boxed{24}$ *Um após um* – *Solução*

a) Lembremos que um número é múltiplo de 3 se, e somente se, a soma dos seus algarismos é um múltiplo de 3. De modo similar, um número é múltiplo de 9 se, e somente se, a soma de seus algarismos é um múltiplo de 9. Como $a_1 = 111$, vemos que a soma dos seus algarismos é igual a 3. Usando então os critérios antes mencionados, a_1 resulta ser um múltiplo de 3 mas não múltiplo de 9.

b) A soma dos algarismos de $a_2 = 111111111$ é 9. Portanto, a_2 é múltiplo de 9. Agora, observemos que $a_2 = 1001001 \times a_1$:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & \times & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
+ & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

A soma dos algarismos de 1001001 é 3. Então 1001001 é múltiplo de 3 mas não de 9. Isto é, $1001001 = 3 \times k$ onde k é um número inteiro que não é divisível por 3. Já sabíamos, pela parte a), que $a_1 = 3 \times \ell$, onde ℓ é um número inteiro que não é divisível por 3. Assim, podemos concluir que o produto

$$a_2 \;=\; 1001001 \times a_1 \;=\; 9 \times k \times \ell$$

é múltiplo de 9 mas não de 27, porque $k \times \ell$ não é divisível por 3.

c) Do mesmo modo que na parte b), podemos verificar facilmente que

$$a_3 \;=\; 1\underbrace{00\ldots00}_{\text{8 vezes}}1\underbrace{00\ldots00}_{\text{8 vezes}}1 \times a_2. \tag{.2}$$

Agora, a soma dos algarismos do número 1000000001000000001 é 3. Então, esse número é múltiplo de 3 mas não de 9. Isto é,

$$1\underbrace{00\ldots00}_{\text{8 vezes}}1\underbrace{00\ldots00}_{\text{8 vezes}}1 \;=\; 3 \times q$$

onde q é um inteiro que não é divisível por 3. Como já sabíamos que a_2 é da forma $a_2 = 9 \times m$ com m um inteiro que não é divisível por 3, então podemos concluir que o produto em (.2) é da forma

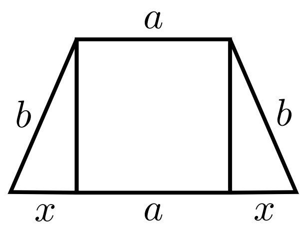
$$1\underbrace{00\ldots00}_{\text{8 vezes}}1\underbrace{00\ldots00}_{\text{8 vezes}}1 \times a_2 \;=\; 27 \times q \times m.$$

Isso mostra que a_3 é múltiplo de 27 mas não de $27 \times 3 = 81$.

Observação: Continuando com o mesmo procedimento podemos mostrar, de forma geral, que a_n é múltiplo de 3^n, mas não é múltiplo de 3^{n+1} para qualquer valor de $n \geq 1$.

25 ***Retângulo ou trapézio*** – *Solução*

Fica claro pela figura no enunciado desse exercício que o comprimento do lado do quadrado deve coincidir com o comprimento de algum dos catetos dos triângulos. Chamemos de a tal comprimento. Além disso, chamemos de b o comprimento da hipotenusa e de x o comprimento do outro cateto. Pela figura abaixo, vemos que o perímetro do trapézio é dado por $2a + 2b + 2x$.



$x = 30 - a - b$

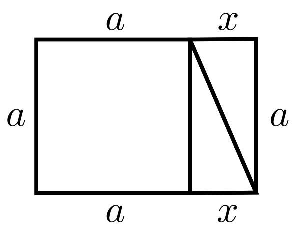
Então, para que o perímetro do trapézio seja igual a 60, é necessário que a seguinte equação seja satisfeita:

$$2a + 2b + 2x = 60.$$

Daí, concluímos que

$$x = \frac{60 - 2a - 2b}{2} = 30 - a - b.$$

Note que o perímetro do retângulo é dado por $4a + 2x$, como podemos observar abaixo.



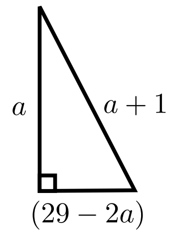
Logo, utilizando a expressão para x obtida acima, obtemos que esse perímetro é igual a:

$$2(30 - a - b) + 4a,$$

quantidade que deve coincidir com 58 pelo dado do problema. Logo, a seguinte equação deve ser satisfeita:

$$2(30 - a - b) + 4a = 58.$$

Simplificando a equação acima obtemos que $b = a + 1$. Substituindo essa expressão para b na expressão $x = 30 - a - b$, obtemos que $x = 29 - 2a$.
Assim, os comprimentos dos catetos de cada triângulo resultam ser a e $29 - 2a$, enquanto o comprimento da hipotenusa resulta ser $b = a + 1$, como ilustramos na figura a seguir:



Usando o Teorema de Pitágoras, temos a equação

$$a^2 + (29-2a)^2 = (a+1)^2.$$

Uma simplificação nos fornece que a satisfaz

$$4a^2 - 118a + 840 = 0.$$

Fatorando o polinômio em a que aparece do lado esquerdo, podemos reescrever a equação acima como

$$2(a-12)(2a-35) = 0.$$

Logo, obtemos como soluções da equação de segundo grau, os números 12 e $35/2$. Mas se a fosse igual a $35/2$, o comprimento $x = 29 - 2a$ seria negativo. Portanto, a única solução válida é $a = 12$.

$\boxed{26}$ ***Sabotando os planos do Chris*** – *Solução*

a) Se marcamos somente um dos quadradinhos do tabuleiro com um **X**, então os três quadradinhos que restarão formarão sempre um L. Chris poderia então escrever um **O** em cada um dos quadradinhos atingindo assim o seu objetivo. Assim, marcando um quadradinho apenas, não seremos capazes de sabotar o plano de Chris. No entanto, marcando dois quadradinhos é possível sabotar os planos de Chris. De fato, marcando dois quadradinhos quaisquer, restariam apenas dois quadradinhos para que Chris desenhe, logo será impossível que ele desenhe um L.

b) Sobre o tabuleiro 3×3, podemos marcar com um **X** quatro quadradinhos como na figura abaixo:

	X	
X		X
	X	

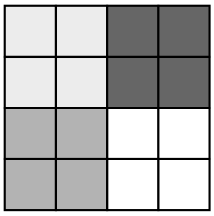
Não deixaremos assim nenhuma configuração de quadradinhos em forma de L para que Chris escreva!

c) Sobre o tabuleiro de 4×4, podemos marcar oito quadradinhos como mostrado na figura abaixo:

	X		X
X		X	
	X		X
X		X	

Conseguimos assim cumprir o nosso propósito de sabotar os planos de Chris.

d) Dividamos o tabuleiro em quatro tabuleiros 2×2 como mostra a figura seguinte:



Pelo que foi observado no item a), em cada um dos tabuleiros 2×2 é necessário marcar, no mínimo, dois quadradinhos para não deixar a Chris três quadradinhos dispostos em L. Como há quatro tabuleiros 2×2, será necessário marcar pelo menos 4×2 quadradinhos sobre o tabuleiro. Logo, será impossível sabotar os planos de Chris marcando apenas sete quadradinhos.

$\boxed{27}$ ***Kiara e Yndira*** – *Solução*

a) A quantidade de números escritos por Yndira é igual ao número de pares que podem ser formados com os 20 números escritos por Kiara.

De quantas maneiras podemos escolher um par de elementos em um conjunto contendo 20 elementos? Para a escolha do primeiro elemento temos 20 possibilidades. Para cada escolha fixa do primeiro elemento, nos restam 19 possibilidades para a escolha do segundo elemento. Assim temos até o instante 20×19 escolhas. Como não interessa a ordem (escolher o elemento A e depois o elemento B é o mesmo que escolher o elemento B e depois o elemento A), na contagem 20×19, contamos cada par duas vezes. Logo, devemos dividir 20×19 por 2 para obter o número de pares. Resumindo, o número de pares que podem ser escolhidos dentre 20 elementos é

$$\frac{20 \times 19}{2} = 190.$$

Assim, a quantidade de números escritos por Yndira foi 190. Como Kiara já havia escrito 20 números no quadro, temos então um total $20+190 = 210$ números escritos no quadro-negro.

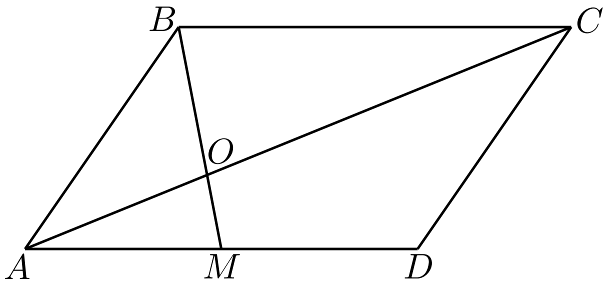
b) Se no total de números escritos no quadro, há 120 números positivos, então, pela parte a), há $210 - 120 = 90$ números negativos escritos. Seja p a quantidade de números positivos escritos por Kiara. Então a quantidade de números negativos escritos por ela é igual a $20 - p$. Para Yndira obter um produto negativo, ela precisa multiplicar um dos $20 - p$ números negativos por um dos p números positivos. Então, a quantidade de números negativos escritos por Yndira é igual a $(20 - p)p$. Assim, a quantidade total de números negativos escritos no quadro-negro é igual a $(20 - p) + (20 - p)p = (20 - p)(p + 1)$. Logo, vale que $(20 - p)(p + 1) = 90$, o que pode ser reescrito como:

$$p^2 - 19p + 70 = 0.$$

Resolvendo essa equação do segundo grau, encontramos que os únicos valores de p que satisfazem essa última equação são $p = 5$ e $p = 14$. Mas como Kiara escreveu mais números positivos que negativos, então devemos ter que $p > 10$. Logo vale que $p = 14$, isto é, Kiara escreveu 14 números positivos sobre o quadro.

28 *A área do quadrilátero* – *Solução*

Os segmentos AD e BC são paralelos. Então, valem as seguintes igualdades entre os ângulos: $O\hat{A}M = O\hat{C}B$ e $O\hat{B}C = O\hat{M}A$.

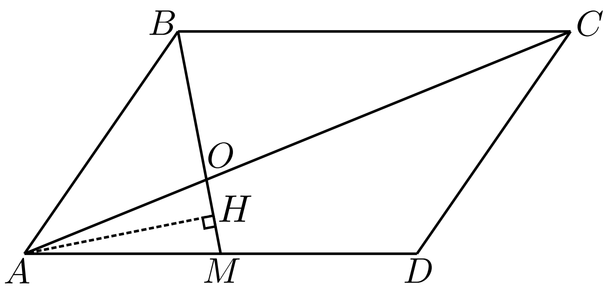


Logo, os triângulos AOM e COB são semelhantes (isto é, esses triângulos têm os mesmos ângulos internos). Como o ponto M é o ponto médio do segmento AD, temos que

$$\overline{BC} = \overline{AD} = 2 \times \overline{AM}.$$

Portanto, a proporção entre os triângulos AOM e COB é de 1 para 2, isto é, o comprimento de cada lado do triângulo COB mede o dobro do comprimento do seu lado correspondente no triângulo AOM. Isso mostra que $\overline{BO} = 2 \times \overline{OM}$.

Note que o segmento AH funciona como altura comum para os triângulos BAO e OAM como mostra a figura abaixo:



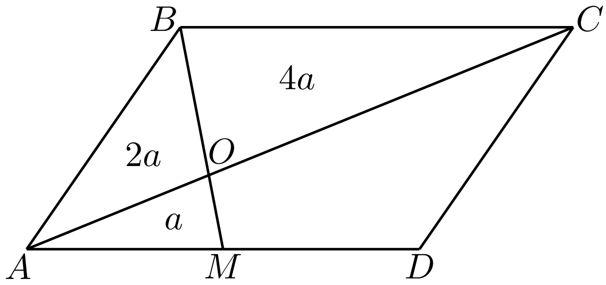
Concluímos assim que

$$\text{Área}(\triangle BAO) = \frac{\overline{BO} \times \overline{AH}}{2} = 2 \times \frac{\overline{OM} \times \overline{AH}}{2} = 2 \times \text{Área}(\triangle OAM).$$

De maneira análoga, os triângulos BAO e OBC compartilham a mesma altura. Como $\overline{OC} = 2 \times \overline{AO}$, então

$$\text{Área}(\triangle OBC) = 2 \times \text{Área}(\triangle AOB).$$

Chamemos de a a medida de área do triângulo AOM. Acima, acabamos de mostrar que a área do triângulo AOB é igual a $2a$, e que a do triângulo OBC é igual a $4a$, como mostrado na figura a seguir:



Agora, observe que os triângulos ABC e ADC são congruentes (isto é possuem as mesmas medidas dos seus lados). Logo esses dois triângulos têm a mesma área. Como a área do triângulo ABC é igual a $6a$, para que o triângulo ACD tenha a mesma área é necessário que a área do quadrilátero $MOCD$ seja igual a $5 \times a$. Pelo dado do problema temos que $5a = 5$ cm^2. Daí decorre que $a = 1$ cm^2. A resposta é então 1 cm^2 de área para o triângulo AOM.

$\boxed{29}$ *Abrindo e fechando portas* – *Solução*

a) Como os múltiplos de 15 que são menores que 50 são os números 15, 30 e 45, temos que o número 15 carrega apenas as chaves para as portas numeradas com 15, 30 e 45. Vamos analisar cada uma dessas três portas separadamente.

• **Porta** 15**:** Os divisores de 15 são os números 1, 3, 5 e 15. Assim, esses são os números que modificarão o estado dessa porta. O número 1 vai destrancá-la, enquanto o número 3 vai trancá-la novamente. Em seguida o número 5 vai destrancá-la e finalmente o número 15 vai trancá-la. Concluímos que essa porta não será destrancada pelo número 15.

• **Porta** 30**:** Os divisores de 30 são os números 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30. Assim, o número 15 será o sétimo número a modificar o estado dessa porta. Como a porta começa trancada e sete é um número ímpar, temos que o número 15 irá destrancar essa porta.

• **Porta** 45**:** Os divisores de 45 são os números 1, 3, 5, 9, 15 e 45. Assim, o número 15 será o quinto número a modificar o estado dessa porta, portanto ele irá destrancá-la.

Concluímos assim que o número 15 irá, de fato, destrancar as portas numeradas com o 30 e o 45.

b) Os divisores de 10 são os números 1, 2, 5 e 10 assim, ao atravessarem o corredor, esses são os únicos números que podem trancar ou destrancar a porta de número 10. Segue daí que essa porta terá o seu estado modificado exatamente quatro vezes. Como ela começa trancada, ela acabará também trancada.

Os divisores de 9 são os números 1, 3 e 9. Assim a porta de número 9 terá o seu estado modificado exatamente três vezes. Como ela começa trancada, ela acabará destrancada.

Observação: Seja k a numeração de uma das portas. Da solução do item acima, podemos concluir que, se k possui uma quantidade par de divisores, então essa porta acabará trancada. Por outro lado, se k possui uma quantidade ímpar de divisores, então essa porta acabará destrancada.

c) Para cada $k \in \{1, 2, \ldots, 50\}$ denotemos por $D(k)$ o número de divisores de k. Pelo enunciado do problema sabemos que existem exatamente $D(k)$ números naturais que carregam a chave da porta número k. Decorre daí que a porta número k terá o seu estado alterado exatamente $D(k)$ vezes. Portanto as portas que acabarão abertas serão as portas de número k tais que $D(k)$ é ímpar.

Fixemos um k número natural e escrevamos sua decomposição em fatores primos:

$$k = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_m^{\alpha_m}.$$

Qualquer divisor de k deve ser um elemento da forma:

$$p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \cdots \times p_m^{\beta_m}$$

onde cada β_i é um número inteiro escolhido em $\{0, 1, \ldots, \alpha_i\}$. Então $D(k)$ é constituído pelos números dessa forma.

Note que, a cada escolha dos expoentes β_1, β_2,..., β_m, corresponde um único elemento de $D(K)$, ou seja, um único divisor de k. Podemos contar então o número de maneiras de se escolherem expoentes β_1, β_2,..., β_m. Mas como cada β_i deve pertencer ao conjunto $\{0, 1, \ldots, \alpha_i\}$, temos que a quantidade total de escolhas para o valor de β_i é igual a $\alpha_i + 1$. Logo, existem

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots (1 + \alpha_m)$$

escolhas para os valores dos expoentes β_1, β_2,..., β_m e, como consequência,

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots (1 + \alpha_m)$$

divisores do número k.

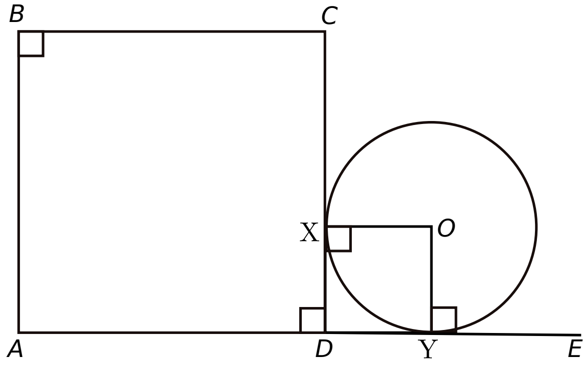
Para que k tenha uma quantidade ímpar de divisores, é suficiente e necessário que cada um dos fatores $\alpha_i + 1$ seja um número ímpar, ou seja, que α_i seja par.

Isso mostra que k possui um número ímpar de divisores se, e somente se, k é um quadrado perfeito. Portanto as portas que ficam abertas são precisamente aquelas com números:

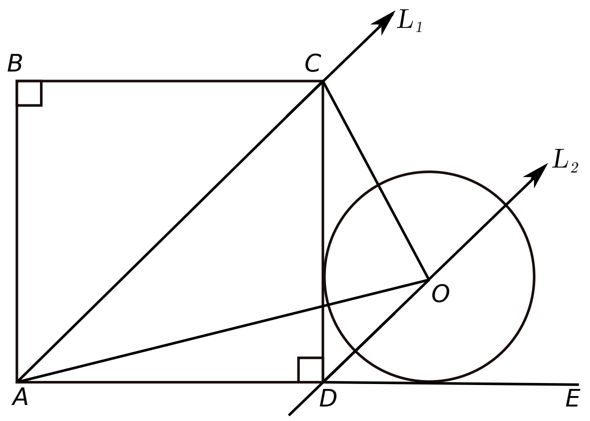
$$1\,, \quad 4\,, \quad 9\,, \quad 16\,, \quad 25\,, \quad 36 \quad \text{e} \quad 49\,.$$

$\boxed{30}$ *Use as paralelas* – *Solução*

a) Sejam X e Y os pontos nos quais a circunferência de centro O tangencia os segmentos DC e DE, como ilustrado na figura abaixo. Observemos primeiro que se desenhamos os segmentos que partem do centro O da circunferência e terminam em X e Y, obtemos como resultado um quadrado $DXOY$.

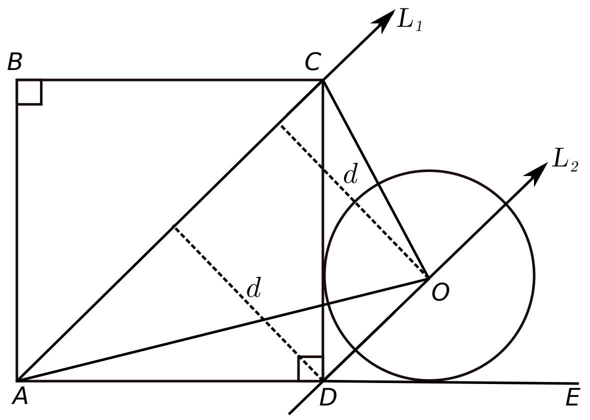


De fato, como X e Y são pontos de tangência, OX deve ser ortogonal a CD e OY deve ser ortogonal a DE. Isso mostra que $DXOY$ é um retângulo. Mas os lados OX e OY são raios para a circunferência e, portanto, têm o mesmo comprimento. Concluímos assim que $DXOY$ é de fato um quadrado. Logo, DO é a diagonal do quadrado $DXOY$, e então $\measuredangle ODE = 45°$.



Como $\measuredangle CAD = 45°$ (CA é a diagonal do quadrado $ABCD$), então as retas L_1 e L_2 são paralelas.

b) Observe que os triângulos ADC e AOC compartilham a mesma base AC. Por outro lado, a distância do vértice D ao segmento AC e a distância do vértice O ao segmento AC coincidem, ambas, com a distância entre as duas linhas paralelas L_1 e L_2, como podemos ver na figura a seguir.



Chamemos de d tal distância. Então, pela fórmula da área de um triângulo, concluímos que

$$\text{Área}(\triangle ADC) = \frac{\overline{AC} \times d}{2} = \text{Área}(\triangle AOC).$$

Se a área do quadrado $ABCD$ é 36 cm^2, então Área($\triangle ADC$) $= 18$ cm^2. Portanto, a resposta é Área($\triangle AOC$) $= 18$ cm^2.

NÍVEL 3 – SOLUÇÕES

1 ***Quadrado mágico*** – *Solução*

a) A soma de todos os ímpares de 1 a 17 é 81. Como são três colunas no quadrado, e todas as colunas (e linhas) têm a mesma soma, a soma em cada coluna deve ser $81/3 = 27$. Daí, deduzimos que o número que falta na terceira coluna (a dos números 13 e 3) é o número 11, pois aí teremos $11 + 13 + 3 = 27$. Da mesma forma, deduzimos que o número central é o 9. Na primeira linha já temos o 1 e o 11. Logo, o número que falta no canto esquerdo superior é o 15. Seguindo o argumento com as casas que faltam, chegamos à tabela

15	1	11
5	9	13
7	17	3

de onde concluímos que $X = 7$.

b) Existem várias soluções possíveis. Uma, por exemplo, seria

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2 *Clube de ciclistas* – *Solução*

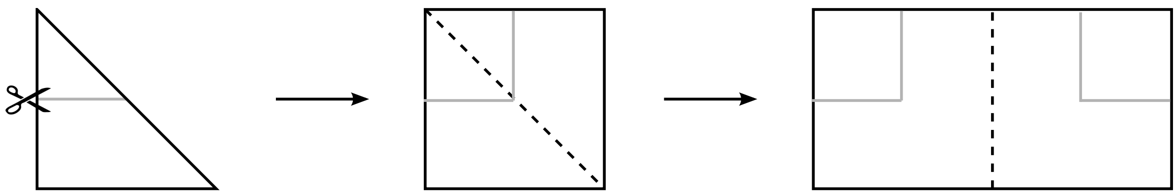
Já que os ciclistas não usam o dígito 0 e nem o 8, restam os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 9. Assim, há 8 possibilidades para a escolha de cada dígito. Temos que escolher números de três dígitos. Logo, temos 8 opções para o primeiro dígito, 8 opções para o segundo dígito e 8 opções para o terceiro dígito. Daí, como

$$8 \times 8 \times 8 = 512\,,$$

concluímos que no máximo 512 sócios podem se inscrever.

3 *Tesoura e papel* – *Solução*

a) Vamos marcar a linha cortada pela tesoura em cinza, e fazer o processo inverso, que corresponde a abrir a folha depois de cortada:



Logo, a folha foi dividida em três pedaços.

b) Como se pode observar, os dois quadrados recortados nos cantos superior esquerdo e inferior direito têm lado igual a 5 cm. Como a área de um quadrado é o lado ao quadrado, a área de cada quadrado é igual $5 \times 5 = 25$ cm^2. A folha é um retângulo de base 20 cm e altura 10 cm. Logo, como a área de um retângulo é base vezes altura, a área da folha é de $20 \times 10 = 200$ cm^2. Subtraindo a área total pela área dos dois quadrados nos cantos, concluímos que a área do pedaço maior da folha após o corte pela tesoura é

$$200 - 2 \times 25 = 200 - 50 = 150 \text{ cm}^2\,.$$

4 *A corrida de Cordisburgo* – *Solução*

Seja x o número de voltas que Rosa realizou nessa primeira hora de corrida. Como Guimarães deu mais voltas que Rosa, e ambos andaram com velocidade constante, o número de vezes que Guimarães ultrapassou Rosa foi

$$230 - x.$$

Como Rosa deu mais voltas que João, e ambos andaram com velocidade constante, o número de vezes que Rosa ultrapassou João foi

$$x - 111.$$

Como Guimarães deu mais voltas que João, e ambos andaram com velocidade constante, o número de vezes que Guimarães ultrapassou João foi

$$230 - 111.$$

Logo, o número total de ultrapassagens nessa primeira hora de corrida foi

$$\begin{aligned}(230-x)+(x-111)+(230-111) &= 230-111+230-111\\ &= 238.\end{aligned}$$

5 ***Múltiplos de* 3 *e quadrados*** – *Solução*

a) Note que o 48 é um termo da sequência que é um múltiplo de 3 que satisfaz que $48+1=49=7^2$. Assim, para encontrar o seu sucessor, tentaremos obter um múltiplo de três que, acrescido de uma unidade, seja igual a $8^2=64$. Subtraindo uma unidade de 64, obtemos 63, que é realmente um múltiplo de 3.
Em outras palavras, temos que $63+1=64=8^2$, logo 63 é o próximo termo da sequência.

Observação: Note que o mesmo raciocínio não funciona para encontrar o termo da sequência que aparece após o termo 63. De fato, se calcularmos $9^2-1=81-1=80$ acabamos encontrando um número que não é múltiplo de 3. O procedimento desenvolvido nos itens b) e c) abaixo nos mostra como contornar esse tipo de dificuldade.

b) Começamos escrevendo os primeiros quadrados perfeitos em ordem crescente:

$$2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 7^2,\ 8^2,\ 9^2,\ 10^2,\ 11^2,\ 12^2,\ 13^2,\ 14^2,\ 15^2,\ldots$$

que é igual à sequência

$$4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100,\ 121,\ 144,\ 169,\ 196,\ 225,\ldots$$

Subtraindo uma unidade de cada um dos termos, obtemos a nova sequência

$$3,\ 8,\ 15,\ 24,\ 35,\ 48,\ 63,\ 80,\ 99,\ 120,\ 143,\ 168,\ 195,\ 224,\ldots$$

Excluímos dessa lista aqueles números que não são múltiplos de 3, obtendo a lista:

$$3,\ 15,\ 24,\ 48,\ 63,\ 99,\ 120,\ 168,\ 195,\ldots$$

Essa é então uma lista crescente dos múltiplos de 3 cuja soma com 1 resulta em um quadrado perfeito. Note que o seu oitavo termo é igual a 168. Logo, esse é o número que estamos procurando.

Observação: Notamos na solução do item acima que, ao subtrairmos uma unidade do quadrado de qualquer número que não seja um múltiplo de 3, obtemos como resultado um múltiplo de 3.
Por exemplo, o número 4 não é um múltiplo de 3, no entanto $4^2-1=16-1=15$ que é um múltiplo de 3. Também 11 não é um múltiplo de 3, mas $11^2-1=121-1=120$ que é um múltiplo de 3.
Note que os múltiplos de 3 são os números x do tipo $x=3n$ para algum número natural n. Os números que não são múltiplos de 3 são aqueles que podem ser escritos na forma $x=3n+1$ ou $x=3n+2$. Esses dois tipos de números correspondem respectivamente àqueles cujo resto da divisão por 3 é igual a 1 ou 2.

Consideremos primeiramente um número x do primeiro tipo, isto é, do tipo $x = 3n+1$. Note que $x^2 = (3n+1)^2 = 9n^2+6n+1$. Assim, $x^2-1 = 9n^2+6n$ que é um múltiplo de 3.
De modo análogo, para números do segundo tipo $x = 3n+2$, temos que $x^2 = 9n^2 + 12n+4$, logo $x^2-1 = 9n^2+12n+3$ que também é um múltiplo de 3.
Por último notamos que para um múltiplo de 3, $x = 3n$, vale que $x^2-1 = 9n^2-1$ que não pode ser múltiplo de 3, já que $9n^2$ é um múltiplo de 3 por si só.

c) Estamos interessados em calcular o $2013^{\underline{o}}$ termo da lista:

$$3,\ 15,\ 24,\ 48,\ 63,\ 99,\ 120,\ 168,\ 195, \ldots$$

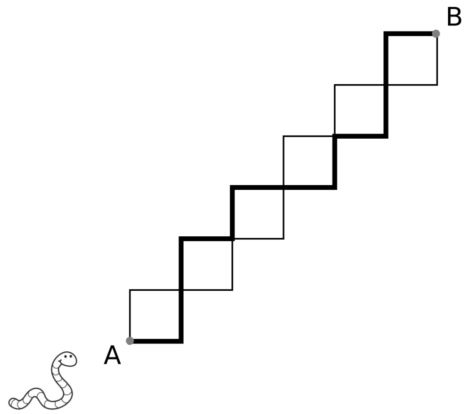
que aparece no item anterior. Sejam os números do tipo 1 e do tipo 2, aqueles cuja divisão por 3 deixam resto igual a 2 e 1, respectivamente. Pela observação acima, concluímos que, para gerar essa lista, podemos formar primeiramente uma lista crescente alternando os números do tipo 1 e do tipo 2. Em seguida devemos elevar ao quadrado cada termo e, por último, subtrair uma unidade de cada termo.
Como estamos interessados em encontrar o $2013^{\underline{o}}$ número, podemos nos concentrar em encontrar o $1007^{\underline{o}}$ termo da sequência de números do tipo 1. O primeiro termo dessa lista é igual a $3\times 0+2 = 2$, o segundo é igual a $3\times 1+2 = 5$, o terceiro é igual a $3\times 2+2 = 8$ e assim por diante. Logo o $1007^{\underline{o}}$ termo é igual a $3\times 1006+2 = 3020$.
Assim, para gerar o $2013^{\underline{o}}$ termo da lista

$$3,\ 15,\ 24,\ 48,\ 63,\ 99,\ 120,\ 168,\ 195, \ldots$$

precisamos então elevar o número 3020 ao quadrado e subtrair uma unidade, obtendo então o número 9120399.

6 ***Minhoca matemática*** – *Solução*

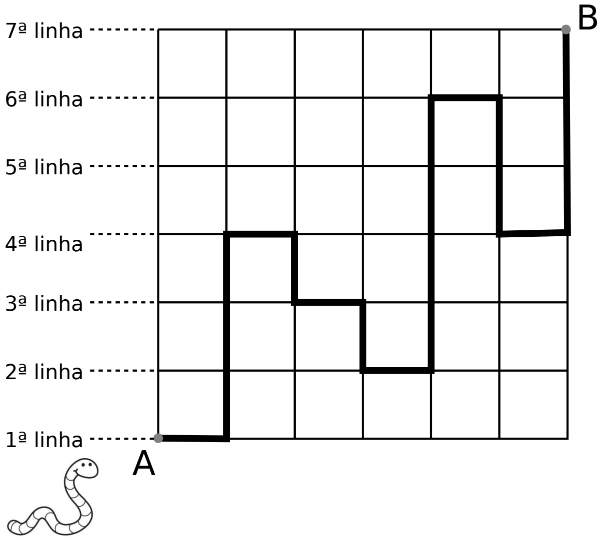
a) Para fazer um caminho contido nos segmentos da figura, a minhoca matemática deve escolher fazer, a cada dois passos, um para cima e outro para a direita, ou um para direita e outro para cima. Por exemplo, se a minhoca faz o caminho ilustrado a seguir (em linha mais grossa)



quer dizer que ela escolheu para a direita, para cima; depois escolheu para cima, para a direita; depois escolheu novamente para cima, para a direita; depois escolheu para a direita, para cima; depois novamente para a direita, para cima; e, por último, escolheu para cima, para a direita. Como a minhoca teve de fazer essa escolha seis vezes, e a cada vez ela tinha duas possibilidades, o número total de caminhos que ela poderá fazer será:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64 \text{ caminhos.}$$

b) Vamos numerar as linhas do quadriculado:



Para ir do ponto A ao ponto B, como a minhoca não anda para a esquerda, ela deve andar seis vezes para a direita. Como a minhoca não passa duas vezes pelo mesmo lugar, basta dizer em quais linhas a minhoca foi para a direita para determinar todo o caminho. Por exemplo, no caminho acima, a sequência de linhas onde a minhoca foi para a direita é:

1ª linha, 4ª linha, 3ª linha, 2ª linha, 6ª linha, 4ª linha.

Como são sete linhas no quadriculado, cada vez onde ela anda para a direita, a minhoca tem sete escolhas para a linha. Como são seis passos para a direita, isso dá um total de $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 117649$ caminhos possíveis para a minhoca ir do ponto A até o ponto B.

7 ***Equiláteros*** *– Solução*

a) Como o segmento IH é paralelo ao segmento AJ, e o segmento AI é paralelo ao segmento JH, temos que $\overline{IH} = \overline{AJ}$ e $\overline{AI} = \overline{JH}$. Observação: a barra em cima do segmento denota o comprimento do segmento.

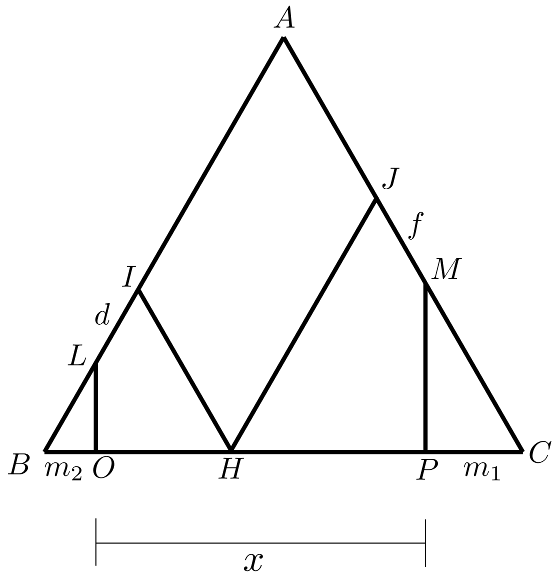
Como o lado do triângulo ABC mede 1, temos que

$$1 = \overline{AB} = \overline{AI} + \overline{IB} = \overline{AI} + \overline{IH}.$$

Logo, o perímetro do quadrilátero é dado por

$$\overline{AI} + \overline{IH} + \overline{HJ} + \overline{JA} = 2(\overline{AI} + \overline{IH}) = 2.$$

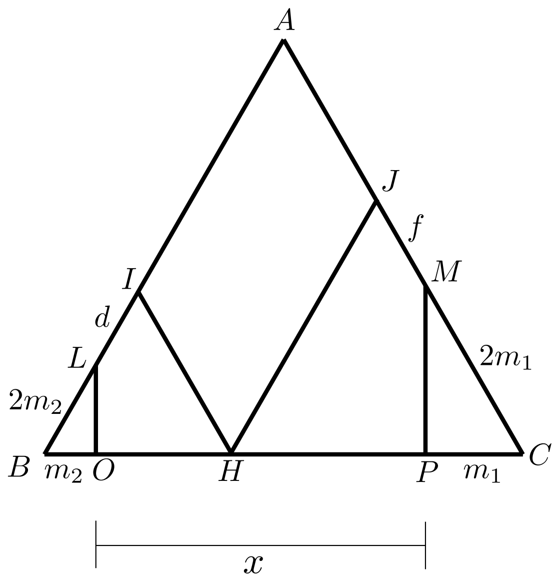
b) Vamos começar chamando $\overline{BO} = m_2$ e $\overline{CP} = m_1$, conforme a figura a seguir:



Os ângulos internos de um triângulo equilátero são todos iguais a $60°$. Logo, $\measuredangle ACB = \measuredangle ABC = 60°$. Vamos olhar para o triângulo PCM. Como MP é perpendicular a PC, este triângulo é um triângulo retângulo. Como o cosseno de um ângulo ($\cos$) é definido como a razão entre cateto adjacente a esse ângulo e hipotenusa, temos que

$$\cos 60° = \frac{1}{2} = \frac{\overline{PC}}{\overline{MC}} = \frac{m_1}{\overline{MC}}.$$

Disso, concluímos que $\overline{MC} = 2m_1$. Por um argumento parecido, concluímos também que $\overline{LB} = 2m_2$.



Como o triângulo HJC é equilátero, temos que $\overline{HJ} = f + 2m_1$. Como $\overline{AI} = \overline{HJ}$, concluímos que $\overline{AI} = f + 2m_1$. Como $\overline{AB} = 1$, temos que $2m_1 + d + f + 2m_2 = 1$, e portanto, $m_1 + m_2 = \frac{1-d-f}{2}$. Por outro lado, como $\overline{BC} = 1$, temos que

$$m_1 + x + m_2 = 1.$$

Substituindo uma equação na outra, obtemos

$$x = \frac{1+d+f}{2}.$$

8 ***Tridominós*** – *Solução*

a) A única face de um tridominó que possui duas faces vizinhas será chamada de face central do tridominó. Vamos dividir um quadrado 3×3 em nove quadrados 1×1 numerados como abaixo:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Aqui estamos supondo que cada uma das faces quadradas numeradas de 1 a 9 têm a mesma área de cada uma das três faces quadradas usadas para construir o tridominó. Como cada tridominó tem três faces, e o quadrado 3×3 tem nove, caso fosse possível montar tal quadrado usando tridominós, a quantidade de tridominós utilizada seria exatamente três. Abaixo mostraremos que é impossível fazê-lo!

Se quiséssemos montar um quadrado 3×3 juntando peças de tridominós, então alguma das três faces quadradas do tridominó deveria ocupar a posição numerada com o número 5 no quadrado desenhado na figura acima. Temos assim os seguintes casos:

Primeiro caso: A face posicionada sobre a posição de número 5 é uma face central de tridominó.

Nesse caso, temos quatro possibilidades para a posição do tridominó:

- Ele ocupa as posições $4, 5, 8$;
- Ele ocupa as posições $2, 5, 4$;
- Ele ocupa as posições $2, 5, 6$;
- Ele ocupa as posições $6, 5, 8$.

Vamos agora excluir a primeira dessas possibilidades. Se fosse verdade que as três faces quadradas de um tridominó ocupassem as posições $4, 5, 8$, então a única forma de se posicionar um segundo tridominó sobre o restante do quadrado 3×3, seria colocando-o sobre as faces $2, 3, 6$ desse quadrado. Nesse caso, restariam sem ser cobertas as faces do quadrado 3×3 numeradas com 1, 7 e 9. Porém, é impossível posicionar o terceiro tridominó sobre essas três faces!

Isso exclui a primeira das possibilidades listadas acima. As outras três possibilidades apresentadas podem ser excluídas de maneira semelhante.

Segundo caso: A face posicionada sobre a posição de número 5 não é uma face central de tridominó.

Nesse caso, temos as seguintes possibilidades para a posição do tridominó:

- Ele ocupa as posições $5, 2, 1$;
- Ele ocupa as posições $5, 2, 3$;
- Ele ocupa as posições $5, 6, 3$;
- Ele ocupa as posições $5, 6, 9$;
- Ele ocupa as posições $5, 8, 9$;

- Ele ocupa as posições $5, 8, 7$;
- Ele ocupa as posições $5, 4, 7$;
- Ele ocupa as posições $5, 4, 1$.

Vamos agora excluir a primeira dessas possibilidades. Se fosse verdade que as três faces quadradas de um tridominó ocupassem as posições $5, 2, 1$, então teríamos as duas possibilidades para o posicionamento de um segundo tridominó:

i) Um segundo tridominó ficaria posicionado sobre as posições $4, 7, 8$.

Nesse caso, restariam sem ser cobertas as faces do quadrado 3×3 numeradas com 3, 6 e 9. Porém é impossível posicionar o terceiro tridominó sobre essas três faces.

ii) Um segundo tridominó ficaria posicionado sobre as posições $8, 9, 6$.

Nesse caso, restariam sem ser cobertas as faces do quadrado 3×3 numeradas com 3, 4 e 7. Porém é impossível posicionar o terceiro tridominó sobre essas três faces.

Assim, estão excluídos os casos *i*) e *ii*) listados acima, e como consequência, a possibilidade de que um tridominó seja posicionado sobre as posições $5, 2, 1$. As outras sete possibilidades listadas acima excluem-se de maneira semelhante.

Concluímos assim que é impossível formar um quadrado 3×3 juntando peças de tridominó.

b) Um quadrado 4×4 pode ser dividido em 16 faces quadradas 1×1 como mostrado na figura abaixo:

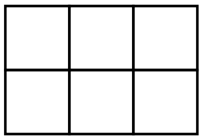
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Aqui estamos supondo que cada uma das faces quadradas numeradas de 1 a 16 têm a mesma área de cada uma das três faces quadradas usadas para construir o tridominó. Como cada tridominó tem três faces, caso fosse possível montar tal quadrado usando tridominós, a quantidade total de faces presentes nesse quadrado deveria ser um múltiplo do número 3. Como 16 não é um múltiplo de 3, é impossível juntar tridominós para formar o quadrado.

c) Já vimos nos item *a*) e *b*) que é impossível juntar tridominós para montar quadrados 3×3 e 4×4 respectivamente.

Utilizamos um argumento análogo ao do item *b*) para mostrar que não é possível também montar um quadrado 5×5. De fato, isso é consequência do fato de que tal quadrado teria um total de 25 faces quadradas 1×1, e 25 não é um múltiplo de 3 (ver a solução do item *b*)).

Vamos porém mostrar que é possível montar um quadrado 6×6. De fato, como foi dito no enunciado do problema, é possível juntar dois tridominós para formar um retângulo 2×3 como o ilustrado a seguir:



Podemos repetir o procedimento mais cinco vezes montando um total de seis desses retângulos 2×3. Para isso seriam necessários então $6 \times 2 = 12$ tridominós.

Podemos agora separar esses seis retângulos em três pares. Para cada um desses pares, podemos pegar os dois retângulos e posicioná-los lado a lado para formar um único retângulo 2×6. Como tínhamos três pares, vamos obter um total de três retângulos 2×6.

Finalmente, posicionamos esses três retângulos um sobre o outro para obter um quadrado 6×6. Como dito anteriormente, foi necessário utilizar uma quantidade de 12 tridominós. Logo, essa é a quantidade mínima de tridominós exigida para se formar um quadrado.

9 ***Nascimento?*** – *Solução*

Os quadrados perfeitos que estão mais próximos de 1801-1900 são:

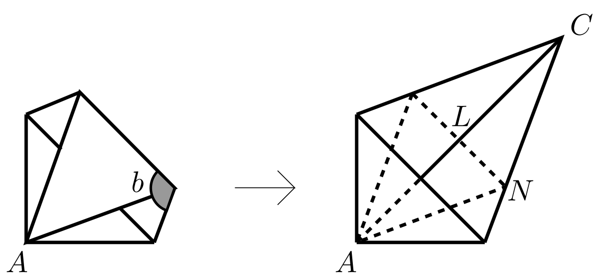
$$\begin{aligned} 42 \times 42 &= 1764 \\ 43 \times 43 &= 1849 \\ 44 \times 44 &= 1936 \end{aligned}$$

Seja x a idade de Benito Juárez no ano x^2. O número x não pode ser 42, pois neste caso Benito não teria nascido no século XIX (o ano 1764 não está no século XIX, que vai do ano 1801 ao ano 1900). Vamos testar agora o ano 1849. Se a idade de Benito em 1849 é 43, então Benito nasceu em $1849 - 43 = 1806$. Como 1806 pertence ao século XIX, esta é a resposta correta. Observe que é a única possível, pois do número 44 em diante, o quadrado do número menos ele é maior do que 1901 e portanto não pertenceria ao século XIX.

10 ***Dobrando papel*** – *Solução*

a) Abrindo o quadrado de papel dobrado, pode-se notar que o ângulo a é o mesmo ângulo do vértice A do quadrado $ABCD$. Logo, como todos os ângulos internos de um quadrado são iguais a $90°$, concluímos que $a = 90°$.

b) Desdobrando o papel (apenas a última dobra), obtemos:



O ângulo $\widehat{ACN}$ é metade da metade do ângulo original do vértice C do quadrado. Como o quadrado tem todos os seus ângulos iguais a $90°$, concluímos que $\widehat{ACN} =$

$\frac{90^\circ}{4} = 22,5^\circ$. Por simetria, o ângulo $\widehat{CLN}$ é igual a 90°. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, observando os ângulos do triângulo CLN, temos que

$$90^\circ + 22,5^\circ + \widehat{LNC} = 180^\circ$$

Portanto, $\widehat{LNC} = 67,5^\circ$. Como $\widehat{LNC} + b = 180^\circ$, obtemos a partir daí que $b = 112,5^\circ$.

11 ***Gato em cachorro*** – *Solução*

Primeiro, vamos calcular a probabilidade de um gato sair gato de cada máquina.

Como a probabilidade de sair um cachorro da máquina A é $\frac{1}{3}$, a probabilidade de sair um gato desta máquina é $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Como a probabilidade de sair um cachorro da máquina B é $\frac{2}{5}$, a probabilidade de sair um gato desta máquina é $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

Como a probabilidade de sair um cachorro da máquina C é $\frac{1}{4}$, a probabilidade de sair um gato desta máquina é $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Para que um gato saia gato depois de passar pelas três máquinas, é necessário que ele saia gato de cada uma delas, pois uma vez cachorro, nenhuma máquina o transforma de volta em gato. Logo, a probabilidade do gato sair gato depois de passar pelas três máquinas é o produto das três probabilidades:

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}.$$

A probabilidade que este gato saia cachorro depois de passar pelas três máquinas é um menos a probabilidade de que ele saia gato depois de passar pelas três máquinas. Como

$$1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10},$$

a resposta final é $\frac{7}{10}$.

12 ***Dez quadrados perfeitos*** – *Solução*

a) Como existem exatamente dez quadrados perfeitos maiores do que a e menores do que $2a$, então esses dez quadrados perfeitos têm que ser consecutivos. Logo deve existir um número inteiro positivo x tal que

$$(x-1)^2 \leq a < x^2 < (x+1)^2 < \cdots < (x+9)^2 < 2a \leq (x+10)^2.$$

Em particular, vale que:

$$a < x^2 \qquad \text{e} \qquad (x+9)^2 < 2a. \tag{.1}$$

Dessas duas desigualdades temos que

$$(x+9)^2 < 2a < 2x^2.$$

E, em particular, vale que

$$(x+9)^2 < 2x^2.$$

Desenvolvendo essa desigualdade, obtemos que

$$81 < x(x-18)$$

o que só pode ser satisfeito se

$$x \geq 22.$$

Note que, se $x \geq 22$ então, vale que $(x+9)^2 \geq 31^2 = 961$. Segue-se daí, junto com a segunda desigualdade em (.1), que

$$961 = 31^2 \leq (x+9)^2 < 2a,$$

logo

$$a > \frac{961}{2} > 480,$$

o que nos fornece que

$$a \geq 481. \quad (.2)$$

Agora, observamos que, entre 481 e $2(481) = 962$, há exatamente dez quadrados perfeitos. De fato, como $22^2 = 484$ e $31^2 = 961$, temos que

$$481 < 22^2 < 23^2 < 24^2 < 25^2 < 26^2 < 27^2 < 28^2 < 29^2 < 30^2 < 31^2 < 962.$$

Pela equação (.2) não podemos escolher valores para a menores do que 481. Concluímos assim que o menor valor possível de a é 481.

b) Assim como no item anterior, para que existam dez quadrados perfeitos entre a e $2a$, é necessário que exista algum inteiro positivo x tal que:

$$(x-1)^2 \leq a < x^2 < (x+1)^2 < \cdots < (x+9)^2 < 2a \leq (x+10)^2.$$

Em particular, vale que

$$(x-1)^2 < a \qquad \text{e} \qquad 2a < (x+10)^2. \quad (.3)$$

Dessas duas desigualdades, decorre que

$$2(x-1)^2 \leq 2a \leq (x+10)^2$$

e, então,

$$2(x-1)^2 \leq (x+10)^2.$$

Desenvolvendo essa desigualdade, obtemos que

$$x(x-24) \leq 98,$$

o que só pode ser satisfeito se

$$x \leq 27.$$

Note que, se $x \leq 27$, então $(x+10)^2 \leq 37^2 = 1369$. Segue-se daí, junto com a segunda desigualdade em (.3), que

$$2a < (x+10)^2 \leq 37^2 = 1369.$$

Logo

$$a \leq \frac{1369}{2},$$

e como a é um inteiro, vale que

$$a \leq 684. \tag{.4}$$

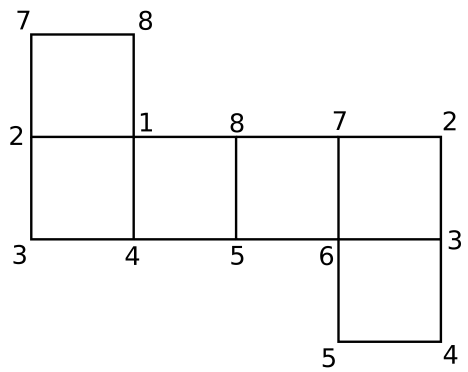
Agora observamos que, entre 684 e $2(684) = 1368$, há exatamente dez quadrados perfeitos. De fato, temos que $26^2 = 676 < 684$, $27^2 = 729$, $36^2 = 1296$ e $37^2 = 1369 > 1368$, logo:

$$684 < 27^2 < 28^2 < 29^2 < 30^2 < 31^2 < 32^2 < 33^2 < 34^2 < 35^2 < 36^2 < 1368.$$

Pela equação (.4) deduzimos que não é possível escolher um valor maior do que 684 para a. Com isto concluímos que o maior valor possível para a é 684.

13 ***Menores caminhos*** – *Solução*

a) A figura a seguir representa um pedaço de folha de papel, contendo oito quadrados de lado 1 posicionados lado a lado.



Observe que, ao dobrarmos a folha de papel nas arestas que são comuns a dois quadrados, obteremos um cubo de lado 1 como aquele do enunciado do exercício. Assim é equivalente pensarmos em caminhos nessa figura ou no cubo do enunciado do exercício. Para facilitar a descrição dos caminhos, pensaremos sempre nessa figura.

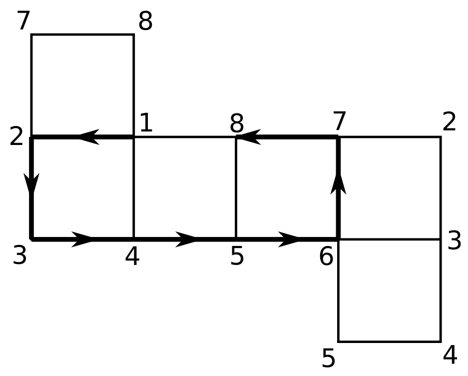
Os vértices do cubo resultante foram numerados da maneira como aparece nessa figura. Observe que os números 8, 7, 2, 3, 4 e 5 aparecem duas vezes nessa numeração. Isso se deve ao fato de que, ao dobrarmos a folha de papel, os dois vértices marcados com o mesmo número irão coincidir.

Como a distância entre cada par de vértices adjacentes na figura acima é igual a 1, qualquer caminho passando por 8 vértices distintos deve ter, no mínimo, comprimento igual a 7.

Considere o caminho

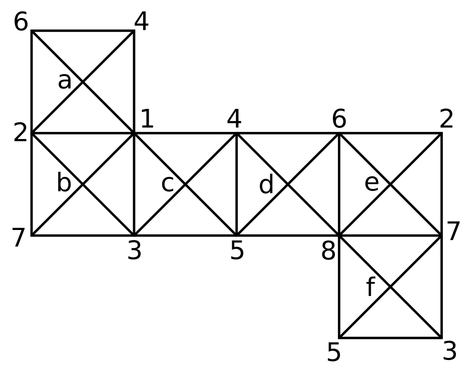
$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8$$

desenhado na figura a seguir.



Esse caminho passa por todos os vértices do cubo e tem comprimento igual a 7. Assim, a resposta para o exercício é 7.

b) Como na resolução do item *a)*, consideramos a figura abaixo que representa um pedaço de folha de papel, contendo oito quadrados de lado 1 posicionados lado a lado.



Dessa vez acrescentamos ainda os vértices localizados nos centros de cada um dos quadrados bem como as diagonais dos quadrados que passam por esses vértices.

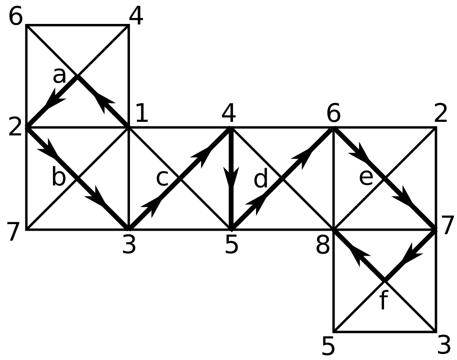
Como no item anterior, ao dobrarmos a folha de papel nas arestas que são comuns a dois quadrados, obteremos um cubo de lado 1 como aquele do enunciado desse item. Assim é equivalente pensarmos em caminhos nessa figura ou no cubo do enunciado desse item. Para facilitar a descrição dos caminhos, pensaremos sempre nessa figura.

Utilizamos os números de 1 a 8 para marcar os vértices que estão sobre as arestas do cubo, e as letras de a a f, para marcar aqueles vértices localizados nos centros das faces do cubo. Assim o número total de vértices é igual a 14. Observe que os números aparecem duas vezes nessa numeração, devido ao fato de que, ao dobrarmos a folha de papel, os dois vértices marcados com o mesmo número irão coincidir.

Consideremos o caminho

$$1 \to a \to 2 \to b \to 3 \to c \to 4 \to 5 \to d \to 6 \to e \to 7 \to f \to 8$$

realçado na figura a seguir:



Esse caminho consiste em 12 trechos ligando um vértice marcado com um número a um vértice marcado com uma letra (por exemplo, o trecho $1 \to a$) e apenas um segmento ligando dois vértices marcados ambos com números (a saber, o trecho $4 \to 5$). Note que cada trecho ligando um vértice marcado com um número a um vértice marcado com uma letra tem comprimento igual a $\sqrt{2}/2$. Por outro lado, o trecho ligando o vértice 4 ao vértice 5 tem comprimento igual a 1. Assim, o comprimento total do caminho descrito acima é igual a $12 \times \sqrt{2}/2 + 1 = 6\sqrt{2} + 1$.

Vamos agora mostrar que nenhum outro caminho contendo os 14 vértices pode ter um comprimento menor do que o caminho que destacamos acima. De fato, qualquer caminho contendo os 14 vértices deve, obrigatoriamente, conter uma quantidade mínima de 13 trechos. Cada trecho poderia a princípio ser de três tipos diferentes:

- conectando um vértice marcado com número a um vértice marcado com número;
- conectando um vértice marcado com número a um vértice marcado com letra.

No primeiro caso, o trecho tem comprimento igual a $\sqrt{2}/2$ enquanto que no segundo ele tem comprimento igual a 1. Assim, para minimizar o comprimento dos caminhos, devemos utilizar o máximo possível de trechos com comprimento igual a $\sqrt{2}/2$.

Um caminho que só contivesse trechos conectando um vértice marcado com número a um vértice marcado com letra deveria conter o mesmo número de vértices de cada tipo, já que cada trecho começa em um número e termina em uma letra. Como temos um total de oito vértices marcados com números, e apenas seis marcados com letras, qualquer caminho que passe por todos os 14 vértices deve conter um trecho ligando dois vértices marcados com números, ou seja, um trecho de comprimento 1.

Assim, o caminho que realçamos acima é um exemplo de caminho contendo todos os vértices do cubo e que contém a quantidade mínima permitida de trechos com comprimento igual a 1, logo tem o menor comprimento possível. Portanto, a resposta para esse item é $6 \times \sqrt{2} + 1$.

14 ***Um desafio matemático*** – *Solução*

a) As operações realizadas em cada etapa aparecem acima de cada seta abaixo:

$$3 \xrightarrow[\text{quadrado}]{\text{eleva ao}} 9 \xrightarrow[\text{quadrado}]{\text{eleva ao}} 81 \xrightarrow{\text{soma } 4} 85 \xrightarrow[\text{por } 4]{\text{multiplica}} 340.$$

b) Pode-se obter o 9 a partir do 5 somando-se 4. A partir daí pode-se usar as três últimas etapas do item anterior como ilustrado abaixo:

$$5 \xrightarrow{\text{soma } 4} 9 \xrightarrow[\text{quadrado}]{\text{eleva ao}} 81 \xrightarrow{\text{soma } 4} 85 \xrightarrow[\text{por } 4]{\text{multiplica}} 340.$$

c) Observe que somar quatro unidades nunca muda o resto da divisão por 4.

Por outro lado, após realizar uma multiplicação por 4 o resultado obtido é sempre um múltiplo de 4, logo sua divisão por 4 deixa resto 0.

Logo, começando de um número cuja divisão por 4 deixa resto 1, após realizar as duas operações citadas acima, podemos apenas obter um resultado cuja divisão por 4 com resto 1 ou resto 0. A primeira opção acontece somente quando não realizamos nenhuma multiplicação por 4. Já a segunda opção acontece somente se realizarmos pelo menos uma multiplicação por 4.

Um número x cuja divisão por 4 deixa resto 0 é um múltiplo de 4, logo podemos escrevê-lo como $x = n \times 4$ para algum número natural n. Dessa forma $x^2 = 16 \times n^2$, é um número que também é múltiplo de 4, e assim ao ser dividido por 4, deixa resto 0.

Por outro lado, se x é um número cuja divisão por 4 deixa resto 1 então podemos escrevê-lo como $x = n\times4+1$ para algum número natural n. Assim $x^2 = (n\times4+1)^2 = n^2 \times 16 + 2 \times n \times 4 + 1$ que também deixa resto 1 ao ser dividido por 4.

Assim, em todo caso, ao realizarmos as operações permitidas no desafio, o resultado obtido vai sempre deixar resto 0 ou 1 ao ser dividido por 4.

d) Para obter o número 43 a partir do número 3, basta somar 4 dez vezes repetidamente.

Como a divisão do número 5 por 4 deixa resto 1, pelo item anterior, qualquer operação realizada deixaria resto 0 ou 1. Como a divisão de 43 por 4 deixa resto 3, não é possível obtê-lo a partir do número 5.

15 ***Caminhos inusitados*** – *Solução*

a) Os caminhos inusitados saindo de D e chegando em A são $DCBA$, DBA e DCA.

b) Um caminho inusitado saindo de E, tem que visitar logo em seguida um dos pontos D ou C. No caso em que ele visita o ponto D, a sua continuação até o ponto A pode ser qualquer um dos caminhos inusitados saindo de D e chegando em A. No caso em que ele visita o ponto C, a sua continuação pode ser qualquer um dos caminhos inusitados saindo de C. Dessa forma, o número total de caminhos inusitados saindo de E é a soma do número de caminhos inusitados saindo de D com o número de caminhos inusitados saindo de E.

c) Para solucionar essa questão vamos renomear os pontos do diagrama. Façamos $A_0 = A$, $A_1 = B$, $A_2 = C$ e assim sucessivamente até $A_{10} = K$.

Seja $N(i)$ o número de caminhos inusitados partindo do ponto A_i e chegando no ponto $A_0 = A$. Então temos que $N(i) = N(i-1) + N(i-2)$ para todo $i = 2, 3, \ldots, 10$. Além disso, só existe um caminho inusitado partindo de $A_1 = B$ e chegando em A, e existem dois caminhos inusitados partindo de C e chegando em A, a saber CBA e CA. Assim, $N(1) = 1$ e $N(2) = 2$. Então $N(3) = N(1) + N(2) = 2 + 1 = 3$

(conferir com a resposta do item a)). De forma análoga, temos que $N(4) = 3+2 = 5$, $N(5) = 3 + 5 = 8$ e assim, sucessivamente.

Seguindo esse procedimento podemos gerar a sequência abaixo fazendo cada número ser a soma dos seus dois antecessores:

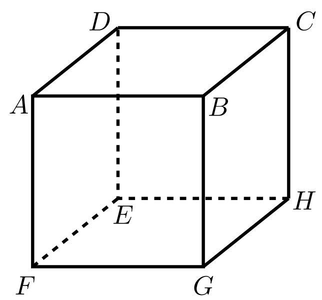
$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

O n-ésimo termo dessa sequência corresponde então ao número de caminhos inusitados saindo de A_n e chegando em A. Assim, o número de caminhos inusitados saindo de $K = A_{10}$ e chegando em A é o décimo termo dessa sequência, ou seja, 89.

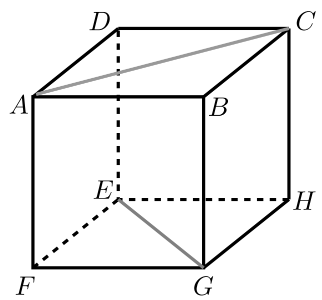
Observação: A sequência obtida acima é a famosa sequência de Fibonacci.

16 *Tetraedro dentro de cubo* – *Solução*

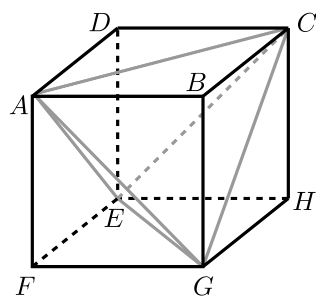
Começamos desenhando um cubo de lado 1:



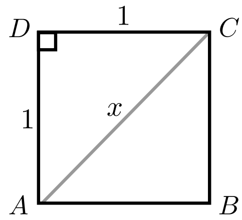
Vamos traçar duas arestas do tetraedro que queremos inscrever neste cubo: uma será $\overline{AC}$ e outra será $\overline{EG}$:



Em seguida, ligamos o ponto A aos pontos E e G, e ligamos o ponto C aos pontos E e G:



Observe pelo desenho que todas as arestas do tetraedro $ACEG$ são diagonais de alguma das faces do quadrado. Por exemplo, olhando a face $ABCD$ do cubo, temos



Pelo Teorema de Pitágoras, $x^2 = 1^1 + 1^2$; portanto, $x = \sqrt{2}$ é o comprimento de qualquer aresta do tetraedro $ACEG$.

17 *Achou?* – *Solução*

a) Devemos achar todos os números da forma $\overline{ab}$ tais que

$$(a+1)(b+1) = \overline{ab} + 1.$$

Notamos agora que $\overline{ab} = 10a + b$. Substituindo na expressão acima obtemos que:

$$(a+1)(b+1) = 10a + b + 1.$$

Simplificando essa equação obtemos

$$ab = 9a.$$

Como o número $\overline{ab}$ tem dois algarismos, temos que $a \neq 0$. Assim, podemos dividir os dois lados da equação acima por a para obter que $b = 9$. Portanto, os valores possíveis para $\overline{ab}$ são:

$$19\,, \quad 29\,, \quad 39\,, \quad 49\,, \quad 59\,, \quad 69\,, \quad 79\,, \quad 89 \quad \text{e} \quad 99.$$

É simples verificar que todos esses números cumprem com a condição do problema. Por exemplo, para o número 19, temos que $a = 1$ e $b = 9$, logo $(a+1)(b+1) = 20 = 19 + 1 = \overline{ab} + 1$. Para os demais números, deixamos a verificação a cargo do leitor!

b) Devemos agora achar todos os números da forma $\overline{abc}$ tais que

$$(a+1)(b+1)(c+1) = \overline{abc} + 1. \tag{.5}$$

Note que $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Assim a expressão acima se reescreve como:

$$(a+1)(b+1)(c+1) = 100a + 10b + c + 1.$$

O lado esquerdo pode ser escrito como:

$$(a+1)(b+1)(c+1) = a(b+1)(c+1) + (b+1)(c+1) = a(b+1)(c+1) + b(c+1) + c + 1.$$

Substituindo na expressão anterior e simplificando obtemos então que

$$a(b+1)(c+1) + b(c+1) = 100a + 10b.$$

Agora, arranjamos os termos para obter a seguinte equação equivalente:

$$0 = a\{100 - (b+1)(c+1)\} + b\{10 - (c+1)\}. \tag{.6}$$

No entanto b e c denotam algarismos, logo como números eles assumem valores menores ou iguais a 9. Logo, temos que $(b+1)(c+1) \leq 100$. Decorre daí que $\{100-(b+1)(c+1)\} \geq 0$. Do mesmo modo, observamos que $\{10-(c+1)\} \geq 0$. Então, para que o termo da direita na equação (.6) seja igual a zero, deve-se ter que

$$a\{100-(b+1)(c+1)\}=0 \quad \text{e} \quad b\{10-(c+1)\}=0.$$

Como $a \neq 0$ então $\{100-(b+1)(c+1)\}=0$. Isso somente é possível se $b=c=9$. Concluímos que os únicos números possíveis são

$$199\,, \quad 299\,, \quad 399\,, \quad 499\,, \quad 599\,, \quad 699\,, \quad 799\,, \quad 899 \quad \text{e} \quad 999.$$

Agora, é simples verificar que todos esses números cumprem com a condição do problema.

18 ***Os números de Luana*** – *Solução*

a) Vamos chamar de s a soma dos números colocados em cada trio de círculos colineares. Lembre-se que essa soma é sempre a mesma para cada trio. Chamemos ainda de x o número que Luana escreveu no círculo do topo. Os círculos que não estão no topo, formam dois trios colineares horizontais. Assim, ao somarmos os números colocados em todos esses círculos encontraremos um resultado igual a duas vezes a soma dos números colocados nos triângulos de cada um dos trios, isto é, $2 \times s$.

O valor obtido $2 \times s$, somado com o número colocado no círculo do topo x, deve resultar na soma de todos os números colocados, logo

$$2s+x=1+2+3+4+5+6+7=28. \tag{.7}$$

Por outro lado, olhemos para cada trio de círculos colineares que contenha o círculo do topo. Note que há três trios colineares contendo o círculo do topo: o trio vertical e os dois trios diagonais. Como a soma dos três números que aparecem em cada um desses trios deve ser igual a s, então a soma dos dois números distintos do número que aparece no topo deve ser igual a $s-x$. Assim, ao somarmos todos os números que aparecem nesses três trios, exceto o número que aparece no topo, devemos encontrar um resultado igual a $3 \times (s-x)$. Temos assim a equação:

$$3(s-x)=1+2+3+4+5+6+7-x=28-x.$$

que é equivalente a

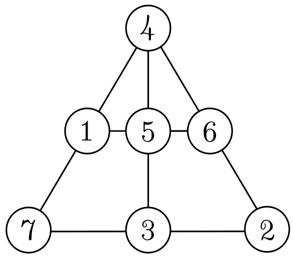
$$3s-2x=28. \tag{.8}$$

As equações (.7) e (.8), nos fornecem o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2s+x &= 28 \\ 3s-2x &= 28 \end{cases}.$$

Resolvendo esse sistema obtemos que $s=12$ e $x=4$. O número colocado no topo é, portanto, $x=4$.

b) Sabemos que o número 4 deve ser colocado no topo. Sabendo que a soma deve ser constante igual e a 12, podemos construir uma maneira de Luana conseguir a proeza:



19 *Os amigos de Ernaldo* – *Solução*

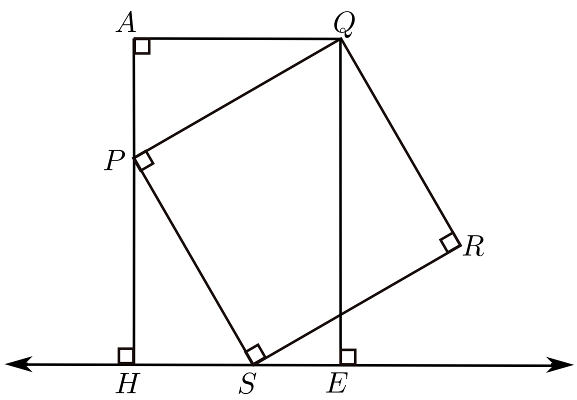
Digamos que Ernaldo tem x amigos dentro do grupo. Como Dernaldo tem 4 amigos, e o grupo tem 5 integrantes, então todos são amigos de Dernaldo. Tiremos Dernaldo do grupo. Assim, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Ernaldo ficam agora, respectivamente, com 0, 1, 2 e $x-1$ amigos dentro do subgrupo. Como Arnaldo não tem mais amigos dentro do subgrupo podemos esquecê-lo. Na seguinte tabela mostramos o número de amigos que cada integrante tem dentro do subgrupo.

Integrante	Nº de amigos
Bernaldo	1
Cernaldo	2
Ernaldo	$x-1$

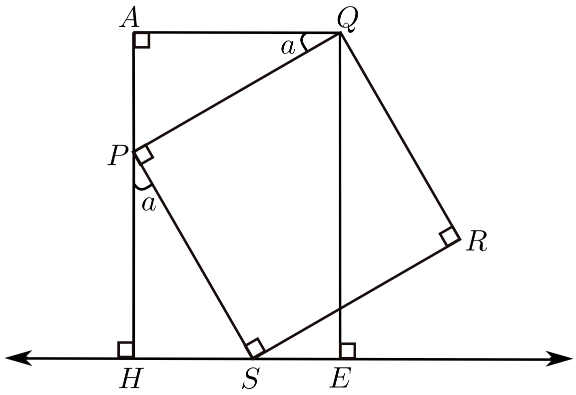
Obviamente os dois amigos de Cernaldo dentro do subgrupo são Bernaldo e Ernaldo. Aliás, como Bernaldo só tem um amigo dentro do grupo, Cernaldo deve ser esse único amigo. Em particular, Ernaldo e Bernaldo não são amigos. Portanto, Cernaldo é também o único amigo de Ernaldo dentro do subgrupo, ou seja $x-1=1$. Concluímos assim que Cernaldo e Dernaldo são os únicos amigos de Ernaldo. A resposta é 2.

20 *Quem inclinou o quadrado?* – *Solução*

Podemos completar o desenho de modo que, na figura seguinte, $HAQE$ seja um retângulo.



Se chamamos $\measuredangle HPS = a^\circ$, então $\measuredangle PQ = (90-a)^\circ$. Logo, $\measuredangle PQA = a^\circ$. Observe, que deste modo, os triângulos PHS e QAP possuem os mesmos ângulos internos (isto é, são semelhantes), como ilustrado na figura a seguir:



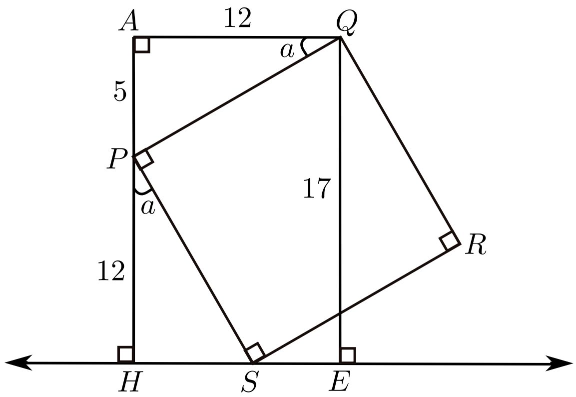
Como $SPQR$ é um quadrado, vemos que o comprimento da hipotenusa do triângulo PHS coincide com o comprimento da hipotenusa do triângulo QAP. Concluímos que PHS e QAP são triângulos congruentes (isto é, os seus lados têm os mesmos comprimentos). Logo,

$$\overline{AQ} = \overline{PH} = 12.$$

Como $HAQE$ é um retângulo, temos que $\overline{AQ} = \overline{HE}$ logo, temos que

$$\overline{HE} = 12. \tag{.9}$$

Pelo mesmo motivo, $\overline{AH} = \overline{QE} = 17$ e então $\overline{AP} = \overline{AH} - \overline{PH} = 17 - 12 = 5$, como mostra a figura abaixo:



Lembrando que os triângulos PHS e QAP são congruentes, concluímos que

$$\overline{HS} = \overline{AP} = 5. \tag{.10}$$

De (.9) e (.10) segue-se que $\overline{SE} = 12 - 5 = 7$.

21 ***Quatro números para quatro casas*** *– Solução*

Pelo enunciado do problema sabemos que

$$1 \; < \; w \; < \; z \; < \; y \; < \; x \; < \; 329.$$

Como w é divisor de z e z é divisor de y, então w é divisor de y. Mas y é divisor de x então, w é também divisor de x e, portanto, de cada número colocado nas casas. O número w é portanto divisor da soma, $329 = 7 \times 47$, e concluímos daí que $w = 7$ ou $w = 47$. Vejamos cada caso.

• Suponhamos primeiro que $w = 47$. Usando para z o mesmo argumento que para w concluímos que z é divisor da soma

$$x + y + z = 47 \times 2 \times 3. \tag{.11}$$

Lembre que w é divisor de z e $w < z < 329$. Então $z = 47 \times 2$ ou $z = 47 \times 3$. Mas $z < y < x$ e portanto para conseguir (.11) é necessário que $z < 47 \times 2$. Concluímos dessa forma que não existe solução com $w = 47$.

• Suponhamos agora que $w = 7$. Como no caso anterior, z deve ser divisor da soma

$$z + y + x = 7 \times 2 \times 23. \tag{.12}$$

As únicas alternativas para z são $z = 7 \times 23$ e $z = 7 \times 2$. Mas para ter $z < y < x$ e conseguir (.12) é necessário que $z < 7 \times 23$. Logo $z = 7 \times 2$. Agora, y é divisor da soma

$$y + x = 7 \times 2 \times 2 \times 11. \tag{.13}$$

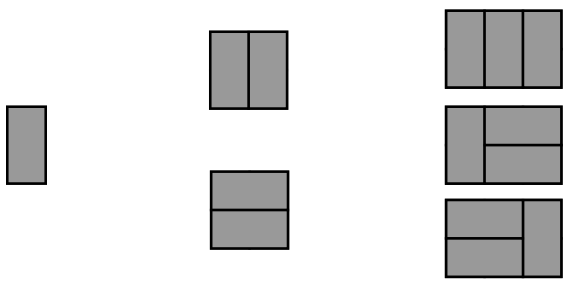
Como z é divisor de y e $z < y$ então $y = 7 \times 2 \times 2$ ou $y = 7 \times 2 \times 11$. Mas $y < x$ e para conseguir (.13) é necessário que $y < 7 \times 2 \times 11$.

Concluímos assim que a única solução possível é

$$w = 7\ , \quad z = 7 \times 2\ , \quad y = 7 \times 2 \times 2\ , \quad x = 7 \times 2 \times 2 \times 10.$$

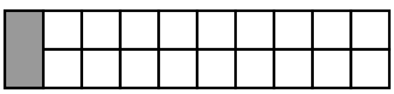
22 ***O presente do pequeno Abel*** – *Solução*

a) Podemos contar facilmente os primeiros casos e observar que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e $a_3 = 3$, como mostra a figura abaixo.

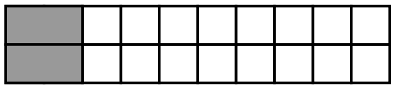


b) Ao começar a preencher o seu tabuleiro 2×10, Abel pode proceder de duas maneiras distintas:

- Abel pode começar colocando uma ficha verticalmente na primeira coluna do tabuleiro:



- Caso contrário, ele deve começar colocando duas fichas horizontais nas duas primeiras casas das duas primeiras linhas do tabuleiro:



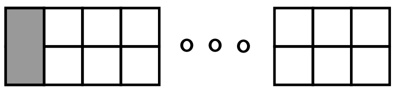
No primeiro caso, o Abel deverá usar as nove fichas restantes para preencher o resto do tabuleiro, que coincide com um tabuleiro de tamanho 2×9. Ele pode fazê-lo de a_9 maneiras.

No segundo caso, Abel deverá utilizar as oito fichas que restaram para preencher o resto do tabuleiro que coincide com um tabuleiro de tamanho 2×8. Ele pode fazê-lo de a_8 maneiras.

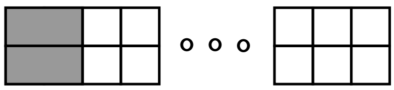
Assim, concluímos que a quantidade total de maneiras que existem para que Abel finalize o preenchimento do seu tabuleiro é igual a $a_9 + a_8$. Concluímos então que:

$$a_{10} = a_9 + a_8.$$

c) Repetindo o mesmo argumento que usamos no item anterior, temos que, de modo mais geral, as maneiras pelas quais podemos preencher um tabuleiro $2 \times n$ dividem-se em dois grupos. O primeiro grupo, no qual inicia-se posicionando uma ficha vertical no lado esquerdo do tabuleiro:



E o outro grupo no qual inicia-se posicionando duas fichas horizontais no lado esquerdo do tabuleiro:



Para o primeiro grupo, o número de maneiras de continuar o preenchimento coincide com a_{n-1} enquanto que, no segundo grupo, esse número de maneiras coincide com a_{n-2}. Concluímos que

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ , \quad \text{para todo } n \geq 3\ . \tag{.14}$$

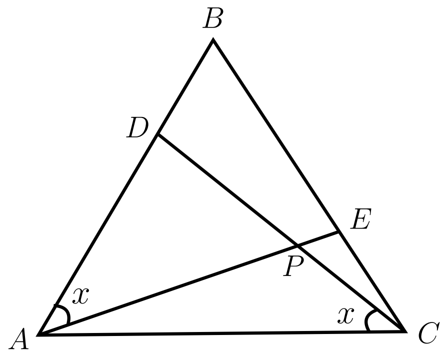
De fato, pelo item a), temos que $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$. Agora podemos usar (.14) para conseguir os próximos valores de a_n. De fato, temos que $a_3 = a_2 + a_1 = 3$ (como já havíamos determinado no item a)). De maneira análoga temos que $a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$. Continuando com o mesmo raciocínio obtemos que:

$$a_5 = 8\ , \quad a_6 = 13\ , \quad a_7 = 21\ , \quad a_8 = 34\ , \quad a_9 = 55 \quad \text{e} \quad a_{10} = 89.$$

Portanto, há 89 formas pelas quais o pequeno Abel pode preencher o tabuleiro 2×10.

23 *Calcule* $\measuredangle APC$ *– Solução*

Observe os triângulos DAC e EBA. Sabe-se que $\overline{DA} = \overline{EB}$. Além disso, como o triângulo ABC é equilátero, então $\overline{AC} = \overline{BA}$. Mais ainda, em um triângulo equilátero todos os ângulos internos medem $60°$. Logo $\measuredangle DAC = \measuredangle EBA = 60°$. Isso implica que os triângulos DAC e EBA são congruentes e portanto $\measuredangle DCA = \measuredangle BAE$. Na figura abaixo representamos $DCA = \measuredangle BAE = x$.



Agora note que $\measuredangle PAC = 60° - \measuredangle DAP = 60° - \measuredangle PCA$. Isto é, $\measuredangle PAC + \measuredangle PCA = 60°$. Como a soma dos ângulos interiores no triângulo APC deve ser $180°$, temos que $\measuredangle PAC + \measuredangle PCA + \measuredangle APC = 180°$. Concluímos então que $\measuredangle APC = 120°$.

24 *Alguém quer batata?* *– Solução*

a) Somando a em cada lado da desigualdade $b < c$, obtemos a desigualdade $a + b < a + c$. Com argumentos similares, podemos obter as desigualdades:

$$a+c < a+d\,, \quad a+c < b+c\,, \quad a+d < b+d\,, \quad b+c < b+d \quad \text{e} \quad b+d < c+d.$$

Usando essas desigualdades, podemos concluir que:

$$a+b < a+c < a+d < b+d < c+d \quad \text{e} \quad a+b < a+c < b+c < b+d < c+d. \qquad (.15)$$

De (.15), vemos que as 4 somas $a + b$, $a + c$, $a + d$ e $b + c$ são menores do que as somas $b+d$ e $c+d$. Como $b+d < c+d$, então a maior soma é $c+d$ e a segunda maior é $b + d$. Também de (.15), vemos que $a + b$ e $a + c$ são menores do que cada uma das outras 4 somas $a + d$, $b + c$, $b + d$ e $c + d$. Como $a + b < a + c$, então $a + b$ é a menor soma e $a + c$ é a segunda menor.

b) Da parte a) sabemos que a maior soma é $c + d$ e que a segunda maior é $b + d$. Temos assim que

$$c + d = 127 \quad \text{e} \quad b + d = 116. \qquad (.16)$$

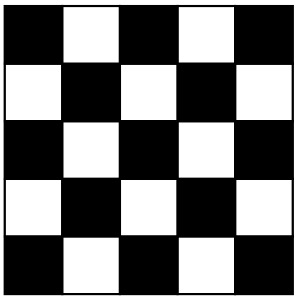
Logo, as somas $a + d$ e $b + c$ são iguais aos números 101 e 112 em alguma ordem. Subtraindo as equações em (.16), obtemos $c = b + 11$. Somando b a cada lado vemos que $b+c=2b+11$. Como $2b+11$ é um número ímpar, descobrimos assim que $b+c$ é ímpar. Logo,

$$b+c=101 \quad \text{e} \quad a+d=112. \tag{.17}$$

Usando que $c=b+11$ em (.17) obtemos que $b=45$. Usando que $b=45$ em (.16) e (.17), vemos que $c=56$ e $d=71$. Finalmente, obtemos que $a=41$.

25 *Consecutivos em casas vizinhas* – *Solução*

a) Vamos colorir as casas do tabuleiro de branco e preto como indica a figura seguinte. Desse modo, as casas correspondentes a dois números consecutivos estarão sempre pintadas de cores distintas.



Em particular, se a casa com o número 1 está pintada com a cor A (branca ou preta), então a casa do número 2 estará pintada com a outra cor, digamos B. Agora, 2 e 3 são também consecutivos. Então a cor da casa com o número 3 deverá ser distinta de B e será, assim, a cor A. Continuando com o mesmo raciocínio, podemos deduzir a cor da casa de qualquer número até o 25. Concluímos assim que, ou as casas com os números ímpares $\{1,3,5,\ldots,25\}$ são todas pretas, e aquelas com os números pares $\{2,4,6,\ldots,24\}$ são todas brancas, ou vice-versa.

Mas, no conjunto $\{1,2,3,\ldots,24,25\}$, existem 13 números ímpares e 12 pares, enquanto que no tabuleiro existem 13 casas pretas e 12 casas brancas. Então, a única possibilidade é que as 13 casas pretas sejam ocupadas pelos 13 números ímpares. Em particular, como as casas nas diagonais do tabuleiro são todas pretas, então os números situados nessas casas são todos ímpares.

b) Sejam $x,y\in\{1,2,\ldots,25\}$, com $x<y$, os números do enunciado. Chamemos de zona 1 aquela contendo x e de zona 2 aquela contendo y. Seja A o conjunto dos números em $\{x,x+1,\ldots,y\}$ que pertencem à zona 2. Então A é não vazio, já que $y\in A$. Por isso, podemos escolher o menor número em A e chamá-lo de w. Note que $x<w$, já que x pertence à zona 1. Então $(w-1)\in\{x,x+1,\ldots,y\}$. Como w é o menor número em A, necessariamente temos que $(w-1)\in\{x,x+1,\ldots,y\}$ mas $(w-1)\notin A$. Isso significa que

$$(w-1) \text{ não pode pertencer à zona } 2. \tag{.18}$$

Observe agora que duas casas em zonas distintas nunca são vizinhas. No entanto, $(w-1)$ e w devem pertencer a casas vizinhas. Como w pertence à zona 2, concluímos por (.18), que $(w-1)$ tem que pertencer à diagonal. Portanto, $z=(w-1)\in\{x,x+1,\dots,y\}$ é o número que procurávamos.

c) Sejam $a<b<c<d<e$ os números sobre a diagonal principal. Observemos primeiro que os números maiores do que e estarão situados em uma mesma zona. Caso contrário, pelo mostrado na parte b), existiria um número maior do que e na diagonal principal e isso não é possível por ser e o maior número nessa diagonal.

Em particular, como em cada zona há 10 casas, a quantidade de números maiores do que e não pode ser superior a 10. Logo, e não pode ser menor do que 15. Se fosse $e=15$, os 10 números $\{16,17,\dots,25\}$ preencheriam as 10 casas de alguma zona. Foi observado no item a) que os números colocados em casas da mesma cor (preta ou branca) devem ter a mesma paridade. Mas, será impossível que os 5 números pares e os 5 números ímpares em $\{16,17,\dots,25\}$ estejam situados nas 6 casas brancas e 4 pretas de uma zona. Isto mostra que e não pode ser 15. Concluímos assim que $15<e\le 25$.

Pelo item a), os números $\{a,b,c,d,e\}$ sobre a diagonal principal devem ser ímpares. Temos então as seguintes desigualdades:

$$a\ge 1\;,\quad b\ge 3\;,\quad c\ge 5\;,\quad d\ge 7\;,\quad e\ge 17\;.$$

Somando essas desigualdades, vemos que $a+b+c+d+e\ge 33$. Assim, se conseguirmos um exemplo com soma 33 na diagonal principal, teremos provado que 33 é de fato a soma mínima.

Os números na diagonal devem ser necessariamente $\{1,3,5,7,17\}$. Além disso, os números 1 e 3 devem estar em casas que compartilham um vértice, porque, caso contrário, não seria possível colocar o 2. O mesmo argumento funciona para os pares $\{3,5\}$ e $\{5,7\}$. Decorre daí que 17 pode estar somente em uma das duas esquinas da diagonal principal. Temos essencialmente duas possibilidades:

17				
	1			
		3		
			5	
				7

17				
	7			
		5		
			3	
				1

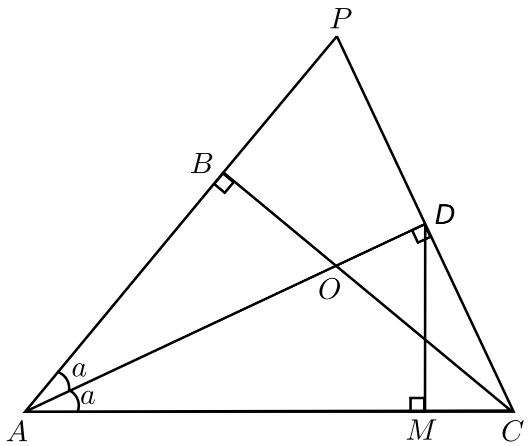
As outras duas são análogas. Aliás, sabemos que os números maiores que 17 pertencem a uma mesma zona. Usando um argumento similar, podemos concluir que os 9 números maiores que 7 e menores que 17 devem estar também em uma mesma zona. Claramente, essa zona deve ser distinta à zona dos números maiores do que 17. Guiados por esses critérios, conseguimos formar o seguinte exemplo:

17	16	15	14	13
18	1	2	11	12
19	20	3	10	9
22	21	4	5	8
23	24	25	6	7

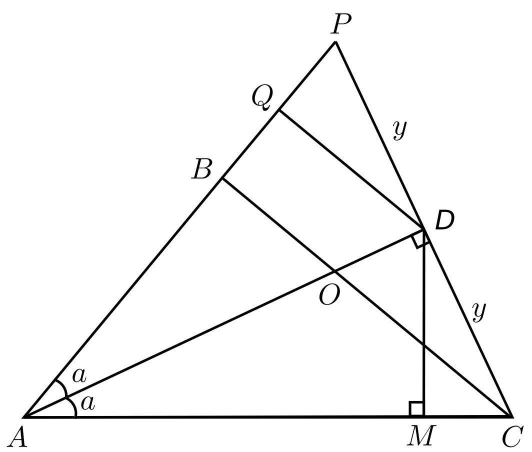
A soma dos números na diagonal principal para esse exemplo é $17+1+3+5+7=33$. Como já foi provado acima que a soma deve ser maior ou igual do que 33, concluímos que a soma mínima é 33.

26 ***Congruências e semelhanças*** – *Solução*

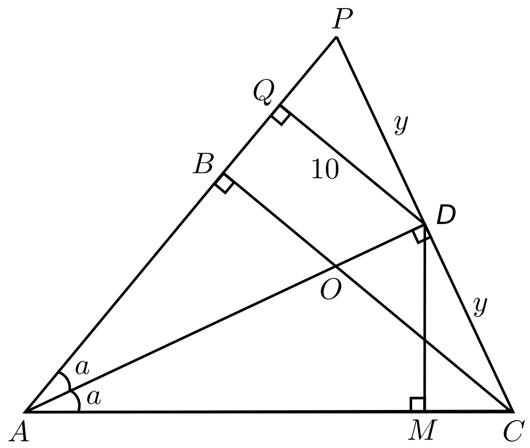
Observemos primeiro que se prolongarmos os segmentos AB e CD, conseguiremos o triângulo APD, congruente ao triângulo ADC, como mostrado na figura seguinte.



Eles são congruentes porque têm os mesmos ângulos internos e compartilham o mesmo cateto AD. Logo, $\overline{PD}=\overline{DC}$. Agora, traçamos o segmento QD ortogonal ao segmento PB.



Os triângulos AQD e AMD possuem os mesmos ângulos internos e compartilham a mesma hipotenusa AD. Logo, esses triângulos são congruentes e, portanto, $\overline{QD} = \overline{DM} = 10$.



Por outro lado, como QD e BC são paralelos, então os triângulos PQD e PBC possuem os mesmos ângulos internos. Eles são então semelhantes. Como $\overline{PC} = 2 \times \overline{PD}$, então a proporção dos triângulos é de 1 para 2. Isso implica que $\overline{BC} = 2 \times \overline{QD} = 2 \times 10 = 20$. Finalmente, a resposta ao problema é $\overline{BO} = \overline{BC} - \overline{OC} = 20 - 12 = 8$.

27 ***Números ziguezague*** – *Solução*

a) O número 978563412 é, claramente, um número ziguezague. Vamos mostrar que, se N é um número ziguezague, então

$$N \leq 978563412. \qquad (.19)$$

A maior quantidade de algarismos que um número ziguezague pode possuir é igual a 9. Portanto, podemos supor que N é da forma

$$N = \overline{abcdefghi},$$

já que, de outro modo, a desigualdade já (.19) estaria verificada. Aliás, $a = 9$ porque, de outro modo, também já teríamos (.19) satisfeita. Se b fosse igual a 8, o próximo algarismo c seria necessariamente menor que 8 e N não seria ziguezague. Portanto, temos que$b < 8$. Se b não fosse igual a 7, já teríamos a desigualdade (.19) verificada. Podemos então supor que $b = 7$. Logo, c só pode valer 8. Podemos então supor que N é da forma

$$N = \overline{978defghi}.$$

O número d não pode ser 6, porque isso implicaria que $e < 6$ e, assim, N não seria um número ziguezague. Portanto, $d < 6$ e podemos supor que $d = 5$, caso contrário (.19) estaria verificada. Necessariamente $e = 6$. Podemos continuar o argumento e chegar a conclusão que se N não fosse igual a 978563412 então seria, necessariamente, menor.

b) Para produzir um número ziguezague de 4 algarismos podemos usar o seguinte procedimento:

(1) Escolhemos de $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ um subconjunto $\{a, b, c, d\}$ de 4 números distintos. Digamos que $a < b < c < d$.

(2) Podemos usar os algarismos $\{a, b, c, d\}$ para formar 10 números ziguezague distintos:

$$\overline{acbd}\,,\quad \overline{adbc}\,,\quad \overline{bdac}\,,\quad \overline{bcad}\,,\quad \overline{cdab}\,,$$
$$\overline{dbca}\,,\quad \overline{dacb}\,,\quad \overline{cadb}\,,\quad \overline{cbda}\quad \text{e}\quad \overline{badc}\,.$$

Todo número ziguezague de 4 algarismos pode ser produzido por esse procedimento e escolhas distintas em cada passo do procedimento produzem números ziguezague distintos. Agora podemos contá-los. Para o primeiro passo do procedimento temos que escolher uma entre $\binom{9}{4}$ escolhas possíveis, e para o último passo temos 10 escolhas. Portanto, existem

$$10 \times \binom{9}{4} = 10 \times \frac{9!}{5!4!} = 1260$$

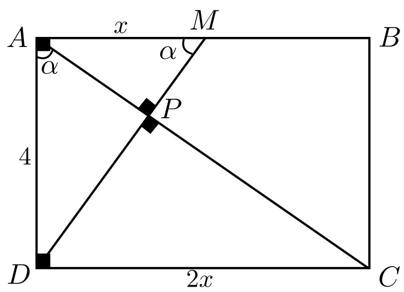
números ziguezague de 4 algarismos.

28 ***Área do retângulo*** – *Solução*

Chamemos de P o ponto de interseção dos segmentos AC e DM. Como a soma dos ângulos internos do triângulo APM é $180°$ então

$$\measuredangle MAP = 90° - \measuredangle AMP. \qquad (.20)$$

Mas $\measuredangle MAP + \measuredangle PAD = 90°$. Então, concluímos que $\measuredangle PAD = \measuredangle AMP$. Acabamos de mostrar assim que os triângulos retângulos MAD e ADC possuem os mesmos ângulos internos. Eles são portanto semelhantes.



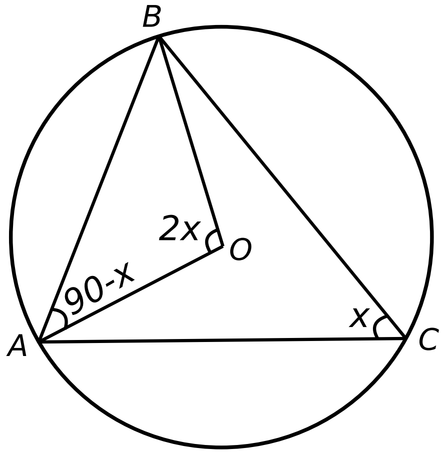
Aplicando a semelhança entre esses triângulos temos:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{AD}}. \qquad (.21)$$

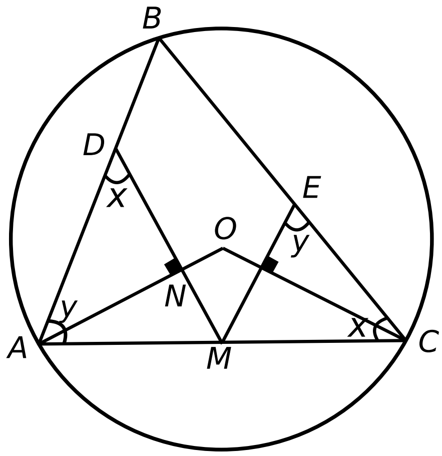
Sabemos que $\overline{AD} = 4$ e que $\overline{DC} = 2 \times \overline{MA}$. Usando esses fatos em (.21) obtemos $\overline{MA} = 2\sqrt{2}$ e portanto $\overline{DC} = 4\sqrt{2}$. Finalmente, a área do retângulo $ABCD$ resulta $\overline{AD} \times \overline{DC} = 16\sqrt{2}$.

29 ***Calcule*** $\overline{AM}$ *– Solução*

Chamemos $\measuredangle ACB = x^\circ$. Como O é o centro da circunferência então $\measuredangle AOB = (2x)^\circ$. Observe que $\overline{AO} = \overline{BO}$ e portanto $\measuredangle BAO = \measuredangle ABO = (90 - x)^\circ$, como mostramos na figura abaixo:



Note que os segmentos DM e AO intersectam-se formando um ângulo de 90°. Seja N o ponto em que esses segmentos se intersectam, como mostrado na figura abaixo. Nos concentremos agora no triângulo ADN. Como $\measuredangle DAN = \measuredangle BAO = (90 - x)^\circ$, e a soma dos ângulos internos desse triângulo é igual a 180°, temos que $\measuredangle ADM = x^\circ$. Repetindo o mesmo tipo de argumento podemos mostrar que $\measuredangle DAM = \measuredangle MEC$. Logo, os triângulos ADM e MEC são semelhantes.



Temos assim que

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{MC}}.$$

Usando que $\overline{AM} = \overline{MC}$, que $\overline{DM} = 9$ e que $\overline{ME} = 4$ concluímos que $\overline{AM}^2 = 36$, de onde concluímos que $\overline{AM} = 6$.

30 ***Lendo os pensamentos de Ivan*** *– Solução*

a) Se Ivan tivesse pensado em um número com 3 ou menos algarismos, a soma de seus algarismos seria no máximo $9 + 9 + 9 = 27$. Então o número final de Ivan x seria no máximo $27^2 = 729$.

b) Se Ivan tivesse pensado em um número com 4 algarismos, digamos $\overline{abcd}$, então $x = (a+b+c+d)^2$. Distinguimos duas possibilidades. Primeiro, se $a = 1$, então

$$x \leq (1+9+9+9)^2 = 784 < \overline{abcd}.$$

Agora, se $a \geq 2$, então

$$x \leq (9+9+9+9)^2 = 1296 < \overline{abcd}.$$

Em qualquer um dos casos, $x < \overline{abcd}$.

c) Suponhamos que Ivan pensou em um número com $n \geq 5$ algarismos, digamos $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$. Então, $x = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$. Logo,

$$x \leq (9n)^2 = 81n^2. \tag{.22}$$

Observe que

$$10^{n-1} \leq \overline{a_1 a_2 \dots a_n}. \tag{.23}$$

Então, para mostrar que $x < \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ bastaria mostrar que

$$81n^2 < 10^{n-1}\ , \quad \text{para todo inteiro } n \geq 5 \tag{.24}$$

e usar (.22) junto com (.23). Para mostrar (.24), procederemos por indução. Para $n = 5$, temos

$$81.5^2 = 1755 < 10000 = 10^{5-1}.$$

Suponhamos então que essa desigualdade é válida para algum inteiro $k \geq 5$, ou seja,

$$81k^2 < 10^{k-1}. \tag{.25}$$

Vamos mostrar que ela é válida para $k+1$. Observemos que, por ser $k \geq 5$, então

$$81(k+1)^2 < 81(2k)^2 = 4(81k^2). \tag{.26}$$

Usando a hipótese de indução (.25) vemos que

$$4(81k^2) < 4(10^{k-1}). \tag{.27}$$

Como $4 < 10$ vemos que a última expressão em (.27) é menor do que $10 \times 10^{k-1} = 10^k$. De (.26), (.27) e a última observação obtemos que

$$81(k+1)^2 < 10^{(k+1)-1}.$$

Isto conclui a prova por indução e (.24) é, portanto, verdadeiro.

d) Seja I o número pensado por Ivan. Vamos mostrar que $I < 730$. Suponhamos que não seja assim, isto é que $I \geq 730$. Como I é o número final obtido por Sergio a partir de x, podemos aplicar a parte a) (para Sergio em lugar de Ivan) e concluir que x tem 4 ou mais algarismos. Logo, usando as partes b) e c) para Sergio concluímos que $x > I$. Em particular, $x \geq 730$. Pela parte a), sabemos que então I deve ter 4 ou mais algarismos. Logo, usando as partes b) e c) concluímos que $I > x$. Chegamos assim a uma contradição. Fica provado então que $I < 730$.

Além disso, como I é o número final de Sergio, então I é um quadrado perfeito. Finalmente, basta verificar quais dos valores em

$$1^2\ , \quad 2^2\ , \quad 3^2\ , \quad \dots\ , \quad 26^2 \quad \text{e} \quad 27^2 = 729$$

pode I tomar. Depois dessa verificação vemos que os possíveis valores para o número que Ivan pensou são 1, 81, 169 e 256.

ÍNDICE DE PROBLEMAS

Nível 1

***Água na medida certa**, 13, 73*
***Aline pinta o cubo**, 26, 90*
***Clarissa divide um hexágono**, 24, 87*
***Cruzes sobre o tabuleiro**, 30, 97*
***Cubos e cubos**, 14, 74*
***Desenhos bem desenhados**, 23, 85*
***Diferença de áreas**, 18, 79*
***Divisão do terreno**, 32, 99*
***Faltam três**, 18, 80*
***Formiga esperta**, 15, 75*
***Greve de quadrados e cubos**, 33, 101*
***Laranjas e goiabas**, 13, 73*
***Número ímpar de divisores**, 26, 89*
***Números especiais**, 19, 81*
***O número grande** N, 19, 82*
***O segundo quadrado**, 27, 91*
***Pão e vinho**, 32, 100*
***Pintando um cubo**, 15, 74*
***Pirâmide de números**, 29, 96*
***Qual a unidade?**, 14, 74*
***Quantos rebotes?**, 31, 98*
***Relógio matemático**, 22, 84*
***Soma de felinos**, 16, 76*
***Tabuleiros e dominós**, 17, 78*
***Três pontos colineares**, 16, 77*
***Triângulos pequenos e grandes**, 28, 94*
***Vai dar galho**, 20, 83*
***Vamos construir escadas**, 34, 103*
***Vira vira robô**, 21, 84*
***Ximena e o tabuleiro**, 33, 102*

Nível 2

***Área do losango**, 40, 113*
***Área em cinza**, 37, 107*
***Ângulo**, 45, 124*
***A Lista de Pedro**, 36, 107*
***A área do quadrilátero**, 51, 133*
***Abrindo e fechando portas**, 52, 134*
***Adriana pinta o muro**, 41, 114*
***Araceli contra Florinda**, 47, 127*
***Círculos e círculos**, 38, 109*
***Cinco amigos, cinco corridas**, 46, 125*
***Cubo do dia**, 40, 113*
***Gato late, cachorro mia?**, 35, 106*
***Kiara e Yndira**, 51, 132*
***O lema de Quatrolândia**, 42, 115*
***Os** 50 **números de Vanessa**, 43, 121*
***Os funcionários do hospital**, 36, 106*
***Paralelogramo**, 43, 121*
***Pentágono regular**, 48, 128*
***Pintando tabuleiro**, 44, 122*
***Pulga pula**, 38, 108*
***Qual é o número?**, 45, 124*
***Quantos andares?**, 37, 108*
***Quantos quadrados?**, 42, 119*
***Retângulo ou trapézio**, 49, 130*
***Rodízio de veículos**, 39, 109*
***Sabotando os planos do Chris**, 50, 131*
***Superquadrados**, 46, 126*
***Tartaruga corredora**, 35, 105*
***Um após um**, 49, 129*
***Use as paralelas**, 52, 135*

Nível 3

***Área do retângulo**, 71, 164*
***A corrida de Cordisburgo**, 55, 138*
***Achou?**, 64, 153*
***Alguém quer batata?**, 68, 159*
***Calcule** $\measuredangle APC$, 68, 159*

Calcule $\overline{AM}$, *71, 165*
Caminhos inusitados, *63, 151*
Clube de ciclistas, *54, 138*
Congruências e semelhanças, *70, 162*
Consecutivos em casas vizinhas, *69, 160*
Dez quadrados perfeitos, *60, 146*
Dobrando papel, *59, 145*
Equiláteros, *57, 141*
Gato em cachorro, *60, 146*
Lendo os pensamentos de Ivan, *72, 165*
Múltiplos de 3 ***e quadrados***, *55, 139*
Menores caminhos, *61, 148*
Minhoca matemática, *56, 140*
Números ziguezague, *70, 163*
Nascimento?, *58, 145*
O presente do pequeno Abel, *67, 157*
Os amigos de Ernaldo, *65, 155*
Os números de Luana, *65, 154*
Quadrado mágico, *53, 137*
Quatro números para quatro casas, *66, 156*
Quem inclinou o quadrado?, *66, 155*
Tesoura e papel, *54, 138*
Tetraedro dentro de cubo, *64, 152*
Tridominós, *58, 143*
Um desafio matemático, *62, 150*

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações