Impresso no Brasil/Printed in Brazil
Primeira edição e impressão

Capa: Rogério Kaiser

IMPA/OBMEP
Banco de Questões 2012
Rio de Janeiro, IMPA, 2012
144 páginas
ISBN 978-85-244-0336-1

Distribuição
IMPA/OBMEP
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: central@obmep.org.br
www.obmep.org.br

Conteúdo

Apresentação

Desde da sua primeira edição em 2005, a OBMEP oferece a todas as escolas públicas do país um Banco de Questões com problemas e desafios de matemática para alunos e professores. O Banco pretende despertar o prazer pela matemática, estimular o aluno interessado com perguntas instigantes e proporcionar um treinamento para as provas da OBMEP.

O Banco de Questões deste ano apresenta uma coletânea de problemas de antigas provas da OBMEP, tanto da primeira quanto da segunda fase, organizada por assuntos pelos professores Adriana Neumann de Oliveira (UFRGS), Marcelo Richard Hilário (UFMG) e Tertuliano Franco (UFBA). Algumas das soluções aparecem pela primeira vez neste volume.

Foram escolhidos problemas que requerem, mais do que qualquer conhecimento prévio, imaginação e raciocínio. O que não quer dizer que sejam simples, havendo uma gama variada de complexidade. Ainda que este seja um conceito relativo, tentou-se ao máximo apresentá-los em uma ordem crescente de dificuldade.

As soluções, revisadas e até transformadas, são basicamente oriundas das soluções apresentadas na página da OBMEP. Com o objetivo de facilitar o uso do material, as questões foram classificadas por níveis e por temas, Aritmética, Combinatória e Geometria, embora muitos problemas envolvam mais de um tema e pertençam a níveis diferentes.

Aproveito a oportunidade para agradecer ao coordenador do Comitê de Provas da OBMEP, e a todos os demais membros, presentes e passados, do comitê pelo excelente trabalho realizado nestes últimos anos na elaboração de problemas originais e instigantes. A qualidade das provas, um motivo de orgulho para a OBMEP, baseada em problemas que não exigem um conhecimento profundo em matemática, mas apenas raciocínio, capacidade de abstração e alguma criatividade, permite todo ano revelar jovens de escolas públicas com especial talento para a matemática.

A edição deste ano do Banco de Questões e todas as edições anteriores estão disponíveis na página `www.obmep.org.br`, assim como as apostilas e o material didático utilizado no Programa de Iniciação Científica Junior.

Se você, leitor, encontrar uma solução para algum problema diferente da solução apresentada ao final do Banco de Questões, nao deixe de mandá-la para `bancodequestoes@obmep.org.br`, pois ela poderá ser publicada na página da OBMEP.

Boa diversão,

Claudio Landim
Coordenador Geral da OBMEP

"A educação é um ato de amor, por isso, um ato de coragem. Não pode temer o debate. A análise da realidade. Não pode fugir à discussão criadora, sob pena de ser uma farsa."

Paulo Freire (1921-1997), educador e filósofo brasileiro

Nível 1

Assunto

Aritmética

1 *Cláudia transforma números*

Cláudia gosta de brincar com números de dois ou mais algarismos. Ela escolhe um desses números, multiplica seus algarismos e, caso o produto tenha mais de um algarismo, ela os soma. Ela chama o resultado final de transformado do número escolhido. Por exemplo, o transformado de 187 é 11, pois $1 \times 8 \times 7 = 56$ e $5 + 6 = 11$; já o transformado de 23 é 6, pois $2 \times 3 = 6$.

a) Qual é o transformado de 79?
b) Quais são os números de dois algarismos cujo transformado é 3?
c) Quantos são os números de três algarismos cujo transformado é 0?

2 *Joãozinho coleciona números*

Joãozinho coleciona números naturais cujo algarismo das unidades é a soma dos outros algarismos. Por exemplo, ele colecionou 10023, pois $1 + 0 + 0 + 2 = 3$.

a) Na coleção de Joãozinho há um número que tem 4 algarismos e cujo algarismo das unidades é 1. Que número é esse?
b) Qual é o maior número sem o algarismo 0 que pode aparecer na coleção?
c) Qual é o maior número sem algarismos repetidos que pode aparecer na coleção?

3 *Qual o algarismo das unidades?*

Um número par tem 10 algarismos e a soma desses algarismos é 89. Qual é o algarismo das unidades desse número?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

4 *Matemágicas*

Um "matemágico" faz mágicas com cartões verdes, amarelos, azuis e vermelhos, numerados de 1 a 13 para cada cor. Ele mistura os cartões e diz para uma criança: "Sem que eu veja, escolha um cartão, calcule o dobro do número do cartão, some 3 e multiplique o resultado por 5. Depois

some 1, se o cartão for verde;
some 2, se o cartão for amarelo;
some 3, se o cartão for azul;
some 4, se o cartão for vermelho.

Diga-me o resultado final e eu lhe direi a cor e o número do cartão que você escolheu."

a) Joãozinho escolheu o cartão vermelho com o número 3. Qual é o número que ele deve dizer ao matemágico?

b) Mariazinha disse "setenta e seis" para o matemágico. Qual é o número e a cor do cartão que ela escolheu?
c) Após escolher um cartão, Pedrinho disse "sessenta e um" e o matemágico respondeu "Você errou alguma conta". Explique como o matemágico pôde saber isso.

5 *Somando no lugar certo*

Colocando sinais de adição entre alguns dos algarismos do número 123456789 podemos obter várias somas. Por exemplo, podemos obter 279 com quatro sinais de adição: $123+4+56+7+89 = 279$. Quantos sinais de adição são necessários para que se obtenha assim o número 54?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

6 *Jogando com números*

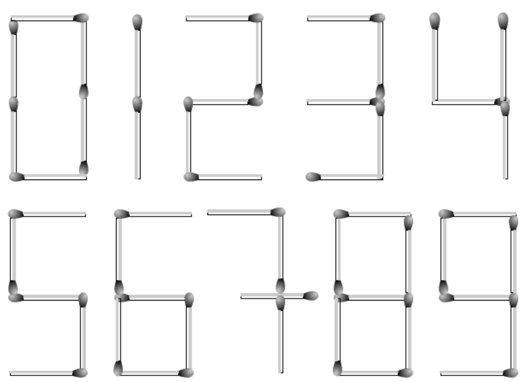
Ana e Cristina estão jogando contra Beatriz e Diana. No início de cada partida, elas embaralham nove cartões numerados de 1 a 9 e cada uma pega dois cartões, sobrando sempre um cartão na mesa. Cada menina calcula seus pontos somando os números de seus cartões e o número de pontos da dupla é a soma dos pontos das duas parceiras. Vence a dupla que fizer o maior número de pontos. Veja um exemplo de uma partida na tabela:

	Ana	**Cristina**	**Beatriz**	**Diana**
Cartões retirados	1 e 4	5 e 7	2 e 9	3 e 6
Pontos de cada menina	1+4 = 5	5+7=12	2+9=11	3+6 = 9
Pontos da dupla	5+12=17		11+9=20	
Resultado	Beatriz e Diana ganham, pois 20 é maior que 17			

a) Numa partida, Ana e Cristina tiraram somente cartões com números ímpares, e sobrou o cartão de número 7. Qual foi o resultado da partida? Por quê?
b) Uma partida pode terminar empatada se sobrar o cartão de número 8? Por quê?
c) Uma partida pode terminar empatada se sobrar o cartão de número 5? Por quê?
d) Em outra partida, uma das meninas tirou o cartão de número 3. Ana fez um ponto a menos que Beatriz, que fez um ponto a menos que Cristina, que fez um ponto a menos que Diana. Quantos pontos fez a dupla que ganhou?

7 *Números e palitos de fósforo*

Com palitos de fósforo formamos algarismos, conforme a figura. Deste modo, para escrever o número 188, usamos 16 palitos.



César escreveu o maior número que é possível escrever com exatamente 13 palitos. Qual é a soma dos algarismos do número que César escreveu?

A) 8 B) 9 C) 11 D) 13 E) 15

8 *Chegando ao* 1

Numa aula de Matemática, a professora inicia uma brincadeira escrevendo, no quadro-negro, um número. Para continuar a brincadeira, os alunos devem escrever outro número, seguindo as regras abaixo:

• Se o número escrito só tiver um algarismo, ele deve ser multiplicado por 2.

• Se o número escrito tiver mais de um algarismo, os alunos podem escolher entre apagar o algarismo das unidades ou multiplicar esse número por 2.

Depois que os alunos escrevem um novo número, a brincadeira continua com este número, sempre com as mesmas regras. Veja a seguir dois exemplos desta brincadeira, um começando com 203 e o outro com 4197:

$$203 \xrightarrow{\text{dobra}} 406 \xrightarrow{\text{apaga}} 40 \xrightarrow{\text{apaga}} 4\ldots$$

$$4197 \xrightarrow{\text{apaga}} 419 \xrightarrow{\text{dobra}} 838 \xrightarrow{\text{apaga}} 83\ldots$$

a) Comece a brincadeira com o número 45 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.
b) Comece agora a brincadeira com o número 345 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.
c) Explique como chegar ao número 1 começando a brincadeira com qualquer número natural diferente de zero.

9 *Resumindo*

Para obter o resumo de um número de até 9 algarismos, deve-se escrever quantos são seus algarismos, depois quantos são seus algarismos ímpares e finalmente quantos são seus algarismos pares. Por exemplo, o número 9103405 tem 7 algarismos, sendo 4 ímpares e 3 pares, logo seu resumo é 743.

a) Encontre um número cujo resumo seja 523.
b) Encontre um número que seja igual ao seu próprio resumo.
c) Para qualquer número de até 9 algarismos, podemos calcular o resumo do resumo de seu resumo. Mostre que esse procedimento leva sempre a um mesmo resultado, qualquer que seja o número inicial.

10 *Casais especiais*

Dois números naturais formam um casal quando eles têm o mesmo número de algarismos e em sua soma aparece apenas o algarismo 9. Por exemplo, 225 e 774 formam um casal, pois ambos têm três algarismos e 225 + 774 = 999.

a) Qual é o número que forma um casal com 2010?
b) Quantos são os casais formados por números de dois algarismos?

Casais especiais são casais em que os dois números têm os mesmos algarismos e que, em cada número, os algarismos são distintos. Por exemplo, 36 e 63 formam um casal especial, mas 277 e 722 não.

c) Dê um exemplo de casal especial com números de quatro algarismos.
d) Explique por que não existem casais especiais com números de três algarismos.

11 *Supernúmeros*

Um número A de dois algarismos é um supernúmero se é possível encontrar dois números B e C, ambos também de dois algarismos, tais que:

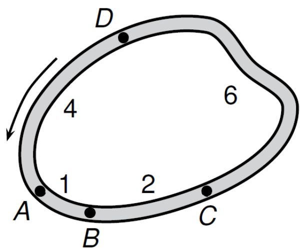
• $A = B + C$;
• soma dos algarismos de A = (soma dos algarismos de B) + (soma dos algarismos de C).

Por exemplo, 35 é um supernúmero. Duas maneiras diferentes de mostrar isto são $35 = 11 + 24$ e $35 = 21 + 14$, pois $3 + 5 = (1 + 1) + (2 + 4)$ e $3 + 5 = (2 + 1) + (1 + 4)$. A única maneira de mostrar que 21 é um supernúmero é $21 = 10 + 11$.

a) Mostre de duas maneiras diferentes que 22 é um supernúmero e de três maneiras diferentes que 25 é um supernúmero.
b) De quantas maneiras diferentes é possível mostrar que 49 é um supernúmero?
c) Quantos supernúmeros existem?

12 *Correndo na medida certa*

A figura abaixo representa o traçado de uma pista de corrida.



Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 quilômetros pode ser realizada com partida em D e chegada em A.

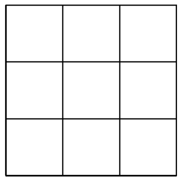
a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?
b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são esses postos?
c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

13 *Números em um quadrado*

Gabriel desenha quadrados divididos em nove casas e escreve os números naturais de 1 a 9, um em cada casa. Em seguida, ele calcula a soma dos números de cada linha e de cada coluna. A figura mostra um dos quadrados do Gabriel; observe que a soma dos números da terceira linha é $5 + 8 + 2 = 15$ e a soma dos números da segunda coluna é $9 + 7 + 8 = 24$. Nesse exemplo, as seis somas são $6, 12, 15, 15, 18$ e 24.

6	9	3	18
4	7	1	12
5	8	2	15
15	24	6	

a) Gabriel preencheu um quadrado e fez apenas cinco somas: 9, 13, 14, 17 e 18. Qual é a soma que está faltando?
b) Explique por que não é possível que em um quadrado do Gabriel todas as somas sejam números pares.
c) Preencha o quadrado de forma que as somas sejam 7, 13, 14, 16, 18 e 22.

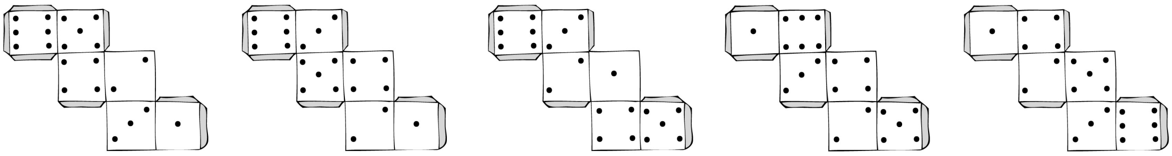


Assunto

Combinatória

14 *Dado no papelão*

Num dado comum, a soma dos pontos de duas faces opostas é sempre 7. É possível construir um dado comum dobrando e colando uma das peças de papelão a seguir. Que peça é essa?



A) B) C) D) E)

15 *Sacas de arroz e sacas de milho*

A caminhonete do Tio Barnabé pode carregar até 2000 quilos. Ele aceita um serviço para transportar uma carga de 150 sacas de arroz de 60 quilos cada e 100 sacas de milho de 25 quilos cada.

a) Você acha possível que o Tio Barnabé faça esse serviço em cinco viagens? Por quê?
b) Descreva uma maneira de fazer o serviço em seis viagens.

16 *Com pés e cabeças*

Um fazendeiro perguntou ao seu filho: Quantos pés eu posso contar quando eu estou tirando leite de uma vaca? O menino respondeu: São 6, sendo 4 da vaca e 2 seus. O pai então disse: Na verdade são 9, porque você esqueceu de contar os 3 do banquinho em que eu fico sentado. A seguir, o pai propôs outro problema ao seu filho: Num curral há algumas pessoas, vacas e banquinhos, pelo menos um de cada. O número total de pés é 22 e o de cabeças é 5. Quantas vacas há no curral? O menino resolveu o problema corretamente. Qual foi sua resposta?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17 *Pedrinho escreve números*

Pedrinho escreveu todos os números inteiros compreendidos entre 100 e 999 cuja soma dos algarismos é 12. Por exemplo, os números 129 e 750 aparecem entre os números escritos.

a) Quantos números escritos têm apenas dois algarismos iguais?
b) Quantos números escritos são formados apenas por algarismos ímpares?

18 *Quantos foram os empates?*

Quatro times disputaram um torneio de futebol em que cada um jogou uma vez contra cada um dos outros. Quando uma partida terminava empatada, cada time ganhava um ponto; caso contrário, o vencedor ganhava três pontos e o perdedor, zero. A tabela mostra a pontuação final do torneio. Quantos foram os empates?

Time	Pontos
Cruzínthians	5
Flameiras	3
Nauritiba	3
Greminense	2

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

19 *Futebol matemático*

Os times A, B, C, D e E disputaram, entre si, um torneio de futebol com as seguintes regras:

- o vencedor de uma partida ganha 3 pontos e o perdedor não ganha nada;
- em caso de empate, cada um dos times ganha 1 ponto;
- cada time joga exatamente uma vez com cada um dos outros.

O campeão do torneio foi o time A, seguido na classificação por B, C, D e E, nessa ordem. Além disso:

- o time A não empatou nenhuma partida;
- o time B não perdeu nenhuma partida;
- todos os times terminaram o torneio com números diferentes de pontos.

a) O time A ganhou, perdeu ou empatou sua partida contra o time B? Por quê?
b) Com quantos pontos o time A terminou o torneio? Por quê?
c) Explique porque o time B obteve um número par de pontos nesse torneio.
d) Na tabela, cada coluna representa uma partida. Sabendo que ocorreram exatamente 5 empates nesse torneio, desenhe, em cada coluna da tabela, um círculo em volta do nome do time ganhador ou em volta do $\times$, em caso de empate.

A	A	A	A	B	B	B	C	C	D
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
B	C	D	E	C	D	E	D	E	E

20 *Ímpar soma, par divide*

Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo:

- se o número for ímpar, soma-se 1;
- se o número for par, divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência:

$$21 \to 22 \to 11 \to 12 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$$

Nessa sequência aparecem nove números; por isso, dizemos que ela tem comprimento 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma sequência ímpar.

a) Escreva a sequência que começa com 37.
b) Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.
c) Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?
d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

21 *Bolas coloridas*

Ana quer colorir as bolinhas das Figuras 1, 2 e 3 de azul (A), preto (P) ou vermelho (V) de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes.

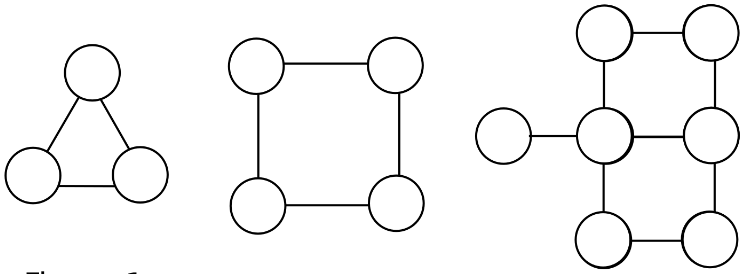
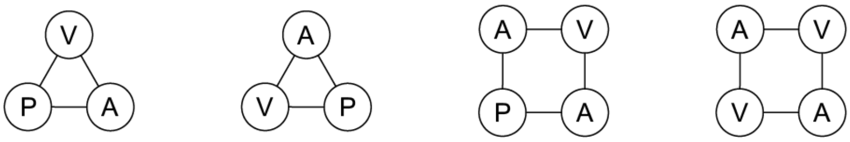


Figura 1 Figura 2 Figura 3

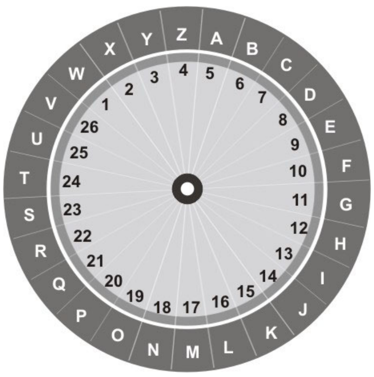
Veja a seguir duas maneiras diferentes de colorir a Figura 1 e duas maneiras diferentes de colorir a Figura 2:



a) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a Figura 1?
b) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a Figura 2?
c) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a Figura 3?

22 *Codificando palavras*

Um antigo método para codificar palavras consiste em escolher um número de 1 a 26, chamado chave do código, e girar o disco interno do aparelho ilustrado na figura até que essa chave corresponda à letra *A*. Depois disso, as letras da palavra são substituídas pelos números correspondentes, separados por tracinhos. Por exemplo, na figura abaixo a chave é 5 e a palavra *PAI* é codificada como 20 − 5 − 13.



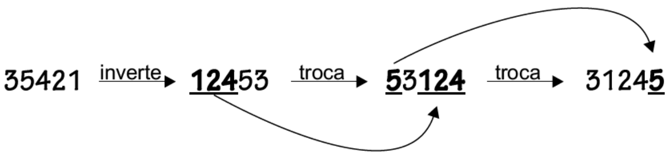
a) Usando a chave indicada na figura, descubra qual palavra foi codificada como 23 − 25 − 7 − 25 − 22 − 13.
b) Codifique *OBMEP* usando a chave 20.
c) Chicó codificou uma palavra de 4 letras com a chave 20, mas esqueceu-se de colocar os tracinhos e escreveu 2620138. Ajude o Chicó colocando os tracinhos que ele esqueceu e depois escreva a palavra que ele codificou.
d) Em uma outra chave, a soma dos números que representam as letras *A*, *B* e *C* é 52. Qual é essa chave?

23 *Troca-inverte*

O troca-inverte é uma brincadeira com números em que há dois tipos de movimentos:

- troca: separar o número em dois grupos e trocar a ordem desses grupos;
- inverte: escrever o número na ordem inversa.

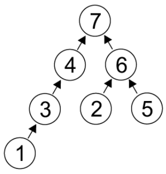
Por exemplo, começando com 35421 podemos obter 31245, como mostrado abaixo.



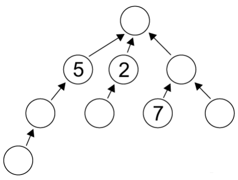
a) Brincando com o troca-inverte e começando com 123456, como podemos obter 165432?
b) Brincando com o troca-inverte e começando com 123, como podemos obter todos os outros cinco números de três algarismos diferentes que podem ser escritos com 1, 2 e 3?
c) Por que, no troca-inverte, começando com 123456 é impossível obter 243156?

24 *Um bom preenchimento*

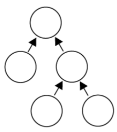
Os círculos da figura abaixo foram preenchidos com os números de 1 a 7, de modo que todas as flechas apontam de um número menor para um maior. Neste caso, dizemos que a figura foi bem preenchida.



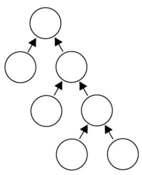
a) Complete a figura abaixo com os números de 1 a 9 de modo que ela fique bem preenchida.



b) De quantas maneiras a figura abaixo pode ser bem preenchida com os números de 1 a 5?

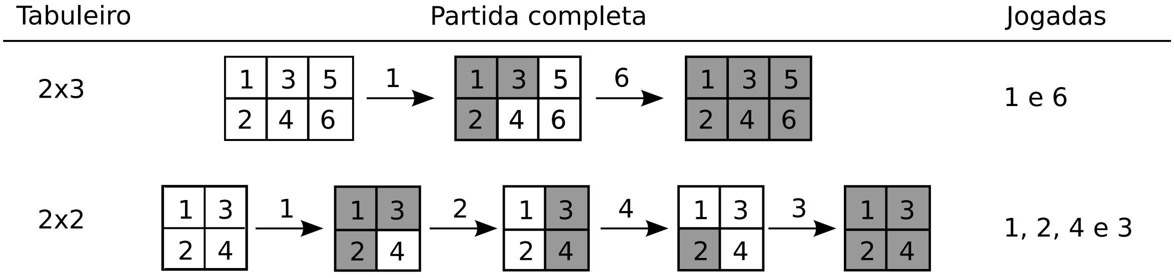


c) De quantas maneiras a figura abaixo pode ser bem preenchida com os números de 1 a 7?



25 *Troca-cor*

No jogo do Troca-Cor usa-se um tabuleiro com duas linhas e com quantas colunas quisermos, cujas casas podem mudar da cor branca para cinza e vice-versa. As casas da 1ª linha são numeradas com os números ímpares e as da 2ª linha com os números pares. Em cada jogada aperta-se uma casa, então, essa casa e as casas vizinhas mudam de cor. Uma partida completa começa com todas as casas brancas e termina quando todas ficam cinzas. Veja dois exemplos de partidas completas (os números acima das flechas indicam a casa apertada em cada jogada):



a) Escreva as jogadas de uma partida completa nos tabuleiros abaixo.

Tabuleiro	Jogadas
1 3 5 7 9 / 2 4 6 8 10	
1 3 5 7 / 2 4 6 8	

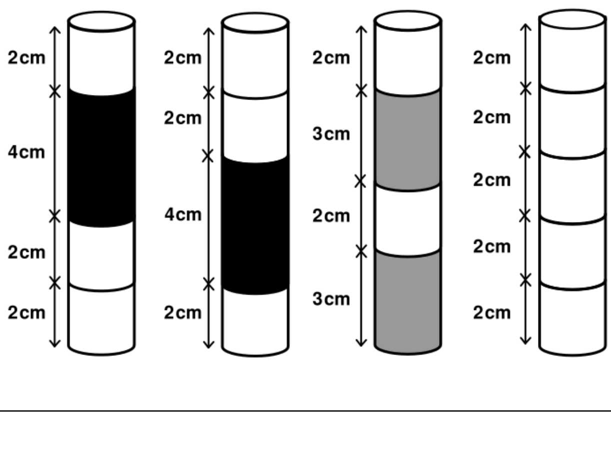
1	3	5	7	9
2	4	6	8	10

1	3	5	7
2	4	6	8

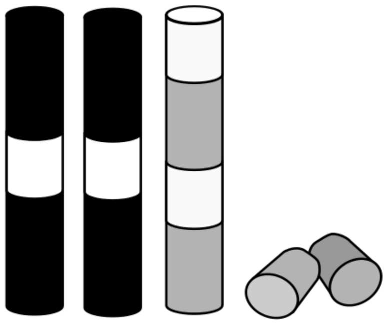
b) Explique como jogar uma partida completa no tabuleiro 2×100.
c) Explique como jogar uma partida completa com exatamente 51 jogadas no tabuleiro 2×101.
d) Explique por que não é possível jogar uma partida completa com menos de 51 jogadas no tabuleiro 2×101.

26 *As torres de Caroba*

Caroba tem várias peças em forma de cilindro, de três tipos: brancas de 2cm de altura, cinzas de 3cm de altura e pretas de 4cm de altura. Com essas peças ela pode montar torres de 10cm de altura de várias maneiras diferentes, algumas delas ilustradas na figura. Descrevemos cada torre listando as alturas de suas peças, de baixo para cima; por exemplo, as torres abaixo são descritas por $(2,2,4,2)$, $(2,4,2,2)$, $(3,2,3,2)$ e $(2,2,2,2,2)$.



a) Descreva todas as diferentes torres de 10cm que a Caroba pode fazer com três peças.
b) Com 12 peças, sendo 4 de cada uma das cores, a Caroba conseguiu montar 3 torres de 10cm, tendo sobrado 2 peças de 3cm, como na figura a seguir.



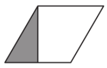
Descreva como a Caroba pode montar 7 torres de 10cm, se ela possuir 27 peças, sendo 9 de cada uma das cores.
c) Explique porque a Caroba não vai conseguir montar 8 torres de 10cm, se ela possuir 27 peças, sendo 9 de cada uma das cores.

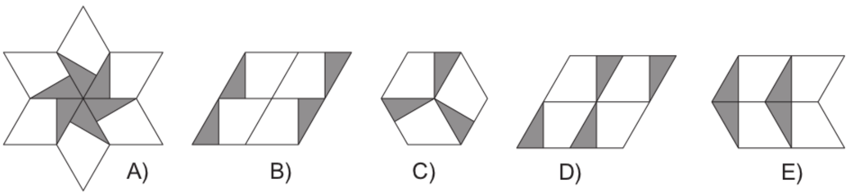
Assunto

Geometria

27 *Azulejos*

A figura ao lado mostra a superfície pintada de um azulejo em forma de losango. Dos cinco padrões abaixo, apenas um não pode ser montado com cópias desse azulejo. Qual é esse padrão?



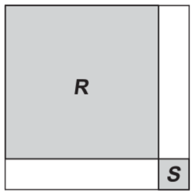


28 *Figuras no quadro-negro*

A professora Clotilde desenhou três figuras no quadro-negro, todas com área igual a 108cm^2.

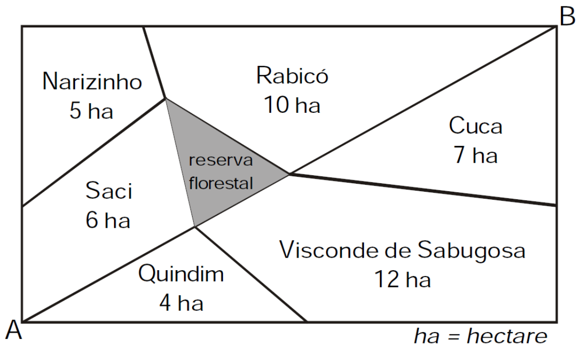
a) A primeira figura é um retângulo que tem um lado de comprimento igual a 12cm. Qual o perímetro desse retângulo?
b) A segunda figura é um retângulo dividido em um retângulo branco e um quadrado cinza de área igual a 36cm^2, como na figura ao lado. Qual é o perímetro do retângulo branco?

c) A terceira figura é um quadrado, que ela dividiu em dois retângulos brancos e dois quadrados cinzas R e S, como na figura abaixo. O perímetro de um dos retângulos é igual a três vezes o perímetro do quadrado S. Qual é a área do quadrado R?



29 *Reforma no Sítio do Picapau Amarelo*

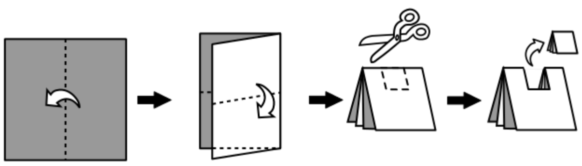
Dona Benta dividiu o Sítio do Picapau Amarelo entre seis personagens, mantendo uma parte do Sítio como reserva florestal. A divisão está indicada na figura, onde a área de cada personagem é dada em hectares e a área sombreada é a reserva florestal. O Sítio tem formato retangular e AB é uma diagonal.



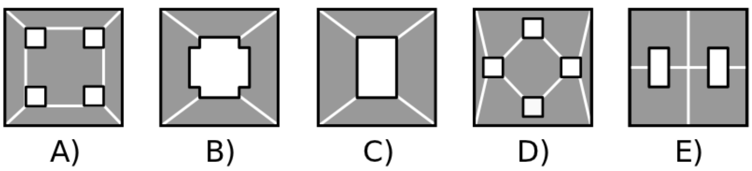
a) Qual é a área da reserva florestal?
b) Para preparar os terrenos para o plantio, cada um dos seis personagens gastou uma quantia proporcional à área de seu terreno. O Quindim e a Cuca gastaram, juntos, R$2.420,00. Quanto foi que o Saci gastou?

30 *Figuras no vazio*

Joãozinho dobrou duas vezes uma folha de papel quadrada, branca de um lado e cinza do outro, e depois recortou um quadradinho, como na figura.

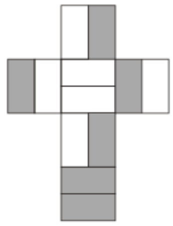


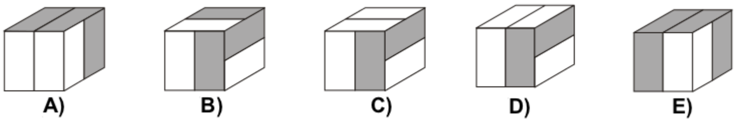
Qual das figuras abaixo ele encontrou quando desdobrou completamente a folha?



31 *Cartolina vira cubo*

Para montar um cubo, Guilherme recortou um pedaço de cartolina branca e pintou de cinza algumas partes, como na figura ao lado. Qual das figuras abaixo representa o cubo construído por Guilherme?





32 *Quantas cores?*

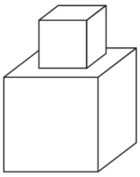
Mário montou um cubo com doze varetas iguais e quer pintá-las de modo que em nenhum vértice se encontrem varetas de cores iguais. Qual é o menor número de cores que ele precisa usar?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

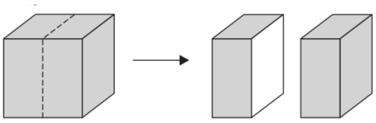
33 *Cubo sobre cubo*

Pedro gasta 1mL de tinta cinza para pintar 100cm^2 de superfície.

a) O sólido da figura abaixo foi feito colando uma face de um cubo de aresta 10cm em uma face de um cubo de aresta 20cm. Quantos mililitros de tinta Pedro precisa para pintar esse sólido?



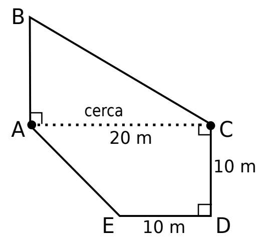
b) Pedro gastou 54mL de tinta para pintar um cubo e depois dividiu esse cubo pintado em dois blocos retangulares iguais, como na próxima figura abaixo. Quantos mililitros a mais de tinta ele gastará para acabar de pintar esses dois blocos?



c) Pedro gastou 54mL de tinta para pintar outro cubo. Depois de pintado, esse cubo foi dividido em cubinhos iguais, e Pedro gastou mais 216mL de tinta para pintar todas as faces dos cubinhos que não estavam pintadas. Em quantos cubinhos ele dividiu o cubo?

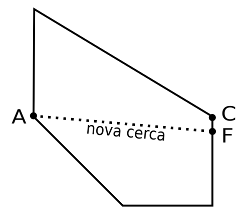
34 *Acertando a área*

A figura abaixo representa o terreno de Dona Idalina. Esse terreno é dividido em duas partes por uma cerca, representada pelo segmento AC. A parte triangular ABC tem área igual a 120m^2.



a) Qual é a área total do terreno?

b) Dona Idalina quer fazer uma nova cerca, representada pelo segmento AF na figura abaixo, de modo a dividir o terreno em duas partes de mesma área. Qual deve ser a distância CF?



35 *Miguilim e os triângulos*

Miguilim brinca com dois triângulos iguais cujos lados medem 3cm, 4cm e 6cm. Ele forma figuras planas unindo um lado de um triângulo com um lado do outro, sem que um triângulo fique sobre o outro. Abaixo vemos duas das figuras que ele fez.

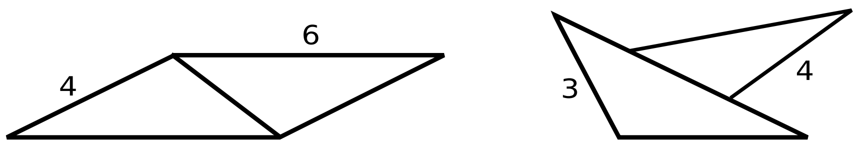


Figura I Figura II

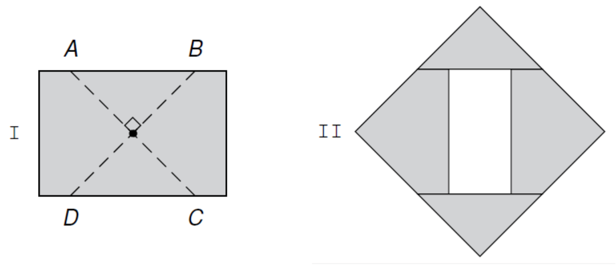
a) Quais os comprimentos dos lados que foram unidos nas Figuras I e II?

b) Calcule os perímetros das Figuras I e II.

c) Qual o **menor** perímetro de uma figura que Miguilim pode formar? Desenhe duas figuras que ele pode formar com esse perímetro.

36 *Retângulo recortado*

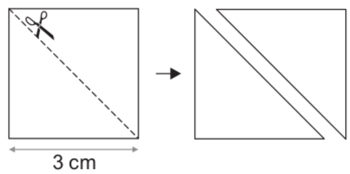
Uma folha retangular de 20cm por 30cm foi cortada ao longo das linhas tracejadas AC e BD em quatro pedaços: dois triângulos iguais e dois polígonos iguais de cinco lados cada um, como na Figura I. Os segmentos AC e BD têm o mesmo comprimento e se encontram no centro do retângulo formando ângulos retos.

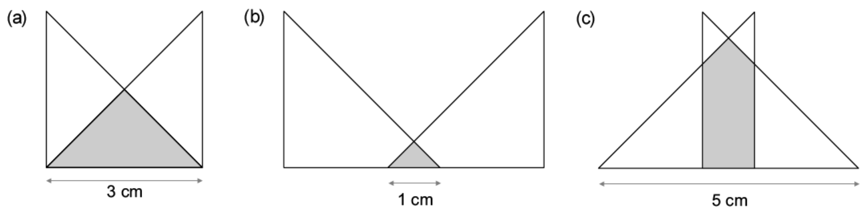


a) Qual é o comprimento do segmento AB?
b) Qual é a área de um pedaço triangular? E de um pedaço de cinco lados?
c) Com os quatro pedaços podemos montar um quadrado com um buraco retangular, como na Figura II. Qual é a área do buraco?

37 *Triângulo sobre triângulo*

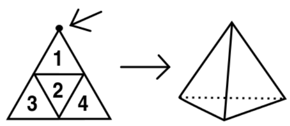
Um quadrado de lado 3cm é cortado ao longo de uma diagonal em dois triângulos, como na figura. Com esses triângulos formamos as figuras dos itens (a), (b) e (c), nas quais destacamos, em cinza, a região em que um triângulo fica sobre o outro. Em cada item, calcule a área da região cinza.



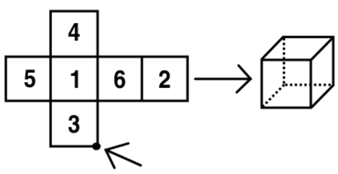


38 *Planificações*

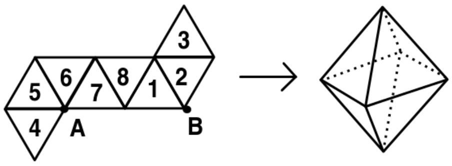
As figuras mostram planificações de sólidos com faces numeradas. Após montados esses sólidos, dizemos que o valor de um vértice é a soma dos números escritos nas faces que contêm esse vértice. Por exemplo, a figura ao lado mostra a planificação de uma pirâmide; quando essa pirâmide é montada, o valor do vértice correspondente ao ponto indicado na figura é $1 + 3 + 4 = 8$.



a) Qual é o maior valor de um vértice da pirâmide acima?
b) A figura abaixo mostra a planificação de um cubo. Qual é o valor do vértice correspondente ao ponto indicado?

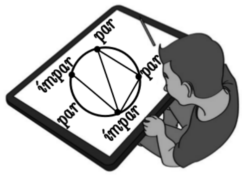


c) A figura a seguir mostra a planificação de um sólido chamado *octaedro*. Qual é o valor do vértice correspondente ao ponto **A**?



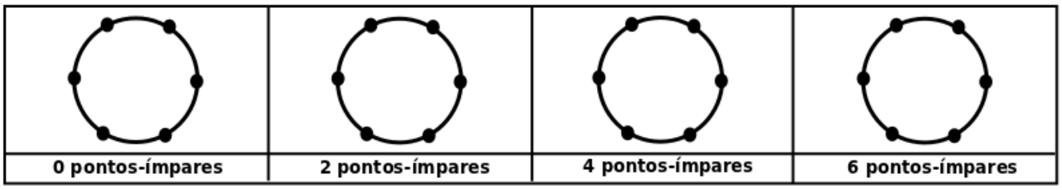
d) Qual é o valor do vértice correspondente ao ponto **B** na planificação do item anterior?

39 *Ligando pontos na circunferência*



Juquinha marca pontos sobre uma circunferência e traça segmentos ligando alguns desses pontos. Ele chama um ponto de ponto-ímpar quando este está ligado a um número ímpar de pontos, e de ponto-par caso contrário. Por exemplo, na ilustração ao lado, ele escolheu cinco pontos e fez quatro ligações.

a) Juquinha marcou cinco pontos sobre uma circunferência e traçou todas as ligações possíveis, exceto uma. Quantos pontos-ímpares foram obtidos?
b) Juquinha marcou seis pontos em cada uma das circunferências a seguir. Em cada caso, mostre como obter o número de pontos-ímpares indicado com exatamente cinco ligações.



c) Explique por que Juquinha sempre encontrará um número par de pontos-ímpares, quaisquer que sejam o número de pontos que ele marcar e o número de ligações que ele traçar.

Nível 2

Assunto

Aritmética

$\boxed{1}$ *Os cartões de Catarina*

Catarina tem 210 cartões numerados de 1 a 210.

a) Quantos desses cartões têm um número que é múltiplo de 3?
b) Quantos desses cartões têm um número par que não é múltiplo de 3?
c) Qual é o menor número de cartões que Catarina deve pegar, ao acaso, para ter certeza de que pelo menos dois deles tenham o número 2 ou o número 3 como divisor comum?

$\boxed{2}$ *Enquadrados*

Um número é enquadrado quando, ao ser somado com o número obtido invertendo a ordem de seus algarismos, o resultado é um quadrado perfeito. Por exemplo, 164 e 461 são enquadrados, pois $164+461 = 625 = 25^2$. Quantos são os números enquadrados entre 10 e 100?

A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

$\boxed{3}$ *Múltiplos irados*

O múltiplo irado de um número natural é o menor múltiplo do número formado apenas pelos algarismos 0 e 1. Por exemplo, o múltiplo irado de 2, bem como de 5, é 10; já o múltiplo irado de 3 é 111 e o de 110 é ele mesmo.

a) Qual é o múltiplo irado de 20?
b) Qual é o múltiplo irado de 9?
c) Qual é o múltiplo irado de 45?
d) Qual é o menor número natural cujo múltiplo irado é 1110?

$\boxed{4}$ *Apenas algarismos ímpares*

Patrícia escreveu, em ordem crescente, os inteiros positivos formados apenas por algarismos ímpares: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 31, 33, ... Qual foi o 157º número que ela escreveu?

A) 997 B) 999 C) 1111 D) 1113 E) 1115

$\boxed{5}$ *Esconde-esconde*

Um número inteiro positivo esconde outro número quando, apagando alguns de seus algarismos, aparece o outro. Por exemplo, o número 123 esconde os números 1, 2, 3, 12, 13 e 23, mas não esconde 32, 123 e 213.

a) Qual é o maior número de três algarismos escondido por 47239?

b) Qual é o menor número que esconde simultaneamente 2009 e 9002?
c) Ache um múltiplo de 2009 que esconde 2009 e cujo algarismo das unidades é 3.

6 *Filhos e irmãos*

Para qualquer número **positivo** x, dizemos que os números $x+1$ e $\frac{x}{x+1}$ são filhos de x e que os dois são irmãos. Por exemplo, $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{3}$ são irmãos, pois são filhos de $\frac{1}{2}$; de fato, $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1$ e $\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}$.

a) Encontre um irmão de $\frac{5}{7}$.
b) Um número pode ser filho de dois números positivos diferentes? Por quê?
c) Mostre que $\frac{1}{2008}$ é descendente de 1, isto é, ele é filho de um filho de um filho... de um filho de 1.

7 *Algarismos afilhados*

Um algarismo é afilhado de um número natural se ele é o algarismo das unidades de algum divisor desse número. Por exemplo, os divisores de 56 são 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28 e 56, logo os afilhados de 56 são 1, 2, 4, 6, 7 e 8.

a) Quais são os afilhados de 57?
b) Ache um número que tenha 7 e 9 como afilhados, mas não 3. Quais são os afilhados desse número?
c) Explique porque 2 e 5 são afilhados de qualquer número que tenha 0 entre seus afilhados.
d) Explique porque 8 é afilhado de qualquer número que tenha 0 e 9 entre seus afilhados.

8 *Chegando ao* 1

Numa aula de Matemática, a professora inicia uma brincadeira escrevendo, no quadro-negro, um número. Para continuar a brincadeira, os alunos devem escrever outro número, seguindo as regras abaixo:

- Se o número escrito só tiver um algarismo, ele deve ser multiplicado por 2.
- Se o número escrito tiver mais de um algarismo, os alunos podem escolher entre apagar o algarismo das unidades ou multiplicar esse número por 2.

Depois que os alunos escrevem um novo número, a brincadeira continua com este número, sempre com as mesmas regras. Veja a seguir dois exemplos desta brincadeira, um começando com 203 e o outro com 4197:

$$203 \xrightarrow{\text{dobra}} 406 \xrightarrow{\text{apaga}} 40 \xrightarrow{\text{apaga}} 4 \ldots$$
$$4197 \xrightarrow{\text{apaga}} 419 \xrightarrow{\text{dobra}} 838 \xrightarrow{\text{apaga}} 83 \ldots$$

a) Comece a brincadeira com o número 45 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.
b) Comece agora a brincadeira com o número 345 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.
c) Explique como chegar ao número 1 começando a brincadeira com qualquer número natural diferente de zero.

9 *Conjuntos equilibrados*

Um conjunto de inteiros consecutivos é equilibrado se ele pode ser dividido em dois subconjuntos com o mesmo número de elementos, de modo que:

1) os dois subconjuntos não tenham elementos em comum;
2) a soma dos elementos de um dos subconjuntos seja igual à soma dos elementos do outro;
3) a soma dos quadrados dos elementos de um dos subconjuntos seja igual à soma dos quadrados dos elementos do outro.

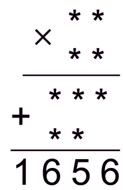
Por exemplo, o conjunto $\{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ é equilibrado, pois podemos dividi-lo nos subconjuntos $\{7, 10, 12, 13\}$ e $\{8, 9, 11, 14\}$, e

$$\begin{aligned} 7 + 10 + 12 + 13 &= 8 + 9 + 11 + 14 \\ 7^2 + 10^2 + 12^2 + 13^2 &= 8^2 + 9^2 + 11^2 + 14^2 . \end{aligned}$$

a) Verifique que o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ é equilibrado.
b) Mostre que qualquer conjunto de oito inteiros consecutivos é equilibrado.
c) Mostre que nenhum conjunto de quatro inteiros consecutivos é equilibrado.

10 *Descobrindo a multiplicação*

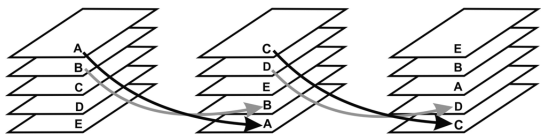
Na multiplicação indicada na figura ao lado os asteriscos representam algarismos, iguais ou não. Qual é a soma dos números que foram multiplicados?



A) 82 B) 95 C) 110 D) 127 E) 132

11 *Cartas marcadas*

Estefânia tem cinco cartas marcadas com as letras A, B, C, D e E, empilhadas nessa ordem de cima para baixo. Ela embaralha as cartas pegando as duas de cima e colocando-as, com a ordem trocada, embaixo da pilha. A figura mostra o que acontece nas duas primeiras vezes em que ela embaralha as cartas.

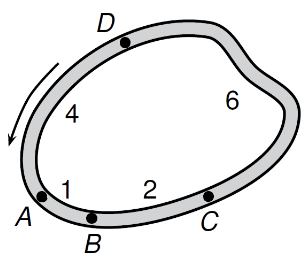


Se Estefânia embaralhar as cartas 74 vezes, qual carta estará no topo da pilha?

A) A B) B C) C D) D E) E

12 *Correndo na medida certa*

A figura abaixo representa o traçado de uma pista de corrida.



Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 quilômetros pode ser realizada com partida em D e chegada em A.

a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?
b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são esses postos?
c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

$\boxed{13}$ *Números em um quadrado*

Gabriel desenha quadrados divididos em nove casas e escreve os números naturais de 1 a 9, um em cada casa. Em seguida, ele calcula a soma dos números de cada linha e de cada coluna. A figura mostra um dos quadrados do Gabriel; observe que a soma dos números da terceira linha é 5 + 8 + 2 = 15 e a soma dos números da segunda coluna é 9 + 7 + 8 = 24. Nesse exemplo, as seis somas são 6, 12, 15, 15, 18 e 24.

6	9	3	18
4	7	1	12
5	8	2	15
15	24	6	

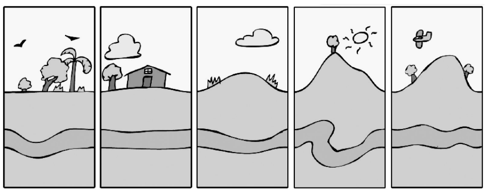
a) Gabriel preencheu um quadrado e fez apenas cinco somas: 9, 13, 14, 17 e 18. Qual é a soma que está faltando?
b) Explique por que não é possível que em um quadrado do Gabriel todas as somas sejam números pares.
c) Preencha o quadrado de forma que as somas sejam 7, 13, 14, 16, 18 e 22.

Assunto

Combinatória

$\boxed{14}$ *Paisagens*

Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco quadros da figura.

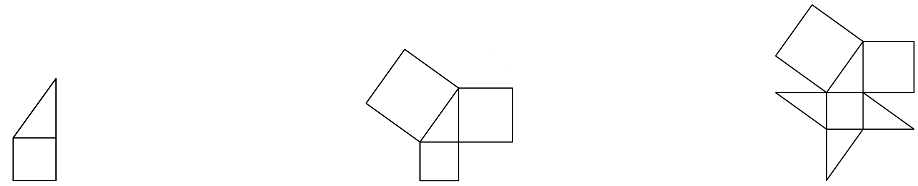


Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo, aproximadamente, é possível evitar que uma mesma paisagem se repita?

A) uma semana B) um mês C) dois meses D) quatro meses E) seis meses

$\boxed{15}$ *Colorindo*

João vai pintar figuras compostas por quadrados e triângulos. Cada quadrado pode ser pintado de azul, vermelho ou verde e cada triângulo de azul, vermelho ou amarelo, de modo que polígonos com um lado comum não tenham a mesma cor. Em cada um dos itens a seguir, determine de quantas maneiras João pode pintar a figura correspondente.



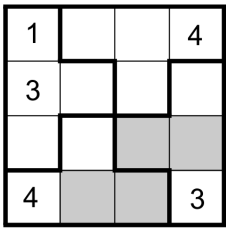
a) b) c)

16 *Problema de tabuleiro*

Os quadradinhos do tabuleiro da figura devem ser preenchidos de modo que:

• nos quadradinhos de cada uma das regiões em forma de  apareçam os números 1, 3, 5 e 7 ou os números 2, 4, 6 e 8;

• em quadradinhos com um lado comum não apareçam números consecutivos.



Qual é a soma dos números que vão aparecer nos quadradinhos cinzas?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

17 *Encaixando*

As peças da Figura 1 são feitas de quadradinhos de cartolina cinza de um lado e branca do outro. A Figura 3 mostra uma maneira de encaixar essas peças com o lado cinza para cima nos quatro quadrados da Figura 2.

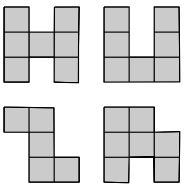


Figura 1

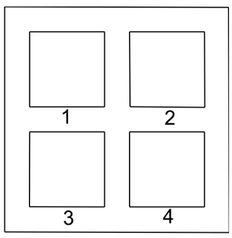


Figura 2

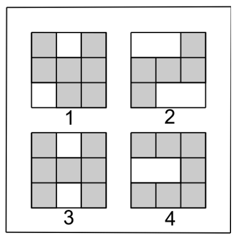


Figura 3

De quantas maneiras diferentes é possível fazer isso?

A) 1024 B) 1536 C) 2048 D) 3072 E) 4096

18 *Futebol matemático*

Os times A, B, C, D e E disputaram, entre si, um torneio de futebol com as seguintes regras:

• o vencedor de uma partida ganha 3 pontos e o perdedor não ganha nada;
• em caso de empate, cada um dos times ganha 1 ponto;
• cada time joga exatamente uma vez com cada um dos outros.

O campeão do torneio foi o time A, seguido na classificação por B, C, D e E, nessa ordem. Além disso:

• o time A não empatou nenhuma partida;

• o time B não perdeu nenhuma partida;
• todos os times terminaram o torneio com números diferentes de pontos.

a) O time A ganhou, perdeu ou empatou sua partida contra o time B? Por quê?
b) Com quantos pontos o time A terminou o torneio? Por quê?
c) Explique porque o time B obteve um número par de pontos nesse torneio.
d) Na tabela, cada coluna representa uma partida. Sabendo que ocorreram exatamente 5 empates nesse torneio, desenhe, em cada coluna da tabela, um círculo em volta do nome do time ganhador ou em volta do $\times$, em caso de empate.

A	A	A	A	B	B	B	C	C	D
$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
B	C	D	E	C	D	E	D	E	E

19 *Ímpar soma, par divide*

Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo:
• se o número for ímpar, soma-se 1;
• se o número for par, divide-se por 2.
Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência:

$$21 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

Nessa sequência aparecem nove números; por isso, dizemos que ela tem comprimento 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma sequência ímpar.

a) Escreva a sequência que começa com 37.
b) Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.
c) Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?
d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

20 *Uma caixa cheia de bolas*

Uma caixa contém 105 bolas pretas, 89 bolas cinzentas e 5 bolas brancas. Fora da caixa há bolas brancas em quantidade suficiente para efetuar repetidamente o seguinte procedimento, até que sobrem duas bolas na caixa:
• retiram-se, sem olhar, duas bolas da caixa;
• se as bolas retiradas forem de cores diferentes, a de cor mais escura é devolvida para a caixa;
• caso contrário, descartam-se as bolas retiradas e coloca-se na caixa uma bola branca.
Sobre as cores das duas bolas que sobram, pode-se garantir que:

A) as duas serão brancas.
B) as duas serão cinzentas.
C) as duas serão pretas.
D) exatamente uma será preta.
E) exatamente uma será cinzenta.

21 *Jogo Diferente*

Fernando e Isaura inventaram um jogo diferente, cujas regras são as seguintes:
1) eles começam uma partida com 128 palitos cada um;

2) em cada jogada, eles tiram par ou ímpar; se sai par, Fernando dá a metade dos palitos que tem para Isaura e, se sai ímpar, Isaura dá a metade dos palitos que tem para Fernando;

3) eles repetem o procedimento da regra 2 até que um deles fique com um número ímpar de palitos, quando a partida acaba. Ganha quem ficar com maior número de palitos.

Veja o que acontece em uma partida onde a sequência das três primeiras jogadas é par, ímpar, par:

Fernando	Isaura		Fernando	Isaura		Fernando	Isaura		Fernando	Isaura	
128	128	$\xrightarrow[1^a \text{ jogada}]{\textbf{par}}$	64	192	$\xrightarrow[2^a \text{ jogada}]{\textbf{ímpar}}$	160	96	$\xrightarrow[3^a \text{ jogada}]{\textbf{par}}$	80	176	...

a) Complete o esquema com o número de palitos de Fernando e Isaura, de acordo com as jogadas indicadas.

Fernando	Isaura		Fernando	Isaura		Fernando	Isaura		Fernando	Isaura	
128	128	$\xrightarrow[1^a \text{ jogada}]{\textbf{ímpar}}$			$\xrightarrow[2^a \text{ jogada}]{\textbf{ímpar}}$			$\xrightarrow[3^a \text{ jogada}]{\textbf{par}}$			...

b) Uma partida acabou quando Fernando ficou com 101 palitos. Na última jogada saiu par ou ímpar?

c) Qual foi a sequência de pares e ímpares da partida que acabou quando Fernando ficou com 101 palitos?

d) Mostre que qualquer partida acaba com exatamente sete jogadas.

$\boxed{22}$ *Quadrados especiais*

O quadrado da Figura I é chamado especial porque:

- ele está dividido em 16 quadrados iguais;
- em cada linha e em cada coluna aparecem os algarismos 1, 2, 3 e 4;
- em cada um dos quadrados A, B, C e D (como na Figura II) aparecem os algarismos 1, 2, 3 e 4.

4	2	1	3
1	3	2	4
3	1	4	2
2	4	3	1

I

A	*B*
C	*D*

II

a) Complete o quadrado abaixo de modo que ele se torne especial.

	2		
3	4		
		1	
			2

b) É possível completar o quadrado abaixo de modo a obter um quadrado especial? Por quê?

1	2		
3	4		
			2
			1

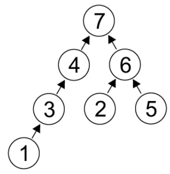
c) Exiba todas as maneiras de completar o quadrado abaixo de modo a obter um quadrado especial.

1	2		
3	4		
			1

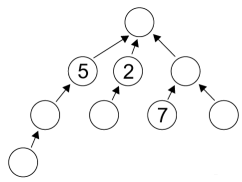
d) Quantos quadrados especiais existem?

23 *Um bom preenchimento*

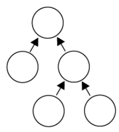
Os círculos da figura abaixo foram preenchidos com os números de 1 a 7, de modo que todas as flechas apontam de um número menor para um maior. Neste caso, dizemos que a figura foi bem preenchida.



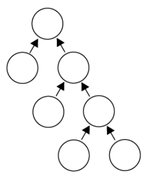
a) Complete a figura abaixo com os números de 1 a 9 de modo que ela fique bem preenchida.



b) De quantas maneiras a figura abaixo pode ser bem preenchida com os números de 1 a 5?

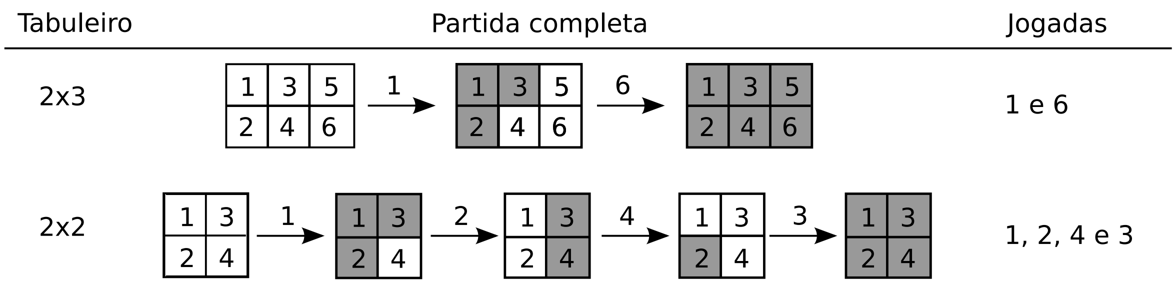


c) De quantas maneiras a figura abaixo pode ser bem preenchida com os números de 1 a 7?



24 *Troca-cor*

No jogo do Troca-Cor usa-se um tabuleiro com duas linhas e com quantas colunas quisermos, cujas casas podem mudar da cor branca para cinza e vice-versa. As casas da 1ª linha são numeradas com os números ímpares e as da 2ª linha com os números pares. Em cada jogada aperta-se uma casa, então, essa casa e as casas vizinhas mudam de cor. Uma partida completa começa com todas as casas brancas e termina quando todas ficam cinzas. Veja dois exemplos de partidas completas (os números acima das flechas indicam a casa apertada em cada jogada):



a) Escreva as jogadas de uma partida completa nos tabuleiros abaixo.

Tabuleiro	Jogadas

1	3	5	7	9
2	4	6	8	10

1	3	5	7
2	4	6	8

b) Explique como jogar uma partida completa no tabuleiro 2×100.
c) Explique como jogar uma partida completa com exatamente 51 jogadas no tabuleiro 2×101.
d) Explique por que não é possível jogar uma partida completa com menos de 51 jogadas no tabuleiro 2×101.

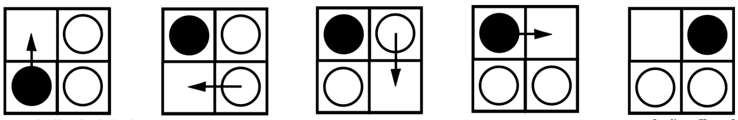
25 *Letras e números*

Juliana quer dar a cada uma das 26 letras A, B, C, D,..., W, X, Y, Z do alfabeto um valor numérico diferente de zero, de tal modo que $A \times C = B$, $B \times D = C$, $C \times E = D$, e assim por diante, até $X \times Z = Y$.

a) Se Juliana der a A e B os valores 5 e 7, respectivamente, quais serão os valores de C, D e E?
b) Mostre que $G = A$, quaisquer que sejam os valores que Juliana der para A e B.
c) Se Juliana der valores para A e B tais que $A \times B = 2010$, qual será o valor do produto $A \times B \times C \times D \times \cdots \times W \times X \times Y \times Z$?

26 *Arrasta Um*

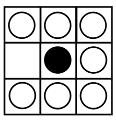
No jogo *Arrasta Um* usa-se um tabuleiro quadriculado e peças redondas, uma preta e as outras brancas. Coloca-se uma peça em cada casa do tabuleiro, exceto em uma que é deixada vazia. Um movimento consiste em deslocar para a casa vazia a peça de uma casa adjacente. O jogo termina quando a peça preta chega ao canto superior direito do tabuleiro. Veja um exemplo de como terminar o *Arrasta Um* em quatro movimentos em um tabuleiro 2×2.



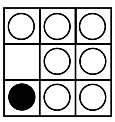
posição inicial **posição final**

Esta sequência de movimentos pode ser descrita por $(\uparrow, \leftarrow, \downarrow, \rightarrow)$.

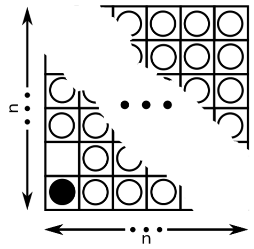
a) Descreva como terminar o Arrasta Um em seis movimentos no tabuleiro 3×3 abaixo.



b) Descreva como terminar o Arrasta Um em dez movimentos no tabuleiro 3×3 abaixo.



c) Mostre que em um tabuleiro $n \times n$, como na figura, é possível terminar o Arrasta Um em $6n - 8$ movimentos.

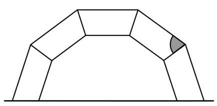


Assunto

Geometria

27 *Cinco trapézios*

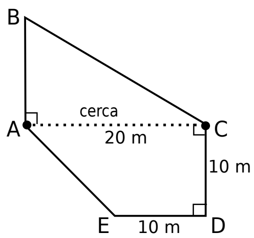
A figura é formada por 5 trapézios isósceles iguais. Qual é a medida do ângulo indicado?



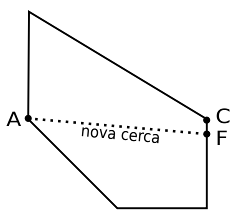
A) 72º B) 74º C) 76º D) 78º E) 80º

28 *Acertando a área*

A figura abaixo representa o terreno de Dona Idalina. Esse terreno é dividido em duas partes por uma cerca, representada pelo segmento AC. A parte triangular ABC tem área igual a 120m^2.



a) Qual é a área total do terreno?
b) Dona Idalina quer fazer uma nova cerca, representada pelo segmento AF na figura abaixo, de modo a dividir o terreno em duas partes de mesma área. Qual deve ser a distância CF?



29 *Um buraco no Tangran*

A Figura I mostra um quadrado de 40cm^2 cortado em cinco triângulos retângulos isósceles, um quadrado e um paralelogramo, formando as sete peças do jogo Tangran. Com elas é possível formar a Figura II, que tem um buraco sombreado. Qual é a área do buraco?

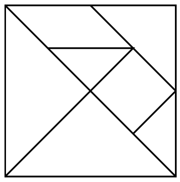


Figura I

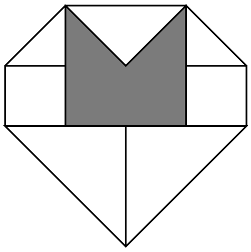
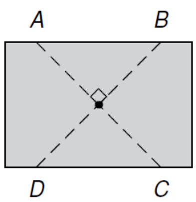


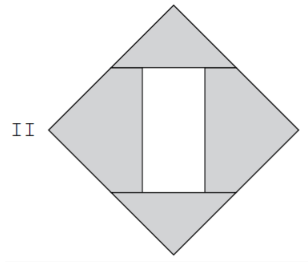
Figura II

A) 5cm^2 B) 10cm^2 C) 15cm^2 D) 20cm^2 E) 25cm^2

30 *Retângulo recortado*

Uma folha retangular de 20cm por 30cm foi cortada ao longo das linhas tracejadas AC e BD em quatro pedaços: dois triângulos iguais e dois polígonos iguais de cinco lados cada um, como na Figura I. Os segmentos AC e BD têm o mesmo comprimento e se encontram no centro do retângulo formando ângulos retos.

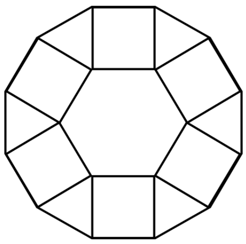
I


II


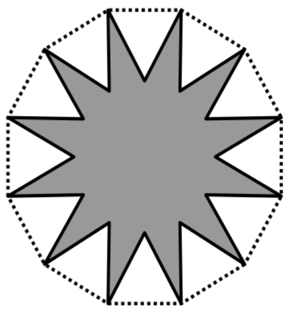
a) Qual é o comprimento do segmento AB?
b) Qual é a área de um pedaço triangular? E de um pedaço de cinco lados?
c) Com os quatro pedaços podemos montar um quadrado com um buraco retangular, como na Figura II. Qual é a área do buraco?

31 *Polígonos e polígonos*

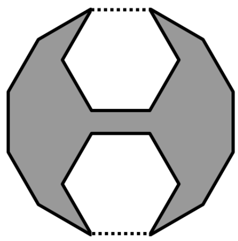
A figura mostra um dodecágono regular decomposto em seis triângulos equiláteros, seis quadrados e um hexágono regular, todos com lados de mesma medida.



a) Se cada triângulo tem área igual a 1cm^2 qual é a área do **hexágono**?
b) A figura abaixo foi obtida retirando doze triângulos equiláteros de um dodecágono regular cujo lado mede 1cm. Qua é a área dessa figura?

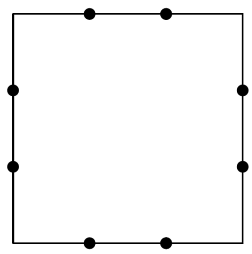


c) A figura abaixo foi obtida retirando dois hexágonos regulares de um dodecágono regular cujo lado mede 1cm. Qual é a área dessa figura?



32 *Quantos?*

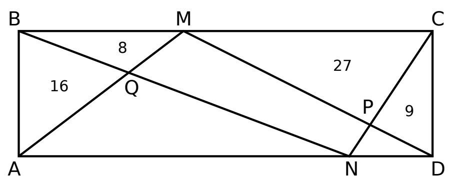
Os oito pontos destacados na figura dividem os lados do quadrado em três partes iguais. Quantos triângulos retângulos podem ser traçados com os três vértices nesses pontos?



A) 8 B) 12 C) 16 D) 24 E) 32

33 *Triângulos em um retângulo*

Na figura abaixo, $ABCD$ é um retângulo, M e N são pontos nos lados BC e AD, respectivamente, e os números representam as áreas dos triângulos ABQ, BQM, MPC e CPD em centímetros quadrados.



a) Qual é a área do triângulo AMD? Por quê?
b) Calcule a soma das áreas dos triângulos AQN e NPD.
c) Calcule a área do quadrilátero $MPNQ$.

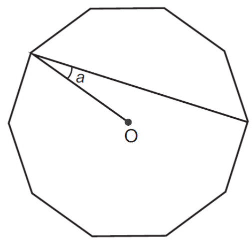
34 *Muitos quadrados*

A Princesa Telassim cortou uma folha de papel retangular em 9 quadrados de lados 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 e 18 centímetros.

a) Qual era a área da folha antes de ser cortada?
b) Quais eram as medidas da folha antes de ser cortada?
c) A Princesa Telassim precisa montar a folha de novo. Ajude-a mostrando, com um desenho, como fazer esta montagem.

35 *Decágono*

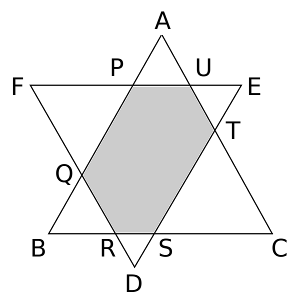
A figura mostra um polígono regular de dez lados com centro O. Qual é a medida do ângulo a?



A) 15° B) 18° C) 20° D) 30° E) 36°

36 *Estrela*

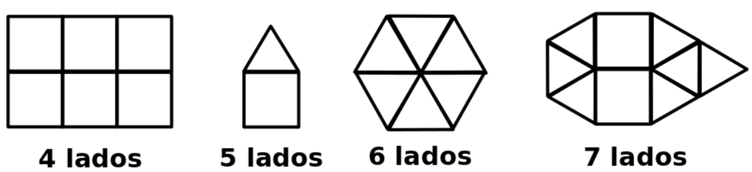
Na figura, os triângulos ABC e DEF são equiláteros de lados 14cm e 13cm, respectivamente, e os lados BC e EF são paralelos.



a) Calcule a medida do ângulo $E\hat{U}T$.
b) Calcule o perímetro do polígono $PQRSTU$.
c) Se o segmento PQ mede 6cm, qual é a medida do segmento ST?

37 *Polígonos convexos elegantes*

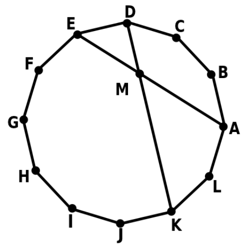
Um polígono convexo é elegante quando ele pode ser decomposto em triângulos equiláteros, quadrados ou ambos, todos com lados de mesmo comprimento. Abaixo, mostramos alguns polígonos elegantes, indicando para cada um deles uma decomposição e o número de lados.



a) Desenhe um polígono elegante de 8 lados, indicando uma decomposição.
b) Quais são as possíveis medidas dos ângulos internos de um polígono elegante?
c) Mostre que um polígono elegante não pode ter mais que 12 lados.
d) Desenhe um polígono elegante de 12 lados, indicando uma decomposição.

38 *O polígono ABCDEFGHIJKL*

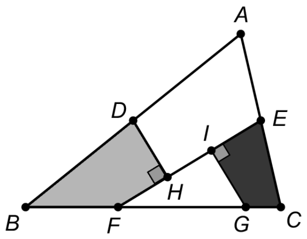
O polígono *ABCDEFGHIJKL* é regular e tem doze lados.



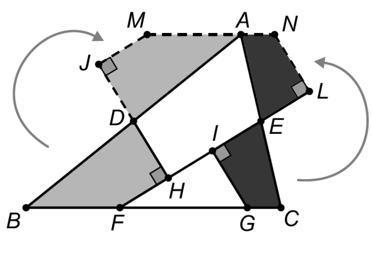
a) Qual é a medida dos ângulos internos do polígono?
b) O ponto M é a interseção dos segmentos AE e DK. Quais são as medidas dos ângulos $M\hat{D}E$ e $D\hat{M}E$?
c) Qual é a medida do ângulo $C\hat{B}M$?
d) Prove que os pontos B, M e F estão alinhados.

39 *Um triângulo em quatro partes*

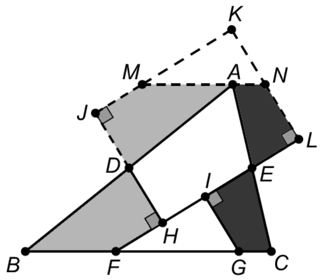
Em todas as figuras desta questão, vemos um triângulo ABC dividido em quatro partes; nesses triângulos, D é ponto médio de AB, E é ponto médio de AC e FG mede $\frac{1}{2}BC$.



a) Os quadriláteros $DJMA$ e $ELNA$ são obtidos girando de 180° os quadriláteros $DHFB$ e $EIGC$ em torno de D e E, respectivamente. Explique por que os pontos M, A e N estão alinhados, ou seja, por que a medida do ângulo $M\hat{A}N$ é igual a 180°.



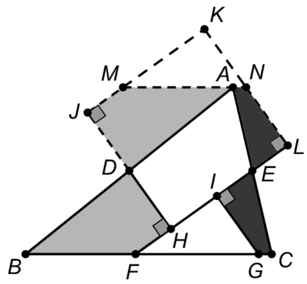
b) Na figura abaixo, o ponto K é a interseção das retas JM e LN. Explique por que os triângulos FGI e MNK são congruentes.



Os itens acima mostram que $HJKL$ é um retângulo formado com as quatro partes em que o triângulo ABC foi dividido.

c) Mostre que $LH = EF$.

d) Na figura abaixo o triângulo ABC tem área 9 e $HJKL$ é um quadrado. Calcule o comprimento de EF.



Nível 3

Assunto

Aritmética

1 *O contrário*

O contrário de um número de dois algarismos, ambos diferentes de zero, é o número obtido trocando-se a ordem de seus algarismos. Por exemplo, o contrário de 25 é 52 e o contrário de 79 é 97. Qual dos números abaixo não é a soma de um número de dois algarismos com o seu contrário?

A) 44 B) 99 C) 121 D) 165 E) 181

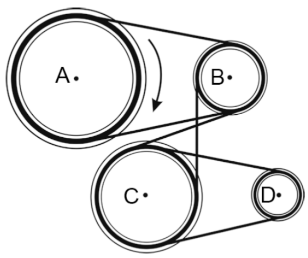
2 *Trocando de ordem os algarismos*

O número *abcde* tem cinco algarismos distintos e diferentes de zero, cada um deles representado por uma das letras a, b, c, d, e. Multiplicando-se este número por 4 obtém-se um número de cinco algarismos *edcba*. Qual o valor de $a + b + c + d + e$?

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 27

3 *Os discos dão voltas*

Os discos A, B, C e D representam polias de diâmetros 8, 4, 6 e 2 cm, respectivamente, unidas por correias que se movimentam sem deslizar. Quando o disco A dá uma volta completa no sentido horário, o que acontece com o disco D?



A) Dá 4 voltas no sentido horário
B) Dá 3 voltas no sentido horário
C) Dá 6 voltas no sentido anti-horário
D) Dá 4 voltas no sentido anti-horário
E) Dá 3 voltas no sentido anti-horário

4 *Uma festa matemática*

O Grêmio Estudantil de Taperoá vai dar uma festa, vendendo ingressos a R$6,00. Para estimular a compra antecipada de ingressos, os diretores do Grêmio decidiram que:

• os ingressos serão numerados a partir do número 1 e vendidos obedecendo à ordem crescente de sua numeração;

• ao final da festa, cada participante receberá R$0,01 para cada ingresso vendido que tenha um número maior que o número do seu ingresso.

a) Se forem vendidos 100 ingressos, quanto vai receber, ao final da festa, a pessoa que comprou o ingresso com o número 1? E a que comprou o ingresso com o número 70?
b) Qual será o lucro do Grêmio se forem vendidos 100 ingressos?
c) Quantos ingressos o Grêmio deve vender para ter o maior lucro possível?

5 *A maior soma*

Escreva os algarismos de 0 até 9 em uma linha, na ordem que você escolher. Na linha debaixo junte os vizinhos, formando nove números novos, e some esses números como no exemplo:

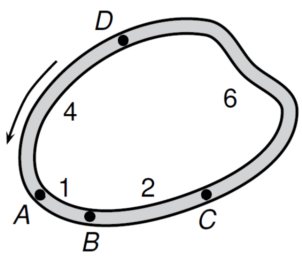
<table>
<tr><td>2</td><td></td><td>1</td><td></td><td>3</td><td></td><td>7</td><td></td><td>4</td><td></td><td>9</td><td></td><td>5</td><td></td><td>8</td><td></td><td>0</td><td></td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>21</td><td></td><td>13</td><td></td><td>37</td><td></td><td>74</td><td></td><td>49</td><td></td><td>95</td><td></td><td>58</td><td></td><td>80</td><td></td><td>06</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="19">21 + 13 + 37 + 74 + 95 + 58 + 80 + 6 = 433</td></tr>
</table>

Qual é a maior soma que é possível obter desse modo?

A) 506 B) 494 C) 469 D) 447 E) 432

6 *Correndo na medida certa*

A figura abaixo representa o traçado de uma pista de corrida.



Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 quilômetros pode ser realizada com partida em D e chegada em A.

a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?
b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são esses postos?
c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

7 *Severina, Catarina e os números*

a) Severina escreveu um número inteiro positivo em cada lado de um quadrado. Em seguida, escreveu em cada vértice o produto dos números escritos nos lados que se encontram nesse vértice. A soma dos números escritos em dois lados opostos é 60 e a soma dos números escritos nos outros lados é 85. Qual é a soma dos números escritos nos vértices?
b) Catarina, por sua vez, escreveu em cada face de um cubo um número inteiro positivo. Em seguida, escreveu em cada vértice o produto dos números escritos nas três faces que se encontram nesse vértice. Se a soma dos números escritos nos vértices é 105, qual é a soma dos números escritos nas faces?

8 *Simpáticos números*

Um número inteiro n é simpático quando existem inteiros positivos a, b e c tais que $a < b < c$ e $n = a^2 + b^2 - c^2$. Por exemplo, os números 1 e 2 são simpáticos, pois $1 = 4^2 + 7^2 - 8^2$ e $2 = 5^2 + 11^2 - 12^2$.

a) Verifique que $(3x + 1)^2 + (4x + 2)^2 - (5x + 2)^2$ é igual a $2x + 1$, qualquer que seja x.
b) Encontre números inteiros m e n tais que $(3x - m)^2 + (4x - n)^2 - (5x - 5)^2 = 2x$, qualquer que seja x.
c) Mostre que o número 4 é simpático.
d) Mostre que todos os números inteiros positivos são simpáticos.

9 *Números em um quadrado*

Gabriel desenha quadrados divididos em nove casas e escreve os números naturais de 1 a 9, um em cada casa. Em seguida, ele calcula a soma dos números de cada linha e de cada coluna. A figura mostra um dos quadrados do Gabriel; observe que a soma dos números da terceira linha é $5 + 8 + 2 = 15$ e a soma dos números da segunda coluna é $9 + 7 + 8 = 24$. Nesse exemplo, as seis somas são $6, 12, 15, 15, 18$ e 24.

6	9	3	18
4	7	1	12
5	8	2	15
15	24	6	

a) Gabriel preencheu um quadrado e fez apenas cinco somas: 9, 13, 14, 17 e 18. Qual é a soma que está faltando?
b) Explique por que não é possível que em um quadrado do Gabriel todas as somas sejam números pares.
c) Preencha o quadrado de forma que as somas sejam 7, 13, 14, 16, 18 e 22.

10 *Correria*

Alberto, Bernardo e Carlos disputaram uma corrida, na qual cada um deles correu com velocidade constante durante todo o percurso. Quando Alberto cruzou a linha de chegada, Bernardo e Carlos estavam 36 e 46 metros atrás dele, respectivamente. Quando Bernardo cruzou a linha de chegada, Carlos estava 16 metros atrás dele. Qual é o comprimento da pista?

A) 96m B) 100m C) 120m D) 136m E) 144m

11 *Resolvendo o problema da calculadora*

Uma calculadora esquisita tem apenas as teclas numéricas de 0 a 9 e duas teclas especiais A e B. Quando a tecla A é apertada, o número que aparece no visor é elevado ao quadrado; quando a tecla B é apertada, soma-se 3 ao número que aparece no visor. Nessa calculadora é possível obter 22 a partir do 1 apertando as teclas A e B na ordem $BABB$, como ilustrado abaixo:

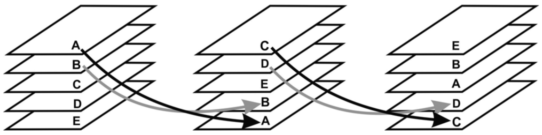
$$1 \xrightarrow{B} 4 \xrightarrow{A} 16 \xrightarrow{B} 19 \xrightarrow{B} 22$$

a) Com o 3 inicialmente no visor, qual o número que vai aparecer depois de apertar as teclas A e B na ordem $BBAB$?

b) Mostre como obter 55 a partir do 1 usando as teclas A e B.
c) Explique porque não é possível obter 54 a partir do 2 usando as teclas A e B.

12 *Cartas marcadas*

Estefânia tem cinco cartas marcadas com as letras A, B, C, D e E, empilhadas nessa ordem de cima para baixo. Ela embaralha as cartas pegando as duas de cima e colocando-as, com a ordem trocada, embaixo da pilha. A figura mostra o que acontece nas duas primeiras vezes em que ela embaralha as cartas.

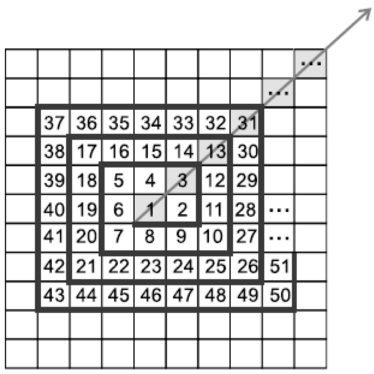


Se Estefânia embaralhar as cartas 74 vezes, qual carta estará no topo da pilha?

A) A B) B C) C D) D E) E

13 *Paula escreve números*

Paula escreveu os números 1, 2, 3,... em uma folha de papel quadriculado de acordo com o padrão indicado abaixo. Qual é o termo da sequência 1, 3, 13, 31,... Qual é o 30º termo dessa sequência?



A) 3301 B) 3303 C) 3307 D) 3309 E) 3313

Assunto

Combinatória

14 *Futebol matemático*

Os times A, B, C, D e E disputaram, entre si, um torneio de futebol com as seguintes regras:

- o vencedor de uma partida ganha 3 pontos e o perdedor não ganha nada;
- em caso de empate, cada um dos times ganha 1 ponto;
- cada time joga exatamente uma vez com cada um dos outros.

O campeão do torneio foi o time A, seguido na classificação por B, C, D e E, nessa ordem. Além disso:

- o time A não empatou nenhuma partida;
- o time B não perdeu nenhuma partida;
- todos os times terminaram o torneio com números diferentes de pontos.

a) O time A ganhou, perdeu ou empatou sua partida contra o time B? Por quê?

b) Com quantos pontos o time A terminou o torneio? Por quê?
c) Explique porque o time B obteve um número par de pontos nesse torneio.
d) Na tabela, cada coluna representa uma partida. Sabendo que ocorreram exatamente 5 empates nesse torneio, desenhe, em cada coluna da tabela, um círculo em volta do nome do time ganhador ou em volta do $\times$, em caso de empate.

A	A	A	A	B	B	B	C	C	D
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
B	C	D	E	C	D	E	D	E	E

15 *Quixajuba disputa um torneio*

Quatro times, entre os quais o Quixajuba, disputam um torneio de vôlei em que:
- cada time joga contra cada um dos outros uma única vez;
- qualquer partida termina com a vitória de um dos times;
- em qualquer partida, os times têm a mesma probabilidade de ganhar;
- ao final do torneio, os times são classificados em ordem pelo número de vitórias.

a) É possível que, ao final do torneio, todos os times tenham o mesmo número de vitórias? Por quê?
b) Qual é a probabilidade de que o torneio termine com o Quixajuba isolado em primeiro lugar?
c) Qual é a probabilidade de que o torneio termine com três times empatados em primeiro lugar?

16 *O sorteio do livro*

André, Bianca, Carlos e Dalva querem sortear um livro entre si. Para isto, colocam 3 bolas brancas e 1 preta em uma caixa e combinam que, em ordem alfabética de seus nomes, cada um tirará uma bola, sem devolvê-la à caixa. Aquele que tirar a bola preta ganhará o livro.

a) Qual é a probabilidade de que André ganhe o livro?
b) Qual é a probabilidade de que Dalva ganhe o livro?

Para sortear outro livro entre eles, André sugeriu usar 2 bolas pretas e 6 brancas. Como antes, o primeiro que tirar uma bola preta ganhará o livro; se as primeiras quatro bolas saírem brancas, eles continuarão a retirar bolas, na mesma ordem. Nesse novo sorteio:

c) Qual é a probabilidade de que André ganhe o livro?
d) Qual é a probabilidade de que Dalva ganhe o livro?

17 *Ímpar soma, par divide*

Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo:
- se o número for ímpar, soma-se 1;
- se o número for par, divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência:

$$21 \to 22 \to 11 \to 12 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$$

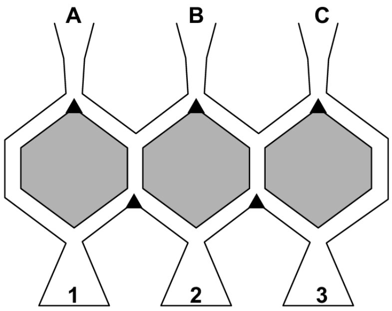
Nessa sequência aparecem nove números; por isso, dizemos que ela tem comprimento 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma sequência ímpar.

a) Escreva a sequência que começa com 37.
b) Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.
c) Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?

d) Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares? Não se esqueça de justificar sua resposta.

18 *Bolas e probabilidades*

No brinquedo ilustrado na figura, bolinhas são colocadas nas entradas A, B ou C e movem-se sempre para baixo, terminando em uma das caixas 1, 2 ou 3. Ao atingir um dos pontos marcados com ▲, as bolinhas têm chances iguais de ir para cada um dos dois lados.



a) Se uma bolinha for colocada em C, em quais caixas ela pode parar? E se ela for colocada em B?
b) Se uma bolinha for colocada em A, qual é a probabilidade de que ela vá parar na caixa 2? E se ela for depositada em B, qual é essa probabilidade?
c) Se colocarmos uma bolinha em cada entrada (uma de cada vez), qual é a probabilidade de que, no final, haja uma bolinha em cada caixa?

19 *Jogo Diferente*

Fernando e Isaura inventaram um jogo diferente, cujas regras são as seguintes:

1) eles começam uma partida com 128 palitos cada um;

2) em cada jogada, eles tiram par ou ímpar; se sai par, Fernando dá a metade dos palitos que tem para Isaura e, se sai ímpar, Isaura dá a metade dos palitos que tem para Fernando;

3) eles repetem o procedimento da regra 2 até que um deles fique com um número ímpar de palitos, quando a partida acaba. Ganha quem ficar com maior número de palitos.

Veja o que acontece em uma partida onde a sequência das três primeiras jogadas é par, ímpar, par:

Fernando	Isaura	par $\longrightarrow$ 1ª jogada	Fernando	Isaura	ímpar $\longrightarrow$ 2ª jogada	Fernando	Isaura	par $\longrightarrow$ 3ª jogada	Fernando	Isaura	
128	128		64	192		160	96		80	176	...

a) Complete o esquema com o número de palitos de Fernando e Isaura, de acordo com as jogadas indicadas.

Fernando	Isaura	ímpar $\longrightarrow$ 1ª jogada	Fernando	Isaura	ímpar $\longrightarrow$ 2ª jogada	Fernando	Isaura	par $\longrightarrow$ 3ª jogada	Fernando	Isaura	
128	128										...

b) Uma partida acabou quando Fernando ficou com 101 palitos. Na última jogada saiu par ou ímpar?
c) Qual foi a sequência de pares e ímpares da partida que acabou quando Fernando ficou com 101 palitos?
d) Mostre que qualquer partida acaba com exatamente sete jogadas.

20 *Quadrados especiais*

O quadrado da Figura I é chamado especial porque:

- ele está dividido em 16 quadrados iguais;
- em cada linha e em cada coluna aparecem os algarismos 1, 2, 3 e 4;
- em cada um dos quadrados A, B, C e D (como na Figura II) aparecem os algarismos 1, 2, 3 e 4.

4	2	1	3
1	3	2	4
3	1	4	2
2	4	3	1

I

A	*B*
C	*D*

II

a) Complete o quadrado abaixo de modo que ele se torne especial.

	2		
3	4		
		1	
			2

b) É possível completar o quadrado abaixo de modo a obter um quadrado especial? Por quê?

1	2		
3	4		
			2
			1

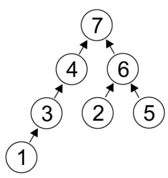
c) Exiba todas as maneiras de completar o quadrado abaixo de modo a obter um quadrado especial.

1	2		
3	4		
			1

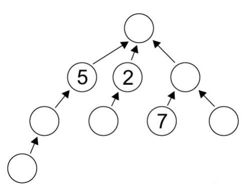
d) Quantos quadrados especiais existem?

21 *Um bom preenchimento*

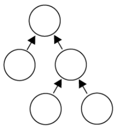
Os círculos da figura abaixo foram preenchidos com os números de 1 a 7, de modo que todas as flechas apontam de um número menor para um maior. Neste caso, dizemos que a figura foi bem preenchida.



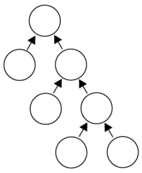
a) Complete a figura abaixo com os números de 1 a 9 de modo que ela fique bem preenchida.



b) De quantas maneiras a figura abaixo pode ser bem preenchida com os números de 1 a 5?

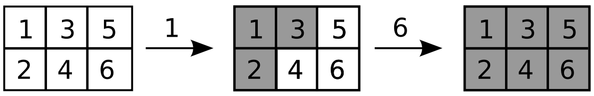
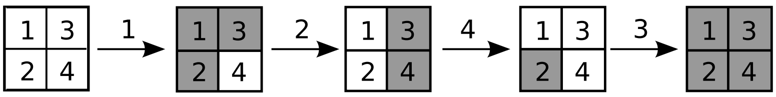


c) De quantas maneiras a figura abaixo pode ser bem preenchida com os números de 1 a 7?



22 *Troca-cor*

No jogo do Troca-Cor usa-se um tabuleiro com duas linhas e com quantas colunas quisermos, cujas casas podem mudar da cor branca para cinza e vice-versa. As casas da 1ª linha são numeradas com os números ímpares e as da 2ª linha com os números pares. Em cada jogada aperta-se uma casa, então, essa casa e as casas vizinhas mudam de cor. Uma partida completa começa com todas as casas brancas e termina quando todas ficam cinzas. Veja dois exemplos de partidas completas (os números acima das flechas indicam a casa apertada em cada jogada):

Tabuleiro	Partida completa	Jogadas
2x3		1 e 6
2x2		1, 2, 4 e 3

a) Escreva as jogadas de uma partida completa nos tabuleiros abaixo.

Tabuleiro	Jogadas
2x5: 1 3 5 7 9 / 2 4 6 8 10	
2x4: 1 3 5 7 / 2 4 6 8	

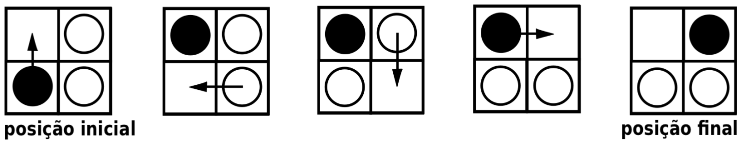
1	3	5	7	9
2	4	6	8	10

1	3	5	7
2	4	6	8

b) Explique como jogar uma partida completa no tabuleiro 2×100.
c) Explique como jogar uma partida completa com exatamente 51 jogadas no tabuleiro 2×101.
d) Explique por que não é possível jogar uma partida completa com menos de 51 jogadas no tabuleiro 2×101.

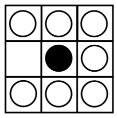
23 *Arrasta Um*

No jogo *Arrasta Um* usa-se um tabuleiro quadriculado e peças redondas, uma preta e as outras brancas. Coloca-se uma peça em cada casa do tabuleiro, exceto em uma que é deixada vazia. Um movimento consiste em deslocar para a casa vazia a peça de uma casa adjacente. O jogo termina quando a peça preta chega ao canto superior direito do tabuleiro. Veja um exemplo de como terminar o *Arrasta Um* em quatro movimentos em um tabuleiro 2×2.

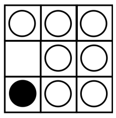


Esta sequência de movimentos pode ser descrita por $(\uparrow, \leftarrow, \downarrow, \rightarrow)$.

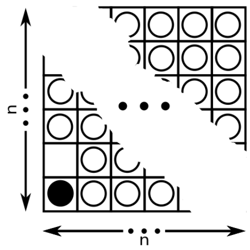
a) Descreva como terminar o Arrasta Um em seis movimentos no tabuleiro 3×3 abaixo.



b) Descreva como terminar o Arrasta Um em dez movimentos no tabuleiro 3×3 abaixo.

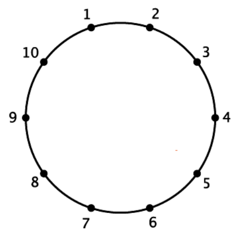


c) Mostre que em um tabuleiro $n \times n$, como na figura, é possível terminar o Arrasta Um em $6n - 8$ movimentos.



24 *Ora bolas*

Em uma caixa há 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. O número de cada bola corresponde a um dos pontos da figura, os quais dividem a circunferência em 10 partes iguais. Nos itens a seguir, considere que as bolas são retiradas ao acaso, uma a uma e sem reposição.



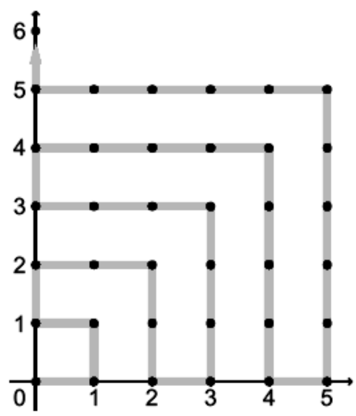
a) Se forem retiradas duas bolas, qual é a probabilidade de que o segmento determinado pelos pontos correspondentes seja um diâmetro da circunferência?
b) Se forem retiradas três bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um triângulo retângulo?

Um ângulo inscrito em uma circunferência é reto se e somente se o arco correspondente é uma semicircunferência.

c) Se forem retiradas quatro bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um retângulo?

25 *Lonjura*

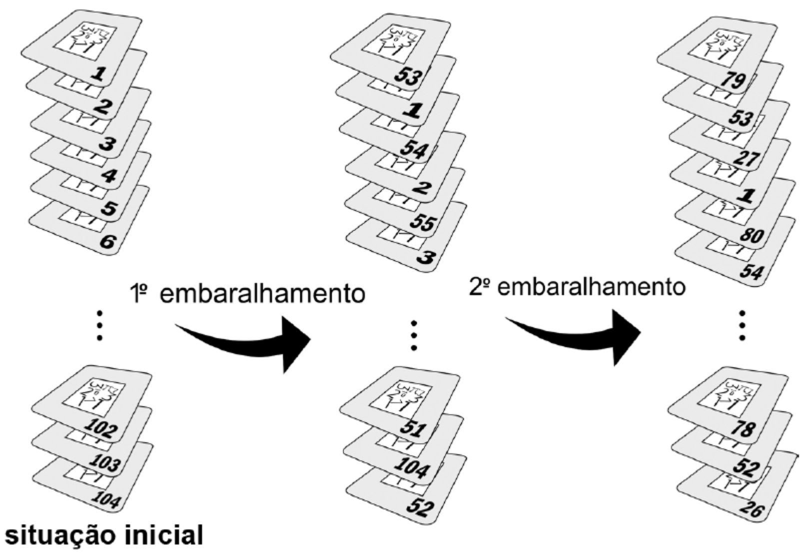
A linha poligonal da figura parte da origem e passa por todos os pontos do plano que têm coordenadas inteiras não negativas, de acordo com o padrão indicado. A unidade de comprimento nos eixos é 1cm. O comprimento da poligonal da origem até um ponto (a, b) é chamado de lonjura de (a, b); por exemplo, a lonjura de $(1, 2)$ é 5cm.



a) Determine a lonjura dos pontos $(3, 2)$ e $(0, 4)$.
b) Quantos pontos de coordenadas inteiras estão contidos no interior e nos lados do quadrado cujos vértices são $(0, 0)$, $(n, 0)$, (n, n) e $(0, n)$?
c) Explique por que a lonjura do ponto (n, n) é $n^2 + n$.
d) Qual é o ponto cuja lonjura é 425cm?

26 *Baralho embaralhado*

Considere uma pilha de cartas numeradas de 1 a 104. Um embaralhamento dessa pilha consiste em intercalar as 52 cartas de cima com as 52 de baixo, de modo que a carta que estava no topo fique em segundo lugar de cima para baixo. A figura mostra dois embaralhamentos seguidos a partir da situação inicial, na qual as cartas estão dispostas em ordem crescente de cima para baixo.



a) Complete a tabela.

número de embaralhamentos a partir da situação inicial	1	2	3	4	5	6
posição da carta de número 5 a partir do topo da pilha	10ª					

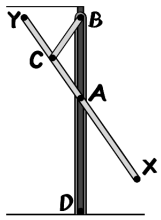
b) Partindo da situação inicial, qual será a posição da carta de número n após um embaralhamento?
c) Partindo da situação inicial, ache duas cartas que trocam de lugar uma com a outra a cada embaralhamento.
d) Um grupo de três cartas que trocam de lugar entre si a cada embaralhamento é chamado trio invariante. Partindo da situação inicial, encontre todos os trios invariantes.

Assunto

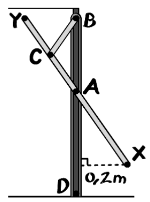
Geometria

27 *Porta de garagem*

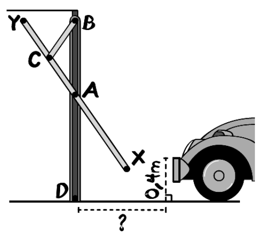
A figura abaixo ilustra o funcionamento de uma porta de garagem, representada pelo segmento XY. Ao mover o ponto X, o ponto A desliza por um trilho vertical, representado pelo segmento BD. Algumas das medidas na figura são AC=BC=CY=0,5m e AX=1m.



a) Na figura, o ponto X está a $0,2$m do trilho BD. Qual é a distância de C ao trilho?

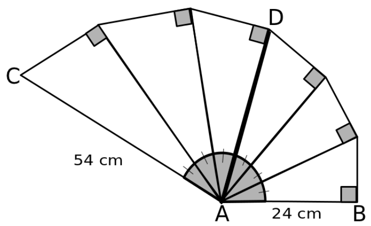


b) Mostre que a altura do ponto Y com relação ao chão não se altera com o movimento da porta.
c) Se o para-choque de um carro tem altura de $0,4$m, como na figura, qual deve ser a distância mínima entre o trilho e o para-choque para que ele não seja atingido ao abrir-se a porta?



28 *Triângulos retângulos*

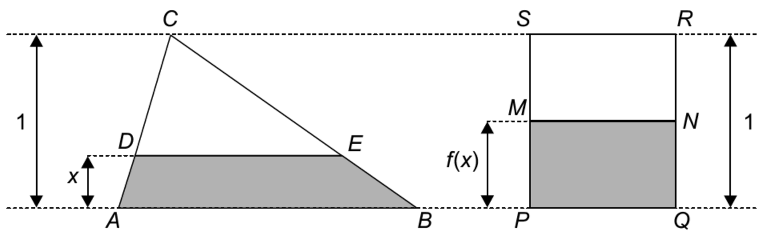
Os seis triângulos da figura são retângulos e seus ângulos com vértice no ponto A são iguais. Além disso, $AB = 24$cm e $AC = 54$cm. Qual é o comprimento de AD?



A) 30cm B) 34cm C) 36cm D) 38cm E) 39cm

29 *Mesma área*

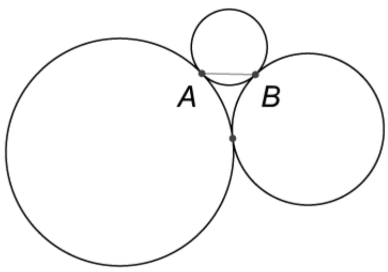
Na figura abaixo, o triângulo ABC e o retângulo $PQRS$ têm a mesma área e a mesma altura 1. Para cada valor de x entre 0 e 1 desenha-se o trapézio $ABED$ de altura x e depois o retângulo $PQNM$ de área igual à do trapézio, como na figura. Seja f a função que associa a cada x a altura do retângulo $PQNM$.



a) Qual é a razão entre AB e PQ?
b) Qual é o valor de $f(\frac{1}{2})$?
c) Ache a expressão de $f(x)$ e desenhe o gráfico de f.

30 *Três circunferências e um comprimento*

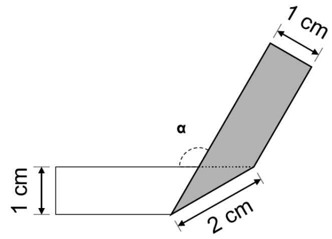
A figura mostra três circunferências de raios 1, 2 e 3, tangentes duas a duas nos pontos destacados. Qual é o comprimento do segmento AB?



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\sqrt{3}$

31 *Papel dobrado*

Uma tira de papel retangular, branca de um lado e cinza do outro, foi dobrada como na figura. Qual é a medida do ângulo α?



A) 110° B) 115° C) 120° D) 125° E) 130°

32 *Muitos quadrados*

A Princesa Telassim cortou uma folha de papel retangular em 9 quadrados de lados 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 e 18 centímetros.

a) Qual era a área da folha antes de ser cortada?
b) Quais eram as medidas da folha antes de ser cortada?
c) A Princesa Telassim precisa montar a folha de novo. Ajude-a mostrando, com um desenho, como fazer esta montagem.

33 *Luz e espelho*

Quando um raio de luz incide sobre um espelho plano, ele é refletido de modo a fazer ângulos iguais com o espelho, conforme ilustrado na Figura 1. A Figura 2 mostra dois espelhos que se encontram formando um ângulo α. Um raio de luz, paralelo ao espelho I, atinge o espelho II no ponto A e é refletido três vezes, até incidir perpendicularmente ao espelho I no ponto D.

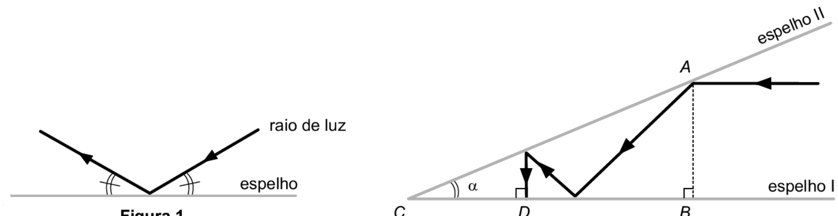


Figura 1 Figura 2

a) Qual é a medida do ângulo α?
b) Seja AB perpendicular ao espelho I, como na Figura 2. Se $AB = 10$cm, qual é o comprimento de CD?

34 *Região comum*

Dois triângulos retângulos isósceles com catetos de medida 2 são posicionados como mostra a Figura 1. A seguir, o triângulo da esquerda é deslocado para a direita. Nas Figuras 2 e 3, x indica a distância entre os vértices A e B dos dois triângulos.

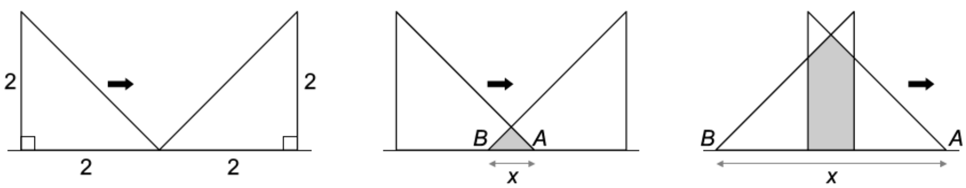
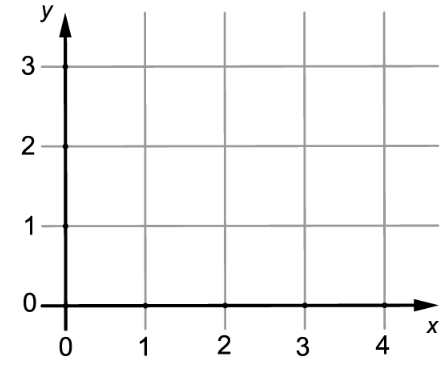


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Para cada x no intervalo $[0, 4]$, seja $f(x)$ a área da região comum aos dois triângulos (em cinza nas figuras).

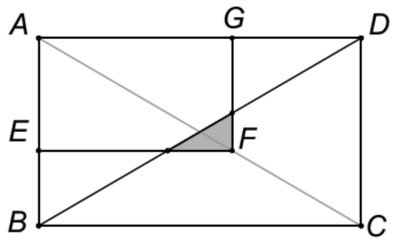
a) Calcule $f(1)$ e $f(3)$.
b) Encontre as expressões de f nos intervalos $[0,2]$ e $[2,4]$ e esboce o seu gráfico.



c) Qual é a área máxima da região comum aos dois triângulos?

35 *Qual a razão?*

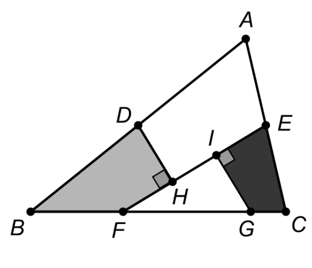
Na figura abaixo, $ABCD$ e $AEFG$ são retângulos e o ponto F pertence à diagonal AC. A área do triângulo cinza é igual a $\frac{1}{18}$ da área do retângulo $AEFG$. Qual é o valor de $\frac{AF}{AC}$?



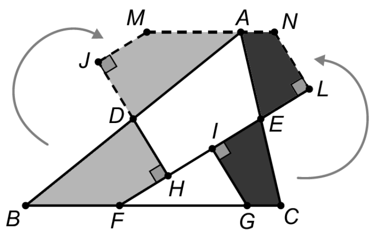
A) $\dfrac{3}{5}$ B) $\dfrac{3}{8}$ C) $\dfrac{8}{13}$ D) $\dfrac{11}{18}$ E) $\dfrac{3}{4}$

36 *Um triângulo em quatro partes*

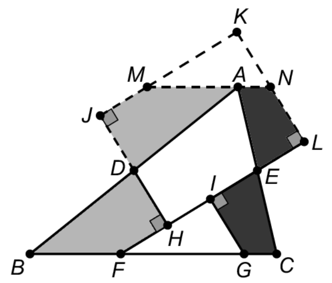
Em todas as figuras desta questão, vemos um triângulo ABC dividido em quatro partes; nesses triângulos, D é ponto médio de AB, E é ponto médio de AC e FG mede $\frac{1}{2}BC$.



a) Os quadriláteros $DJMA$ e $ELNA$ são obtidos girando de 180° os quadriláteros $DHFB$ e $EIGC$ em torno de D e E, respectivamente. Explique por que os pontos M, A e N estão alinhados, ou seja, por que a medida do ângulo $M\hat{A}N$ é igual a 180°.



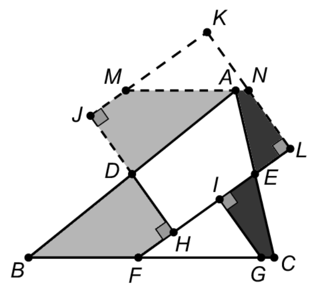
b) Na figura abaixo, o ponto K é a interseção das retas JM e LN. Explique por que os triângulos FGI e MNK são congruentes.



Os itens acima mostram que $HJKL$ é um retângulo formado com as quatro partes em que o triângulo ABC foi dividido.

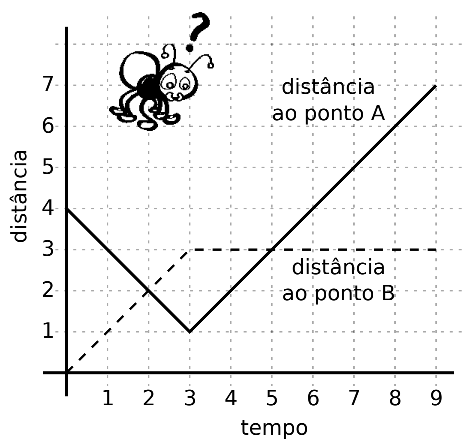
c) Mostre que $LH = EF$.

d) Na figura abaixo o triângulo ABC tem área 9 e $HJKL$ é um quadrado. Calcule o comprimento de EF.



37 *As distâncias da formiguinha*

Uma formiguinha fez um passeio em um plano que contém dois pontos fixos A e B. O gráfico em linha cheia indica a distância da formiga ao ponto A, em função do tempo, ao longo de seu trajeto entre os instantes $t = 0$ e $t = 9$; o gráfico em linha tracejada dá a mesma informação com relação ao ponto B. Por exemplo, no instante $t = 7$ a distância da formiga ao ponto A era 5 e a distância ao ponto B era 3.



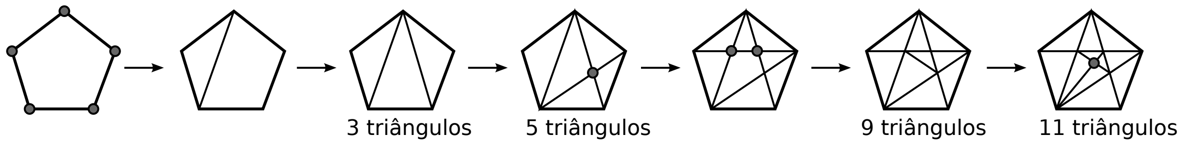
a) Em que instantes a formiguinha se encontrava à mesma distância de A e de B?
b) Qual é a distância entre A e B?
c) Em que instantes a formiguinha estava sobre a reta que liga A e B?
d) Qual foi a distância percorrida pela formiguinha entre os instantes $t = 0$ e $t = 9$?

38 *Triangulações legais*

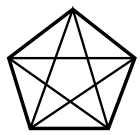
Dado um pentágono regular, dizemos que um ponto é legal quando:

- ele é um dos vértices do pentágono, ou
- ele é a interseção de segmentos cujos extremos são pontos legais; esses segmentos são chamados segmentos legais.

A figura mostra como triangular legalmente (isto é, decompor em partes triangulares usando somente segmentos legais) um pentágono em 3, 5, 9 e 11 triângulos. Os pequenos círculos indicam os pontos legais que aparecem a cada etapa. Note que a decomposição na quinta etapa não é uma triangulação legal, pois uma de suas partes é um quadrilátero.



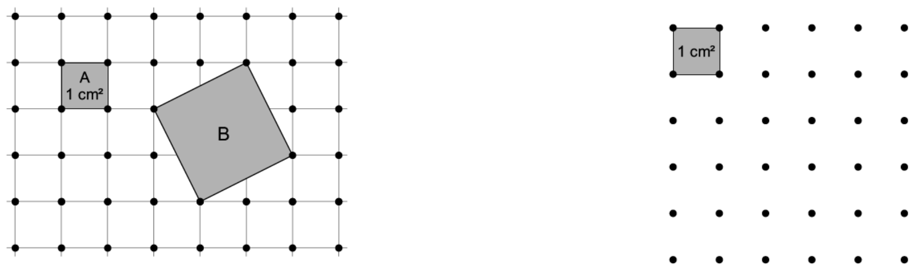
a) Desenhe uma triangulação legal do pentágono em 7 triângulos.
b) Mostre como triangular legalmente o pentágono em qualquer número ímpar (maior que 1) de triângulos (a figura abaixo pode ajudar).



c) Mostre que não é possível triangular legalmente o pentágono em um número par de triângulos.

39 *Quadrado legal*

Numa folha de papel marcamos pontos igualmente espaçados na horizontal e na vertical, de modo que o quadrado A tenha área 1cm^2, como na figura. Dizemos que um quadrado é legal se seus vértices são quatro desses pontos; por exemplo, os quadrados A e B são legais.



a) Qual é a área do quadrado B?
b) Desenhe um quadrado legal de área 13cm^2.
c) Existe um quadrado legal de área 41cm^2? E de área 43cm^2? Justifique sua resposta.
d) Mostre que, para cada quadrado legal, existe outro quadrado legal com o dobro de sua área.

Soluções do Nível 1

Assunto

Aritmética

1 *Cláudia transforma números* – *Solução*

a) Primeiro multiplicamos os algarismos de 79, obtendo $7 \times 9 = 63$, e depois somamos os algarismos desse produto, obtendo $6 + 3 = 9$. Logo o transformado de 79 é 9.
b) A brincadeira de Cláudia tem duas etapas: a primeira, na qual ela multiplica os algarismos, e a segunda, na qual ela soma os algarismos do produto encontrado, no caso de esse produto ter mais de um algarismo. Para que 3 seja obtido como o transformado de um número na primeira etapa, esse número só pode ser 13 ou 31. Para que 3 seja obtido como o transformado de um número na segunda etapa, o resultado da primeira etapa deve ser um número de dois algarismos cuja soma seja 3, ou seja, deve ser $12, 21$ ou 30. A tabela abaixo mostra todos os números de dois algarismos cujo produto é um desses três números.

12	26, 62, 34, 43
21	37, 73
30	56, 65

Assim, os números $13, 31, 26, 62, 34, 43, 37, 73, 56$ e 65 são os únicos números de dois dígitos cujo transformado é 3.
c) 1ª *solução:* Na segunda etapa da brincadeira temos uma soma de algarismos, que é sempre diferente de 0; portanto, 0 nunca será obtido como transformado de um número de três algarismos nessa etapa. Para se obter 0 como transformado de algum número de três algarismos na primeira etapa, esse número deve ter 0 como algarismo das unidades, das dezenas ou de ambas. Os números de três algarismos que têm 0 tanto nas unidades quanto nas dezenas são $100, 200, \ldots 900$, num total de 9. Os números que têm 0 apenas nas unidades são da forma $XY0$, onde X e Y representam algarismos de 1 a 9. Há $9 \times 9 = 81$ números desse tipo, e o mesmo raciocínio mostra que há 81 números de três algarismos com 0 apenas no algarismo das dezenas. No total, há $9 + 81 + 81 = 171$ números de três algarismos cujo transformado é 0.
2ª *solução:* Como na solução acima, concluímos que o 0 deve aparecer na casa das unidades, das dezenas ou em ambas. O algarismo das centenas pode ser qualquer algarismo de 1 a 9. Depois de escolhido esse algarismo, pode-se escolher os algarismos das dezenas e das unidades de 19 maneiras diferentes; por exemplo, 100, $101, 102, \ldots, 109, 110, 120, \ldots, 190$ são as 19 possibilidades com o 1 na primeira posição. Logo o total procurado é $9 \times 19 = 171$.
3ª *solução:* Como na solução acima, concluímos que o 0 deve aparecer na casa das unidades, das dezenas ou ambas. Há 90 números com 0 nas unidades e 90 com 0 nas dezenas, bem como 9 que tem 0 tanto nas dezenas quanto nas unidades. No total, há $90 + 90 - 9 = 171$ números de três algarismos cujo transformado é 0.

2 *Joãozinho coleciona números* – *Solução*

a) Há apenas três maneiras de escrever 1 como soma de três números naturais: $1 = 1 + 0 + 0$, $1 = 0 + 1 + 0$ e $1 = 0 + 0 + 1$, que nos dão as possibilidades 1001, 0101 e 0011. Os números 0101 e 0011 devem ser descartados, pois não têm quatro algarismos significativos. Logo, na coleção do Joãozinho, aparece o número 1001.

b) Primeiro notamos que se um número com algarismos não nulos está na coleção, então ele tem no máximo 10 algarismos. De fato, se ele tivesse 11 ou mais algarismos não nulos, então a soma de todos seus algarismos, exceto o das unidades, seria no mínimo 10, o que não é possível pois o maior algarismo é o 9. Logo todos os números com algarismos não nulos na coleção têm no máximo 10 algarismos, o que mostra que existe um maior número sem o 0 na coleção. Vamos supor que a coleção do Joãozinho está completa. O número 2316 está na coleção; trocando o 3 por 111 obtemos 211116, que também está na coleção e é maior que 2316, pois tem mais algarismos. Em geral, se um número sem o algarismo 0 está na coleção e tem algum algarismo que não o das unidades diferente de 1, podemos "espichar" o número, trocando esse algarismo por uma sequência de 1's e obtendo um novo número, que está na coleção e é maior que o primeiro. Logo o maior número com algarismos não nulos na coleção deve ter todos seus algarismos iguais a 1, com exceção do algarismo das unidades, que é igual ao número de 1's que o precedem. Como o maior algarismo das unidades possível é 9, segue que o número procurado é 1111111119.

Notamos que a coleção pode ter números arbitrariamente grandes com o algarismo 0, como (por exemplo) 101, 1001, 10001 e assim por diante.

c) Um número da coleção não pode ter seis algarismos distintos, pois nesse caso a soma dos cinco algarismos à esquerda do algarismo das unidades seria no mínimo $0+1+2+3+4 = 10$. Por outro lado, a coleção pode ter números de cinco algarismos distintos como, por exemplo, 25108. Se um destes números tem o algarismo das unidades diferente de 9, podemos "aumentá-lo" adicionando 1 ao algarismo das unidades e 1 ao algarismo das dezenas de milhares (que, claramente, não pode ser 9), sem sair da coleção. Por exemplo, o número 43108 pode ser "aumentado" para 53109, que também está na coleção. Logo o maior número de cinco algarismos distintos na coleção deve ter 9 como algarismo das unidades. Basta agora escrever 9 como soma de quatro parcelas distintas em ordem decrescente para "montar" nosso número; segue imediatamente que a decomposição procurada é $9 = 6 + 2 + 1 + 0$ e obtemos o número 62109.

3 *Qual o algarismo das unidades?* – *Solução*

Alternativa E

A maior soma possível de dez algarismos é $10 \times 9 = 90$, que ocorre quando temos 10 algarismos 9. Para que a soma seja 89, basta diminuir uma unidade de algum dos algarismos, ou seja, substituir um 9 por um 8. Logo o número tem nove algarismos 9 e um algarismo 8. Como ele é par, seu algarismo das unidades só pode ser o 8, ou seja, o número é 9999999998.

4 *Matemágicas* – *Solução*

a) Para saber o número que deve dizer ao matemágico, Joãozinho deve fazer quatro contas:
1ª conta: multiplicar o número no cartão escolhido por 2;
2ª conta: somar 3 ao resultado da primeira conta;
3ª conta: multiplicar por 5 o resultado da segunda conta;
4ª conta: somar 1, 2, 3 ou 4 ao resultado da terceira conta, dependendo da cor do cartão escolhido.

Como o número no cartão escolhido por Joãozinho foi 3, o resultado da primeira conta é $3 \times 2 = 6$; o resultado da segunda conta é $6 + 3 = 9$ e o da terceira é $9 \times 5 = 45$. Por fim, como a cor do cartão escolhido por Joãozinho é vermelha, o resultado da quarta e última conta é $45 + 4 = 49$. Assim Joãozinho deve dizer "quarenta e nove" ao matemágico.

b) 1ª *solução:* Vamos analisar o que acontece com o número de um cartão quando fazemos as operações indicadas. Qualquer que seja esse número, após a terceira conta obtemos um múltiplo de 5, ou seja, um número cujo algarismo das unidades é 0 ou 5. Concluímos então que, todas as contas estando corretas, o algarismo das unidades do número dito ao matemágico é:

- 1 ou 6, se o cartão escolhido é verde;
- 2 ou 7, se o cartão escolhido é amarelo;
- 3 ou 8, se o cartão escolhido é azul;
- 4 ou 9, se o cartão escolhido é vermelho.

Desse modo, se Mariazinha disse 76 ao matemágico, seu cartão era verde e o resultado da terceira conta realizada por ela foi $76 - 1 = 75$; o resultado da segunda conta foi $75 \div 5 = 15$; o resultado da primeira conta foi $15 - 3 = 12$ e o número no cartão escolhido por Mariazinha foi $12 \div 2 = 6$. Conferindo: $(2 \times 6 + 3) \times 5 + 1 = 76$.

2ª *solução:* Essa solução não difere essencialmente da anterior, mas é mais precisa e permite uma solução imediata do item *c)*. Como antes, vamos analisar o que acontece com o número de um cartão quando fazemos as operações indicadas. Qualquer que seja esse número, ao multiplicar por 2 obtemos um número par; ao somar 3 ao resultado, obtemos um número ímpar (esse é o detalhe em que essa solução difere da anterior). Ao multiplicar por 5, obtemos um número cujo algarismo das unidades é 5. Concluímos então que, todas as contas estando corretas, o último algarismo do número dito ao matemágico é

- 6, se o cartão escolhido é verde;
- 7, se o cartão escolhido é amarelo;
- 8, se o cartão escolhido é azul;
- 9, se o cartão escolhido é vermelho.

O restante dessa solução procede como a anterior.

3ª *solução:* Seja x o número de um cartão; então o número dito ao matemágico é $5(2x+3)+y = 10x+15+y$, onde y é um número inteiro de 1 a 4 correspondendo à cor do cartão. Temos aqui $10 + 15 + y = 76$, ou seja $10x + y = 61$. Como o dígito das unidades de $10x$ é 0, vemos que y só pode ser 1; logo $10x = 60$ donde $x = 6$ e concluímos que o cartão escolhido foi o 6 verde.

c) 1ª *solução:* (de acordo com a 1ª solução do item *b)*): Quando Pedrinho disse 61 ao matemágico, ele pensou assim: se as contas de Pedrinho estiverem corretas, o cartão deve ser verde (pois o algarismo das unidades de 61 é 1) e depois da terceira conta o número obtido foi $61 - 1 = 60$, depois da segunda conta o número obtido foi $60 \div 5 = 12$, depois da primeira conta o número obtido foi $12 - 3 = 9$ e então o número no cartão deve ser $9 \div 2 = 4{,}5$, o que não pode acontecer pois os números nos cartões são números inteiros. Logo Pedrinho deve ter errado alguma conta.

2ª *solução:* (de acordo com a 2ª solução do item *b)*): Dizer ao matemágico um número cujo algarismo das unidades é diferente de 6, 7, 8 ou 9 indica que houve algum erro de conta.

5 *Somando no lugar certo* – Solução

ALTERNATIVA D

Como queremos obter a soma 54, devemos colocar sinais de adição entre todos os algarismos a partir do 5, isto é, $1 ? 2 ? 3 ? 4 ? 5 + \underbrace{6 + 7 + 8 + 9}_{30} = 54$. Logo precisamos que $1 ? 2 ? 3 ? 4 ? 5 = 24$.

Com o mesmo argumento usado anteriormente, vemos que isso só pode ser feito como $12 + 3 + 4 + 5$. Logo $12 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 54$ é a expressão procurada, para a qual necessitamos de 7 sinais de adição.

6 *Jogando com números* – Solução

a) Como sobrou o cartão de número 7 e Ana e Cristina só tiraram cartões ímpares, seus cartões foram 1, 3, 5 e 9; logo, a soma de seus pontos foi $1 + 3 + 5 + 9 = 18$. Beatriz e Diana tiram os cartões 2, 4, 6 e 8, cuja soma é $2 + 4 + 6 + 8 = 20$. Logo Beatriz e Diana ganharam por 20 a 18.

b) A soma dos valores de todos os cartões é $1 + 2 + \cdots + 9 = 45$; então, se o 8 fica na mesa então, a soma dos valores dos cartões retirados é $45 - 8 = 37$. Assim, para que a partida termine empatada, 37 pontos devem ser divididos igualmente entre as duas duplas, o que é impossível pois 37 é um número ímpar. Mais geralmente, se sobra um cartão de número par na mesa, a soma dos pontos das duplas é 45 − número par = número ímpar, e não pode haver empate neste caso.

c) Quando sobra o cartão de número 5, a soma dos pontos das duplas é $45 - 5 = 40$, que é um número par. Se nesse caso uma partida termina empatada, cada dupla deve ter feito $40 \div 2 = 20$ pontos. Para argumentar que o empate pode realmente acontecer nessa situação, é necessário exibir uma partida que termine empatada em 20 a 20; um exemplo é quando uma dupla retira os cartões de números 1, 2, 8 e 9 e a outra retira os restantes.

d) O cartão com menor número que pode sobrar é 1 e o maior é 9. Logo, a soma dos pontos feitos pelas duas duplas varia de $45 - 9 = 36$ a $45 - 1 = 44$, ou seja, os pontos obtidos pelas meninas são quatro números consecutivos cuja soma está entre 36 e 44.

As possibilidades $\{1,2,3,4\}$, $\{2,3,4,5\}$, $\{3,4,5,6\}$, $\{4,5,6,7\}$, $\{5,6,7,8\}$, $\{6,7,8,9\}$ e $\{7,8,9,10\}$ não servem pois, em qualquer delas, a soma dos números é menor que 36. Analogamente $\{10,11,12,13\}$, $\{11,12,13,14\}$, $\{12,13,14,15\}$, $\{13,14,15,16\}$ e $\{14,15,16,17\}$ não servem pois, em qualquer caso, a soma dos números é maior que 44.

Restam as possibilidades $\{8,9,10,11\}$ e $\{9,10,11,12\}$. No primeiro caso, o cartão que ficou na mesa é o de número $45-(8+9+10+11)=7$ e no segundo é o de número $45-(9+10+11+12)=3$. Como o cartão que ficou na mesa não foi o de número 3, só resta a primeira possibilidade; concluímos que Ana fez 8 pontos, Beatriz fez 9, Cristina fez 10 e Diana fez 11. A dupla que venceu foi Beatriz e Diana, com $9+11=20$ pontos, contra $8+10=18$ da dupla Ana e Cristina.

7 ***Números e palitos de fósforo*** – *Solução*

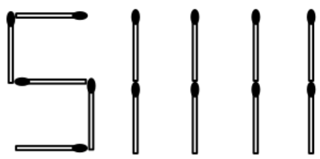
ALTERNATIVA B

Um número com uma determinada quantidade de algarismos, sendo o primeiro à esquerda diferente de zero, é sempre maior que qualquer número que tenha um algarismo a menos. Por exemplo, 1000 (com 4 algarismos) é maior do que 999 (que tem apenas 3 algarismos).

Assim, com exatamente 13 palitos, devemos formar um número que tenha a maior quantidade possível de algarismos, sendo o primeiro à esquerda diferente de 0. Como, dentre todos o algarismos, o 1 é aquele formado com o menor número de palitos, vemos que, para obter o maior número possível com 13 palitos, devemos usar tantos algarismos 1 quantos forem possível.

Não é possível usar seis vezes algarismo 1, pois neste caso já teríamos usado 12 palitos e não há algarismo que possa ser formado com apenas um palito. Pelo mesmo motivo, não é possível usar cinco vezes o algarismo 1; não há algarismo formado por 3 palitos.

Mas é possível usar quatro vezes o algarismo 1; neste caso, usamos 8 palitos e podemos completar o número com um entre os algarismos 2 ou 5, que são formados por 5 palitos. Neste caso, devemos escolher o 5, que nos permite formar o número 51111 com 13 palitos. A soma dos algarismos deste número é $5+1+1+1+1=9$.



8 ***Chegando ao*** 1 – *Solução*

a) Há várias soluções, como, por exemplo:

$$45 \xrightarrow{\text{apaga}} 4 \xrightarrow{\text{dobra}} 8 \xrightarrow{\text{dobra}} 16 \xrightarrow{\text{apaga}} 1$$
$$45 \xrightarrow{\text{dobra}} 90 \xrightarrow{\text{apaga}} 9 \xrightarrow{\text{dobra}} 18 \xrightarrow{\text{apaga}} 1$$

b) Aqui também há várias soluções, como, por exemplo:

$$345 \xrightarrow{\text{apaga}} 34 \xrightarrow{\text{apaga}} 3 \xrightarrow{\text{dobra}} 6 \xrightarrow{\text{dobra}} 12 \xrightarrow{\text{apaga}} 1$$
$$345 \xrightarrow{\text{apaga}} 34 \xrightarrow{\text{dobra}} 68 \xrightarrow{\text{apaga}} 6 \xrightarrow{\text{dobra}} 12 \xrightarrow{\text{apaga}} 1$$

c) Aplicamos a regra "apaga" até restar apenas um algarismo, e temos então três casos:

1. **Primeiro caso:** o algarismo restante é igual a 1:

   neste caso a brincadeira acaba.

2. **Segundo caso:** o algarismo restante é 2, 3 ou 4:

   neste caso aplicamos a regra "dobra" algumas vezes até obter um número de dois algarismos cujo algarismo das dezenas seja 1 (16, 12 ou 16, respectivamente), e aplica-se a regra "apaga" obtendo o número 1.

3. **Terceiro caso:** o algarismo restante é 5, 6, 7, 8 ou 9:

   neste caso aplicamos a regra "dobra" uma vez, obtendo respectivamente 10, 12, 14, 16 ou 18; então aplicamos a regra "apaga" para obter o número 1.

$\boxed{9}$ ***Resumindo*** – *Solução*

a) Consideremos um número cujo resumo seja 523. Então ele tem cinco dígitos ($\underline{5}23$), dos quais dois são ímpares ($5\underline{2}3$) e três são pares ($52\underline{3}$). Podemos formar muitos números satisfazendo estas condições; alguns exemplos são 11222, 23456 e 36854.
b) Como o resumo de qualquer número tem três algarismos, vemos que, para que um número seja igual ao seu próprio resumo, é necessário que ele tenha três algarismos. Suponhamos então que exista um número que seja seu próprio resumo, e seja c seu algarismo das centenas, d o das dezenas e u o das unidades. Como o algarismo das centenas do resumo de um número de três algarismos é 3, devemos ter $c = 3$. Somando os algarismos das dezenas e das unidades do resumo devemos obter o número de algarismos do número original, ou seja, $d + u = 3$. Logo as possibilidades para o resumo de um resumo são 303, 312, 321 ou 330; destes, o único que é seu próprio resumo é o 321, que é então o número procurado.
c) O resumo de um número tem sempre três algarismos. Como vimos no item *b)*, as quatro possibilidades para o resumo de um número de três algarismos são 303, 312, 321 ou 330; logo as possibilidades para o resumo do resumo de qualquer número estão entre estas quatro. Os resumos de 303, 312, 321 ou 330 são todos iguais a 321. Como 321 tem como resumo ele mesmo, sempre chegaremos a ele quando calculamos sucessivas vezes o resumo de um número. Mais precisamente, para qualquer número inicial, o resumo do resumo de seu resumo é 321. Podemos visualizar este raciocínio no diagrama abaixo.

$$\text{número} \xrightarrow{\text{resumo}} \text{número de três algarismos} \xrightarrow{\text{resumo}} 303,\ 312,\ 321,\ \text{ou } 330 \xrightarrow{\text{resumo}} 321$$

Observação: notamos que o resumo do resumo de qualquer número só pode ser 303 ou 321. De fato, da primeira vez que calculamos o resumo de algum número obtemos um número de três dígitos cdu, com $d + u = c$. Temos então dois casos:

1. **Primeiro caso:** c é par.

   Neste caso d e u são ambos pares ou ambos ímpares.

   - se d e u são pares, o próximo resumo será 303;
   - se d e u são ímpares, o próximo resumo será 321.

2. **Segundo caso:** c é ímpar.

   Neste caso d é par e u é ímpar, ou d é ímpar e u é par.

   - se d é par e u é ímpar, o próximo resumo será 321;
   - se d é ímpar e u é par, o próximo resumo será 321.

$\boxed{10}$ ***Casais especiais*** – *Solução*

a) O número que forma um casal com 2010 é 7989, pois ambos possuem 4 dígitos e sua soma é $2010+7989 = 9999$.
b) Existem noventa números com dois dígitos, a saber, os números de 10 a 99. Desses números, só não possuem par aqueles que começam com 9, ou seja, os dez números de 90 a 99. Logo, oitenta números com dois dígitos têm par para formar um casal, e portanto existem quarenta casais distintos com dois dígitos.

c) Damos a seguir três exemplos de casais especiais: $(2376, 7623)$, $(5814, 4185)$ e $(8901, 1098)$.
d) 1ª *solução:* Vamos supor que exista um casal especial de números com três algarismos. Sejam A o algarismo das centenas, B o algarismo das dezenas e C o algarismo das unidades de um dos números desse casal; esse número é então ABC, onde notamos que A não é igual a 0. Esses são também os algarismos do segundo número do casal, que pode então ser ABC, ACB, BAC, BCA, CAB ou CBA. Temos então as seis possibilidades a seguir:

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ + & A & B & C \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & A & B & C \\ + & A & C & B \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & A & B & C \\ + & B & A & C \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & A & B & C \\ + & B & C & A \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & A & B & C \\ + & C & A & B \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & A & B & C \\ + & C & B & A \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array}$$

A primeira possibilidade não pode ocorrer, pois $A + A = 9$ é impossível. De modo similar, eliminamos a segunda, a terceira e a última possibilidade. Na quarta possibilidade temos $B + C = 9 = A + C$ e segue que $A = B$, o que não pode acontecer, pois em um casal especial os algarismos são distintos. O mesmo argumento elimina a quinta possibilidade e, assim, concluímos que não existem casais especiais com números de três algarismos.
2ª *solução:* Suponhamos que exista um casal especial com números de três algarismos e sejam A, B e C os algarismos desses números. Cada algarismo de um dos números, somado com algum algarismo do segundo número, tem 9 como resultado; assim devemos ter $A+A+B+B+C+C = 2(A+B+C) = 27$, o que não pode acontecer, pois 27 é ímpar. Logo não existem casais especiais com números de três algarismos.

11 ***Supernúmeros*** – *Solução*

a) Duas maneiras de mostrar que 22 é um supernúmero são $22 = 10 + 12$ e $22 = 11 + 11$, pois $2 + 2 = (1 + 0) + (1 + 2)$ e $2 + 2 = (1 + 1) + (1 + 1)$.
b) Apresentamos abaixo todas as maneiras de escrever 49 como a soma de dois números de dois algarismos cada, colocando sempre o menor deles à esquerda:

$$\begin{array}{ccccc} 49 & = & 10 & + & 39 \\ 49 & = & 11 & + & 38 \\ 49 & = & 12 & + & 37 \\ & & \vdots & & \\ 49 & = & 23 & + & 26 \\ 49 & = & 24 & + & 25 \end{array}$$

Uma simples contagem revela que o número de maneiras é $15 = 24 - 10 + 1$. Observe que qualquer uma delas pode ser usada para mostrar que 49 é um supernúmero. Por exemplo, na primeira delas temos que $4 + 9 = (1 + 0) + (3 + 9)$. Logo é possível mostrar que 49 é um supernúmero de 15 maneiras diferentes.
c) Como 10 é o menor número de dois algarismos, temos que $20 = 10 + 10$ é o menor número de dois algarismos que pode ser escrito como a soma de dois outros números de dois algarismos. Considere agora qualquer número x de dois algarismos que seja maior ou igual a 20 e chame de a o seu algarismo das dezenas e de b o seu algarismo das unidades. Vamos agora pensar no número $x - 10$. Esse é um número maior ou igual a 10, já que x é maior ou igual a 20. Logo tem dois algarismos. Assim ele pode ser escrito como mn onde m é o algarismo das dezenas e n o das unidades. O seu algarismo das dezenas é $m = a - 1$ e o das unidades é $n = b$. Agora escrevendo $x = 10 + (x - 10)$ vemos que x é um supernúmero, pois

$$\underbrace{a + b}_{x} = \underbrace{(1 + 0)}_{10} + \underbrace{(a - 1) + b}_{x-10}$$

Um exemplo ajuda a entender esse raciocínio. Pensemos em $x = 38$; aqui temos

$$\begin{array}{r} 38 \\ -\ 10 \\ \hline 28 \end{array}$$

ou seja, $x - 10 = 28$. A expressão $x = 10 + (x - 10)$, neste caso, é $38 = 28 + 10$, que mostra que 28 é um supernúmero, pois

$$3 + 8 = 11 = (1 + 0) + (2 + 8)$$

Logo, todos os números de 20 a 99 são supernúmeros, e eles são em número $99 - 20 + 1 = 80$.

12 *Correndo na medida certa* – *Solução*

a) Uma volta completa em torno de uma pista tem extensão 1km + 2km + 6km + 4km = 13km. Por isso, para percorrer 14km é preciso dar uma volta completa e percorrer mais 1km. A única forma de percorrer 1km respeitando-se o sentido da corrida é começando em A e terminando em B. Portanto a corrida deve começar em A, dar uma volta completa e terminar em B.
b) Como $100 = 7 \times 13 + 9$, uma corrida de 100km corresponde a dar 7 voltas completas na pista e percorrer mais 9km. A única forma de percorrer 9km respeitando-se o sentido da corrida é começando em A e terminando em D. Portanto a corrida deve começar em A, dar 7 voltas completas e terminar em D.
c) Como sugerido nos itens anteriores, a solução do problema está baseada na ideia de "*dar uma certa quantidade de voltas*" sem exceder o comprimento da corrida e depois localizar trechos convenientes para percorrer a "*distância restante*". Do ponto de vista matemático, esse procedimento corresponde a efetuar o algoritmo de divisão com divisor igual a 13, ou seja, a escrever

$$\begin{aligned}\text{dividendo (comprimento da corrida)} = 13 \text{ (divisor) } &\times \text{quociente (número de voltas)}\\ &+ \text{resto (distância restante)},\end{aligned}$$

sendo o resto um número natural menor do que 13. Logo o resto só pode ser um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12. Por inspeção direta podemos verificar como realizar corridas com qualquer extensão de 1km a 13km. Os resultados estão dispostos na seguinte tabela:

Extensão em km	**Ponto de partida**	**Ponto de chegada**
1	A	B
2	B	C
3	A	C
4	D	A
5	D	B
6	C	D
7	D	C
8	B	D
9	A	D
10	C	A
11	C	B
12	B	A
13	**Qualquer um**	**O mesmo da partida**

Vejamos agora que é possível realizar corridas com qualquer comprimento inteiro maior do que 13km. Para isso basta ver que temos duas possibilidades:

1. **Primeiro caso:** a extensão é um múltiplo de 13km.

   Nesse caso, basta escolhermos qualquer posto e então realizarmos uma corrida que começa e termina nesse posto dando o número de voltas completas que é o quociente entre a extensão da corrida e 13.

   Por exemplo, se a extensão da corrida é de 208km = 16×13km, basta dar 16 voltas completas na pista.

2. **Segundo caso:** a extensão não é um múltiplo de 13km.

   Nesse caso, calculamos o quociente e o resto da divisão da extensão da corrida por 13. O resto será um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12. A tabela acima fornece os postos de partida e de chegada da corrida. O número de voltas será igual ao quociente.

   Por exemplo, se a extensão da corrida é 109km = $(8 \times 13 + 5)$km, ela deve começar no posto D, dar 8 voltas completas, retornando então a D, e depois percorrer o trecho de D a B.

13 *Números em um quadrado* – *Solução*

a) Somar as somas das linhas é o mesmo que somar todos os números no quadrado; assim, a soma das somas das linhas é $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. O mesmo se pode dizer da soma das somas das colunas, e concluímos que a soma de todas as somas é $2 \times 45 = 90$. Logo, a soma que está faltando é $90-(9+13+14+17+18) = 90-71 = 19$.
b) 1ª *solução:* Se todas as somas fossem pares, as somas das três linhas seriam pares e sua soma seria par. Mas isso é impossível pois, como vimos acima, a soma das somas das três linhas é 45, que é um número ímpar.
2ª *solução:* Ao distribuir os números no quadrado, uma linha pode ter no máximo três números ímpares. Por outro lado, há cinco números ímpares de 1 a 9, a saber, 1, 3, 5, 7 e 9. As maneiras de escrever 5 como soma de inteiros menores ou iguais a 3 são $5 = 2+3 = 1+1+3 = 1+2+2$. Como em qualquer dessas somas aparecem as parcelas 1 ou 3, concluímos que pelo menos uma linha de um quadrado preenchido conterá um ou três números ímpares, sendo os restantes pares. Em qualquer caso, obtemos uma linha cuja soma é ímpar.
c) Vamos estender um pouco essa solução para determinar não apenas um, mas todos os quadrados que têm as somas dadas. Antes de começar, notamos que trocar a ordem de duas linhas (ou de duas colunas) não altera as somas de um quadrado. Os seis números do resultado final devem ser separados em dois grupos de três números cada, cujas somas sejam iguais a 45. No primeiro grupo, cada número é a soma de uma linha e, no outro, a soma de cada coluna. De acordo com o item anterior, cada grupo deve conter um número ímpar; logo 7 e 13 devem ficar em conjuntos diferentes. Segue imediatamente que a única possibilidade é separar as somas nos grupos 7, 16, 22 e 13, 14, 18; podemos então supor que as somas das linhas são 7, 16, 22 e as somas das colunas são 13, 14, 18.

Como a única maneira de obter a soma 7 é $1+2+4=7$, podemos começar a preencher o quadrado como abaixo:

1	2	4	7

Suponhamos que a soma da segunda linha seja 22; as únicas possibilidades para a soma 22 são $5+8+9=22$ e $6+7+9=22$, que vamos considerar separadamente.

Suponhamos primeiro que na segunda linha aparecem os números 5, 8 e 9. Aqui o 5 não pode aparecer na coluna do 4, pois $4+5=9$ e para obter uma das somas 13, 14 ou 18 nessa coluna o terceiro número deveria ser 4, 5 ou 9, respectivamente, o que não pode acontecer pois o 4 já foi usado enquanto que 5 e 9 aparecem na segunda linha; argumento análogo mostra que o 9 também não pode aparecer na coluna do 4, ou seja, o 8 aparece abaixo do 4. Como $4+8=12$ e tanto o 1 como o 2 já foram usados, a soma dessa coluna não pode ser 13 ou 14; logo a soma é 18.

1	2	4	7
		8	22
		6	16
		18	

Podemos agora completar o quadrado das seguintes maneiras:

1	2	4	7
5	9	8	22
7	3	6	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	5	8	22
3	7	6	16
13	14	18	

Deixamos para o(a) leitor(a) mostrar que, quando na segunda linha aparecem os números 6, 7 e 9, as possibilidades são:

1	2	4	7
7	9	6	22
5	3	8	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	6	7	22
8	5	3	16
18	13	14	

1	2	4	7
9	7	6	22
3	5	8	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	7	6	22
8	5	3	16
18	13	14	

Desse modo, existem apenas seis quadrados com as somas do enunciado, a menos de troca de posição de linhas, troca de posição de colunas e troca das linhas pelas colunas.

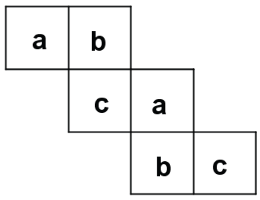
Assunto

Combinatória

14 *Dado no papelão* – *Solução*

ALTERNATIVA C

A figura abaixo identifica com a mesma letra as faces que se tornarão opostas quando o dado for montado. As alternativas *A*), *B*), *D*) e *E*) devem ser eliminadas, pois nelas as faces marcadas com a letra *a* não somam 7 pontos. Resta a alternativa *C*), na qual todos os pares de faces marcados com a mesma letra somam 7.



15 *Sacas de arroz e sacas de milho* – *Solução*

a) Tio Barnabé tem que transportar uma carga total de $150 \times 60 + 100 \times 25 = 9000 + 2500 = 11500$ quilos. Como a carga máxima da caminhonete é 2000 quilos, em cinco viagens Tio Barnabé poderá transportar no máximo $5 \times 2000 = 10000$ quilos, faltando ainda $11500 - 10000 = 1500$ quilos para completar o serviço. Logo, não é possível fazer o serviço em apenas 5 viagens.

b) 1ª *Solução:* Tio Barnabé pode fazer 5 viagens carregando, em cada uma, 30 sacas de arroz e 8 de milho, totalizando $30 \times 60 + 8 \times 25 = 1800 + 200 = 2000$ quilos. Em cinco viagens, ele levaria $30 \times 5 = 150$ sacas de arroz e $5 \times 8 = 40$ sacas de milho, restando $100 - 40 = 60$ sacas de milho, pesando $60 \times 25 = 1500$ quilos, que poderiam ser todas transportadas na sexta viagem.

2ª *Solução:* Tio Barnabé pode fazer 5 viagens levando, em cada uma, 28 sacos de arroz e 12 de milho, totalizando $28 \times 60 + 12 \times 25 = 1980$ quilos em cada viagem; na sexta viagem ele pode levar os 10 sacos de arroz e os 40 de milho restantes, totalizando $10 \times 60 + 12 \times 25 = 1600$ quilos.

16 *Com pés e cabeças* – *Solução*

ALTERNATIVA C

A tabela abaixo representa todas as possibilidades para que o número de cabeças seja 5 (lembramos que banquinhos não têm cabeça e há pelo menos uma pessoa e uma vaca).

Cabeças		**Pés**	**Pés de banquinhos**
Vacas	Pessoas	(vacas e pessoas)	(22 - pés, vacas e pessoas)
1	4	12	10
2	3	14	8
3	2	16	6
4	1	18	4

A última coluna representa as possibilidades para o número de pés de banquinhos que há no curral. Como cada banquinho tem 3 pés, o número total de pés de banquinhos deve ser um múltiplo de 3. O único múltiplo de 3 que aparece na última coluna é 6, correspondente a 2 banquinhos. Logo no curral havia 3 vacas, 2 pessoas e 2 banquinhos.

17 *Pedrinho escreve números* – *Solução*

a) O algarismo 1 não pode ser repetido porque não é possível escrever 12 como uma soma da forma $1 + 1 + x$ onde x é um algarismo; de fato, como x é no máximo 9, esta soma será no máximo 11. O algarismo 4 também não pode ser repetido pois neste caso o número teria que ser 444, que tem três algarismos iguais e não está de acordo com o enunciado. Finalmente, os algarismos 7, 8 e 9 não podem ser repetidos, pois neste caso a soma dos algarismos ultrapassaria 12. Assim, o algarismo repetido só pode ser 2, 3, 5 ou 6. Com 2, 3 e 5 podemos formar 9 números: 228, 282, 822, 336, 363, 633, 552, 525 e 255. Com o algarismo 6 podemos formar 2 números: 606 e 660. Portanto a quantidade de números escrita é $9 + 2 = 11$.
b) A soma de três números ímpares é um número ímpar. Como 12 é par, vemos que é impossível achar três algarismos ímpares cuja soma é 12. Logo nenhum dos números escritos tem os três algarismos ímpares.

18 *Quantos foram os empates?* – *Solução*

ALTERNATIVA D
1ª *solução:* Cada time jogou três vezes. Com 5 pontos, o Cruzínthians só pode ter vencido uma partida e empatado duas, pois se tivesse vencido duas partidas, teria pelo menos 6 pontos e se não tivesse vencido nenhuma, teria no máximo 3 pontos. O Greminense não venceu nenhuma partida, pois obteve apenas 2 pontos; logo empatou duas partidas e perdeu uma. O Flameiras, em segundo lugar com 3 pontos, não venceu nenhuma partida, pois se isso tivesse acontecido, ele teria que ter perdido duas; como o Greminense não ganhou nenhuma e o Cruzínthians apenas uma, ele teria perdido para o Nauritiba. Mas o mesmo raciocínio mostra que então o Nauritiba, tendo ganho a partida com o Flameiras, deveria ter perdido para Flameiras! Como isso não pode acontecer, concluímos que o Flameiras e o Nauritiba empataram suas três partidas. Logo o número de empates foi $3 + 3 - 1 = 5$; o -1 aparece nessa expressão pois o empate entre Flameiras e Nauritiba deve ser contado apenas uma vez. A tabela abaixo mostra a pontuação do campeonato.

	Cruzíntians	**Flameiras**	**Nauritiba**	**Greminense**
Pontos ganhos pelo Cruzíntians		1	1	3
Pontos ganhos pelo Flameiras	1		1	1
Pontos ganhos pelo Nauritiba	1	1		1
Pontos ganhos pelo Greminense	0	1	1	

2ª *solução:* Outra solução é notar que em cada jogo disputado são distribuídos 2 pontos, no caso de empate ou 3 pontos, caso não ocorra empate. Como cada um dos quatro times jogou uma única vez com seus três adversários, foram disputados ao todo seis jogos, nos quais foram distribuídos $5 + 3 + 3 + 2 = 13$ pontos. A única maneira de parcelar 13 em seis parcelas de 2 ou 3 é $13 = 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$; logo, cinco dos seis jogos terminaram empatados.

19 *Futebol matemático* – *Solução*

a) O time B não perdeu nenhuma partida, logo empatou ou ganhou de A. Mas A não empatou nenhuma partida, logo A perdeu de B.
b) O time A perdeu uma partida. Se tivesse perdido exatamente mais um jogo, teria 6 pontos. Mas B tem no mínimo 6 pontos, pois venceu A e não perdeu nenhuma das outras três partidas. Como A tem mais pontos que B, concluímos que A perdeu somente para B; e como A não empatou nenhuma partida, venceu as outras três. Logo A obteve 9 pontos.
c) 1ª *solução:* Como o time B não perdeu para nenhum outro time, ele ganhou 1 ou 3 pontos em cada partida, isto é, sempre um número ímpar de pontos. Como a soma de quatro números ímpares é par, vemos que B terminou o torneio com um número par de pontos.

2ª *solução:* Como ficou em segundo lugar, o time B fez menos do que 9 pontos, portanto venceu uma ou duas partidas. Como ele jogou quatro partidas, se venceu uma delas então empatou três, finalizando com 6 pontos; se venceu duas então empatou duas, finalizando com 8 pontos. Logo, as possibilidades para o número de pontos que B obteve nesse torneio são 6 e 8, ambos números pares.

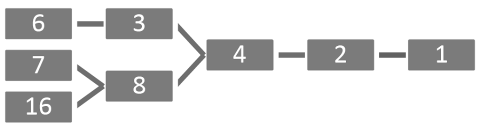
d) De acordo com os itens anteriores, A perdeu de B e venceu C, D e E. Dos 6 jogos restantes, 5 foram empates. Se B tivesse só 2 empates, então todos os jogos entre C, D e E seriam empates e os dois desses times que empataram com B terminariam empatados, o que contraria o enunciado. Logo, os três jogos de B contra C, D e E foram empates. Como houve um total de 5 empates, 2 dos jogos entre C, D e E foram empates. Como a ordem de classificação é C, D, E, a única vitória foi de C contra E. Temos, assim, a tabela de resultados abaixo.

A	A	A	A	B	B	B	C	C	D
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
B	C	D	E	C	D	E	D	E	E

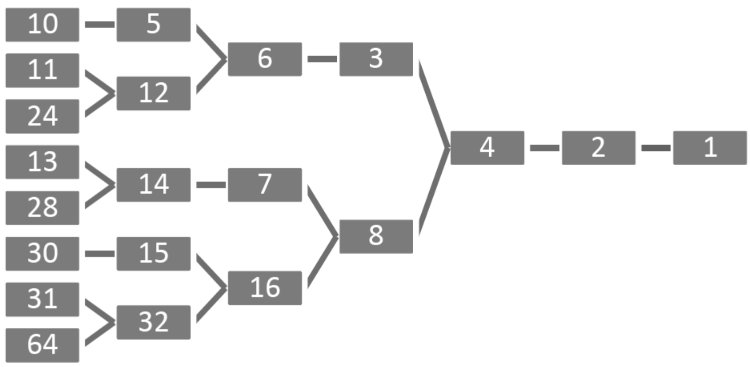
20 *Ímpar soma, par divide* – Solução

a) A sequência é $37 \to 38 \to 19 \to 20 \to 10 \to 5 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$.

b) A única sequência de comprimento 3 é $4 \to 2 \to 1$. As sequências de comprimento 4 são $3 \to 4 \to 2 \to 1$ e $8 \to 4 \to 2 \to 1$; elas são obtidas a partir de $4 \to 2 \to 1$, a primeira acrescentando $4 - 1 = 3$ à esquerda e a segunda acrescentando $2 \times 4 = 8$ à esquerda. Do mesmo modo, a sequência ímpar $3 \to 4 \to 2 \to 1$ dá origem à sequência par $6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$; a sequência par $8 \to 4 \to 2 \to 1$ dá origem à sequência ímpar $7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$ e à sequência par $16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$. Temos assim as três únicas sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. O raciocínio pode ser representado pelo esquema abaixo.



c) 1ª *solução:* Repetindo o esquema do item anterior, temos:



e assim temos três sequências pares e duas ímpares de comprimento 6 e cinco sequências pares e três ímpares de comprimento 7.

2ª *solução:* Observamos que a sequência ímpar de comprimento 5 dá origem a uma sequência par de comprimento 6; já as duas sequências pares de comprimento 5 dão origem a duas sequências pares de comprimento 6 e duas sequências ímpares de comprimento 6. Assim, temos duas sequências ímpares de comprimento 6 e $1 + 2 = 3$ sequências pares de comprimento 6, num total de $2 + 3 = 5$ sequências de comprimento 6. O mesmo argumento mostra que há oito sequências de comprimento 7, sendo três ímpares e cinco pares.

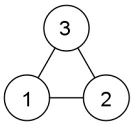
Observação: A repetição desse argumento para valores sucessivos do comprimento mostra que, a partir do comprimento 3, o número de sequências ímpares é $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$, o número de sequências pares é $2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ e o número total de sequências é $3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ Cada termo dessas sequências de valores, a partir do terceiro, é a soma dos dois anteriores; vemos assim que essas sequências, com a eventual omissão de termos iniciais, são a sequência $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$, conhecida como sequência de Fibonacci. Apresentamos esse resultado na tabela a seguir.

Comprimento	5	6	7	$\cdots$	15	16
Ímpares	1	2	$1+2=3$	$\cdots$	144	$89+144=233$
Pares	2	3	$2+3=5$	$\cdots$	233	$144+233=377$
Total (ímpares+pares)	$1+2=3$	$2+3=5$	$3+5=8$	$\cdots$	$144+233=377$	$233+377=610$

d) 1ª *solução*: As 144 sequências ímpares de comprimento 15 dão origem a 144 sequências pares de comprimento 16; já as 233 sequências pares de comprimento 15 dão origem a 233 sequências pares de comprimento 16 e 233 sequências ímpares de comprimento 16. Assim, temos 233 sequências ímpares de comprimento 16 e $377 = 233 + 144$ sequências pares de comprimento 16, num total de $233 + 377 = 610$ sequências.
2ª *solução:* A parte da sequência de Fibonacci que nos interessa é $1, 2, 3, 5, 8, \ldots, 144, 233, 377, 610, \ldots$ O número de sequências ímpares de comprimento 15 (resp. 16) é o 15º (resp. 16º) termo dessa sequência, que é 144 (resp. 233); o número de sequências pares de comprimento 15 (resp. 16) é o 16º (resp. 17º) termo, que é 233 (resp. 377) e o número total é o 17º(resp. 18º) termo, que é 377 (resp. 610).

21 *Bolas Coloridas – Solução*

a) Ana pode pintar a bolinha 1 com qualquer uma das três cores. A bolinha 2 deve então ser pintada de uma cor diferente da primeira, restando a Ana duas cores para pintá-la. A bolinha 3 deve ser pintada com a cor que sobrar. Portanto, a Figura 1 pode ser pintada de $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras diferentes.



b) Vamos dividir as maneiras de pintar a Figura 2 em dois casos.

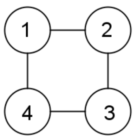
1. **Primeiro caso:** as bolinhas 1 e 3 são pintadas da mesma cor.

   Essa cor pode ser escolhida de três maneiras diferentes; após esta escolha, a cor da bolinha 2 pode ser escolhida de duas maneiras diferentes, bem como a da bolinha 4. O número de maneiras de pintar a Figura 2 nesse caso é $3 \times 2 \times 2 = 12$.

2. **Segundo caso:** as bolinhas 1 e 3 são pintadas de cores diferentes.

   Nesse caso, a cor da bolinha 1 pode ser escolhida de três maneiras diferentes e após isso, restam duas possibilidades para a cor da bolinha 3. Para as bolinhas 2 e 4 há apenas uma possibilidade, que é a cor que não foi usada nas bolinhas 1 e 3. Logo, o número de maneiras de pintar a Figura 2 nesse caso é $3 \times 2 \times 1 = 6$.

   No total, a Figura 2 pode ser pintada de $12 + 6 = 18$ maneiras diferentes.



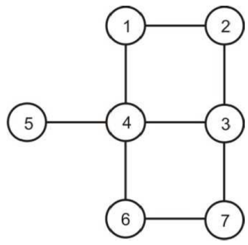
c) As bolinhas de 1 a 4 formam a figura do item anterior e portanto, para pintá-las, Ana tem 18 possibilidades. Para pintar a bolinha 5, ela tem duas cores disponíveis, pois a bolinha 4 já está pintada. Logo, temos $18 \times 2 = 36$ possibilidades para pintar as bolinhas de 1 a 5. Dividimos agora nossa contagem em dois casos.

1. **Primeiro caso:** as bolinhas 3 e 6 são pintadas da mesma cor.

   Nesse caso, temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (pois a bolinha 3 já foi pintada) e duas para a bolinha 7, ou seja, temos $1 \times 2 = 2$ possibilidades.

2. **Segundo caso:** as bolinhas 3 e 6 são pintadas de cores diferentes.

   Nesse caso também temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (diferente das cores das bolinhas 3 e 4) e sobra apenas uma cor para a bolinha 7. Aqui temos apenas uma possibilidade. No total, há $36 \times 2 + 36 \times 1 = 108$ maneiras diferentes de pintar a Figura 3.



22 ***Codificando palavras*** – *Solução*

a) A partir da figura do enunciado temos $23 = S$, $25 = U$, $7 = C$, $22 = R$ e $13 = I$. Logo a palavra codificada como 23-25-7-25-22-13 é *SUCURI*.

b) Ao passar da chave 5 para a chave 20 devemos somar 15 aos números da figura do enunciado, lembrando que se a soma for maior do que 26 devemos subtrair 26. Assim, temos $O = 19 + 15 - 26 = 34 - 26 = 8$, $B = 6 + 15 = 21$, $M = 17 + 15 - 26 = 6$, $E = 9 + 15 = 24$, $P = 20 + 15 - 26 = 9$ donde *OBMEP* é codificada como 8-21-6-24-9.

c) Como não existe letra codificada como 0, um dos números associados a letras na sequência 2620138 é o 20. À sua direita há três dígitos, mas como não há letra codificada como 138 ou 38, os números associados a letras são o 13 e o 8. Isto dá um total de 3 letras. Portanto, à esquerda de 20 só podemos admitir o 26. Logo, a codificação da palavra é 26-20-13-8, a qual, na chave 20, corresponde a *GATO*.

d) Quando somamos três números consecutivos, obtemos um número divisível por 3; por exemplo, $14 + 15 + 16 = 45$. Ao somar os números que representam as letras A, B e C nessa certa chave, obtemos 52, que não é um número divisível por 3. Isso mostra que os três números não são consecutivos e isso somente é possível se um dos números for 26 e outro for 1. Como a soma é 52, o terceiro número é $52 - 27 = 25$. A única codificação de *ABC*, neste caso, é 25-26-1, ou seja, a chave é 25.

23 ***Troca-inverte*** – *Solução*

a) Aqui estão três soluções, entre outras:

$$12345 \xrightarrow{\text{inverte}} \boxed{65432}\,1 \xrightarrow{\text{troca}} 1\,\boxed{65432}$$

$$\boxed{1}\,2345 \xrightarrow{\text{troca}} 23456\,\boxed{1} \xrightarrow{\text{inverte}} 165432$$

$$\boxed{12}\,345 \xrightarrow{\text{troca}} 3456\,\boxed{12} \xrightarrow{\text{inverte}} \boxed{2}\,16543 \xrightarrow{\text{troca}} 16543\,\boxed{2}$$

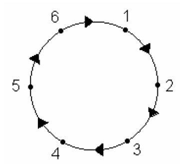
b) Existem 5 números diferentes formados com os algarismos 1, 2 e 3, além de 123. Eles são 132, 213, 231, 312 e 321. Vamos mostrar como obter todos a partir de 123:

$$\boxed{1}\,23 \xrightarrow{\text{troca}} 23\,\boxed{1} \xrightarrow{\text{inverte}} 132$$
$$123 \xrightarrow{\text{inverte}} \boxed{3}\,21 \xrightarrow{\text{troca}} 213$$
$$\boxed{1}\,23 \xrightarrow{\text{troca}} 23\,\boxed{1}$$
$$\boxed{12}\,3 \xrightarrow{\text{troca}} 3\,\boxed{12}$$
$$123 \xrightarrow{\text{inverte}} 321$$

Pode-se, também, obter todos estes números através de uma única sequência de *troca* e *inverte*; por exemplo,

$$12\,\boxed{3} \xrightarrow{\text{troca}} 31\,\boxed{2} \xrightarrow{\text{troca}} \boxed{2}\,31 \xrightarrow{\text{inverte}} 13\,\boxed{2} \xrightarrow{\text{troca}} 21\,\boxed{3} \xrightarrow{\text{troca}} \boxed{3}\,21$$

c) Em um número qualquer formado com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, temos os algarismos das "pontas" e os do "meio"; por exemplo, em 621354 os algarismos das pontas são 6 e 4 e os algarismos 2, 1, 3, e 5 estão no meio. Dizemos também que dois algarismos são *vizinhos* se um está ao lado do outro; no exemplo em questão, $(2,1)$ e $(3,5)$ são dois pares de vizinhos. O movimento *inverte* troca os algarismos das pontas e mantém os vizinhos juntos. O movimento *troca* faz com que as pontas se tornem vizinhos e separa um par de vizinhos, fazendo com que eles se tornem pontas. Logo, começando com 123456, vemos que qualquer sequência de movimento *troca* e *inverte* tem como resultado um número em que 1 e 6 são ou pontas ou vizinhos; como isso não acontece com 243156, é impossível transformar 123456 em 243156 com esses movimentos.



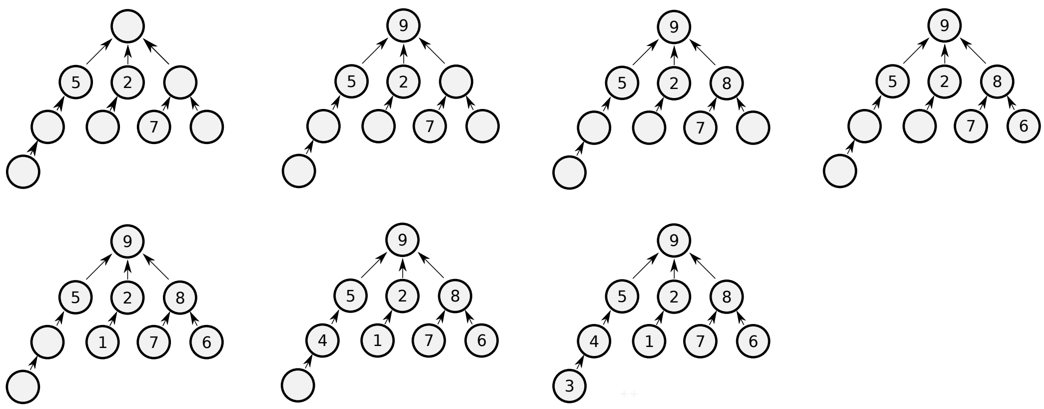
Alternativamente, podemos pensar nos algarismos do número 123456 escritos ao longo de um círculo orientado no sentido horário, como na figura ao lado. O movimento *inverte* muda o sentido de rotação deste ciclo e o movimento *troca* mantém este sentido; por outro lado, algarismos vizinhos, em particular o 1 e o 6, permanecem sempre vizinhos após qualquer destes movimentos. Como em 243156 o 1 e o 6 não são vizinhos, concluímos que é impossível transformar 123456 em 243156 com esses movimentos.

24 *Um bom preenchimento* – *Solução*

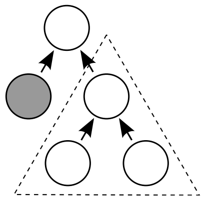
a) Só existe uma maneira de preencher o diagrama, como mostramos a seguir.

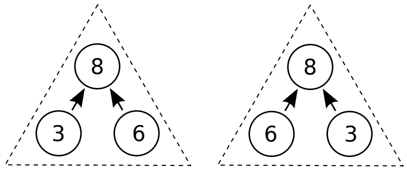
- O número 9 não pode ficar abaixo de nenhum número, logo deve ficar no topo.
- Acima do número 7 só podemos colocar o 9 ou o 8. Como o 9 já está no topo, o 8 ficará acima do 7.
- O número 6 não pode ficar abaixo do 5 nem do 2, logo ficará abaixo do 8, ao lado do 7.
- O número 1 é o único que pode ficar abaixo do 2.
- Os números 3 e 4 devem ficar abaixo do 5, com o 3 abaixo do 4.

A sequência de figuras a seguir ilustra as etapas deste raciocínio.



b) 1ª *solução*: Primeiro vamos examinar o diagrama menor de três bolinhas contidas no triângulo pontilhado, abaixo à esquerda. Para que ele fique bem preenchido com quaisquer três números positivos distintos, o maior número deve ficar no topo e os outros dois poderão ser colocados nos dois círculos de baixo de duas maneiras diferentes. Por exemplo, se os números forem 3, 6 e 8, podemos dispô-los das duas maneiras ilustradas abaixo à direita.





Para que o diagrama completo do problema fique bem preenchido com os números de 1 a 5, o 5 deve ficar no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 4. As três casas restantes, marcadas com o triângulo pontilhado, formam o diagrama analisado acima e poderão então ser preenchidas de duas maneiras, com os três números restantes. Resumindo, podemos preencher o diagrama do seguinte modo:

• preenchemos o círculo do topo com o 5: uma possibilidade;

• preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 ou 4: quatro possibilidades;

• preenchemos as três casas que faltam com os três algarismos restantes: duas possibilidades.

Logo, o diagrama pode ser preenchido de $1 \times 4 \times 2 = 8$ maneiras diferentes. Notamos que este raciocínio se aplica para quaisquer cinco números positivos distintos. Isto será importante na resolução do próximo item.

2ª *solução*: Notamos primeiro que o 5 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 4 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 5, e então:

• se o 4 ocupar a bolinha sombreada, o 3 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 5, e o 1 e o 2 podem ser colocados de duas maneiras diferentes nas duas bolinhas que sobram; temos duas possibilidades neste caso;

• se o 4 ocupar a outra bolinha abaixo do 5, a casa sombreada pode ser ocupada por qualquer dos números de 1 a 3, e os outros dois números podem ser colocados nas duas últimas bolinhas vazias; neste caso temos $3 \times 2 = 6$ possibilidades.

Deste modo, o número total de maneiras de preencher o diagrama é $2 + 6 = 8$.

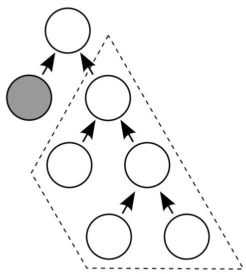
c) 1ª *solução*: Para que o diagrama fique bem preenchido com os números de 1 a 7, temos que colocar o 7 no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 6. A parte circundada pela linha pontilhada foi analisada no item *b)* e pode ser preenchida com os 5 números restantes de 8 formas diferentes. Ou seja, podemos preencher o diagrama como segue:

• preenchemos o círculo do topo com o 7: uma possibilidade;

• preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3, 4, 5 ou 6: seis possibilidades;

• preenchemos a parte circundada com os algarismos restantes: oito possibilidades.

Logo, o diagrama pode ser preenchido de $1 \times 6 \times 8 = 48$ maneiras diferentes.



2ª *solução*: Notamos primeiro que o 7 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 6 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 7, e então:

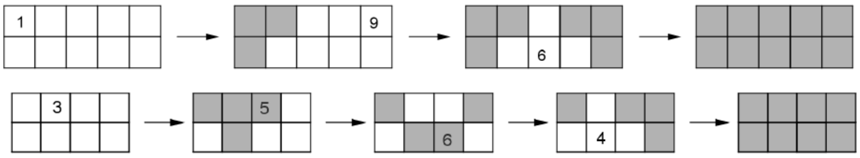
• se o 6 ocupar a bolinha sombreada, os números de 1 a 5 devem ocupar as casas circundadas com a linha pontilhada. De acordo com o item *b)*, isto pode ser feito de oito maneiras distintas.

• se o 6 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 7, podemos colocar qualquer número de 1 a 5 na casa sombreada e distribuir os números restantes pelas quatro bolinhas ainda vazias, o que pode ser feito de oito maneiras diferentes, de acordo com o item *b)*. Aqui temos $5 \times 8 = 40$ possibilidades.

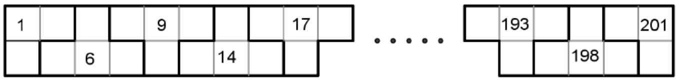
Logo, o diagrama pode ser preenchido de 8 + 40 = 48 maneiras diferentes.

25 *Troca-cor* – *Solução*

a) Mostramos abaixo um jogo completo para cada tabuleiro, destacando as casas apertadas.



b) Dividimos o tabuleiro 2×100 em 25 retângulos 2×4 e, em cada um desses retângulos, tornamos as casas cinzas procedendo como ilustrado no item *a)*; notamos que ao aplicar este procedimento em um retângulo os demais não são afetados. Desse modo podemos preencher todas as casas do jogo 2×100.
c) Dividimos o tabuleiro como ilustrado na figura a seguir.



Na primeira linha selecionamos as casas $1, 9, 17, \ldots, 193, 201$ e na segunda as casas $6, 14, 22, \ldots, 190, 198$. Cada uma das casas selecionadas está dentro de uma região destacada com traço mais forte. Ao apertar uma destas casas, ela e todas as outras casas de sua região ficam cinzas, sem afetar as outras regiões. Apertando todas estas casas podemos então preencher todas as casas do jogo 2×101.

Notamos que há uma casa selecionada de duas em duas colunas, começando da primeira à esquerda, e uma na última coluna. Como as colunas são em número de 101, vemos que foram selecionadas 51 casas, que é o número de jogadas que foram necessárias para terminar o jogo do modo descrito.
d) Não é possível acabar o jogo 2×101 com menos de 51 jogadas, pois cada jogada muda a cor de no máximo quatro casas. Assim, com 50 jogadas ou menos conseguiremos mudar a cor de no máximo $50 \times 4 = 200$ casas, mas no jogo 2×101 devemos mudar a cor de 202 casas. Logo, é impossível fazer menos do que 51 jogadas e deixar cinzas todas as casas.
Observação: A solução dos itens *b)* e *c)* mostra como terminar o jogo no caso de tabuleiros $2 \times n$, onde n deixa restos 0 ou 1 quando dividido por 4. É interessante completar a análise nos casos em que os restos são 2 ou 3; deixamos isto para o(a) leitor(a).

26 *As torres de Caroba* – *Solução*

a) Abaixo listamos as torres que a Caroba pode fazer com três peças:
- com duas peças de 4cm e uma de 2cm: $(4,4,2)$, $(4,2,4)$, $(2,4,4)$;
- com uma peça de 4cm e duas de 3cm: $(4,3,3)$, $(3,4,3)$, $(3,3,4)$;

b) Ela pode montar, por exemplo, quatro torres $(4,4,2)$, uma torre $(4,3,3)$ e duas torres $(3,3,2,2)$, restando uma peça de 2cm e três peças de 3cm. Outra possibilidade é fazer quatro torres $(4,3,3)$, duas torres $(4,4,2)$ e uma torre $(2,2,2,2,2)$, restando uma peça de 4cm, uma peça de 3cm e duas peças de 2cm. Pode-se também aproveitar as torres do item *a)* e montar, além delas, a torre $(3,3,2,2)$, sobrando uma peça de 3cm e quatro peças de 2cm. Há ainda outras possibilidades.
c) 1ª *solução*: O comprimento total de todas as peças que a Caroba tem é $9 \times (2+3+4) = 9 \times 9 = 81$cm. Se ela pudesse fazer 8 torres de 10cm, a soma dos comprimentos dessas torres seria 80cm, ou seja, sobraria 1cm. Como não existe peça de 1cm, concluímos que é impossível montar 8 torres de 10cm com 9 peças de cada uma das cores.
2ª *solução*: Peças de 3cm aparecem 0 ou 2 vezes em qualquer torre de 10cm, donde o número de peças de 3cm usadas para fazer qualquer número de torres é par. Como a Caroba tem 9 peças de 3cm, segue que vai sobrar pelo menos uma peça de 3cm, qualquer que seja o número de torres que ela montar. Descontando essa peça, o comprimento total das peças que sobram é $81 - 3 = 78$cm, que não é suficiente para montar 8 torres de 10cm. Logo a Caroba não vai conseguir montar as 8 torres de 10cm.

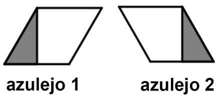
Assunto

Geometria

27 *Azulejos* – *Solução*

ALTERNATIVA E

Mostramos ao lado dois azulejos. O azulejo 1 é o azulejo do enunciado, com o qual foram formadas as figuras das alternativas *A)*, *B)*, *C)* e *D)*. A figura da alternativa *E)* foi feita com duas cópias do azulejo 1 e duas cópias do azulejo 2. Como não é possível obter o azulejo 2 por translação ou rotação do azulejo 1, segue que não podemos montar a figura da alternativa *E)* com cópias do azulejo 1.

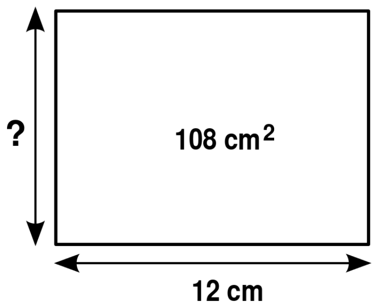


28 *Figuras no quadro-negro* – *Solução*

Para orientar a solução, lembramos que a área de um retângulo é igual ao produto dos comprimentos de dois lados adjacentes; em particular, a área de um quadrado é igual ao quadrado de seu lado.

a) Como a área do retângulo é 108cm^2 e um lado mede 12cm, o comprimento do lado adjacente, indicado por **?** na figura abaixo, deve ser um número que, quando multiplicado por 12, tenha como resultado 108, ou seja, é $108 \div 12 = 9$. Assim, o perímetro do retângulo é 12cm + 12cm + 9cm + 9cm = 42cm.

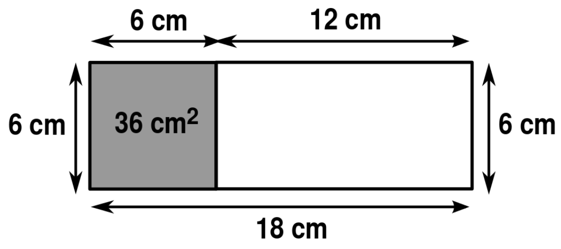
Solução algébrica: Seja x o comprimento do lado indicado por **?** na figura, dado em centímetros. Então $12x = 108$ e, como antes, temos $x = 108 \div 12 = 9$; o cálculo do perímetro é idêntico ao feito acima.



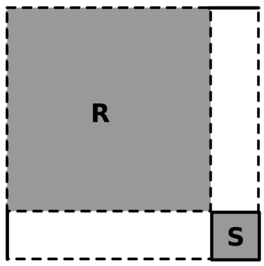
b) Como o quadrado cinza tem área igual a 36cm^2, o comprimento de seu lado, em centímetros, é um número cujo quadrado é 36, ou seja, é igual 6. Logo o retângulo maior tem um lado de comprimento 6cm; como sua área é 108cm^2, segue que seu outro lado mede $108 \div 6 = 18$cm. Logo um lado do retângulo branco mede 6cm e o outro mede 18cm − 6cm = 12cm, e assim seu perímetro é 12cm + 12cm + 6cm + 6cm = 36cm.

Pode-se também argumentar que a área do retângulo branco é 108cm^2 − 36cm^2 = 72cm^2; como um de seus lados mede 6cm, então o outro mede, em centímetros, então $72 \div 6 = 12$. O restante da solução segue como acima.

Solução algébrica: O lado do quadrado, que mede 6cm, é um lado do retângulo branco e também do retângulo maior. Seja x o comprimento, em centímetros do outro lado do retângulo branco; então o outro lado do retângulo maior tem comprimento $(x + 6)$cm. Como sua área é 108cm^2, segue que $6(x + 6) = 108$, ou seja, $6x + 36 = 108$. Logo $6x = 108 - 36 = 72$ e segue que $x = 72 \div 6 = 12$. O cálculo do perímetro do retângulo branco segue como acima.

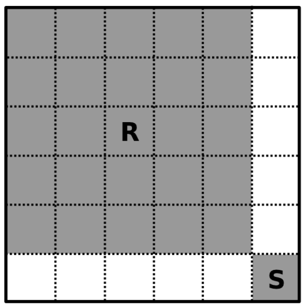


c) Na figura ao lado marcamos os lados do quadrado R em pontilhado e os lados do quadrado S em traço mais grosso. Para simplificar, vamos nos referir ao comprimento de um segmento grosso apenas como "grosso", e do mesmo modo para "pontilhado". O perímetro do quadrado S é igual a quatro grossos. Observamos que os retângulos brancos são iguais, pois têm os mesmos lados, e seu perímetro é igual a dois grossos mais dois pontilhados. Por outro lado, o enunciado diz que o perímetro de um desses retângulos é igual a três vezes o perímetro de S, isto é, igual a doze grossos. Logo os dois pontilhados devem ser iguais a dez grossos, ou seja, cada pontilhado é igual a cinco grossos.



Notamos agora que um lado do quadrado grande é igual a um grosso mais um pontilhado, ou seja, é igual a seis grossos. Podemos então decompor o quadrado grande em $6 \times 6 = 36$ quadradinhos iguais ao quadrado S, como na figura ao lado. Como a área do quadrado maior é igual a 108cm^2, a área de um desses quadradinhos é igual a $108\text{cm}^2 \div 36 = 3\text{cm}^2$. Finalmente, o quadrado R consiste de $5 \times 5 = 25$ quadradinhos e então sua área é igual a $25 \times 3\text{cm}^2 = 75\text{cm}^2$.

Solução algébrica: Primeiro argumentamos, como acima, que os retângulos brancos são iguais. Seja agora x o lado do quadrado S (grosso) e y o lado do quadrado R (pontilhado). O perímetro de S é então $4x$ e o de um retângulo branco é $2x + 2y$; o enunciado nos diz que $2x + 2y = 3 \times 4x = 12x$, donde $2y = 10x$ e então $y = 5x$. Logo o lado do quadrado grande mede $x + 5x = 6x$; como sua área é 108cm^2 temos $108 = 6x \times 6x = 36x^2$, onde $x^2 = 3$. A área de R, em centímetros quadrados, é então $y^2 = (5x)^2 = 25x^2 = 25 \times 3 = 75$.



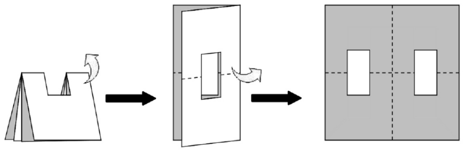
$\boxed{29}$ *Reforma no Sítio do Picapau Amarelo* – *Solução*

a) Um retângulo fica dividido em duas regiões de mesma área por sua diagonal. Logo os terrenos de Quindim, Visconde de Sabugosa e Cuca, juntos, têm área igual à metade da área do Sítio. A área desses terrenos, em hectares, somam $4 + 7 + 12 = 23$. A outra metade do Sítio tem a mesma área e é igual à

soma das áreas dos terrenos de Saci, Narizinho, Rabicó e da reserva florestal. Portanto 6 + 5 + 10+(área da reserva) = 23, ou seja, a área da reserva é igual a 23ha − 21ha = 2ha.
b) Quindim e Cuca, juntos, possuem 4ha + 7ha = 11ha. Assim, gastaram $\frac{2420}{11} = 220$ reais por hectare. Como o terreno de Saci tem 6ha, ele gastou $6 \times 220 = 1320$ reais.

30 *Figuras no vazio* – *Solução*

ALTERNATIVA E
A figura mostra o que acontece ao desdobrar o papel.

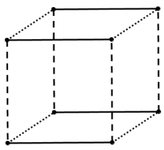


31 *Cartolina vira cubo* – *Solução*

ALTERNATIVA C
Ao montar o cubo, a face branca e a face cinza ficam opostas; logo as alternativas *A)* e *B)* estão excluídas. As alternativas *D)* e *E)* estão excluídas pois no cubo não podem aparecer um retângulo branco e outro cinza com um lado menor em comum.

32 *Quantas cores?* – *Solução*

ALTERNATIVA B
Cada vértice é a extremidade de três arestas e, portanto, são necessárias pelo menos três cores diferentes. Por outro lado, três cores diferentes bastam; podemos ver isto na figura, onde três cores diferentes estão indicadas em traços cheio, tracejado e pontilhado.



33 *Cubo sobre cubo* – *Solução*

a) 1ª *solução:* A superfície do sólido é igual à soma das superfícies dos cubos menos a área "perdida" no contato entre eles, que é igual a duas vezes a área de uma face do cubo menor. Assim, a área do sólido obtido, em centímetros quadrados, é igual a $6\times20\times20+6\times10\times10-2\times10\times10 = 2400+600-200 = 2800$. Como Pedro gasta 1 mL de tinta para pintar 100cm^2, então ele vai gastar $\frac{2800}{100} = 28$ mL de tinta para pintar a superfície do sólido.
2ª *solução:* Cada face do cubo maior tem área igual a 20cm × 20cm = 400cm^2. Assim, Pedro gastará $\frac{400}{100} = 4$ mL de tinta para pintar cada face do cubo maior; analogamente, ele gastará 1 mL de tinta para pintar cada face do cubo menor. Logo ele gastará $6 \times 4 + 6 \times 1 - 2 \times 1 = 28$ mL de tinta para pintar todo o sólido.
b) Para pintar uma das faces do cubo, Pedro gastou $\frac{54}{6} = 9$ mL de tinta. O corte criou duas novas superfícies, cada uma com área igual à de uma das faces do cubo; para pintar estas duas superfícies Pedro deve gastar $2 \times 9 = 18$ mL de tinta.
c) 1ª *solução:* Para dividir o cubo em cubinhos iguais, devem ser feitos cortes paralelos às faces e igualmente espaçados. Como vimos no item *b)*, cada um destes cortes cria 1800cm^2 de superfície não pintada. Portanto, o número de cortes foi $\frac{21600}{1800} = 12$. Como os cubinhos são iguais, os cortes horizontais,

verticais e longitudinais devem ser todos de mesmo número, ou seja, em número de $\frac{12}{3} = 4$. Esses cortes dão origem a 5 camadas horizontais, verticais e longitudinais de cubinhos, e segue que o cubo original foi dividido em $5 \times 5 \times 5 = 125$ cubinhos.

2ª *solução:* Como no item *b)* concluímos que, para pintar cada face do cubo Pedro gastou 9 mL de tinta, logo cada face tem área, igual a 900cm^2. Concluímos que a aresta do cubo mede 30cm. Pedro gastou $54 + 216 = 270$ mL de tinta no total, logo ele pintou 27.000cm^2. É intuitivo que o número de camadas horizontais, verticais e longitudinais seja o mesmo. Chamamos esse número de n. A quantidade de cubinhos é então n^3 e a aresta de cada um dos cubinhos mede $\frac{30}{n}$cm. Logo a área de uma face de um cubinho é $\frac{30\text{cm}}{n} \times \frac{30\text{cm}}{n} = \frac{900}{n^2}\text{cm}^2$, e temos:

$$27000 = \underbrace{6 \times \frac{900}{n^2}}_{\text{área total das faces de um cubinho}} \times n^3 = 5400 \times n.$$

Segue que $n = 5$ e então o número de cubinhos é $5^3 = 125$.

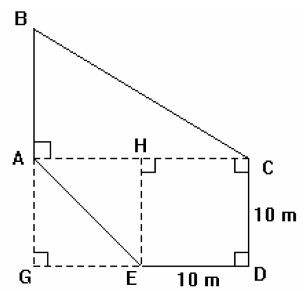
34 *Acertando a área* – *Solução*

a) 1ª *solução:* A figura abaixo mostra como decompor a região $ACDE$ em um quadrado $CDEH$ e um triângulo AHE. Como $CD = DE = 10$m e $AC = 20$m, segue que $AH = 10$m. Logo a área do triângulo AHE é metade da área de um quadrado de lado 10m, ou seja, é

$$\frac{AH \times HE}{2} = \frac{10\text{m} \times 10\text{m}}{2} = 50\text{m}^2$$

Como a área do quadrado $CDEH$ é $10\text{m} \times 10\text{m} = 100\text{m}^2$, concluímos que a área da região $ACDE$ é $100\text{m}^2 + 50\text{m}^2 = 150\text{m}^2$.

Alternativamente, podemos calcular a área de $ACDE$ como a diferença entre as áreas do retângulo $ACDG$ e do triângulo AGE, ou seja, $20\text{m} \times 10\text{m} - \frac{10\text{m}\times10\text{m}}{2} = 150\text{m}^2$.

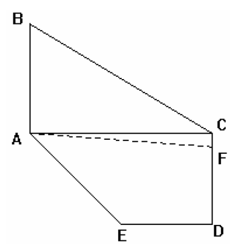


2ª *solução*: Podemos calcular a área do trapézio retângulo $ACDE$, em metros quadrados, pela fórmula usual:

$$\frac{(AC + DE) \times CD}{2} = \frac{(20 + 10) \times 10}{2} = 150.$$

A área total do terreno é então área($ACDE$)+área(ABC) = $150\text{m}^2 + 120\text{m}^2 = 270\text{m}^2$.

b) 1ª *solução:*



Como o terreno tem 270m^2, ao dividi-lo em duas partes iguais cada uma das partes terá área de

$$\frac{270\text{m}^2}{2} = 135\text{m}^2$$

Desse modo, devemos ter

$$135\text{m}^2 = \text{área}(ABCF) = \text{área}(ABC) + \text{área}(ACF) = 120\text{m}^2 + \text{área}(ACF)$$

e vemos que área$(ACF) = 15\text{m}^2$. Por outro lado, a área do triângulo ACF é

$$\frac{AC \times CF}{2} = \frac{20\text{m} \times CF}{2} = 10\text{m} \times CF$$

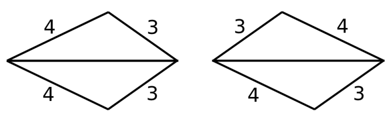
Portanto, $10\text{m} \times CF = 15\text{m}^2$ e logo $CF = 1,5\text{m}$.
2ª *solução:* Como o terreno tem 270m^2, ao dividi-lo nas partes de mesma área $ABCF$ e $AFDE$, cada parte terá área de 135m^2. Notamos que $ABCF$ é um trapézio de bases AB e CF e de altura $AC = 20$; logo

$$135\text{m}^2 = \text{área}(ABCF) = \frac{(12\text{m} + CF) \times 20\text{m}}{2} = 120\text{m}^2 + 10\text{m} \times CF$$

e segue que $CF = 1,5\text{m}$.

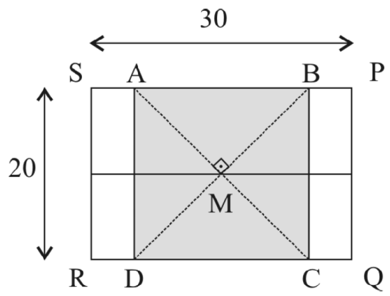
35 *Miguilim e os triângulos* – *Solução*

a) Na Figura I, verificamos que as medidas de dois lados que não foram unidos são 4cm e 6cm. Como os dois lados unidos são do mesmo tamanho, eles não podem medir nem 4cm nem 6cm, logo medem 3cm. Na Figura II, o triângulo que está mais acima tem um lado livre de 4cm e, claramente, o lado que foi unido ao triângulo de baixo é menor do que o lado livre não identificado. Portanto, o lado do triângulo superior que foi unido ao de baixo mede 3cm. No triângulo de baixo, claramente, o maior lado foi unido ao lado do triângulo de cima. Esse lado mede 6cm.
b) Os lados de medida 3cm não fazem parte do perímetro da Figura I. Logo o perímetro da Figura I é igual a $2\times(4\text{cm}+6\text{cm}) = 20\text{cm}$. O lado de 3cm de um triângulo e o pedaço de 3cm do lado maior do outro triângulo não fazem parte do perímetro da Figura II. Logo o perímetro da Figura II, em centímetros, é igual a $6 + 4 + 3 + 4 + (6 - 3) = 20$.
c) O perímetro de uma figura obtida quando se unem lados dos dois triângulos é igual à soma dos perímetros dos dois triângulos menos duas vezes o comprimento do menor dos lados que foram unidos. Assim, o perímetro da figura é o menor possível quando unirmos os dois lados de 6cm; nesse caso o perímetro, em centímetros, é igual a $2 \times (3 + 4 + 6) - 2 \times 6 = 26 - 12 = 14$. As duas figuras abaixo têm perímetro mínimo.

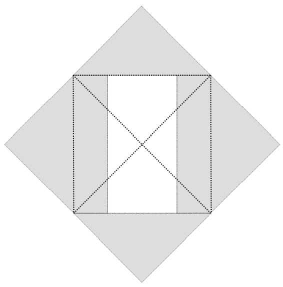


36 *Retângulo recortado* – *Solução*

a) Vamos representar a folha original pelo retângulo $PQRS$ na figura abaixo. Seja M o ponto onde os segmentos AC e BD se encontram. Como o centro do retângulo é o centro de simetria da figura, concluímos que $AM = MC = \frac{1}{2}AC$. Por outro lado, sabemos que $AC = BD$, donde $AM = BM = CM = DM$. Como os ângulos com vértice em M são todos retos, os triângulos AMB, BMC, CMD e DAM são congruentes e, em particular, $AB = BC = CD = DA$ e os ângulos desses triângulos em A, B, C e D são iguais, donde $ABCD$ é um quadrado. Como $BPCQ$ é um retângulo, $BC = PQ = 20\text{cm}$, donde $AB = 20\text{cm}$.



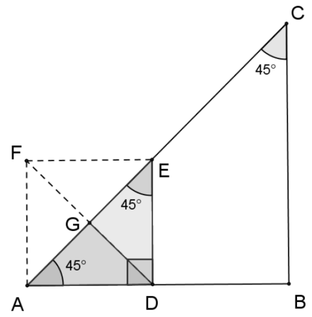
b)A área de cada um dos triângulos AMB, BMC, CMD e DAM é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado $ABCD$, que é $20\text{cm} \times 20\text{cm} = 400\text{cm}^2$; logo a área de um desses triângulos é $\frac{400}{4} = 100\text{cm}^2$. Como são os dois pedaços de cinco lados iguais, eles têm a mesma área. A folha original tem área igual a $20 \times 30 = 600\text{cm}^2$, e se subtrairmos dessa área as áreas dos dois pedaços triangulares ABM e DMC, restará a área dos dois pedaços de cinco lados. Portanto, a área de cada pedaço de cinco lados, em centímetros quadrados, é igual a $\frac{600-2\times 100}{2} = \frac{600-200}{2} = \frac{400}{2} = 200$.
Outra solução para obtenção da área do triângulo: A base AB do triângulo ABM mede 20cm; a altura relativa a essa base é metade da altura da folha, ou seja, $\frac{20\text{cm}}{2} = 10\text{cm}$. Portanto, a área de cada um dos dois triângulos é $\frac{20\text{cm}\times 10\text{cm}}{2} = 100\text{cm}^2$.
Outra solução para obtenção da área do polígono de cinco lados: Cada pedaço de cinco lados é formado por um dos quatro triângulos acima e por um retângulo de altura 20cm e largura igual a $\frac{20\text{cm}-10\text{cm}}{2} = \frac{10\text{cm}}{2} = 5\text{cm}$. Como a área de cada triângulo é de 100cm^2 e a área do retângulo é igual a $5\times 20\text{cm}^2 = 100\text{cm}^2$, concluímos que a área de cada pedaço de cinco lados é igual a $100\text{cm}^2 + 100\text{cm}^2 = 200\text{cm}^2$.
c) 1ª *solução:* O quadrado formado pelos quatro pedaços e o buraco tem área igual a 8 vezes a área de cada pedaço triangular, conforme mostrado no desenho a seguir. Portanto, sua área é igual a $8 \times 100\text{cm}^2 = 800\text{cm}^2$. Como a soma das áreas das quatro peças é igual à área da folha original, ou seja, 600cm^2, concluímos que a área do buraco é igual a $800\text{cm}^2 - 600\text{cm}^2 = 200\text{cm}^2$.



2ª *solução:* O buraco é um retângulo cuja altura é igual à altura da folha original, ou seja, 20cm. Seu comprimento é a diferença entre o comprimento da folha original e o segmento AB, ou seja, $30\text{cm} - 20\text{cm} = 10\text{cm}$. Portanto, a área do buraco é $20\text{cm} \times 10\text{cm} = 200\text{cm}^2$.
3ª *solução:* Cada triângulo retângulo é isósceles com hipotenusa de medida 20cm. Se a é a medida, em centímetros, de um dos catetos, temos $20^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, donde $a = \sqrt{20^2/2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$. Assim, o quadrado grande tem lado igual a $10\sqrt{2}\text{cm} + 10\sqrt{2}\text{cm} = 20\sqrt{2}\text{cm}$ e sua área é $(20\sqrt{2}\text{cm})^2 = 800\text{cm}^2$. Como a soma das áreas das quatro peças é igual à área da folha original, ou seja, 600cm^2, concluímos que a área do buraco é igual a $800\text{cm}^2 - 600\text{cm}^2 = 200\text{cm}^2$.

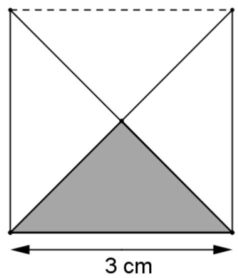
37 ***Triângulo sobre triângulo*** – *Solução*

O argumento geral para a resolução desta questão está ilustrado na figura abaixo. O triângulo ABC é um dos triângulos resultantes do corte do quadrado e D é um ponto qualquer no lado AB, com DE perpendicular a AB. O triângulo ADE também é retângulo com dois lados iguais, e sua área é igual a metade da área do quadrado $ADEF$; a área do triângulo ADG é então igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado $ADEF$.



a) O argumento acima mostra que a região cinza (abaixo) tem área igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado de lado 3cm, ou seja, $\frac{1}{4} \times (3\text{cm})^2 = \frac{9\text{cm}^2}{4} = 2,25\text{cm}^2$. Podemos também usar a fórmula da área de um triângulo. A altura relativa ao lado de 3cm mede a metade do lado do quadrado, ou seja, $\frac{3}{2}$cm. A área da região cinza, em centímetros quadrados, é então

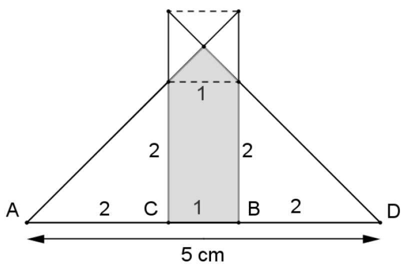
$$\text{área} = \frac{\textit{base} \times \textit{altura}}{2} = \frac{3 \times \frac{3}{2}}{2} = \frac{9}{4}$$



b) Um argumento similar ao utilizado no item anterior, mostra que a área da região cinza contida na interseção do quadrado de lado 1cm com o triângulo de base 5cm da figura abaixo é $\frac{1}{4} \times (1\text{cm})^2 = \frac{1\text{cm}^2}{4} = 0,25\text{cm}^2$. Alternativamente, podemos usar a fórmula para a área de um triângulo para obter

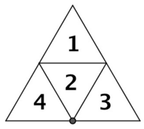
$$\text{área} = \frac{\textit{base} \times \textit{altura}}{2} = \frac{1\text{cm} \times \frac{1}{2}\text{cm}}{2} = \frac{1}{4}\text{cm}^2$$

c) 1ª *solução:* Como $AB = CD = 3$cm e $AD = 5$cm, vemos que $BC = 1$cm, e podemos então marcar os comprimentos indicados na figura. A região cinza é a união de um retângulo de base 1cm e altura 2cm com um triângulo cuja área já foi calculada no item anterior. Logo, a área da região cinza em, centímetros quadrados, é $1 \times 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} = 2,25$.
2ª *solução:* A região cinza é um retângulo de base 1 e altura 3 da qual se retiram três triângulos, cada um com área igual a $\frac{1}{4}$ da área de um quadrado de lado 1cm. Então, a área procurada, em centímetros quadrados, é igual a $3 \times 1 - 3 \times \frac{1}{4} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} = 2,25$.

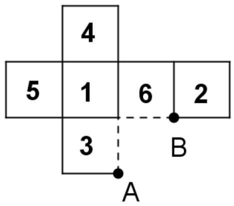


38 ***Planificações*** – *Solução*

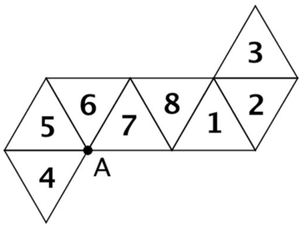
a) Na pirâmide cada vértice pertence a três faces. O ponto assinalado se tornará o vértice das faces com os números 2, 3 e 4; como esses são os três maiores números que aparecem nas faces, esse vértice terá a maior soma, que é 2 + 3 + 4 = 9.



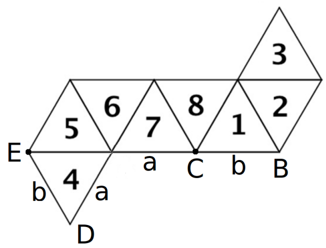
b) Em um cubo, cada vértice pertence a três faces. Ao montar o cubo, as arestas pontilhadas na figura abaixo coincidirão, o mesmo acontecendo com os pontos A e B. Vemos assim que as faces que se encontram no vértice correspondente ao ponto A são as faces com os números 3, 6 e 2; logo o valor desse vértice é 3 + 6 + 2 = 11.



c) Em um octaedro, cada vértice pertence a quatro faces. A figura abaixo mostra que, ao formar o octaedro, o ponto A será o vértice comum das faces com os números 4, 5, 6 e 7; logo seu valor será 4 + 5 + 6 + 7 = 22.



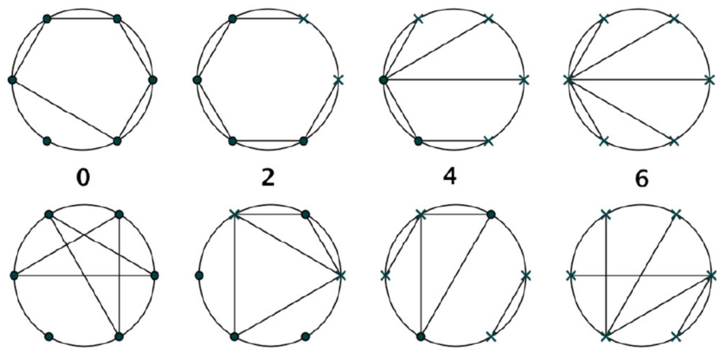
d) Ao montar o octaedro, os dois segmentos indicados pela letra a formarão uma aresta e os pontos C e D coincidirão. Logo os segmentos indicados por b também coincidirão e o ponto B será levado no ponto E. Desse modo, as faces que têm o vértice correspondente a B em comum são as faces com os números 1, 2, 4 e 5; o valor desse vértice é então 1 + 2 + 4 + 5 = 12.



39 ***Ligando pontos na circunferência*** – *Solução*

a) Juquinha, ao marcar cinco pontos sobre uma circunferência e traçar todas as ligações possíveis, sempre obtém cinco pontos-pares, pois cada ponto está ligado aos outros quatro pontos restantes. Retirando qualquer uma dessas ligações, dois desses cinco pontos-pares passam a ser pontos-ímpares. Logo, ao marcar cinco pontos sobre uma circunferência e fazer todas as ligações possíveis, exceto uma, Juquinha obtém 2 pontos-ímpares e 3 pontos-pares.

b) Na figura abaixo mostramos duas maneiras de obter 0, 2, 4 e 6 pontos-ímpares (assinalados com $\times$) com exatamente cinco conexões



c) 1ª *solução:* Antes de Juquinha começar a fazer ligações, todos os pontos são pares, pois 0 é par. Vamos agora pensar em Juquinha desenhando as ligações uma a uma. Quando ele desenha a primeira, os dois pontos ligados passam a ser ímpares. A partir daí, cada nova ligação pode:

• ligar dois pontos pares: nesse caso, esses pontos tornam-se ímpares e o número de pontos ímpares aumenta de dois; ou

• ligar dois pontos ímpares: nesse caso, esses pontos tornam-se pares e o número de pontos ímpares diminui de dois; ou

• ligar um ponto par a um ponto ímpar: nesse caso, o ponto par torna-se ímpar, o ponto ímpar torna-se par e o número de pontos ímpares continua o mesmo.

Em resumo, a cada nova ligação o número de pontos ímpares aumenta ou diminui de dois ou então permanece o mesmo. Como o número inicial de pontos ímpares é 0, que é par, segue que o número de pontos ímpares é sempre par, independentemente do número de pontos iniciais e do número de ligações. Uma solução perfeitamente análoga parte de um desenho pronto, retirando as ligações uma a uma.

2ª *solução:* Suponhamos que Juquinha tenha acabado de desenhar a figura. Para cada vértice, contamos a quantos outros vértices ele está ligado e somamos todos esses números. Essa soma é par; de fato, como cada ligação conecta dois vértices, essa soma é duas vezes o número de ligações. Cada vértice par contribui com uma parcela par e cada vértice ímpar com uma parcela ímpar para essa soma; como a soma é par, o número de parcelas ímpares deve ser par, ou seja, o número de vértices ímpares é par.

Soluções do Nível 2

Assunto

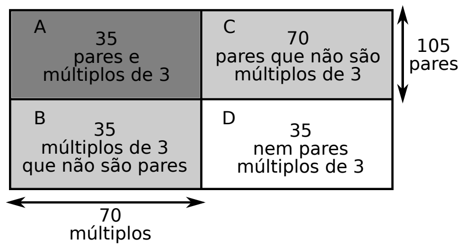
Aritmética

$\boxed{1}$ *Os cartões de Catarina* – *Solução*

a) Como $210 \div 3 = 70$, existem 70 cartões cujos números são múltiplos de 3. Mais precisamente, esses cartões são os de número $3 = 1 \times 3$, $6 = 2 \times 3$, $9 = 3 \times 3$, $12 = 4 \times 3, \ldots, 204 = 68 \times 3$, $207 = 69 \times 3$ e $210 = 70 \times 3$.
b) 1ª *solução*: Um raciocínio idêntico ao do item *a)* mostra que existem $210 \div 2 = 105$ cartões com números pares entre 1 e 210 (inclusive). Por outro lado, os números pares entre 1 e 210 que são múltiplos de 3 são $2 \times 3, 4 \times 3, 6 \times 3, \ldots, 68 \times 3$ e 70×3, em número de 35. Logo existem $105 - 35 = 70$ cartões com números pares que não são múltiplos de 3.
2ª *solução*: Há 105 cartões pares. Por outro lado, entre os 70 múltiplos de 3 há $70 \div 2 = 35$ pares; logo $105 - 35 = 70$ são pares mas não múltiplos de 3.

3ª *solução*: Retiram-se dos cartões os 70 cujos números são múltiplos de 3, restando assim $210 - 70 = 140$ cartões. Desses, metade são pares, pois entre dois múltiplos de 3 consecutivos um dos números é par e o outro ímpar; logo entre eles há $140 - 70 = 70$ cartões que não são nem pares nem múltiplos de 3.

4ª *solução*: Observamos que, entre 1 e 6, existem dois números pares que não são múltiplos de 3, a saber, 2 e 4. Do mesmo modo, entre 7 e 13 existem dois números pares que não são múltiplos de 3, a saber, 8 e 10. Esse padrão se repete a cada bloco de seis números consecutivos até chegar ao bloco de 205 a 210. Nesse último bloco, os números que não são múltiplos de 3 são 206 e 208. Temos assim $210 \div 6 = 35$ blocos e, em cada um, dois números pares que não são múltiplos de 3, num total de $35 \times 2 = 70$ números.
c) As partes **A, B** e **C** da figura abaixo correspondem às conclusões dos itens anteriores. Restam, então, cartões com números que não são nem pares nem múltiplos de 3, correspondendo à parte **D**. Escolhendo um número na parte **A**, outro na parte **B** (ou **C**) e 70 na parte **D**, vemos que é possível escolher 72 cartões de modo que quaisquer dois deles não contenham números que sejam simultaneamente pares ou múltiplos de 3. Por outro lado, ao escolher 73 cartões, os números de pelo menos três deles devem ficar fora da parte **D**, ou seja, devem pertencer às partes **A, B** e **C**. Se dois desses números ficam na mesma parte, eles têm 2 ou 3 (ou mesmo ambos, no caso de ficarem na parte **A**) como divisor comum. Caso contrário, temos um na parte **A** e outro na parte **B** (ou **C**) que têm 3 (ou 2) como divisor comum. Logo Catarina deve pegar 73 cartões.



$\boxed{2}$ *Enquadrados* – *Solução*

ALTERNATIVA C

Seja n um número enquadrado entre 10 e 100, a seu algarismo das dezenas e b seu algarismo das unidades; notamos que $1 \leq a \leq 9$ e $0 \leq b \leq 9$. Então $n = 10a + b$ e o número obtido invertendo-se os algarismos de n é $10b + a$. Como n é enquadrado temos que $(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b)$ é um quadrado perfeito.

Notamos primeiro que, se $b = 0$, então não é possível que $11(a + b)$ seja um quadrado perfeito, já que $11a$ nunca é um quadrado perfeito para a assumindo os valores de 1 a 9. Logo temos $b \neq 0$. Com isso, vemos que $2 \leq a + b \leq 18$; dentre esses possíveis valores para $a + b$, o único que faz de $11(a + b)$ um quadrado perfeito é 11. Logo $a + b = 11$ e as possibilidades para n são então 29 e 92, 38 e 83, 47 e 74 e 56 e 65, num total de 8.

Observação: podemos também chegar à conclusão de que $b \neq 0$ verificando diretamente que 10, 20, $30, \ldots, 90$ não são enquadrados.

$\boxed{3}$ *Múltiplos irados* – *Solução*

a) Os primeiros múltiplos de 20 são $20, 40, 60, 80$ e 100. Logo o múltiplo irado de 20 é 100.
b) Se os algarismos de um número divisível por 9 são apenas 0 e 1, nesse número devem aparecer pelo menos nove algarismos 1. Para que esse múltiplo seja o menor possível, ele deve ter o menor número de algarismos possível; logo o múltiplo irado de 9 é 111111111.
c) Um múltiplo de 45 é múltiplo de 5 e 9; logo seu algarismo das unidades é 0 ou 5 e a soma de seus algarismos é divisível por 9. Como múltiplos irados são formados apenas pelos algarismos 0 e 1, segue que o múltiplo irado de 45 deve ter 0 como algarismo das unidades; logo esse múltiplo é 1111111110.
d) O número 1110 é o menor número que tem apenas os algarismos 0 e 1 e que é, ao mesmo tempo, múltiplo de 3 (pois a soma de seus algarismos é 3) e múltiplo de 2 (pois seu último algarismo é 0). Logo 1110 é o múltiplo irado de 6. Como os múltiplos irados de $1, 2, 3, 4$ e 5 são, respectivamente, $1, 10, 111, 100$ e 10, segue que o menor número cujo múltiplo irado é 1110 é 6.

$\boxed{4}$ *Apenas algarismos ímpares* – *Solução*

ALTERNATIVA D

Há cinco algarismos ímpares: $1, 3, 5, 7$ e 9. Contando apenas números inteiros positivos, existem então 5 números formados por apenas um algarismo ímpar, $5 \times 5 = 25$ números formados por dois algarismos ímpares e $5 \times 5 \times 5 = 125$ números formados por três algarismos ímpares. Assim, existem $5+25+125 = 155$ números inteiros positivos menores que 1000 formados por algarismos ímpares. O 156º é então 1111 e o 157º é 1113.

$\boxed{5}$ *Esconde-esconde* – *Solução*

a) Para obter o maior número possível de três algarismos escondido por 47239, devemos primeiro fazer com que esse número tenha o maior algarismo possível na casa das centenas. Para isso, devemos apagar o 4 e deixar o 7 na casa das centenas. Após isso buscamos o maior algarismo possível na casa das dezenas; para isso apagamos o 2 e obtemos 739, que é o número procurado.
b) Como o número procurado esconde 2009, entre seus algarismos aparecem $2, 0, 0$ e 9, nesta ordem. Analogamente, como ele esconde 9002 então entre seus algarismos aparecem $9, 0, 0$ e 2 nesta ordem. Logo este número possui no mínimo seis algarismos: um 2 e um 9 à esquerda de dois 0's e um 2 e um 9 à direita dos mesmos. Há exatamente quatro números de seis algarismos deste tipo, a saber, $290029, 290092, 920029$ e 920092. O menor deles é 290029, que é o número procurado. Notamos que não é necessário pesquisar números de sete ou mais algarismos, pois eles são todos maiores que 290029.
c) Uma primeira ideia é encontrar um múltiplo de 2009 que termina em 3, o que é imediato: $7 \times 2009 = 14063$. Esta não é a resposta procurada, pois 14063 não esconde 2009. Mas 200900000 é múltiplo de 2009, e então

$$200914063 = 200900000 + 14063 = 100000 \times 2009 + 7 \times 2009 = 100007 \times 2009$$

é um múltiplo de 2009 que esconde 2009 e termina em 3.

$\boxed{6}$ ***Filhos e irmãos*** *– Solução*

Observação: para facilitar a escrita da solução, vamos dizer que x é pai de y se y é filho de x.
a) Suponhamos que $\frac{5}{7}$ seja filho de um número positivo x. Então $\frac{5}{7} = x + 1$ ou $\frac{5}{7} = \frac{x}{x+1}$. A primeira equação leva a

$$x = \frac{5}{7} - 1 = -\frac{2}{7}$$

o que não pode acontecer pois $x > 0$. A segunda equação leva a

$$7x = 5(x + 1) = 5x + 5$$

donde $2x = 5$ e segue que $x = \frac{5}{2}$. Logo o irmão de $\frac{5}{7}$ é $\frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}$.
b) Suponhamos que y seja filho de x e de z. Temos então as seguintes quatro possibilidades $x + 1 = z + 1$, $\frac{x}{x+1} = \frac{z}{z+1}$, $x + 1 = \frac{z}{z+1}$ ou $\frac{x}{x+1} = z + 1$. No primeiro e no segundo caso obtemos que $x = z$. No terceiro obtemos $x(z + 1) = -1$, que não tem solução pois x e z devem ser positivos. De maneira similar, o quarto caso, nos fornece que $z(x + 1) = -1$ que também não tem solução. Logo, se y tem pai, ele é único.
c) Vamos chamar $\frac{x}{x+1}$ de *filho menor* de x. Quando $x = \frac{1}{n}$ o filho menor de x é

$$\frac{x}{x+1} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1} = \frac{1}{n+1}$$

Logo o filho menor de 1 é $\frac{1}{2}$, o filho menor de $\frac{1}{2}$ é $\frac{1}{3}$, o filho menor de $\frac{1}{3}$ é $\frac{1}{4}$ e assim por diante até obtermos $\frac{1}{2008}$ como o filho menor de $\frac{1}{2007}$.

$\boxed{7}$ ***Algarismos afilhados*** *– Solução*

a) Os divisores de 57 são $1, 3, 19$ e 57, donde seus afilhados são $1, 3, 9$ e 7.
b) O exemplo mais simples é 49, cujos afilhados são $1, 7$ e 9.
c) Se um número tem um divisor terminado em 0 então este número é múltiplo de 10. Logo ele é múltiplo de 2 e de 5, e portanto 2 e 5 são seus afilhados.
d) Seja N um número que tem 0 e 9 como afilhados. Pelo item anterior, 2 é afilhado de N, logo N é par. Como 9 é afilhado de N, algum número ímpar terminado em 9 é divisor de N. Portanto, N é divisível pelo produto de 2 por esse número, ou seja, N é divisível por um número terminado em 8. Logo, 8 é afilhado de N.

$\boxed{8}$ ***Chegando ao*** 1 *– Solução*

a) Há várias soluções, como, por exemplo:

$$45 \xrightarrow{\text{apaga}} 4 \xrightarrow{\text{dobra}} 8 \xrightarrow{\text{dobra}} 16 \xrightarrow{\text{apaga}} 1$$
$$45 \xrightarrow{\text{dobra}} 90 \xrightarrow{\text{apaga}} 9 \xrightarrow{\text{dobra}} 18 \xrightarrow{\text{apaga}} 1$$

b) Aqui também há várias soluções, como, por exemplo:

$$345 \xrightarrow{\text{apaga}} 34 \xrightarrow{\text{apaga}} 3 \xrightarrow{\text{dobra}} 6 \xrightarrow{\text{dobra}} 12 \xrightarrow{\text{apaga}} 1$$
$$345 \xrightarrow{\text{apaga}} 34 \xrightarrow{\text{dobra}} 68 \xrightarrow{\text{apaga}} 6 \xrightarrow{\text{dobra}} 12 \xrightarrow{\text{apaga}} 1$$

c) Aplicamos a regra "apaga" até restar apenas um algarismo, e temos então três casos:

1. **Primeiro caso:** o algarismo restante é igual a 1:

   neste caso a brincadeira acaba.

2. **Segundo caso:** o algarismo restante é 2, 3 ou 4:

   neste caso aplicamos a regra "dobra" algumas vezes até obter um número de dois algarismos cujo algarismo das dezenas seja 1 (16, 12 ou 16, respectivamente), e aplica-se a regra "apaga" obtendo o número 1.

3. **Terceiro caso:** o algarismo restante é 5, 6, 7, 8 ou 9:

   neste caso aplicamos a regra “dobra” uma vez, obtendo respectivamente 10, 12, 14, 16 ou 18; então aplicamos a regra “apaga” para obter o número 1.

$\boxed{9}$ *Conjuntos equilibrados* – *Solução*

a) Dividimos o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ nos subconjuntos $\{1, 4, 6, 7\}$ e $\{2, 3, 5, 8\}$. Como

$$1 + 4 + 6 + 7 = 18 = 2 + 3 + 5 + 8$$

e

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 = 102 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2.$$

vemos que $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ é equilibrado.

b) Seja $A = a + 1, a + 2, a + 3, \ldots, a + 8$ um conjunto arbitrário de 8 números inteiros consecutivos. Do item *a)*, sabemos que $1 + 4 + 6 + 7 = 2 + 3 + 5 + 8$ (*) e $1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2$ (**). Da primeira igualdade segue que

$$(a + 1) + (a + 4) + (a + 6) + (a + 7) = (a + 2) + (a + 3) + (a + 5) + (a + 8)$$

ou seja, podemos dividir A nos subconjuntos $\{a + 1, a + 4, a + 6, a + 7\}$ e $\{a + 2, a + 3, a + 5, a + 8\}$ que têm a mesma soma. Para ver que a condição na soma dos quadrados também vale, basta calcular

$$(a + 1)^2 + (a + 4)^2 + (a + 6)^2 + (a + 7)^2 = 4a^2 + 2a(1 + 4 + 6 + 7) + (1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2)$$

e8

$$(a + 2)^2 + (a + 3)^2 + (a + 5)^2 + (a + 8)^2 = 4a^2 + 2a(2 + 3 + 5 + 8) + (2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2).$$

Usando (*) e (**), concluímos que A é equilibrado.

c) Suponhamos que exista um número inteiro a tal que o conjunto $\{a, a + 1, a + 2, a + 3\}$ seja equilibrado. A soma dos elementos desse conjunto é $4a + 6$. Assim, para que ele satisfaça a primeira condição de um conjunto equilibrado, devemos dividi-lo em dois subconjuntos de dois elementos cada um e de modo que a soma dos elementos de cada um deles seja $\frac{1}{2}(4a + 6) = 2a + 3$. Isto só é possível quando os subconjuntos são $\{a, a + 3\}$ e $\{a + 1, a + 2\}$. Para que a segunda condição de um conjunto equilibrado seja satisfeita, devemos ter

$$a^2 + (a + 3)^2 = (a + 1)^2 + (a + 2)^2$$

ou seja

$$2a^2 + 6a + 9 = 2a^2 + 6a + 5.$$

Simplificando essa última igualdade chegamos a $4 = 0$, um absurdo. Logo nenhum conjunto com quatro inteiros consecutivos é equilibrado.

$\boxed{10}$ *Descobrindo a multiplicação* – *Solução*

ALTERNATIVA C

O número 1656 é o resultado do produto de dois números com dois dígitos. Vamos então fatorar 1656 para verificarmos todas as possibilidades para esses dois números. Temos que $1656 = 2\times2\times2\times3\times3\times23$; então as possibilidades são $1656 = 72 \times 23$, $1656 = 24 \times 69$, $1656 = 36 \times 46$ e $1656 = 92 \times 18$.

Agora observe as contas armadas:

$$\begin{array}{rrrrr} & & \times & 7 & 2 \\ & & & 2 & 3 \\ \hline + & & 2 & 1 & 6 \\ & 1 & 4 & 4 & \\ \hline & 1 & 6 & 5 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & & \times & 2 & 4 \\ & & & 6 & 9 \\ \hline + & & 2 & 1 & 6 \\ & 1 & 4 & 4 & \\ \hline & 1 & 6 & 5 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & & \times & 3 & 6 \\ & & & 4 & 6 \\ \hline + & & 2 & 1 & 6 \\ & 1 & 4 & 4 & \\ \hline & 1 & 6 & 5 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & & \times & 9 & 2 \\ & & & 1 & 8 \\ \hline + & & 7 & 3 & 6 \\ & & 9 & 2 & \\ \hline & 1 & 6 & 5 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} & & \times & 2 & 3 \\ & & & 7 & 2 \\ \hline + & & & 4 & 6 \\ & 1 & 6 & 6 & \\ \hline & 1 & 6 & 5 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & & \times & 6 & 9 \\ & & & 2 & 4 \\ \hline + & & 2 & 7 & 6 \\ & 1 & 3 & 8 & \\ \hline & 1 & 6 & 5 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & & \times & 4 & 6 \\ & & & 3 & 6 \\ \hline + & & 2 & 7 & 6 \\ & 1 & 3 & 8 & \\ \hline & 1 & 6 & 5 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & & \times & 1 & 8 \\ & & & 9 & 2 \\ \hline + & & & 3 & 6 \\ & 1 & 6 & 2 & \\ \hline & 1 & 6 & 5 & 6 \end{array}$$

A única que satisfaz o enunciado é aquela na qual a segunda parcela da soma não possui três algarismos, ou seja, é a última conta da primeira linha. Logo os números que foram multiplicados são 92 e 18 e a soma procurada é 92 + 18 = 110.

$\boxed{11}$ *Cartas marcadas* – *Solução*

ALTERNATIVA E

O leitor pode verificar que, se Estefânia embaralhar as cartas 6 vezes, elas voltarão à posição inicial. Como $74 = 12 \times 6 + 2$, embaralhar as cartas 74 vezes tem o mesmo efeito que fazê-lo duas vezes, o que deixa a carta E no topo da pilha.

$\boxed{12}$ *Correndo na medida certa* – *Solução*

a) Uma volta completa em torno de uma pista tem extensão 1km + 2km + 6km + 4km = 13km. Por isso, para percorrer 14km é preciso dar uma volta completa e percorrer mais 1km. A única forma de percorrer 1km respeitando-se o sentido da corrida é começando em A e terminando em B. Portanto a corrida deve começar em A, dar uma volta completa e terminar em B.

b) Como $100 = 7 \times 13 + 9$, uma corrida de 100km corresponde a dar 7 voltas completas na pista e percorrer mais 9km. A única forma de percorrer 9km respeitando-se o sentido da corrida é começando em A e terminando em D. Portanto a corrida deve começar em A, dar 7 voltas completas e terminar em D.

c) Como sugerido nos itens anteriores, a solução do problema está baseada na ideia de "*dar uma certa quantidade de voltas*" sem exceder o comprimento da corrida e depois localizar trechos convenientes para percorrer a "*distância restante*". Do ponto de vista matemático, esse procedimento corresponde a efetuar o algoritmo de divisão com divisor igual a 13, ou seja, a escrever

$$\begin{aligned}\text{dividendo (comprimento da corrida)} = 13 \text{ (divisor) } &\times \text{quociente (número de voltas)}\\ &+ \text{resto (distância restante)},\end{aligned}$$

sendo o resto um número natural menor do que 13. Logo o resto só pode ser um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12. Por inspeção direta podemos verificar como realizar corridas com qualquer extensão de 1km a 13km. Os resultados estão dispostos na seguinte tabela:

Extensão em km	**Ponto de partida**	**Ponto de chegada**
1	A	B
2	B	C
3	A	C
4	D	A
5	D	B
6	C	D
7	D	C
8	B	D
9	A	D
10	C	A
11	C	B
12	B	A
13	**Qualquer um**	**O mesmo da partida**

Vejamos agora que é possível realizar corridas com qualquer comprimento inteiro maior do que 13km. Para isso basta ver que temos duas possibilidades:

1. **Primeiro caso:** a extensão é um múltiplo de 13km.

   Nesse caso, basta escolhermos qualquer posto e então realizarmos uma corrida que começa e termina nesse posto dando o número de voltas completas que é o quociente entre a extensão da corrida e 13.

   Por exemplo, se a extensão da corrida é de $208\text{km} = 16 \times 13\text{km}$, basta dar 16 voltas completas na pista.

2. **Segundo caso:** a extensão não é um múltiplo de 13km.

   Nesse caso, calculamos o quociente e o resto da divisão da extensão da corrida por 13. O resto será um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12. A tabela acima fornece os postos de partida e de chegada da corrida. O número de voltas será igual ao quociente.

   Por exemplo, se a extensão da corrida é 109km = $(8 \times 13 + 5)$km, ela deve começar no posto D, dar 8 voltas completas, retornando então a D, e depois percorrer o trecho de D a B.

13 *Números em um quadrado* – *Solução*

a) Somar as somas das linhas é o mesmo que somar todos os números no quadrado; assim, a soma das somas das linhas é $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. O mesmo se pode dizer da soma das somas das colunas, e concluímos que a soma de todas as somas é $2 \times 45 = 90$. Logo, a soma que está faltando é $90-(9+13+14+17+18) = 90-71 = 19$.
b) 1ª *solução:* Se todas as somas fossem pares, as somas das três linhas seriam pares e sua soma seria par. Mas isso é impossível pois, como vimos acima, a soma das somas das três linhas é 45, que é um número ímpar.
2ª *solução:* Ao distribuir os números no quadrado, uma linha pode ter no máximo três números ímpares. Por outro lado, há cinco números ímpares de 1 a 9, a saber, 1, 3, 5, 7 e 9. As maneiras de escrever 5 como soma de inteiros menores ou iguais a 3 são $5 = 2+3 = 1+1+3 = 1+2+2$. Como em qualquer dessas somas aparecem as parcelas 1 ou 3, concluímos que pelo menos uma linha de um quadrado preenchido conterá um ou três números ímpares, sendo os restantes pares. Em qualquer caso, obtemos uma linha cuja soma é ímpar.
c) Vamos estender um pouco essa solução para determinar não apenas um, mas todos os quadrados que têm as somas dadas. Antes de começar, notamos que trocar a ordem de duas linhas (ou de duas colunas) não altera as somas de um quadrado. Os seis números do resultado final devem ser separados em dois grupos de três números cada, cujas somas sejam iguais a 45. No primeiro grupo, cada número é a soma de uma linha e, no outro, a soma de cada coluna. De acordo com o item anterior, cada grupo deve conter um número ímpar; logo 7 e 13 devem ficar em conjuntos diferentes. Segue imediatamente que a única possibilidade é separar as somas nos grupos 7, 16, 22 e 13, 14, 18; podemos então supor que as somas das linhas são 7, 16, 22 e as somas das colunas são 13, 14, 18.

Como a única maneira de obter a soma 7 é $1+2+4=7$, podemos começar a preencher o quadrado como abaixo:

1	2	4	7

Suponhamos que a soma da segunda linha seja 22; as únicas possibilidades para a soma 22 são $5+8+9=22$ e $6+7+9=22$, que vamos considerar separadamente.

Suponhamos primeiro que na segunda linha aparecem os números 5, 8 e 9. Aqui o 5 não pode aparecer na coluna do 4, pois $4+5=9$ e para obter uma das somas 13, 14 ou 18 nessa coluna o terceiro número deveria ser 4, 5 ou 9, respectivamente, o que não pode acontecer pois o 4 já foi usado enquanto que 5 e 9 aparecem na segunda linha; argumento análogo mostra que o 9 também não pode aparecer na coluna do 4, ou seja, o 8 aparece abaixo do 4. Como $4+8=12$ e tanto o 1 como o 2 já foram usados, a soma dessa coluna não pode ser 13 ou 14; logo a soma é 18.

1	2	4	7
		8	22
		6	16
		18	

Podemos agora completar o quadrado das seguintes maneiras:

1	2	4	7
5	9	8	22
7	3	6	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	5	8	22
3	7	6	16
13	14	18	

Deixamos para o(a) leitor(a) mostrar que, quando na segunda linha aparecem os números 6, 7 e 9, as possibilidades são:

1	2	4	7
7	9	6	22
5	3	8	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	6	7	22
8	5	3	16
18	13	14	

1	2	4	7
9	7	6	22
3	5	8	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	7	6	22
8	5	3	16
18	13	14	

Desse modo, existem apenas seis quadrados com as somas do enunciado, a menos de troca de posição de linhas, troca de posição de colunas e troca das linhas pelas colunas.

Assunto

Combinatória

14 ***Paisagens*** – *Solução*

ALTERNATIVA D

Temos cinco posições distintas para colocarmos cinco quadros também distintos. Na primeira posição temos 5 escolhas distintas possíveis. Na segunda posição temos 4 escolhas distintas, e assim por diante. Pelo princípio multiplicativo, podemos formar $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ paisagens distintas. Como um mês tem, aproximadamente, 30 dias, podemos mudar a paisagem por aproximadamente $\frac{120}{30} = 4$ meses.

15 ***Colorindo*** – *Solução*

a) Se João pintar o quadrado de azul, ele terá as escolhas vermelho e amarelo para o triângulo. Se ele pintar o quadrado de vermelho, ele terá as escolhas azul e amarelo para pintar o triângulo. Finalmente, se ele pintar o quadrado de verde, ele terá as escolhas azul, vermelho e amarelo para pintar o triângulo. Logo, ele pode pintar a figura de $2 + 2 + 3 = 7$ maneiras diferentes.

b) 1ª *solução*: Se João escolher azul ou vermelho para o triângulo, cada um dos quadrados poderá ser pintado de duas cores; se ele escolher amarelo para o triângulo, cada quadrado poderá ser pintado de três cores. Logo, o número de maneiras diferentes de pintar essa figura é $2 \times 2 \times 2 \times 2 + 1 \times 3 \times 3 \times 3 = 43$.

2ª *solução*:

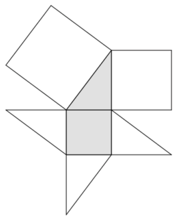
• Se o quadrado de baixo é pintado de amarelo, o triângulo do meio pode ser pintado de verde, vermelho ou azul. No caso em que ele é pintado de verde, há com $3 \times 3 = 9$ possibilidades para pintar os quadrados restantes. Já em cada um dos casos em que ele é pintado de vermelho ou azul; há $2 \times 2 = 4$ modos de pintar os quadrados restantes. Assim, há, no total, $9 + 2 \times 4 = 17$ possibilidades quando o quadrado inferior é pintado de amarelo.

• Se o quadrado de baixo é pintado de vermelho, o triângulo do meio pode ser pintado de verde ou azul. No caso em que ele é pinado de verde, há, novamente, 9 possibilidades para pintar os quadrados restantes. No caso em que ele é pintado de azul, há 4 possibilidades para os quadrados restantes. Assim, há, no total, $9 + 4 = 13$ possibilidades quando o quadrado inferior é pintado de vermelho.

• De maneira análoga, quando o quadrado de baixo é pintado de azul há, no total, há $9 + 4 = 13$ possibilidades.

Portanto, a figura pode ser colorida de $17 + 13 + 13 = 43$ modos distintos.

c) 1ª *solução*: Se João escolher azul ou vermelho para o quadrado sombreado, os triângulos adjacentes poderão ser pintados de $2 \times 2 \times 2 \times 2$ maneiras diferentes; em metade dessas maneiras o triângulo sombreado é azul ou vermelho, caso em que os quadrados adjacentes poderão ser pintados de 2×2 maneiras e na outra metade ele é amarelo, quando os quadrados adjacentes poderão ser pintados de 3×3 maneiras diferentes. Nesse caso, a figura poderá ser pintada de $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times (1 \times 2 \times 2 + 1 \times 3 \times 3) = 208$ maneiras diferentes.



Se ele escolher verde para o quadrado sombreado, os triângulos adjacentes poderão ser pintados de $3 \times 3 \times 3 \times 3$ maneiras diferentes; em dois terços dessas maneiras o triângulo sombreado é azul ou vermelho, caso em que os quadrados adjacentes poderão ser pintados de 2×2 maneiras e no terço restante ele é amarelo, quando os quadrados adjacentes poderão ser pintados de 3×3 maneiras diferentes. Nesse caso, a figura poderá ser pintada de $3 \times 3 \times 3 \times (2 \times 2 \times 2 + 1 \times 3 \times 3) = 459$ maneiras diferentes. No total, a figura poderá ser pintada de $208 + 459 = 667$ maneiras diferentes.

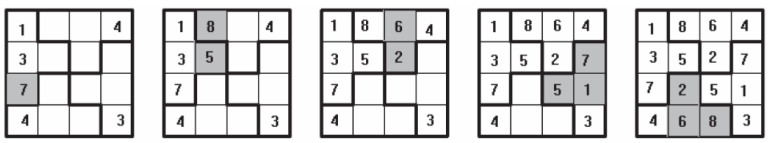
2ª *solução*: Se João escolher azul ou vermelho para o triângulo sombreado, os quadrados adjacentes poderão ser pintados de $2\times2\times2$ maneiras diferentes; em metade dessas maneiras o quadrado sombreado é azul ou vermelho, caso em que os triângulos adjacentes poderão ser pintados de $2\times2\times2$ maneiras e na outra metade ele é amarelo, quando os quadrados adjacentes poderão ser pintados de $3\times3\times3$ maneiras diferentes. Nesse caso, a figura poderá ser pintada de $2\times2\times2\times(1\times2\times2\times2+1\times3\times3\times3) = 280$ maneiras diferentes. Se ele escolher amarelo para o triângulo sombreado, os quadrados adjacentes poderão ser pintados de $3 \times 3 \times 3$ maneiras diferentes; em dois terços dessas maneiras o quadrado sombreado é azul ou vermelho, caso em que os triângulos adjacentes poderão ser pintados de $2 \times 2 \times 2$ maneiras e no terço restante ele é verde, quando os quadrados adjacentes poderão ser pintados de $3 \times 3 \times 3$ maneiras diferentes. Nesse caso, a figura poderá ser pintada de $3\times3\times(2\times2\times2\times2+1\times3\times3\times3) = 387$ maneiras diferentes. No total, a figura poderá ser pintada de $280 + 387 = 667$ maneiras diferentes.

3ª *solução (usando a 2ª solução do item b))*: Se o quadrado inferior é pintado de amarelo, os triângulos de baixo podem ser pintados de $3 \times 3 \times 3 = 27$ modos. Se ele é pintado de azul ou vermelho, os triângulos de baixo podem ser pintados de $2 \times 2 \times 2 = 8$ modos. Logo, o número total de possibilidades é $17 \times 27 + 26 \times 8 = 459 + 208 = 667$.

16 *Problema de tabuleiro* – *Solução*

ALTERNATIVA E

Uma maneira de preencher a tabela de acordo com as condições do enunciado é dada abaixo. Em cada etapa, indicamos com a cor cinza as novas casas preenchidas; o leitor pode justificar cada um dos passos ilustrados. Notamos que a tabela final é única, independente do modo com que ela é preenchida.



Voltando ao enunciado dessa questão, vemos que a soma dos números nos quadradinhos cinzas marcados no desenho desse enunciado é igual a $6 + 8 + 5 + 1 = 20$.

17 *Encaixando* – *Solução*

ALTERNATIVA B

Vamos denotar as peças, da esquerda para a direita e de cima para baixo, de H, U, Z e R. A peça H só pode ser colocada de duas maneiras diferentes em um quadrado, a peça U de quatro maneiras diferentes, a peça Z de duas maneiras diferentes e a peça R de quatro maneiras diferentes. Uma vez fixada a posição em que as peças vão entrar nos quadrados, elas podem ser distribuídas de $4\times3\times2\times1 = 24$ maneiras diferentes. Logo o número de maneiras diferentes de colocar as peças nos quadrados é $2 \times 4 \times 2 \times 4 \times 24 = 1536$.

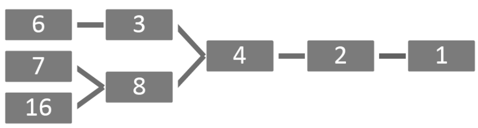
18 *Futebol matemático* – *Solução*

a) O time B não perdeu nenhuma partida, logo empatou ou ganhou de A. Mas A não empatou nenhuma partida, logo A perdeu de B.
b) O time A perdeu uma partida. Se tivesse perdido exatamente mais um jogo, teria 6 pontos. Mas B tem no mínimo 6 pontos, pois venceu A e não perdeu nenhuma das outras três partidas. Como A tem mais pontos que B, concluímos que A perdeu somente para B; e como A não empatou nenhuma partida, venceu as outras três. Logo A obteve 9 pontos.
c) 1ª *solução:* Como o time B não perdeu para nenhum outro time, ele ganhou 1 ou 3 pontos em cada partida, isto é, sempre um número ímpar de pontos. Como a soma de quatro números ímpares é par, vemos que B terminou o torneio com um número par de pontos.
2ª *solução:* Como ficou em segundo lugar, o time B fez menos do que 9 pontos, portanto venceu uma ou duas partidas. Como ele jogou quatro partidas, se venceu uma delas então empatou três, finalizando com 6 pontos; se venceu duas então empatou duas, finalizando com 8 pontos. Logo, as possibilidades para o número de pontos que B obteve nesse torneio são 6 e 8, ambos números pares.
d) De acordo com os itens anteriores, A perdeu de B e venceu C, D e E. Dos 6 jogos restantes, 5 foram empates. Se B tivesse só 2 empates, então todos os jogos entre C, D e E seriam empates e os dois desses times que empataram com B terminariam empatados, o que contraria o enunciado. Logo, os três jogos de B contra C, D e E foram empates. Como houve um total de 5 empates, 2 dos jogos entre C, D e E foram empates. Como a ordem de classificação é C, D, E, a única vitória foi de C contra E. Temos, assim, a tabela de resultados abaixo.

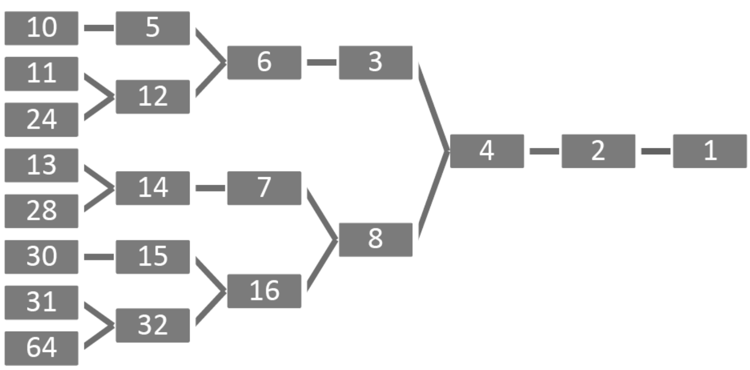
A	A	A	A	B	B	B	C	C	D
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
B	C	D	E	C	D	E	D	E	E

19 *Ímpar soma, par divide* – *Solução*

a) A sequência é 37 → 38 → 19 → 20 → 10 → 5 → 6 → 3 → 4 → 2 → 1.
b) A única sequência de comprimento 3 é 4 → 2 → 1. As sequências de comprimento 4 são 3 → 4 → 2 → 1 e 8 → 4 → 2 → 1; elas são obtidas a partir de 4 → 2 → 1, a primeira acrescentando $4 - 1 = 3$ à esquerda e a segunda acrescentando $2 \times 4 = 8$ à esquerda. Do mesmo modo, a sequência ímpar 3 → 4 → 2 → 1 dá origem à sequência par 6 → 3 → 4 → 2 → 1; a sequência par 8 → 4 → 2 → 1 dá origem à sequência ímpar 7 → 8 → 4 → 2 → 1 e à sequência par 16 → 8 → 4 → 2 → 1. Temos assim as três únicas sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. O raciocínio pode ser representado pelo esquema abaixo.



c) 1ª *solução:* Repetindo o esquema do item anterior, temos:



e assim temos três sequências pares e duas ímpares de comprimento 6 e cinco sequências pares e três ímpares de comprimento 7.
2ª *solução:* Observamos que a sequência ímpar de comprimento 5 dá origem a uma sequência par de comprimento 6; já as duas sequências pares de comprimento 5 dão origem a duas sequências pares de comprimento 6 e duas sequências ímpares de comprimento 6. Assim, temos duas sequências ímpares de comprimento 6 e $1 + 2 = 3$ sequências pares de comprimento 6, num total de $2 + 3 = 5$ sequências de comprimento 6. O mesmo argumento mostra que há oito sequências de comprimento 7, sendo três ímpares e cinco pares.
Observação: A repetição desse argumento para valores sucessivos do comprimento mostra que, a partir do comprimento 3, o número de sequências ímpares é $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$, o número de sequências pares é $2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ e o número total de sequências é $3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ Cada termo dessas sequências de valores, a partir do terceiro, é a soma dos dois anteriores; vemos assim que essas sequências, com a eventual omissão de termos iniciais, são a sequência $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$, conhecida como sequência de Fibonacci. Apresentamos esse resultado na tabela a seguir.

Comprimento	5	6	7	$\cdots$	15	16
Ímpares	1	2	$1 + 2 = 3$	$\cdots$	144	$89 + 144 = 233$
Pares	2	3	$2 + 3 = 5$	$\cdots$	233	$144 + 233 = 377$
Total (ímpares+pares)	$1 + 2 = 3$	$2 + 3 = 5$	$3 + 5 = 8$	$\cdots$	$144 + 233 = 377$	$233 + 377 = 610$

d) 1ª *solução*: As 144 sequências ímpares de comprimento 15 dão origem a 144 sequências pares de comprimento 16; já as 233 sequências pares de comprimento 15 dão origem a 233 sequências pares de comprimento 16 e 233 sequências ímpares de comprimento 16. Assim, temos 233 sequências ímpares de comprimento 16 e $377 = 233 + 144$ sequências pares de comprimento 16, num total de $233 + 377 = 610$ sequências.
2ª *solução:* A parte da sequência de Fibonacci que nos interessa é $1, 2, 3, 5, 8, \ldots, 144, 233, 377, 610, \ldots$ O número de sequências ímpares de comprimento 15 (resp. 16) é o 15º (resp. 16º) termo dessa sequência, que é 144 (resp. 233); o número de sequências pares de comprimento 15 (resp. 16) é o 16º (resp. 17º) termo, que é 233 (resp. 377) e o número total é o 17º(resp. 18º) termo, que é 377 (resp. 610).

20 *Uma caixa cheia de bolas* – *Solução*

ALTERNATIVA D
Quando se retiram duas bolas pretas da caixa, elas não retornam; mas quando as bolas retiradas são uma preta e outra de cor distinta, a preta retorna. Isso mostra que o número de bolas pretas na caixa diminui de dois em dois. Como o número inicial de bolas pretas é ímpar, sempre haverá um número ímpar de bolas pretas na caixa; desse modo, exatamente uma das duas bolas que sobrar na caixa é preta.

21 *Jogo Diferente* – *Solução*

a) Como saiu ímpar na primeira jogada, Isaura deu metade dos seus palitos para o Fernando; desse modo, Isaura ficou com 64 palitos, e como o número total de palitos é 256 segue que Fernando ficou com $256 - 64 = 192$ palitos. Do mesmo modo, após a segunda jogada, Isaura ficou com 32 palitos e Fernando com $256 - 32 = 224$ palitos. Na terceira jogada saiu par, e Fernando deu metade de seus palitos para a Isaura; logo, Fernando ficou com 112 palitos e Isaura com $256 - 112 = 144$ palitos.

Fernando	**Isaura**
128	128

$\xrightarrow[1^a \text{ jogada}]{\textbf{ímpar}}$

Fernando	**Isaura**
192	64

$\xrightarrow[2^a \text{ jogada}]{\textbf{ímpar}}$

Fernando	**Isaura**
224	32

$\xrightarrow[3^a \text{ jogada}]{\textbf{par}}$

Fernando	**Isaura**
112	144

b) 1ª *solução*: Após qualquer jogada, o perdedor não pode ter mais que 127 palitos; de fato, se isso ocorresse, antes dessa jogada ele teria pelo menos $2 \times 128 = 256$ palitos, o que não pode acontecer. O ganhador terá então no mínimo $256 - 127 = 129$ palitos; logo, o ganhador da jogada anterior é aquele que tem mais palitos.
2ª *solução*: Suponhamos que em um dado momento Fernando tem x palitos e Isaura tem y palitos; notamos que como $x + y = 256$, que é um número par, então x e y são ambos pares ou ambos ímpares. Se

o jogo ainda não acabou, então x e y são pares, e depois da jogada seguinte podem acontecer as seguintes situações:

• saiu **par**: nesse caso Fernando fica com $\frac{x}{2}$ palitos e Isaura com $y + \frac{x}{2}$ palitos, ou seja, Isaura fica com mais palitos do que Fernando;

• saiu **ímpar**: nesse caso Fernando fica com $x + \frac{y}{2}$ palitos e Isaura com $\frac{y}{2}$ palitos, ou seja, Fernando fica com mais palitos do que Isaura.

Isso mostra que basta saber quem tem o maior número de palitos para determinar o resultado da última jogada: se Isaura tiver mais, o resultado foi par e se Fernando tiver mais, o resultado foi ímpar. No nosso caso, a partida acabou quando Fernando ficou com 101 palitos e Isaura com $256 - 101 = 155$ palitos. Logo o resultado da última jogada foi **par**.

c) Aplicamos o raciocínio do item *b)* para recuperar as jogadas uma a uma em ordem inversa, do seguinte modo:

Fernando	Isaura
101	155

Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2 \times 101 = 202$ palitos e Isaura tinha $256 - 202 = 54$ palitos;

Fernando	Isaura
202	54

Fernando tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **ímpar**; então Isaura tinha $2 \times 54 = 108$ palitos e Fernando tinha $256 - 108 = 148$ palitos;

Fernando	Isaura
148	108

Fernando tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **ímpar**; então Isaura tinha $2 \times 108 = 216$ palitos e Fernando tinha $256 - 216 = 40$ palitos;

Fernando	Isaura
40	216

Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2 \times 40 = 80$ palitos e Isaura tinha $256 - 80 = 176$ palitos;

Fernando	Isaura
80	176

Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2 \times 80 = 160$ palitos e Isaura tinha $256 - 160 = 96$ palitos;

Fernando	Isaura
160	96

Fernando tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **ímpar**; então Isaura tinha $2 \times 96 = 192$ palitos e Fernando tinha $256 - 192 = 64$ palitos;

Fernando	Isaura
64	192

Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2 \times 64 = 128$ palitos e Isaura tinha $256 - 128 = 128$ palitos. Essa é a situação inicial do jogo.

Logo, a sequência de jogadas dessa partida foi **par**, **ímpar**, **par**, **par**, **ímpar**, **ímpar**, **par**.

d) Vamos aproveitar o trabalho do item anterior e fazer o seguinte diagrama do número de palitos de Fernando e Isaura, jogada a jogada:

Fernando	$128 = 2^7 \times 1$	$64 = 2^6 \times 1$	$160 = 2^5 \times 5$	$80 = 2^4 \times 5$	$40 = 2^3 \times 5$	$202 = 2^1 \times 101$	$101 = 2^0 \times 101$
Isaura	$128 = 2^7 \times 1$	$192 = 2^6 \times 3$	$96 = 2^5 \times 3$	$176 = 2^4 \times 11$	$108 = 2^2 \times 27$	$54 = 2^1 \times 27$	$155 = 2^0 \times 155$

Esse diagrama e outros exemplos semelhantes sugerem que, em um momento qualquer de uma partida, o número de palitos de Fernando e o número de palitos de Isaura se escrevem, respectivamente, como $2^n a$ e $2^n b$, onde a e b são inteiros ímpares. Além disso, se o jogo não acabou, então depois da próxima jogada eles terão $2^{n-1}a'$ e $2^{n-1}b'$ palitos, respectivamente, onde a' e b' também são inteiros ímpares. Vamos mostrar que essas afirmativas são verdadeiras. Suponhamos que em alguma etapa de uma partida os dois jogadores têm, respectivamente, $2^n a$ e $2^n b$ palitos, onde a e b são inteiros ímpares, e que o jogo não acabou, ou seja, que $n \geq 1$. Se a próxima jogada sair par, então Fernando ficará com $\frac{2^n a}{2} = 2^{n-1}a$ palitos e Isaura ficará com $2^{n-1}a + 2^n b = 2^{n-1}(a + 2b)$ palitos. Como a é ímpar então $b' = a + 2b$ também é ímpar. Desse modo, após essa jogada, Fernando e Isaura ficarão com $2^{n-1}a$ e $2^{n-1}b'$ palitos, onde a e

b' são ímpares. Um argumento idêntico leva à mesma conclusão no caso em que a próxima jogada sair ímpar, e acabamos de provar nossa afirmativa. O jogo começa com ambos os jogadores com $128 = 2^7 \times 1$ palitos, ou seja, com $n = 7$. Como uma partida acaba quando $n = 0$ e n decresce de uma unidade a cada jogada, segue imediatamente que qualquer partida acaba depois da sétima jogada.

22 ***Quadrados especiais*** – *Solução*

a) A solução está apresentada na figura abaixo:

1	2	**4**	**3**
3	4	2	1
2	**3**	1	**4**
4	**1**	**3**	2

b) Não. Como os quadradinhos na última coluna do quadrado D estão preenchidos com 1 e 2, então os dois quadradinhos na última coluna no quadrado B deveriam ser preenchidos com 3 e 4. Mas nem o 3 nem o 4 podem aparecer na segunda linha, já que eles já aparecem na segunda linha do quadrado A.
c) No quadrado D, o 2 pode aparecer na mesma coluna do 1 (como visto no item anterior). Com um argumento semelhante, mostra-se que o 3 não pode aparecer na mesma linha do 1. Temos, assim, as seguintes possibilidades para o preenchimento do quadrado D:

2	**3**
4	1

ou

3	**4**
2	1

ou

4	**3**
2	1

Em cada um destes casos, o quadrado especial pode ser preenchido de modo único:

1	2	**3**	**4**
3	4	**1**	**2**
4	**1**	**2**	**3**
2	**3**	**4**	1

1	2	**4**	**3**
3	4	**1**	**2**
2	**1**	**3**	**4**
4	**3**	**2**	1

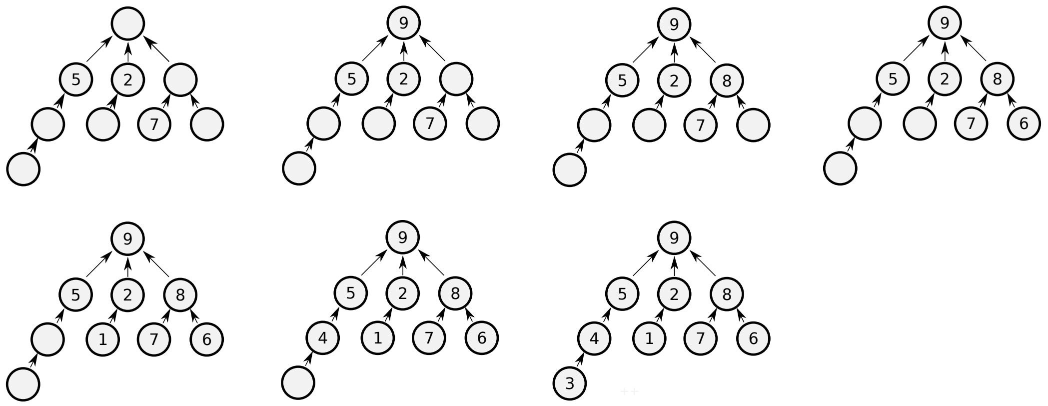
1	2	**3**	**4**
3	4	**1**	**2**
2	**1**	**4**	**3**
4	**3**	**2**	1

d) Para preencher o quadrado A, podemos colocar o 1 de 4 modos, o 2 de 3 modos, o 3 de 2 modos e o 4 de 1 modo. Logo, ele pode ser preenchido de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ modos. Para cada uma destas escolhas, o número de modos de preencher o restante do quadrado especial é o mesmo. Portanto, para contar quantas são as maneiras de terminarmos de preencher o quadrado especial, podemos supor que o quadrado A está preenchido como no item anterior. Para preencher o quadrado C, podemos colocar o 1 em qualquer das 4 casas. Uma vez fixado o 1, há 3 modos de completar o quadrado, como visto no item anterior. O número total de possibilidades de preenchimento é, portanto, $24 \times 4 \times 3 = 288$.

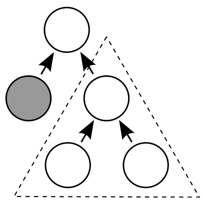
23 ***Um bom preenchimento*** – *Solução*

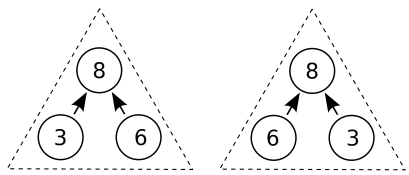
a) Só existe uma maneira de preencher o diagrama, como mostramos a seguir.
- O número 9 não pode ficar abaixo de nenhum número, logo deve ficar no topo.
- Acima do número 7 só podemos colocar o 9 ou o 8. Como o 9 já está no topo, o 8 ficará acima do 7.
- O número 6 não pode ficar abaixo do 5 nem do 2, logo ficará abaixo do 8, ao lado do 7.
- O número 1 é o único que pode ficar abaixo do 2.
- Os números 3 e 4 devem ficar abaixo do 5, com o 3 abaixo do 4.

A sequência de figuras a seguir ilustra as etapas deste raciocínio.



b) 1ª *solução*: Primeiro vamos examinar o diagrama menor de três bolinhas contidas no triângulo pontilhado, abaixo à esquerda. Para que ele fique bem preenchido com quaisquer três números positivos distintos, o maior número deve ficar no topo e os outros dois poderão ser colocados nos dois círculos de baixo de duas maneiras diferentes. Por exemplo, se os números forem 3, 6 e 8, podemos dispô-los das duas maneiras ilustradas abaixo à direita.





Para que o diagrama completo do problema fique bem preenchido com os números de 1 a 5, o 5 deve ficar no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 4. As três casas restantes, marcadas com o triângulo pontilhado, formam o diagrama analisado acima e poderão então ser preenchidas de duas maneiras, com os três números restantes. Resumindo, podemos preencher o diagrama do seguinte modo:

- preenchemos o círculo do topo com o 5: uma possibilidade;
- preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 ou 4: quatro possibilidades;
- preenchemos as três casas que faltam com os três algarismos restantes: duas possibilidades.

Logo, o diagrama pode ser preenchido de $1 \times 4 \times 2 = 8$ maneiras diferentes. Notamos que este raciocínio se aplica para quaisquer cinco números positivos distintos. Isto será importante na resolução do próximo item.

2ª *solução*: Notamos primeiro que o 5 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 4 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 5, e então:

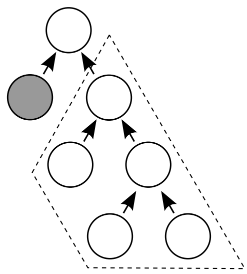
- se o 4 ocupar a bolinha sombreada, o 3 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 5, e o 1 e o 2 podem ser colocados de duas maneiras diferentes nas duas bolinhas que sobram; temos duas possibilidades neste caso;
- se o 4 ocupar a outra bolinha abaixo do 5, a casa sombreada pode ser ocupada por qualquer dos números de 1 a 3, e os outros dois números podem ser colocados nas duas últimas bolinhas vazias; neste caso temos $3 \times 2 = 6$ possibilidades.

Deste modo, o número total de maneiras de preencher o diagrama é $2 + 6 = 8$.

c) 1ª *solução*: Para que o diagrama fique bem preenchido com os números de 1 a 7, temos que colocar o 7 no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 6. A parte circundada pela linha pontilhada foi analisada no item *b)* e pode ser preenchida com os 5 números restantes de 8 formas diferentes. Ou seja, podemos preencher o diagrama como segue:

- preenchemos o círculo do topo com o 7: uma possibilidade;
- preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3, 4, 5 ou 6: seis possibilidades;
- preenchemos a parte circundada com os algarismos restantes: oito possibilidades.

Logo, o diagrama pode ser preenchido de $1 \times 6 \times 8 = 48$ maneiras diferentes.



2ª *solução*: Notamos primeiro que o 7 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 6 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 7, e então:

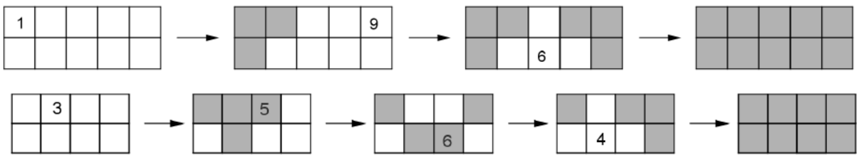
• se o 6 ocupar a bolinha sombreada, os números de 1 a 5 devem ocupar as casas circundadas com a linha pontilhada. De acordo com o item *b)*, isto pode ser feito de oito maneiras distintas.

• se o 6 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 7, podemos colocar qualquer número de 1 a 5 na casa sombreada e distribuir os números restantes pelas quatro bolinhas ainda vazias, o que pode ser feito de oito maneiras diferentes, de acordo com o item *b)*. Aqui temos $5 \times 8 = 40$ possibilidades.

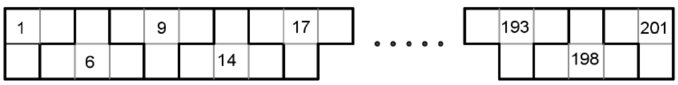
Logo, o diagrama pode ser preenchido de $8 + 40 = 48$ maneiras diferentes.

$\boxed{24}$ ***Troca-cor*** – *Solução*

a) Mostramos abaixo um jogo completo para cada tabuleiro, destacando as casas apertadas.



b) Dividimos o tabuleiro 2×100 em 25 retângulos 2×4 e, em cada um desses retângulos, tornamos as casas cinzas procedendo como ilustrado no item *a)*; notamos que ao aplicar este procedimento em um retângulo os demais não são afetados. Desse modo podemos preencher todas as casas do jogo 2×100.
c) Dividimos o tabuleiro como ilustrado na figura a seguir.



Na primeira linha selecionamos as casas 1, 9, 17, . . ., 193, 201 e na segunda as casas 6, 14, 22, . . ., 190, 198. Cada uma das casas selecionadas está dentro de uma região destacada com traço mais forte. Ao apertar uma destas casas, ela e todas as outras casas de sua região ficam cinzas, sem afetar as outras regiões. Apertando todas estas casas podemos então preencher todas as casas do jogo 2×101.

Notamos que há uma casa selecionada de duas em duas colunas, começando da primeira à esquerda, e uma na última coluna. Como as colunas são em número de 101, vemos que foram selecionadas 51 casas, que é o número de jogadas que foram necessárias para terminar o jogo do modo descrito.
d) Não é possível acabar o jogo 2×101 com menos de 51 jogadas, pois cada jogada muda a cor de no máximo quatro casas. Assim, com 50 jogadas ou menos conseguiremos mudar a cor de no máximo $50 \times 4 = 200$ casas, mas no jogo 2×101 devemos mudar a cor de 202 casas. Logo, é impossível fazer menos do que 51 jogadas e deixar cinzas todas as casas.
Observação: A solução dos itens *b)* e *c)* mostra como terminar o jogo no caso de tabuleiros $2 \times n$, onde n deixa restos 0 ou 1 quando dividido por 4. É interessante completar a análise nos casos em que os restos são 2 ou 3; deixamos isto para o(a) leitor(a).

$\boxed{25}$ ***Letras e números*** – *Solução*

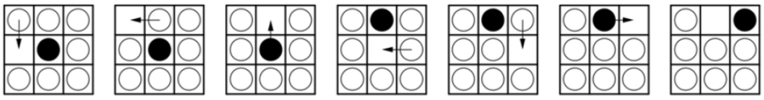
a) Substituindo $A = 5$ e $B = 7$ em $A \times C = B$, temos $5 \times C = 7$ e segue que $C = \frac{7}{5}$. Podemos agora achar D substituindo os valores de B e D em $B \times D = C$; obtemos $7 \times D = \frac{7}{5}$ e então $D = \frac{1}{5}$. Finalmente, de $C \times E = D$ temos $\frac{7}{5} \times E = \frac{1}{5}$ e vemos que $E = \frac{1}{7}$.
b) Multiplicando as expressões $A \times C = B$ e $B \times D = C$ obtemos $A \times B \times C \times D = B \times C$; como B e C são diferentes de 0, concluímos que $A \times D = 1$, ou seja, $D = \frac{1}{A}$. Do mesmo modo, multiplicando as expressões $B \times D = C$ e $C \times E = D$ obtemos $B \times E = 1$, ou seja, $E = \frac{1}{B}$. Repetindo esse raciocínio, vemos que cada letra a partir do D é o inverso da letra que aparece três posições atrás dela; em particular, $G = \frac{1}{D} = \frac{1}{\frac{1}{A}} = A$.
c) O item anterior nos mostra que $C \times D \times E \times F \times G \times H = C \times D \times E \times \frac{1}{C} \times \frac{1}{D} \times \frac{1}{E} = 1$; o mesmo raciocínio mostra que o produto de quaisquer seis letras consecutivas é igual a 1. Temos então:

$$A \times B \times C \ldots \times Y \times Z = A \times B \times (C \times \ldots \times H) \times (I \times \ldots \times N) \times (O \times \ldots \times T) \times (U \times \ldots \times Z) = A \times B = 2010$$

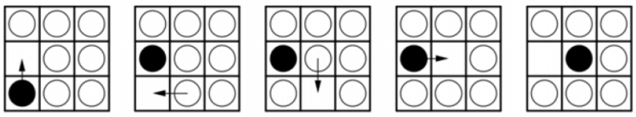
pois todos os produtos entre parênteses são produtos de seis letras consecutivas, logo são todos iguais a 1.
Observação: Notamos que esse problema depende do fato de que, uma vez fixados os valores de A e B, a sequência dos valores das letras do alfabeto é $A, B, \frac{B}{A}, \frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{A}{B}, A, B, \frac{B}{A}, \frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{A}{B}, A, B, \ldots$

$\boxed{26}$ ***Arrasta Um*** – *Solução*

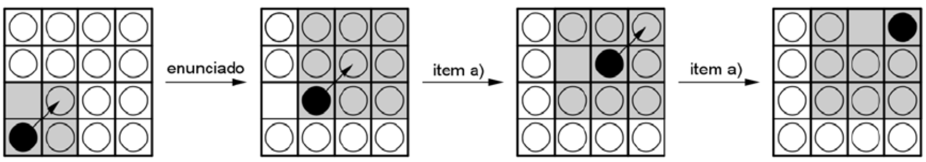
a) A figura abaixo mostra que a sequência de seis movimentos $(\downarrow, \leftarrow, \uparrow, \leftarrow, \downarrow, \rightarrow)$ termina o jogo a partir da posição inicial dada.



b) A figura abaixo mostra que a sequência de quatro movimentos $(\uparrow, \leftarrow, \downarrow, \rightarrow)$ transforma a posição inicial dada na posição inicial do item *a)*, a partir da qual é possível terminar o jogo em seis movimentos.



Assim, podemos terminar o jogo num total de $4 + 6 = 10$ movimentos.
c) A ideia é fazer com que a peça preta se mova ao longo da diagonal do tabuleiro. Isso pode ser feito uma casa de cada vez usando primeiro os movimentos do exemplo do enunciado seguidos da repetição dos movimentos do item *a)*. Abaixo ilustramos esse procedimento em um tabuleiro 4×4.



Em geral, em um tabuleiro $n \times n$, a peça preta deverá subir $n - 1$ casas na diagonal. Pelo método indicado acima, pode-se subir a primeira delas em 4 movimentos e cada uma das $n - 2$ restantes em 6 movimentos cada uma. Logo, pode-se acabar o jogo em $4 + 6(n - 2) = 6n - 8$ movimentos.

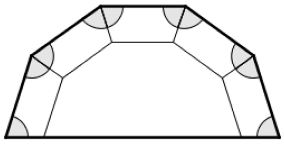
Assunto

Geometria

27 *Cinco trapézios* – *Solução*

ALTERNATIVA A

Lembramos que a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $(n-2)\times 180°$. Podemos ver a figura do enunciado como um polígono de 6 lados (em traço mais grosso na figura ao lado); a soma de seus ângulos internos é então $(6-2)\times 180° = 720°$. Por outro lado, como os trapézios são congruentes, a soma destes ângulos internos é igual a 10 vezes a medida do ângulo marcado, que vale então $\frac{720°}{10} = 72°$.



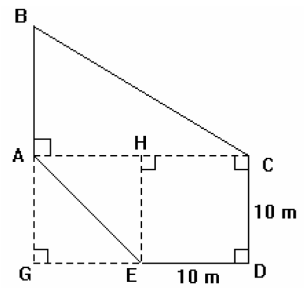
28 *Acertando a área* – *Solução*

a) 1ª *solução:* A figura abaixo mostra como decompor a região $ACDE$ em um quadrado $CDEH$ e um triângulo AHE. Como $CD = DE = 10$m e $AC = 20$m, segue que $AH = 10$m. Logo a área do triângulo AHE é metade da área de um quadrado de lado 10m, ou seja, é

$$\frac{AH\times HE}{2} = \frac{10\text{m}\times 10\text{m}}{2} = 50\text{m}^2$$

Como a área do quadrado $CDEH$ é $10\text{m}\times 10\text{m} = 100\text{m}^2$, concluímos que a área da região $ACDE$ é $100\text{m}^2 + 50\text{m}^2 = 150\text{m}^2$.

Alternativamente, podemos calcular a área de $ACDE$ como a diferença entre as áreas do retângulo $ACDG$ e do triângulo AGE, ou seja, $20\text{m}\times 10\text{m} - \frac{10\text{m}\times 10\text{m}}{2} = 150\text{m}^2$.

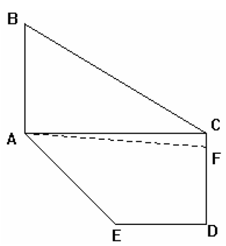


2ª *solução*: Podemos calcular a área do trapézio retângulo $ACDE$, em metros quadrados, pela fórmula usual:

$$\frac{(AC+DE)\times CD}{2} = \frac{(20+10)\times 10}{2} = 150.$$

A área total do terreno é então área($ACDE$)+área(ABC) $= 150\text{m}^2 + 120\text{m}^2 = 270\text{m}^2$.

b) 1ª *solução:*



Como o terreno tem 270m^2, ao dividi-lo em duas partes iguais cada uma das partes terá área de

$$\frac{270\text{m}^2}{2} = 135\text{m}^2$$

Desse modo, devemos ter

$$135\text{m}^2 = \text{área}(ABCF) = \text{área}(ABC) + \text{área}(ACF) = 120\text{m}^2 + \text{área}(ACF)$$

e vemos que área$(ACF) = 15\text{m}^2$. Por outro lado, a área do triângulo ACF é

$$\frac{AC \times CF}{2} = \frac{20\text{m} \times CF}{2} = 10\text{m} \times CF$$

Portanto, $10\text{m} \times CF = 15\text{m}^2$ e logo $CF = 1,5\text{m}$.
2ª *solução:* Como o terreno tem 270m^2, ao dividi-lo nas partes de mesma área $ABCF$ e $AFDE$, cada parte terá área de 135m^2. Notamos que $ABCF$ é um trapézio de bases AB e CF e de altura $AC = 20$; logo

$$135\text{m}^2 = \text{área}(ABCF) = \frac{(12\text{m} + CF) \times 20\text{m}}{2} = 120\text{m}^2 + 10\text{m} \times CF$$

e segue que $CF = 1,5\text{m}$.

29 *Um buraco no Tangran* – *Solução*

ALTERNATIVA C
Abaixo vemos as figuras do enunciado da questão. A descrição das peças da Figura I implica que os pontos M e N são pontos médios dos lados AB e AC. A Figura III, onde P é o ponto médio de BC, mostra que a área do triângulo AMN é igual à quarta parte da área do triângulo ABC, que por sua vez tem área igual à metade da área do quadrado. Logo, área$(AMN) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 40 = 5\text{cm}^2$. A Figura II mostra que o buraco consiste de três triângulos iguais ao triângulo AMN; logo sua área é 15cm^2.

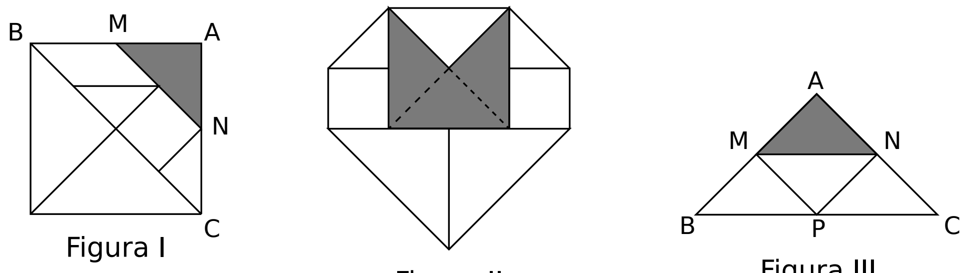
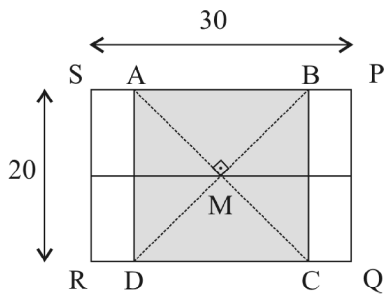


Figura I Figura II Figura III

30 *Retângulo recortado* – *Solução*

a) Vamos representar a folha original pelo retângulo $PQRS$ na figura abaixo. Seja M o ponto onde os segmentos AC e BD se encontram. Como o centro do retângulo é o centro de simetria da figura, concluímos que $AM = MC = \frac{1}{2}AC$. Por outro lado, sabemos que $AC = BD$, donde $AM = BM = CM = DM$. Como os ângulos com vértice em M são todos retos, os triângulos AMB, BMC, CMD e DAM são congruentes e, em particular, $AB = BC = CD = DA$ e os ângulos desses triângulos em A, B, C e D são iguais, donde $ABCD$ é um quadrado. Como $BPCQ$ é um retângulo, $BC = PQ = 20\text{cm}$, donde $AB = 20\text{cm}$.

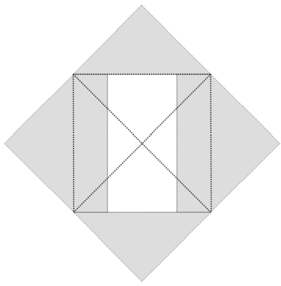


b)A área de cada um dos triângulos AMB, BMC, CMD e DAM é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado $ABCD$, que é $20\text{cm} \times 20\text{cm} = 400\text{cm}^2$; logo a área de um desses triângulos é $\frac{400}{4} = 100\text{cm}^2$. Como são os dois pedaços de cinco lados iguais, eles têm a mesma área. A folha original tem área igual a $20 \times 30 = 600\text{cm}^2$, e se subtrairmos dessa área as áreas dos dois pedaços triangulares ABM e DMC, restará a área dos dois pedaços de cinco lados. Portanto, a área de cada pedaço de cinco lados, em centímetros quadrados, é igual a $\frac{600-2\times100}{2} = \frac{600-200}{2} = \frac{400}{2} = 200$.

Outra solução para obtenção da área do triângulo: A base AB do triângulo ABM mede 20cm; a altura relativa a essa base é metade da altura da folha, ou seja, $\frac{20\text{cm}}{2} = 10\text{cm}$. Portanto, a área de cada um dos dois triângulos é $\frac{20\text{cm}\times10\text{cm}}{2} = 100\text{cm}^2$.

Outra solução para obtenção da área do polígono de cinco lados: Cada pedaço de cinco lados é formado por um dos quatro triângulos acima e por um retângulo de altura 20cm e largura igual a $\frac{20\text{cm}-10\text{cm}}{2} = \frac{10\text{cm}}{2} = 5\text{cm}$. Como a área de cada triângulo é de 100cm^2 e a área do retângulo é igual a $5\times20\text{cm}^2 = 100\text{cm}^2$, concluímos que a área de cada pedaço de cinco lados é igual a $100\text{cm}^2 + 100\text{cm}^2 = 200\text{cm}^2$.

c) 1ª *solução:* O quadrado formado pelos quatro pedaços e o buraco tem área igual a 8 vezes a área de cada pedaço triangular, conforme mostrado no desenho a seguir. Portanto, sua área é igual a $8 \times 100\text{cm}^2 = 800\text{cm}^2$. Como a soma das áreas das quatro peças é igual à área da folha original, ou seja, 600cm^2, concluímos que a área do buraco é igual a $800\text{cm}^2 - 600\text{cm}^2 = 200\text{cm}^2$.

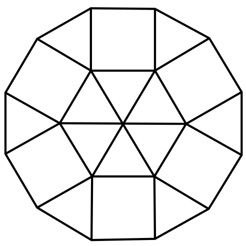


2ª *solução:* O buraco é um retângulo cuja altura é igual à altura da folha original, ou seja, 20cm. Seu comprimento é a diferença entre o comprimento da folha original e o segmento AB, ou seja, $30\text{cm} - 20\text{cm} = 10\text{cm}$. Portanto, a área do buraco é $20\text{cm} \times 10\text{cm} = 200\text{cm}^2$.

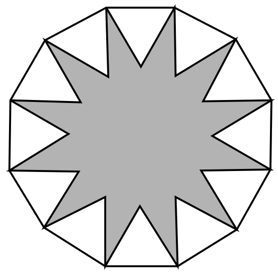
3ª *solução:* Cada triângulo retângulo é isósceles com hipotenusa de medida 20cm. Se a é a medida, em centímetros, de um dos catetos, temos $20^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, donde $a = \sqrt{20^2/2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$. Assim, o quadrado grande tem lado igual a $10\sqrt{2}\text{cm} + 10\sqrt{2}\text{cm} = 20\sqrt{2}\text{cm}$ e sua área é $(20\sqrt{2}\text{cm})^2 = 800\text{cm}^2$. Como a soma das áreas das quatro peças é igual à área da folha original, ou seja, 600cm^2, concluímos que a área do buraco é igual a $800\text{cm}^2 - 600\text{cm}^2 = 200\text{cm}^2$.

31 *Polígonos e polígonos* – Solução

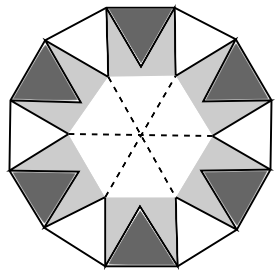
a) A figura abaixo mostra que o hexágono pode ser decomposto em seis triângulos iguais aos triângulos que fazem parte do dodecágono. Como cada um desses triângulos tem área 1cm^2, segue que o hexágono tem área 6cm^2.



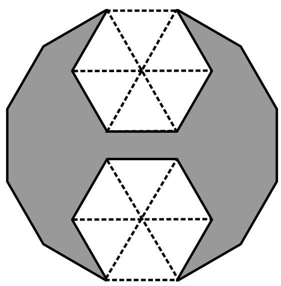
b) 1ª *solução*: A figura do item anterior mostra que o dodecágono pode ser decomposto em doze triângulos equiláteros iguais e seis quadrados. Desse modo, ao retirar doze triângulos do dodecágono, a estrela que sobra tem área igual à área de seis quadrados. Como o lado do dodecágono mede 1cm, cada quadrado tem área 1cm^2 e assim a área da estrela é 6cm^2.



2ª *solução*: Podemos decompor o hexágono central da estrela em seis triângulos e "encaixá-los" como indicado na figura abaixo. A figura assim obtida tem a mesma área da estrela e consiste de seis quadrados de lado 1cm; sua área é então 6cm^2.



c) A figura abaixo mostra que os dois hexágonos retirados têm a mesma área que doze triângulos equiláteros; como no item *b)*, a região cinza tem a mesma área que seis quadrados de lado 1cm; sua área é então 6cm^2.



32 *Quantos?* – Solução

ALTERNATIVA D

Vamos escolher um ponto entre os pontos destacados; por exemplo, o primeiro ponto à esquerda no lado inferior do quadrado. A Figura 1 mostra os três triângulos retângulos que podemos construir com o vértice com o ângulo reto nesse ponto. Como o mesmo acontece com os outros pontos destacados, vemos que o número de triângulos retângulos com vértices nesses pontos é $8 \times 3 = 24$. Devemos justificar a afirmativa de que esses triângulos são retângulos. Isso é claro para o triângulo da Figura 1.

Quanto ao da Figura 2, notamos que os dois triângulos retângulos brancos são congruentes, logo seus ângulos com vértice no ponto escolhido somam 90° e, consequentemente, o ângulo do triângulo cinza nesse vértice é também 90°.

Finalmente, o triângulo da Figura 3 é retângulo pois seus lados menores são diagonais de quadrados, como indicado pelos segmentos mais claros; assim eles fazem ângulo de 45° com o lado inferior do quadrado e o ângulo do triângulo cinza nesse vértice é também 90°.

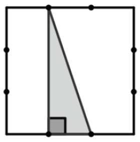


Figura 1

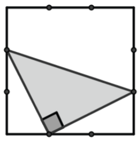


Figura 2

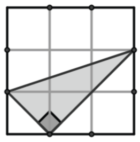
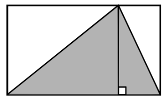
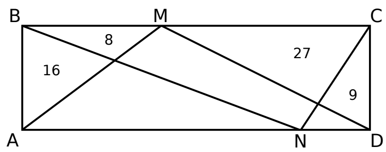


Figura 3

33 *Triângulos em um retângulo* – *Solução*



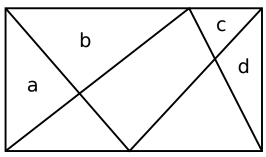
Lembramos que a área de um triângulo é dada pela fórmula $\frac{1}{2}$ base $\times$ altura e a área do retângulo por base $\times$ altura. Na figura ao lado, concluímos que a área do triângulo sombreado é metade da área do retângulo, pois ambos têm a mesma base e a mesma altura. Logo a soma das áreas dos dois triângulos brancos também é metade da área do retângulo, ou seja, igual à área do triângulo sombreado.



a) Pelo visto acima, temos área(AMD) = área(ABM)+área(MDC) = 16cm^2+8cm^2+27cm^2+9cm^2 = 60cm^2.
b) Como área(AMD) = área(BNC), temos área(AQN) + área(NDP) = área(AMD) − área($MQNP$) = área(BNC) − área($MQNP$) = área(BQM) + área(MPC) = 8cm^2 + 27cm^2 = 35cm^2
c) Temos

$$\text{área}(MQNP) = \text{área}(BNC) - \text{área}(BQM) - \text{área}(MPC) = 60\text{cm}^2 - 8\text{cm}^2 - 27\text{cm}^2 = 25\text{cm}^2$$

Observação: As áreas dos triângulos nesse problema não foram escolhidas ao acaso. Deixamos como exercício para o(a) leitor(a) mostrar que é possível construir a figura abaixo, onde a, b, c e d representam as áreas dos triângulos correspondentes, se e somente se $\frac{a^2}{b} + \frac{d^2}{c} = b + c$.



Solução alternativa para os itens b) e c): Podemos resolver primeiro o item *c)*, como segue. Como área(AMD) = área(BNC) = 60cm^2, temos

$$\text{área}(MNPQ) = \text{área}(BNC) - 27\text{cm}^2 - 8\text{cm}^2 = 25\text{cm}^2,$$

obtendo então para o item *b)*

$$\text{área}(AQN) + \text{área}(NDP) = \text{área}(AMD) - \text{área}(MNPQ) = 60\text{cm}^2 - 25\text{cm}^2 = 35\text{cm}^2$$

34 *Muitos quadrados* – *Solução*

a) A área da folha, era igual a soma das áreas dos nove quadrados, que é (em centímetros quadrados):

$$1^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 14^2 + 15^2 + 18^2 = 1056.$$

b) Sejam a e b as dimensões da folha, onde supomos $a \leq b$. Como a área de um retângulo é o produto de suas dimensões, temos $ab = 1056$. Além disso, como as medidas dos lados dos quadrados em que a folha foi cortada são números inteiros, segue que a e b devem ser números inteiros. Observamos, finalmente, que a e b devem ser maiores ou iguais a 18, pois um dos quadrados em que a folha foi cortada tem lado com esta medida. Como a e b são divisores de 1056, a fatoração em fatores primos $1056 = 2^5 \times 3 \times 11$ nos mostra que a e b são da forma $2^x \times 3^y \times 11^z$, onde x, y e z são inteiros tais que $0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$. Lembrando que $ab = 1056$ e que a e b são maiores que 18, obtemos as seguintes possibilidades:

a	b
$2 \times 11 = 22$	$2^4 \times 3 = 48$
$2^3 \times 3 = 24$	$2^2 \times 11 = 44$
$2^5 = 32$	$3 \times 11 = 33$

Temos agora que decidir quais destas possibilidades podem ocorrer como medidas da folha. Como o maior quadrado tem lado 18, que é menor que 22, 24 e 32, vemos que nenhum quadrado pode encostar nos dois lados de comprimento b da folha. Isto quer dizer que b pode ser expresso de duas maneiras como uma soma, na qual as parcelas são medidas dos lados dos quadrados, sendo que:

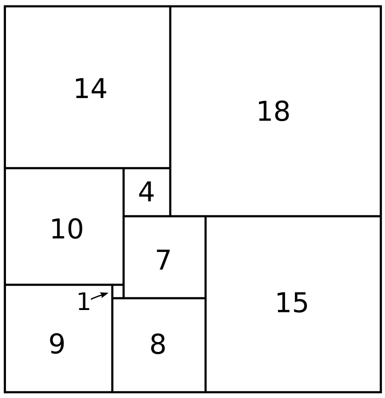
• não há parcelas repetidas em nenhuma das duas expressões e

• não há parcelas comuns às duas expressões.

Este argumento mostra que $2b \leq 1 + 4 + 7 + 8 + 9 + 10 + 14 + 15 + 18$ ou seja, $2b \leq 86$. Logo $b \leq 43$ e a única possibilidade é $b = 33$. Segue que as dimensões da folha eram $a = 32$ e $b = 33$.

Existem outras maneiras de eliminar os pares $(22, 48)$ e $(24, 44)$, usando o argumento acima e mostrando, por exemplo, que não existem duas maneiras de escrever 22 e 24 como soma dos lados dos quadrados de duas maneiras com parcelas distintas e sem parcelas comuns. Esta solução depende do fato de que, em qualquer decomposição de um retângulo em quadrados, os lados dos quadrados são necessariamente paralelos a um dos lados do retângulo. Um argumento intuitivo para demonstrar este fato consiste em selecionar um vértice do retângulo e observar que o quadrado ao qual este vértice pertence tem seus lados apoiados sobre os lados do retângulo. Qualquer quadrado que toca este primeiro quadrado (mesmo que em apenas um vértice) tem seus lados necessariamente paralelos aos lados do retângulo, pois, caso contrário, teríamos ângulos diferentes de 90° ou 180° na decomposição, e estes ângulos não podem ser preenchidos com quadrados.

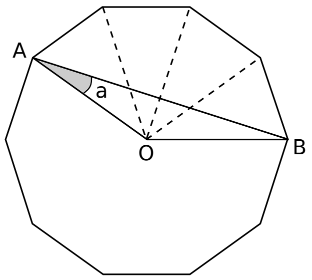
c) A única possibilidade (a menos de rotações e simetrias) é mostrada a seguir:



$\boxed{35}$ ***Decágono*** – *Solução*

ALTERNATIVA B

O triângulo AOB é isósceles pois os lados OA e OB são iguais. Logo, os ângulos $O\hat{A}B$ e $O\hat{B}A$ também são iguais, ou seja, ambos têm medida a. Notamos agora que o ângulo central $A\hat{O}B$ mede $\frac{4}{10} \times 360° = 144°$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180°, segue que $2a + 144° = 180°$. Logo $a = \frac{180°-144°}{2} = \frac{36°}{2} = 18°$.



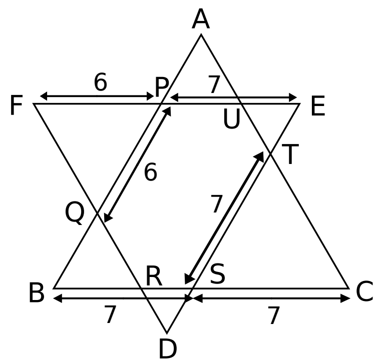
$\boxed{36}$ ***Estrela*** – *Solução*

a) Como BC e EF são paralelos, os ângulos EUT e ACB são alternos internos, donde $E\hat{U}T = A\hat{C}B = 60°$.
b) Pelo item *a)* podemos concluir que todos os triângulos da figura são equiláteros. Desse modo, temos $QP = FP, UT = UE, TS = CS$ e $RQ = RB$. Logo, o perímetro de $PQRSTU$ é

$$QP + PU + UT + TS + SR + RQ = (FP + PU + UE) + (CS + SR + RB)$$

$$= FE + CB = 13\text{cm} + 14\text{cm} = 27\text{cm}$$

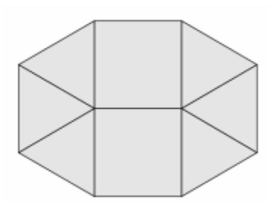
c) De $PQ = 6$cm segue que $FP = 6$cm, pois o triângulo QFP é equilátero, e concluímos que $PE = FE - EP = 13\text{cm} - 6\text{cm} = 7\text{cm}$. Como BC é paralelo a EF e AB é paralelo a DE, o quadrilátero $PESB$ é um paralelogramo, donde $BS = PE = 7$cm. Finalmente, temos $SC = BC - BS = 14\text{cm} - 7\text{cm} = 7\text{cm}$; logo $ST = SC = 7$cm, pois o triângulo TCS é equilátero.



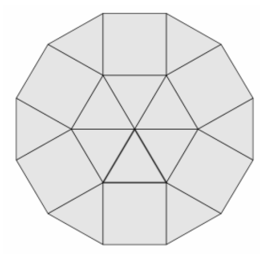
Uma solução análoga pode ser dada a partir do paralelogramo $QDTA$.

$\boxed{37}$ ***Polígonos convexos elegantes*** – *Solução*

a) Um exemplo de polígono elegante com oito lados aparece abaixo.

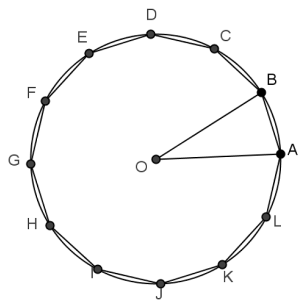


b) Como um polígono elegante é convexo e é formado colocando lado a lado quadrados e triângulos equiláteros, seus ângulos são somas de parcelas iguais a $60°$ ou $90°$ que não ultrapassem $180°$. Os valores possíveis são então $60°$, $90°$, $120° = 60° + 60°$ e $150° = 60° + 90°$.
c) Sabemos que a soma dos ângulos internos de um polígono com n lados é $(n-2) \times 180°$. Por outro lado, vimos no item *b)* que o maior valor possível do ângulo interno de um polígono elegante é $150°$; logo, a soma dos ângulos internos de um polígono elegante de n lados é no máximo $n \times 150°$. Temos então $180(n-2) \leq 150n$, e segue que $30n \leq 360$, ou seja, $n \leq 12$.
d) A figura abaixo mostra um polígono elegante de 12 lados.



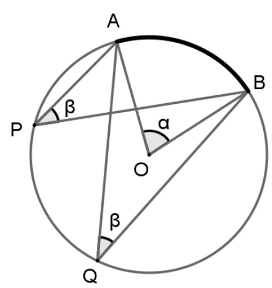
$\boxed{38}$ ***O polígono*** *ABCDEFGHIJKL – Solução*

a) 1ª *solução:* Como a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $(n-2) \times 180°$, a soma dos ângulos internos do dodecágono é $(12-2) \times 180° = 1800°$. Logo, cada um de seus ângulos internos mede $\frac{1800°}{12} = 150°$.
2ª *solução:* Outra solução usa a circunferência de centro O circunscrito ao polígono. O ângulo $A\hat{O}B$ mede $\frac{360°}{12} = 30°$. O triângulo OAB é isósceles, pois OA e OB são iguais, como raios da circunferência. Logo, $O\hat{A}B = O\hat{B}A = \frac{180°-30°}{2} = 75°$. Pela simetria da figura, temos também $O\hat{A}L = 75°$, e então $B\hat{A}L = 2 \times 75° = 150°$.

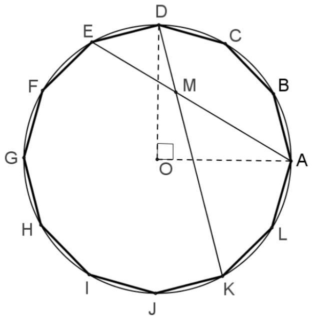


Antes de prosseguir, lembramos um resultado básico de geometria elementar. Dado uma circunferência de centro O e um arco $\widehat{AB}$ nesta circunferência (marcado em traço mais forte na figura abaixo), temos o *ângulo central* $A\hat{O}B$ associado a este arco. Seja P um ponto qualquer na circunferência que não pertence a $\widehat{AB}$. Então a medida do ângulo inscrito $A\hat{P}B$ é a metade da medida do ângulo $O\hat{A}B$, independentemente da posição de P. A figura abaixo ilustra esta situação; nela temos:

$$\beta = A\hat{P}B = A\hat{Q}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B = \frac{1}{2}\alpha$$



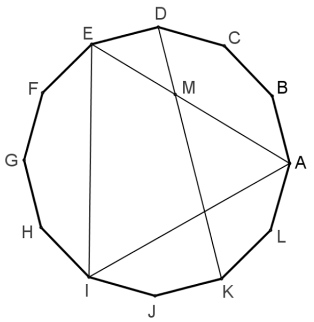
b) 1ª *solução*: Consideremos outra vez a circunferência de centro O circunscrita ao polígono. Como E e K são diametralmente opostos, o ângulo $E\hat{D}K$ está inscrito na semicircunferência e segue que $E\hat{D}K = 90°$. Como o ângulo central correspondente a um lado do dodecágono regular é $\frac{180°}{12} = 30°$, o ângulo central $A\hat{O}D$ mede 90°, e segue que $A\hat{E}D = 45°$. Finalmente, o triângulo EDM tem ângulos $E\hat{D}M = 90°$ e $M\hat{E}D = 45°$; como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, segue que $D\hat{M}E = 180° - (90° + 45°) = 45°$.



2ª *solução*: O triângulo IAE é equilátero, pois seus vértices estão igualmente espaçados no polígono regular; em particular $A\hat{E}I = 60°$. Além disso, os ângulos $A\hat{E}D$ e $F\hat{E}I$ são iguais (pois correspondem aos arcos iguais $A\hat{C}D$ e $F\hat{H}I$), donde

$$150° = F\hat{E}D = F\hat{E}I + I\hat{E}A + A\hat{E}D = 60° + 2 \times A\hat{E}D$$

e obtemos $A\hat{E}D = 45°$. Agora basta argumentar como na primeira solução para obter $E\hat{D}M = 90°$ e $D\hat{M}E = 45°$.



3ª *solução*: A medida do ângulo $A\hat{E}D = E\hat{A}B$ (por simetria) também pode ser obtida através da soma dos ângulos do polígono de cinco lados $AEDCB$; temos

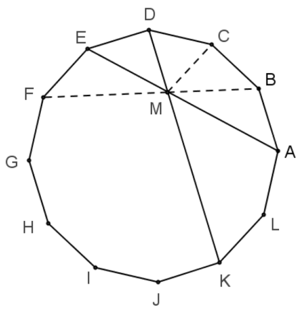
$$A\hat{E}D + E\hat{A}B + 3 \times 150° = (5 - 2) \times 180° = 540°$$

e então $2 \times A\hat{E}D = 90°$, donde $A\hat{E}D = 45°$. A partir daí a solução procede como nas anteriores.

c) Como o triângulo EDM tem dois ângulos de 45°, ele é isósceles; logo $MD = DE$, ou seja, MD tem a mesma medida que os lados do polígono. Como $E\hat{D}C = 150°$ e $E\hat{D}M = 90°$, temos $M\hat{D}C = 60°$; e como $MD = DC$ segue que o triângulo MDC é equilátero. Em particular, temos $M\hat{C}D = 60°$ e segue que $M\hat{C}B = 90°$. Finalmente, como $MC = CB$, o triângulo MCB é isósceles e então $M\hat{B}C = B\hat{M}C = \frac{90°}{2} = 45°$.

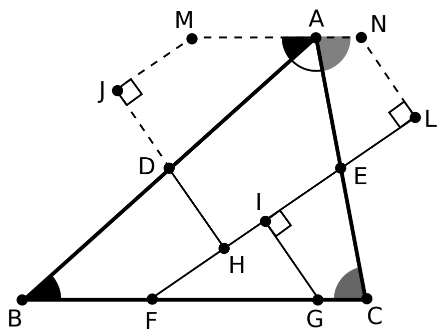
d) 1ª *solução:* Temos $F\hat{B}C = 45° = M\hat{B}C$. Logo os segmentos FB e MB fazem o mesmo ângulo com o segmento BC, e segue que os pontos B, M e F estão alinhados.

2ª *solução:* No quadrilátero $BCDM$ temos $M\hat{B}C = 45°$, $B\hat{C}M = 150°$ e $M\hat{D}C = 60°$; como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, segue que $B\hat{M}D = 360° - (45° + 150° + 60°) = 105°$. Analogamente, no quadrilátero $MDEF$ temos $F\hat{M}D = 360° - (90° + 150° + 45°) = 75°$. Logo $F\hat{M}B = F\hat{M}D + D\hat{M}B = 75° + 105° = 180°$, e segue que os pontos B, M e F estão alinhados.



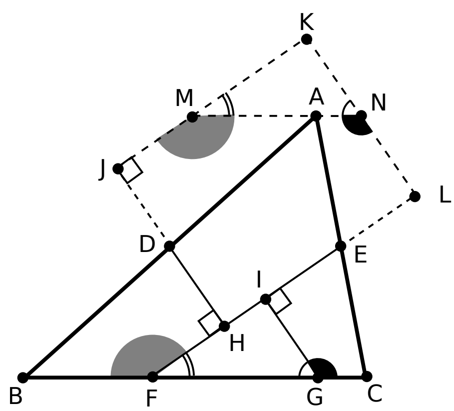
$\boxed{39}$ ***Um triângulo em quatro partes*** – *Solução*

a) 1ª *solução*: Na figura a seguir marcamos, em preto, o ângulo em B do triângulo ABC e o ângulo correspondente no polígono $AMJD$; em cinza, marcamos o ângulo em C do triângulo ABC e o ângulo correspondente do polígono $AELN$. Podemos observar na parte superior da figura que o ângulo MAN é a soma desses dois ângulos com o ângulo em A do triângulo ABC; como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, segue que $MAN = 180°$. Logo, M, A e N estão alinhados.

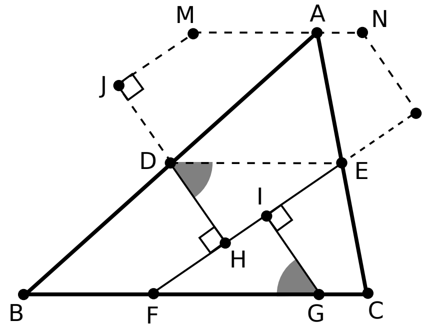


2ª *solução*: Observamos primeiro que AM é paralelo a BF, pois ele é obtido de BF por meio de uma rotação de 180°; do mesmo modo, AN é paralelo a CG. Como BF e CG estão na mesma reta suporte e AM e AN têm o ponto A em comum, segue que os pontos M, A e N estão alinhados.

b) Na figura abaixo os ângulos marcados em cinza são congruentes, assim como os ângulos marcados em preto. Segue que os ângulos marcados em branco com traço duplo também são congruentes, pois são ambos suplementos do ângulo vermelho; do mesmo modo, os ângulos em branco com traço simples são também congruentes. Notamos agora que $MN = MA + AN = BF + CG = BC - FG = 2FG = FG = FG$. Segue, pelo critério *ângulo-lado-ângulo*, que os triângulos FGI e MNK são congruentes.



c) Na figura abaixo traçamos a base média DE do triângulo ABC. O teorema da base média nos diz que DE é paralelo a BC e que $DE = \frac{1}{2}BC = FG$. Segue que os triângulos FGI e EHD são congruentes, pois são retângulos, tem os ângulos cinzas congruentes (pois são agudos de lados paralelos) e hipotenusas congruentes. Em particular, temos $FI = EH$, donde $FH = FI - HI = EH - HI = EI$. Logo $LH = LE + EI + IH = FH + HI + IE = EF$.



d) A área do quadrado $HJKL$ é igual à área do triângulo ABC, que é 9; logo o lado do quadrado mede 3. Em particular, $LH = 3$ e segue do item anterior que $EF = 3$.

Soluções do Nível 3

Assunto

Aritmética

1 ***O contrário*** – *Solução*

ALTERNATIVA E

Seja n um número de dois algarismos, sendo a seu algarismo das dezenas e b o das unidades; então $n = 10a + b$. Se a e b são ambos diferentes de zero, o contrário de n é $10b + a$. Desse modo, a soma de n e de seu contrário é:

$$(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b)$$

e, portanto, a soma de um número com seu contrário é sempre um múltiplo de 11. Basta agora notar que todas as opções são múltiplos de 11, com a exceção de 181.

Pode-se também verificar que as outras opções são todas somas de um número com seu contrário; de fato, $44 = 13 + 31$, $99 = 18 + 81$, $121 = 29 + 92$ e $165 = 69 + 96$.

Para explicar como foram encontradas essas expressões, tomemos, como exemplo, $165 = 11 \times 15$. O raciocínio inicial mostra que se escolhermos algarismos não nulos a e b de modo que sua soma seja 15, então 165 será a soma do número $10a + b$ e de seu contrário. Por exemplo, podemos tomar $a = 6$ e $b = 9$; para essa escolha obtemos a expressão $165 = 69 + 96$. Outras escolhas são possíveis; por exemplo, $a = 8$ e $b = 7$ leva a $165 = 87 + 78$. O mesmo raciocínio serve para as outras alternativas.

2 ***Trocando de ordem os algarismos*** – *Solução*

ALTERNATIVA E

A multiplicação pode ser esquematizada como

$$\begin{array}{rccccc} & \mathsf{a} & \mathsf{b} & \mathsf{c} & \mathsf{d} & \mathsf{e} \\ \times & & & & & 4 \\ \hline & \mathsf{e} & \mathsf{d} & \mathsf{c} & \mathsf{b} & \mathsf{a} \end{array}$$

A solução é baseada nas seguintes observações:

- O algarismo a só pode ser 1 ou 2, pois, se fosse $a \geq 3$, então $4a$ seria um número de 2 algarismos e portanto o número $edcba$ teria 6 algarismos. Mas a não pode ser 1 pois $edcba$, sendo múltiplo de 4, é par, donde seu último algarismo é par. Logo $a = 2$.

$$\begin{array}{rccccc} & 2 & \mathsf{b} & \mathsf{c} & \mathsf{d} & \mathsf{e} \\ \times & & & & & 4 \\ \hline & \mathsf{e} & \mathsf{d} & \mathsf{c} & \mathsf{b} & 2 \end{array}$$

- O algarismo e só pode ser 8 ou 9, pois $2 \times 4 = 8$ e $edcba$ tem apenas 5 algarismos. No entanto, e não pode ser 9 porque 9×4 termina em 6 e não em 2. Logo $e = 8$.

$$\begin{array}{r} 2\ b\ c\ d\ 8 \\ \times \qquad\quad 4 \\ \hline 8\ d\ c\ b\ 2 \end{array}$$

- O algarismo b só pode ser 1 ou 2, pois $4 \times b$ tem que ser um número de apenas 1 algarismo. Como $a = 2$ e os cinco algarismos de $abcde$ são distintos, só podemos ter $b = 1$.

$$\begin{array}{r} 2\ 1\ c\ d\ 8 \\ \times \qquad\quad 4 \\ \hline 8\ d\ c\ 1\ 2 \end{array}$$

- O algarismo d só pode ser 2 ou 7, pois $4 \times d + 3$ é um número terminado em 1. Como $a = 2$ e os cinco algarismos de $abcde$ são distintos só podemos ter $d = 7$.

$$\begin{array}{r} 2\ 1\ c\ 7\ 8 \\ \times \qquad\quad 4 \\ \hline 8\ 7\ c\ 1\ 2 \end{array}$$

- O algarismo c só pode ser 9, pois $4c + 3$ é um número terminado em c.

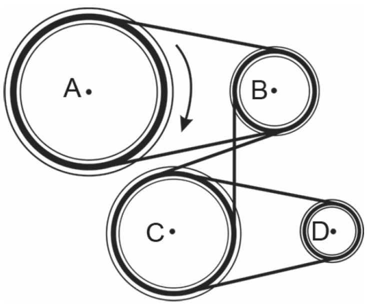
$$\begin{array}{r} 2\ 1\ 9\ 7\ 8 \\ \times \qquad\quad 4 \\ \hline 8\ 7\ 9\ 1\ 2 \end{array}$$

Logo, a resposta é $8 + 7 + 9 + 1 + 2 = 27$.

3 *Os discos dão voltas* – *Solução*

ALTERNATIVA D

A figura mostra que os discos A e B giram no mesmo sentido, os discos B e C em sentidos opostos e os discos C e D no mesmo sentido.



Assim, D gira no sentido anti-horário. Lembramos que o perímetro p de um círculo de raio r é dado por $p = 2\pi r$. Como o raio do disco A é quatro vezes o de D, segue que o perímetro de A também é quatro vezes o perímetro de D. Logo D dá quatro voltas para cada volta de A.

Observação: usamos, no argumento acima, o fato de que os raios dos discos B e C são irrelevantes para a resolução desta questão; é interessante mostrar isto rigorosamente. Denotando por a, b, c e d os raios de A, B, C e D e por n_a, n_b, n_c e n_d os números de voltas dados pelos discos A, B, C e D, respectivamente, então:

$$n_a 2\pi a = n_b 2\pi b, \qquad n_b 2\pi b = n_c 2\pi, \qquad n_c 2\pi c = n_d 2\pi d,$$

o que implica que:

$$n_a 2\pi a = n_d 2\pi d,$$

logo,

$$\frac{n_d}{n_a} = \frac{a}{d}$$

Assim, se $n_a = 1$ então, usando que $a = 8$ e $b = 2$, obtemos que $n_d = \frac{8}{2} = 4$.

4 *Uma festa matemática* – *Solução*

a) Após a venda do ingresso de número 1, foram vendidos $100-1 = 99$ ingressos. Logo, quem comprou o primeiro ingresso receberá $99 \times 0,01 = 0,99$ reais. Do mesmo modo, após a venda do ingresso de número 70 foram vendidos $100 - 70 = 30$ ingressos, logo quem comprou esse ingresso receberá $30 \times 0,01 = 0,30$ reais.
b) 1ª *solução*: O valor da venda de 100 ingressos é R\$600,00. O Grêmio terá que devolver R\$0,01 para quem comprou o 99° ingresso, 2 centavos para o quem comprou o 98° ingresso e assim por diante, até R\$0,99 para quem comprou o 1° ingresso. No total, o Grêmio terá que devolver, em reais,

$$\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \cdots + \frac{99}{100} = \frac{1+2+3+\cdots+99}{100} = \frac{\frac{99\times100}{2}}{100} = 49,50$$

e seu lucro total, será de R\$600,00 − R\$49,50 = R\$550,50.
Observação: Notamos que essa solução é baseada na ideia usada para demonstrar a conhecida fórmula para a soma dos termos consecutivos de uma progressão aritmética.
2ª *solução*: Com os ingressos de número 1 e 100, o Grêmio tem um lucro, em reais, de

$$(6 - 99 \times 0,01) + (6 - 0 \times 0,01) = 11,01.$$

Com os ingressos de números 2 e 99, o lucro será também de

$$(6 - 98 \times 0,01) + (6 - 1 \times 0,01) = 11,01.$$

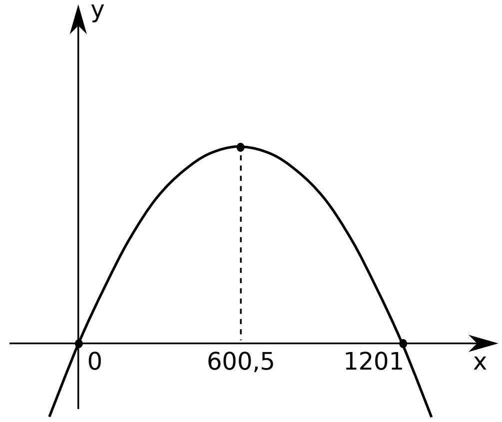
Aplicando o mesmo argumento também para os pares de ingressos de números 3 e 98, 4 e 97, ..., 50 e 51, obtemos um total de 50 pares, cada um dando ao Grêmio um lucro de R\$11,01. Logo, o lucro do Grêmio será de $50 \times$ R\$11,01 = R\$550,50.
c) 1ª *solução*: Com a venda de x ingressos o Grêmio arrecadará $6x$ reais e terá que devolver, em reais,

$$\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \cdots + \frac{x-1}{100} = \frac{1+2+3+\cdots+(x-1)}{100} = \frac{\frac{(x-1)x}{2}}{100} = \frac{x^2-x}{200}.$$

Assim, denotando por $L(x)$ o lucro do Grêmio com a venda de x ingressos, temos que:

$$L(x) = 6x - \frac{x^2-x}{200} = \frac{1201x - x^2}{200} = \frac{x(1201-x)}{200}.$$

O gráfico de $L(x)$ é uma parábola e o valor máximo de $L(x)$ ocorre quando $x = 600,5$. Para ver isto não é necessário usar a fórmula para os pontos de máximo ou mínimo, basta observar a simetria do gráfico dessa parábola, desenhado abaixo:



Como a quantidade de ingressos é um número inteiro, o lucro máximo do Grêmio será atingido quando forem vendidos 600 ou 601 ingressos. Como esses pontos são simétricos com relação a $600,5$ o lucro será o mesmo em qualquer caso. Esse lucro é $L(600) = \frac{600(1201-600)}{200} = 1803$ reais.

2 ª *solução*: Podemos pensar que o comprador do ingresso de número n paga ao Grêmio R\$6, 00, e que dessa quantia o Grêmio vai retirar R\$0, 01 para cada um dos compradores anteriores. Logo, denotando por $f(n)$ o lucro (em reais) do Grêmio com o ingresso de número n, temos que:

$$f(n) = 6 - (n-1) \times 0,01 = 6,01 - 0,01 \times n$$

Segue que o lucro do Grêmio por ingresso diminui de R\$0, 01 a cada ingresso vendido (ou seja, a função f é decrescente). Como o lucro do Grêmio com o ingresso de número 601 é $f(601) = 6-(601-1)\times 0,01 = 0$ reais e a função f é decrescente, vemos que o lucro do Grêmio é positivo para todos os ingressos de número menor que 601, e negativo para todos os ingressos de número maior que 601. Logo, o lucro total do Grêmio será o maior possível quando forem vendidos 600 (ou 601) ingressos, pois somente depois da venda do ingresso de número 601, o Grêmio passaria a ter prejuízos (isto é, lucro negativo) com a venda de cada ingresso adicional.

3ª *solução*: O comprador do último ingresso não recebe nada de volta, ou seja, o Grêmio vai lucrar R\$6, 00 com seu ingresso; o comprador do penúltimo ingresso recebe R\$0, 01 de volta, logo o Grêmio vai lucrar R\$5, 99 com seu ingresso. Desse modo, o lucro total do Grêmio (em reais) com a venda dos ingressos é

$$6,00 + 5,99 + 5,98 + \cdots + (\text{lucro com o ingresso de número 1})$$

e segue que esse lucro total aumenta com a adição de novos compradores contando que o lucro com o ingresso de número 1 seja positivo.

O lucro com o ingresso número 1 é $6 - (x-1) \times 0,01$ reais, onde x é o número de ingressos vendidos. A equação $6 - (x-1) \times 0,01 = 0$ tem raiz $x = 601$, logo o lucro com o ingresso de número 1 é positivo se $x < 601$. Desse modo, o lucro máximo será atingido quando o Grêmio vender 600 ingressos (ou 601, visto que o ingresso de número 601 dá lucro de 0 reais).

5 ***A maior soma*** – *Solução*

ALTERNATIVA B

Para qualquer disposição dos algarismos, a soma dos vizinhos "juntados" terá sempre nove parcelas, sem repetição de algarismos nas unidades ou nas dezenas. O único algarismo que não aparece nas unidades é o primeiro e o único que não aparece nas dezenas é o último. Para que a soma seja máxima, o algarismo 0 não deve comparecer nas dezenas e, portanto, deve ser o último; além disso, o menor dos algarismos $1, 2, \ldots, 9$ não deve aparecer nas unidades e, portanto, o 1 deve ser o primeiro. Concluímos que a soma é máxima para qualquer escolha onde 1 é o primeiro algarismo e 0 o último. Nesse caso, a soma das unidades será $0+2+3+4+5+6+7+8+9 = 44$ e a soma das dezenas será $10+20+30+40+50+60+70+80+90 = 450$; a soma máxima é então $450+44 = 494$.

Algebricamente, podemos escrever esse argumento como segue. Seja $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ uma disposição qualquer dos algarismos de 0 até 9 na primeira linha. Na segunda linha da tabela do enunciado dessa questão, aparecerão os números $a_1a_2, a_2a_3, \ldots, a_9a_{10}$. Usando a representação decimal, a soma desses números pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} S &= a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_9a_{10} \\ &= (10a_1 + a_2) + (10a_2 + a_3) + \cdots + (10a_9 + a_{10}) \\ &= 10 \times (a_1 + a_2 + \cdots + a_9) + (a_2 + \cdots a_9 + a_{10}) - 10a_{10} - a_1 \\ &= 11 \times (a_1 + a_2 + \cdots + a_9 + a_{10}) - 10a_{10} - a_1 \\ &= 45 \times 11 - 10a_{10} - a_1 \\ &= 495 - 10a_{10} - a_1 \end{aligned}$$

Logo, o valor máximo de S é atingido quando $a_{10} = 0$ e $a_1 = 1$, e, nesse caso, vale $495 - 10 \times 0 - 1 = 494$.

6 *Correndo na medida certa* – *Solução*

a) Uma volta completa em torno de uma pista tem extensão 1km + 2km + 6km + 4km = 13km. Por isso, para percorrer 14km é preciso dar uma volta completa e percorrer mais 1km. A única forma de percorrer 1km respeitando-se o sentido da corrida é começando em A e terminando em B. Portanto a corrida deve começar em A, dar uma volta completa e terminar em B.
b) Como $100 = 7\times13+9$, uma corrida de 100km corresponde a dar 7 voltas completas na pista e percorrer mais 9km. A única forma de percorrer 9km respeitando-se o sentido da corrida é começando em A e terminando em D. Portanto a corrida deve começar em A, dar 7 voltas completas e terminar em D.
c) Como sugerido nos itens anteriores, a solução do problema está baseada na ideia de "*dar uma certa quantidade de voltas*" sem exceder o comprimento da corrida e depois localizar trechos convenientes para percorrer a "*distância restante*". Do ponto de vista matemático, esse procedimento corresponde a efetuar o algoritmo de divisão com divisor igual a 13, ou seja, a escrever

$$\begin{aligned}\text{dividendo (comprimento da corrida)} = 13 \text{ (divisor) } &\times \text{quociente (número de voltas)}\\ &+ \text{resto (distância restante)},\end{aligned}$$

sendo o resto um número natural menor do que 13. Logo o resto só pode ser um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12. Por inspeção direta podemos verificar como realizar corridas com qualquer extensão de 1km a 13km. Os resultados estão dispostos na seguinte tabela:

Extensão em km	**Ponto de partida**	**Ponto de chegada**
1	A	B
2	B	C
3	A	C
4	D	A
5	D	B
6	C	D
7	D	C
8	B	D
9	A	D
10	C	A
11	C	B
12	B	A
13	**Qualquer um**	**O mesmo da partida**

Vejamos agora que é possível realizar corridas com qualquer comprimento inteiro maior do que 13km. Para isso basta ver que temos duas possibilidades:

1. **Primeiro caso:** a extensão é um múltiplo de 13km.

   Nesse caso, basta escolhermos qualquer posto e então realizarmos uma corrida que começa e termina nesse posto dando o número de voltas completas que é o quociente entre a extensão da corrida e 13.

   Por exemplo, se a extensão da corrida é de $208\text{km} = 16 \times 13\text{km}$, basta dar 16 voltas completas na pista.

2. **Segundo caso:** a extensão não é um múltiplo de 13km.

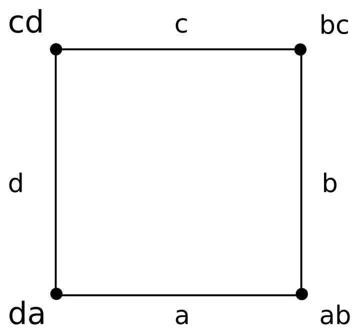
   Nesse caso, calculamos o quociente e o resto da divisão da extensão da corrida por 13. O resto será um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12. A tabela acima fornece os postos de partida e de chegada da corrida. O número de voltas será igual ao quociente.

   Por exemplo, se a extensão da corrida é $109\text{km} = (8 \times 13 + 5)\text{km}$, ela deve começar no posto D, dar 8 voltas completas, retornando então a D, e depois percorrer o trecho de D a B.

7 *Severina, Catarina e os números* – *Solução*

a) 1ª *solução:* Sejam a, b, c e d os números escritos nos lados do quadrado no sentido horário. Os números associados aos vértices são, portanto, ab, bc, cd e da, e sua soma é

$$ab + bc + cd + da = b(a + c) + d(a + c) = (a + c)(b + d) = 85 \times 60 = 5100$$



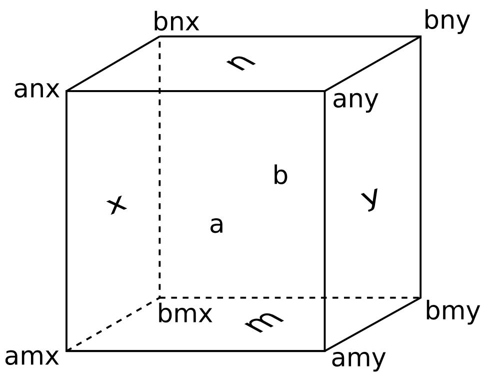
2ª *solução*: Sejam a e b dois lados adjacentes do quadrado e $60 - a$ e $85 - b$ os outros dois. Então, a soma dos produtos dos comprimentos de lados adjacentes é

$$ab + b(60 - a) + (60 - a)(85 - b) + (85 - b)a = 5100.$$

b) Sejam (a, b), (m, n) e (s, y) os pares de números escritos em faces opostas do cubo. Os números associados aos vértices são, portanto, amx, anx, amy, any, bmx, bnx, bmy e bny, e sua soma é

$$\begin{aligned}
105 &= amx + anx + amy + any + bmx + bnx + bmy + bny \\
&= a(mx + nx + my + ny) + b(mx + nx + my + ny) \\
&= (a + b)(mx + nx + my + ny) \\
&= (a + b)[(m + n)x + (m + n)y] \\
&= (a + b)(m + n)(x + y)
\end{aligned}$$

Como 105 se fatora em fatores primos como $105 = 3 \times 5 \times 7$ e os números $a + b, m + n$ e $x + y$ são inteiros maiores que 1, segue que $a + b, m + n$ e $x + y$ devem ser iguais a $3, 5$ e 7 (em alguma ordem). Logo $a + b + m + n + x + y = 3 + 5 + 7 = 15$.



Na figura os números a e b estão escritos, respectivamente, na frente e atrás do cubo, os números m e n embaixo e em cima e os números x e y à esquerda e à direita.

8 *Simpáticos números* – *Solução*

a) Lembrando que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, podemos simplificar a expressão $(3x + 1)^2 + (4x + 2)^2 - (5x + 2)^2$ como segue:

$$(3x + 1)^2 + (4x + 2)^2 - (5x + 2)^2 = 9x^2 + 6x + 1 + 16x^2 + 16x + 4 - 25x^2 - 20x - 4$$

$$= (9 + 16 - 25)x^2 + (6 + 16 - 20)x + (1 + 4 - 4) = 2x + 1.$$

b) Notando que:

$$(3x - m)^2 + (4x - n)^2 - (5x - 5)^2 = -(6m + 8n - 50)x + (m^2 + n^2 - 25)$$

devemos encontrar inteiros m e n tais que:

$$-(6m + 8n - 50)x + (m^2 + n^2 - 25) = 2x$$

para todos os valores de x.

Isso só é possível se $m^2 + n^2 - 25 = 0$ e $-(6m + 8n - 50) = 2$, simultaneamente. Isto é equivalente a, $m^2 + n^2 = 25$ e $3m + 4n = 24$.

As soluções para a equação $m^2 + n^2 = 25$ estão dispostas na tabela abaixo:

m	0	± 3	± 4	± 5
n	± 5	± 4	± 3	0

Uma verificação direta mostra que, dentre as escolhas contidas nessa tabela, apenas os valores $m = 4$ e $n = 3$ satisfazem a equação $3m + 4n = 24$.

c) Do enunciado temos $4^2 + 7^2 - 8^2 = 1$. Multiplicando esta expressão por 2^2, obtemos $2^2 \cdot 4^2 + 2^2 \cdot 7^2 - 2^2 \cdot 8^2 = 4$, ou seja, $8^2 + 14^2 - 16^2 = 4$, o que mostra que 4 é simpático. Outras expressões são $4 = 5^2 + 10^2 - 11^2 = 6^2 + 7^2 - 9^2 = 7^2 + 22^2 - 23^2$ e, mais geralmente, $4 = (3k + 4)^2 + (4k + 2)^2 - (5k + 4)^2$ para $k > 2$.

d) Vamos dividir o argumento para números ímpares e pares.

• *Números ímpares*:

Seja $n = 2k + 1$ um número ímpar maior que 1, ou seja, com $k > 0$. O item *a)* mostra que fazendo $a = 3k + 1$, $b = 4k + 2$ e $c = 5k + 2$ temos $n = a^2 + b^2 - c^2$. Notamos que $a < b < c$ segue de $k > 0$. Como já sabemos que 1 é simpático, segue que todo número ímpar positivo é simpático.

• *Números pares*:

Seja $n = 2k$ um número par maior que 4, ou seja, com $k > 2$. Aqui o item *b)* mostra que fazendo $a = 3k - 4$, $b = 4k - 3$ e $c = 5k - 5$ temos $n = a^2 + b^2 - c^2$. Notamos que $a < b < c$; de fato, $a < b$ vem do fato de k ser positivo e $b < c$ decorre de $k > 2$. Como já sabemos que 2 e 4 são simpáticos, segue que todo número par positivo é simpático. Concluímos, então, que todos os inteiros positivos são simpáticos.

Curiosidade: A fórmula geral que apresentamos abaixo (entre outras) mostra que todo número positivo n é simpático:

$$n = (n + 3)^2 + \left(\frac{n^2 + 5n + 8}{2}\right)^2 - \left(\frac{n^2 + 5n + 8}{2} + 1\right)^2$$

9 ***Números em um quadrado*** – *Solução*

a) Somar as somas das linhas é o mesmo que somar todos os números no quadrado; assim, a soma das somas das linhas é $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$. O mesmo se pode dizer da soma das somas das colunas, e concluímos que a soma de todas as somas é $2 \times 45 = 90$. Logo, a soma que está faltando é $90 - (9 + 13 + 14 + 17 + 18) = 90 - 71 = 19$.

b) 1ª *solução:* Se todas as somas fossem pares, as somas das três linhas seriam pares e sua soma seria par. Mas isso é impossível pois, como vimos acima, a soma das somas das três linhas é 45, que é um número ímpar.

2ª *solução:* Ao distribuir os números no quadrado, uma linha pode ter no máximo três números ímpares. Por outro lado, há cinco números ímpares de 1 a 9, a saber, 1, 3, 5, 7 e 9. As maneiras de escrever 5 como soma de inteiros menores ou iguais a 3 são $5 = 2 + 3 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2$. Como em qualquer dessas somas aparecem as parcelas 1 ou 3, concluímos que pelo menos uma linha de um quadrado preenchido conterá um ou três números ímpares, sendo os restantes pares. Em qualquer caso, obtemos uma linha cuja soma é ímpar.

c) Vamos estender um pouco essa solução para determinar não apenas um, mas todos os quadrados que têm as somas dadas. Antes de começar, notamos que trocar a ordem de duas linhas (ou de duas colunas) não altera as somas de um quadrado. Os seis números do resultado final devem ser separados em dois grupos de três números cada, cujas somas sejam iguais a 45. No primeiro grupo, cada número é a soma de uma linha e, no outro, a soma de cada coluna. De acordo com o item anterior, cada grupo deve conter um número ímpar; logo 7 e 13 devem ficar em conjuntos diferentes. Segue imediatamente que a única possibilidade é separar as somas nos grupos 7, 16, 22 e 13, 14, 18; podemos então supor que as somas das linhas são 7, 16, 22 e as somas das colunas são 13, 14, 18.

Como a única maneira de obter a soma 7 é $1 + 2 + 4 = 7$, podemos começar a preencher o quadrado como abaixo:

1	2	4	7

Suponhamos que a soma da segunda linha seja 22; as únicas possibilidades para a soma 22 são $5 + 8 + 9 = 22$ e $6 + 7 + 9 = 22$, que vamos considerar separadamente.

Suponhamos primeiro que na segunda linha aparecem os números 5, 8 e 9. Aqui o 5 não pode aparecer na coluna do 4, pois $4 + 5 = 9$ e para obter uma das somas 13, 14 ou 18 nessa coluna o terceiro número deveria ser 4, 5 ou 9, respectivamente, o que não pode acontecer pois o 4 já foi usado enquanto que 5 e 9 aparecem na segunda linha; argumento análogo mostra que o 9 também não pode aparecer na coluna do 4, ou seja, o 8 aparece abaixo do 4. Como $4 + 8 = 12$ e tanto o 1 como o 2 já foram usados, a soma dessa coluna não pode ser 13 ou 14; logo a soma é 18.

1	2	4	7
		8	22
		6	16
		18	

Podemos agora completar o quadrado das seguintes maneiras:

1	2	4	7
5	9	8	22
7	3	6	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	5	8	22
3	7	6	16
13	14	18	

Deixamos para o(a) leitor(a) mostrar que, quando na segunda linha aparecem os números 6, 7 e 9, as possibilidades são:

1	2	4	7
7	9	6	22
5	3	8	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	6	7	22
8	5	3	16
18	13	14	

1	2	4	7
9	7	6	22
3	5	8	16
13	14	18	

1	2	4	7
9	7	6	22
8	5	3	16
18	13	14	

Desse modo, existem apenas seis quadrados com as somas do enunciado, a menos de troca de posição de linhas, troca de posição de colunas e troca das linhas pelas colunas.

10 *Correria* – *Solução*

ALTERNATIVA A

Seja x o comprimento em metros da pista. A distância entre Bernardo e Carlos era de 10 metros quando Alberto cruzou a linha de chegada, e era de 16 metros quando Bernardo cruzou a linha de chegada. Vemos assim que, durante o intervalo de tempo no qual Alberto e Bernardo completaram a corrida, Bernardo correu 36 metros enquanto Carlos correu 30; logo

$$\frac{\text{velocidade de Carlos}}{\text{velocidade de Bernardo}} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}.$$

Como Bernardo cruzou a linha de chegada 16 metros à frente de Carlos, temos a equação $\frac{5}{6} = \frac{x-16}{x}$, cuja solução é $x = 96$.

11 ***Resolvendo o problema da calculadora*** – *Solução*

a) A seguir vemos o que acontece quando começamos com o número 3 no visor e apertamos as teclas na ordem *BBAB*:

$$3 \xrightarrow{\textbf{B}} 3+3=6 \xrightarrow{\textbf{B}} 6+3=9 \xrightarrow{\textbf{A}} 9^2=81 \xrightarrow{\textbf{B}} 81+3=84$$

Logo, o número que vai aparecer no visor é 84.
b) Uma maneira é apertar as teclas na ordem *BBABB*, como vemos a seguir:

$$1 \xrightarrow{\textbf{B}} 4 \xrightarrow{\textbf{B}} 7 \xrightarrow{\textbf{A}} 49 \xrightarrow{\textbf{B}} 52 \xrightarrow{\textbf{B}} 55$$

Outra maneira é apertar a tecla B dezoito vezes seguidas; ainda outra é BA seguida de treze B's.
c) 1ª *solução*: Se o número que aparece no visor após apertar as teclas A e B algumas vezes não é um quadrado perfeito, a última tecla apertada foi necessariamente a tecla B. Desse modo, se o 54 aparece no visor, podemos reconstruir parcialmente a sequência das teclas apertadas até chegar a 54:

$$36 \xrightarrow{\textbf{B}} 39 \xrightarrow{\textbf{B}} 42 \xrightarrow{\textbf{B}} 45 \xrightarrow{\textbf{B}} 48 \xrightarrow{\textbf{B}} 51 \xrightarrow{\textbf{B}} 54$$

Chegamos a 36, que é um quadrado perfeito. Aqui temos as possibilidades

$$0 \xrightarrow{\textbf{B}} 3 \xrightarrow{\textbf{B}} 6 \xrightarrow{\textbf{A}} 36$$

e

$$9 \xrightarrow{\textbf{B}} 12 \xrightarrow{\textbf{B}} 15 \xrightarrow{\textbf{B}} 18 \xrightarrow{\textbf{B}} 21 \xrightarrow{\textbf{B}} 24 \xrightarrow{\textbf{B}} 27 \xrightarrow{\textbf{B}} 30 \xrightarrow{\textbf{B}} 33 \xrightarrow{\textbf{B}} 36$$

Como 9 é um quadrado perfeito, essa última sequência nos dá também duas possibilidades, a saber,

$$0 \xrightarrow{\textbf{B}} 3 \xrightarrow{\textbf{B}} 6 \xrightarrow{\textbf{B}} 9$$

e

$$0 \xrightarrow{\textbf{B}} 3 \xrightarrow{\textbf{A}} 9$$

Vemos assim que é possível chegar a 54 a partir de 0 e 3, mas não a partir de 2.
2ª *solução*: Se um número inteiro x não é múltiplo de 3 então:

- $x+3$ não é múltiplo de 3.

De fato, se $x+3$ fosse múltiplo de 3, poderíamos escrever $x+3=3y$ para algum inteiro y e então $x=3y-3=3(y-1)$ seria múltiplo de 3, absurdo.

- x^2 não é múltiplo de 3.

De fato, os fatores primos de x e x^2 são os mesmos; assim, se 3 não é fator primo de x então também não será fator primo de x^2.

Assim, começando com um número que não é múltiplo de 3 no visor, não é possível chegar a um múltiplo de 3 apertando as teclas A e B. Como 2 não é múltiplo de 3 e $54 = 3 \times 18$ é múltiplo de 3, concluímos que não se pode chegar a 54 a partir do 2.
3ª *solução*: Vamos tentar chegar a 54 a partir do 2. Como 54 não é múltiplo de 3, vemos que não é possível usar apenas a tecla B, ou seja, a tecla A deve ser usada pelo menos uma vez. Por outro lado, a tecla A só pode ser usada em números menores ou iguais a 7. Os números obtidos a partir do 2 que são menores ou iguais a 7 são $2, 4=2^2, 5=2+3$ e $7=2^2+3$; seus quadrados são $4, 16, 25$ e 49. A partir de $16, 25$ e 49 não podemos usar a tecla A outra vez, e como nenhum desses números difere de 54 por um múltiplo de 3, vemos que a partir deles não é possível chegar a 54; o mesmo argumento se aplica ao 4 e a seu quadrado 16. Logo, não é possível obter 54 a partir do 2.
4ª *solução*: Notamos primeiro que começando do 2 e apertando apenas duas teclas quaisquer, o maior resultado possível é 24 (sequência BA), ou seja, não se chega ao 54. Vamos agora ver o que acontece quando o 2 está no visor e apertamos três teclas.

Sequência de teclas	Resultado
AAA	256
AAB	19
ABA	49
BAA	125
ABB	10
BAB	28
BBA	64
BBB	11

Podemos eliminar as sequências AAA, BAA e BBA de nossas considerações, pois elas levam a resultados maiores que 54. Para chegar ao 54 a partir dos resultados das outras sequências, não podemos usar a tecla A, pois isso nos daria resultados maiores que 54. Por outro lado, a diferença entre 54 e qualquer dos números $19, 49, 10, 28$ e 11 não é um múltiplo de 3, ou seja, também não podemos chegar ao 54 a partir desses números apenas com a tecla B. Logo, não é possível chegar ao 54 a partir do 2.

12 *Cartas marcadas* – *Solução*

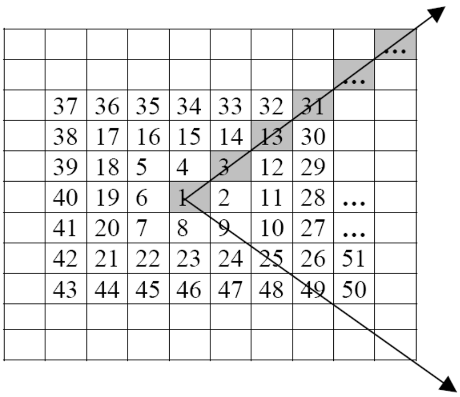
ALTERNATIVA E

O leitor pode verificar que, se Estefânia embaralhar as cartas 6 vezes, elas voltarão à posição inicial. Como $74 = 12 \times 6 + 2$, embaralhar as cartas 74 vezes tem o mesmo efeito que fazê-lo duas vezes, o que deixa a carta E no topo da pilha.

13 *Paula escreve números* – *Solução*

ALTERNATIVA C

A flecha que aponta para baixo na tabela passa pelos quadrados dos números ímpares: $1^2 = 1$, $3^2 = 9$, $5^2 = 25$ e assim por diante.



Vamos chamar de a_n o n-ésimo termo de nossa sequência; por exemplo, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 13$ e $a_4 = 31$. Observando a tabela, vemos que

$$1^2 \xrightarrow{\text{1 casa para a direita}} 1^2 + 1 = 2 \xrightarrow{\text{1 casa para cima}} 1^2 + 1 + 1 = 3 = a_2$$

$$3^2 \xrightarrow{\text{1 casa para a direita}} 3^2 + 1 = 10 \xrightarrow{\text{3 casas para cima}} 3^2 + 1 + 3 = 13 = a_3$$

$$5^2 \xrightarrow{\text{1 casa para a direita}} 5^2 + 1 = 26 \xrightarrow{\text{5 casas para cima}} 5^2 + 1 + 5 = 31 = a_4$$

e assim por diante. Vemos, então, que a lei de formação da sequência, a partir de a_2, é

$$a_2 = \left[1^{\text{o}} \text{ ímpar}\right]^2 + 1 + 1^{\text{o}} \text{ ímpar}$$
$$a_3 = \left[2^{\text{o}} \text{ ímpar}\right]^2 + 1 + 2^{\text{o}} \text{ ímpar}$$
$$a_4 = \left[3^{\text{o}} \text{ ímpar}\right]^2 + 1 + 3^{\text{o}} \text{ ímpar}$$

e, em geral,

$$a_n = \left[(n-1)^{\text{o}} \text{ ímpar}\right]^2 + 1 + (n-1)^{\text{o}} \text{ ímpar}$$

Logo, $a_{30} = [29^{\text{o}} \text{ ímpar}]^2 + 1 + 29^{\text{o}}$ ímpar, e como o 29^{o} número ímpar é 57 segue que $a_{30} = 57^2 + 1 + 57 = 3307$. Mais geralmente, o $(n-1)^{\text{o}}$ número ímpar é $2(n-1) - 1 = 2n - 3$ e segue que $a_n = (2n-3)^2 + 1 + (2n-3) = 4n^2 - 10n + 7$.

Assunto

Combinatória

14 *Futebol matemático* – *Solução*

a) O time B não perdeu nenhuma partida, logo empatou ou ganhou de A. Mas A não empatou nenhuma partida, logo A perdeu de B.
b) O time A perdeu uma partida. Se tivesse perdido exatamente mais um jogo, teria 6 pontos. Mas B tem no mínimo 6 pontos, pois venceu A e não perdeu nenhuma das outras três partidas. Como A tem mais pontos que B, concluímos que A perdeu somente para B; e como A não empatou nenhuma partida, venceu as outras três. Logo A obteve 9 pontos.
c) 1ª *solução:* Como o time B não perdeu para nenhum outro time, ele ganhou 1 ou 3 pontos em cada partida, isto é, sempre um número ímpar de pontos. Como a soma de quatro números ímpares é par, vemos que B terminou o torneio com um número par de pontos.
2ª *solução:* Como ficou em segundo lugar, o time B fez menos do que 9 pontos, portanto venceu uma ou duas partidas. Como ele jogou quatro partidas, se venceu uma delas então empatou três, finalizando com 6 pontos; se venceu duas então empatou duas, finalizando com 8 pontos. Logo, as possibilidades para o número de pontos que B obteve nesse torneio são 6 e 8, ambos números pares.
d) De acordo com os itens anteriores, A perdeu de B e venceu C, D e E. Dos 6 jogos restantes, 5 foram empates. Se B tivesse só 2 empates, então todos os jogos entre C, D e E seriam empates e os dois desses times que empataram com B terminariam empatados, o que contraria o enunciado. Logo, os três jogos de B contra C, D e E foram empates. Como houve um total de 5 empates, 2 dos jogos entre C, D e E foram empates. Como a ordem de classificação é C, D, E, a única vitória foi de C contra E. Temos, assim, a tabela de resultados abaixo.

A	A	A	A	B	B	B	C	C	D
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
B	C	D	E	C	D	E	D	E	E

15 *Quixajuba disputa um torneio* – *Solução*

a) O número total de partidas disputadas no torneio é $3 + 2 + 1 = 6$. Como 6 não é divisível por 4, o torneio não pode acabar com os quatro times tendo o mesmo número de vitórias.
b) 1ª *solução:* Para que o Quixajuba termine isolado em primeiro lugar, ele deve ganhar todas as suas partidas. De fato, se ele ganhar duas ou menos então os outros três times dividirão pelo menos quatro vitórias entre si, e assim algum deles deve ter pelo menos duas vitórias; nesse caso, o Quixajuba não seria o campeão isolado. Para cada um dos três jogos entre os outros times há duas possibilidades. Logo, o

número de maneiras do Quixajuba terminar sozinho em primeiro lugar é $1\times1\times1\times2\times2\times2 = 8$. Como há $2^6 = 64$ resultados possíveis para as seis partidas, a probabilidade de o Quixajuba ser o campeão isolado é $\frac{8}{64} = \frac{1}{8}$.

2ª *solução:* Argumentamos como acima que o Quixajuba será o campeão isolado se e somente se ele vencer suas três partidas. Como a probabilidade de o Quixajuba ganhar um jogo contra qualquer dos outros times é $\frac{1}{2}$, a probabilidade de ele ganhar suas três partidas é $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

c) Suponhamos que os times sejam A, B, C e D e que o torneio termine com D isolado em último lugar. Então D perdeu todas suas partidas; de fato,

- se D tivesse ganho suas três partidas, teria terminado o torneio em primeiro lugar (como vimos no item anterior);
- se D tivesse ganho duas (ou uma) partidas, os outros times dividiriam quatro (ou cinco) vitórias entre si; neste caso, pelo menos um deles teria ganho no máximo uma partida e assim D não teria ficado em último lugar isolado.

Logo A, B e C dividem entre si as seis vitórias, ou seja, cada um deles ganhou duas vezes; uma contra D e uma contra um dos outros. Para as partidas entre A, B e C temos apenas duas possibilidades: A ganhou de B que ganhou de C que ganhou de A, ou A ganhou de C que ganhou de B que ganhou de A. Em resumo, há apenas duas possibilidades para que A, B e C dividam a liderança, e neste caso D acaba o torneio em último lugar isolado. Como qualquer um dos times pode acabar em último lugar isolado, enquanto os outros dividem a liderança, segue que o número de possibilidades para que isto aconteça é $4\times2 = 8$. Por outro lado, o número total de possibilidades para os resultados das seis partidas é $2^6 = 64$. Logo a probabilidade de que três times dividam a liderança é $\frac{8}{64} = \frac{1}{8}$.

16 *O sorteio do livro* – *Solução*

a) Para André ganhar o livro ele deve retirar a bola preta. Como a caixa contém quatro bolas das quais apenas uma é preta, a probabilidade de ele retirar a bola preta é $\frac{1}{4}$.

Uma outra solução aparece na 2ª *solução* do item *b)*.

b) 1ª *solução*: Para Dalva ganhar o livro, André, Bianca e Carlos devem retirar bolas brancas. Como inicialmente a caixa contém 3 bolas brancas, a probabilidade de André retirar uma bola branca é $\frac{3}{4}$. Supondo que André tire uma bola branca, sobrarão na caixa 2 bolas brancas e 1 preta; assim, a probabilidade de Bianca tirar uma bola branca é $\frac{2}{3}$. Do mesmo modo, se André e Bianca tirarem bolas brancas, a probabilidade de Carlos tirar uma bola branca será $\frac{1}{2}$. Assim, a probabilidade de André, Carlos e Bianca tirarem bolas brancas é $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, que é a probabilidade de Dalva ganhar o livro. Raciocínio semelhante mostra que a probabilidade de qualquer um dos amigos ganhar o livro é $\frac{1}{4}$, ou seja, o sorteio é justo e a ordem em que eles retiram as bolas não tem importância. Para entender melhor isso, veja a seguinte solução.

2ª *solução*: Mantendo as regras do sorteio, vamos pintar uma bola branca de azul e outra de vermelho; temos então quatro bolas diferentes na caixa. O número de sorteios possíveis passa a ser $4\times3\times2\times1 = 24$; desses, Dalva ganha o livro quando André, Bianca e Carlos ficam com as bolas branca, azul e vermelha, o que pode acontecer de $3\times2\times1 = 6$ maneiras diferentes. Logo, a probabilidade de Dalva ganhar o livro é $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$. Esse raciocínio se aplica a qualquer um dos amigos, justificando assim o comentário anterior sobre a justiça do sorteio.

c) 1ª *solução*: André pode ganhar o livro de duas maneiras, a saber, quando a primeira bola retirada for preta ou então quando as quatro primeiras bolas retiradas forem brancas e a quinta preta. A probabilidade no primeiro caso é $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ e no segundo é $\frac{6}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4} = \frac{3}{28}$. Assim, a probabilidade procurada é $\frac{1}{4} + \frac{3}{28} = \frac{5}{14}$.

2ª *solução*: A probabilidade de que André ganhe o livro na primeira rodada, como visto acima, é $\frac{1}{4}$. Para calcular a probabilidade de que ele ganhe o livro na segunda rodada vamos calcular os casos possíveis e os casos favoráveis. As primeiras cinco bolas podem ser sorteadas de $8\times7\times6\times5\times4$ maneiras. Para que André ganhe o livro na quinta bola, as quatro primeiras bolas devem ser brancas e a quinta preta, o que pode ocorrer de $6\times5\times4\times3\times2$ maneiras. Logo a probabilidade de que André ganhe o livro na quinta bola sorteada é $\frac{6\times5\times4\times3\times2}{8\times7\times6\times5\times4} = \frac{3}{28}$. Assim, a probabilidade procurada é $\frac{1}{4} + \frac{3}{28} = \frac{5}{14}$.

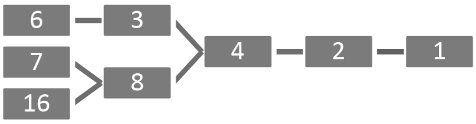
d) 1ª *solução*: Dalva só vai ganhar o livro no caso em que as três primeiras bolas sorteadas sejam brancas e a quarta preta; de fato, se as quatro primeiras bolas sorteadas forem brancas, sobrarão na caixa duas

brancas e duas pretas e uma bola preta será retirada antes que chegue a sua vez. Assim, a probabilidade de que Dalva ganhe o livro é $\frac{6}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{7} = \frac{2}{14}$.
2ª *solução*: Dalva só pode ganhar o livro no caso em que as três primeiras bolas sorteadas sejam brancas e a quarta preta. As quatro primeiras bolas podem ser sorteadas de $8 \times 7 \times 6 \times 5$ modos. Para que Dalva ganhe o livro, as três primeiras devem ser brancas e a quarta preta, o que pode ocorrer de $6 \times 5 \times 4 \times 2$ modos. Logo, a probabilidade de que Dalva ganhe o livro é $\frac{6\times5\times4\times2}{8\times7\times6\times5} = \frac{1}{7} = \frac{2}{14}$.

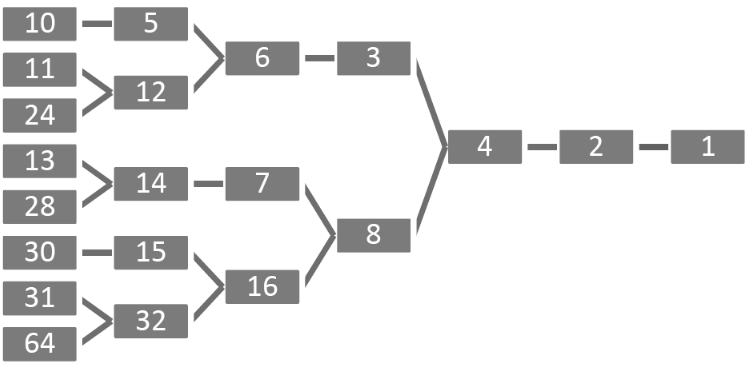
Fica como exercício para o(a) leitor(a) mostrar que as probabilidades de Bianca e Carlos ganharem o livro são, respectivamente, $\frac{4}{14}$ e $\frac{3}{14}$. O André foi bem esperto em propor esse novo sorteio!
Observação: Escrevemos todas as probabilidades como frações com o mesmo denominador para compará-las mais rapidamente e também para facilitar a verificação de que a soma de todas é igual a 1.

17 *Ímpar soma, par divide* – *Solução*

a) A sequência é $37 \to 38 \to 19 \to 20 \to 10 \to 5 \to 6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$.
b) A única sequência de comprimento 3 é $4 \to 2 \to 1$. As sequências de comprimento 4 são $3 \to 4 \to 2 \to 1$ e $8 \to 4 \to 2 \to 1$; elas são obtidas a partir de $4 \to 2 \to 1$, a primeira acrescentando $4 - 1 = 3$ à esquerda e a segunda acrescentando $2 \times 4 = 8$ à esquerda. Do mesmo modo, a sequência ímpar $3 \to 4 \to 2 \to 1$ dá origem à sequência par $6 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$; a sequência par $8 \to 4 \to 2 \to 1$ dá origem à sequência ímpar $7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$ e à sequência par $16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$. Temos assim as três únicas sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. O raciocínio pode ser representado pelo esquema abaixo.



c) 1ª *solução:* Repetindo o esquema do item anterior, temos:



e assim temos três sequências pares e duas ímpares de comprimento 6 e cinco sequências pares e três ímpares de comprimento 7.
2ª *solução:* Observamos que a sequência ímpar de comprimento 5 dá origem a uma sequência par de comprimento 6; já as duas sequências pares de comprimento 5 dão origem a duas sequências pares de comprimento 6 e duas sequências ímpares de comprimento 6. Assim, temos duas sequências ímpares de comprimento 6 e $1 + 2 = 3$ sequências pares de comprimento 6, num total de $2 + 3 = 5$ sequências de comprimento 6. O mesmo argumento mostra que há oito sequências de comprimento 7, sendo três ímpares e cinco pares.
Observação: A repetição desse argumento para valores sucessivos do comprimento mostra que, a partir do comprimento 3, o número de sequências ímpares é $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$, o número de sequências pares é $2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ e o número total de sequências é $3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ Cada termo dessas sequências de valores, a partir do terceiro, é a soma dos dois anteriores; vemos assim que essas sequências, com a eventual omissão de termos iniciais, são a sequência $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$, conhecida como sequência de Fibonacci. Apresentamos esse resultado na tabela a seguir.

Comprimento	5	6	7	$\cdots$	15	16
Ímpares	1	2	$1+2=3$	$\cdots$	144	$89+144=233$
Pares	2	3	$2+3=5$	$\cdots$	233	$144+233=377$
Total (ímpares+pares)	$1+2=3$	$2+3=5$	$3+5=8$	$\cdots$	$144+233=377$	$233+377=610$

d) 1ª *solução*: As 144 sequências ímpares de comprimento 15 dão origem a 144 sequências pares de comprimento 16; já as 233 sequências pares de comprimento 15 dão origem a 233 sequências pares de comprimento 16 e 233 sequências ímpares de comprimento 16. Assim, temos 233 sequências ímpares de comprimento 16 e 377 = 233 + 144 sequências pares de comprimento 16, num total de 233 + 377 = 610 sequências.
2ª *solução:* A parte da sequência de Fibonacci que nos interessa é $1, 2, 3, 5, 8, \ldots, 144, 233, 377, 610, \ldots$ O número de sequências ímpares de comprimento 15 (resp. 16) é o 15º (resp. 16º) termo dessa sequência, que é 144 (resp. 233); o número de sequências pares de comprimento 15 (resp. 16) é o 16º (resp. 17º) termo, que é 233 (resp. 377) e o número total é o 17º(resp. 18º) termo, que é 377 (resp. 610).

18 *Bolas e probabilidades* – *Solução*

a) Uma bolinha colocada em C só poderá parar nas caixas 2 ou 3; se colocada em B, ela poderá parar em qualquer das caixas.
b) Se ela parte de A, para chegar à caixa 2 ela deve ir para a direita tanto na primeira como na segunda bifurcação. Como a bolinha tem chances iguais de ir para a direita ou para a esquerda em cada bifurcação, a probabilidade dela chegar à caixa 2 é $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ou 25%.

Se a bolinha for depositada em B, pelo mesmo raciocínio, ela poderá chegar à caixa 2 por dois caminhos diferentes: direita, esquerda ou esquerda, direita; ambos ocorrem com probabilidade $\frac{1}{4}$. Como estes eventos são disjuntos, a probabilidade de um deles ocorrer é a soma das probabilidades de cada evento individual. Logo, a probabilidade da bolinha sair de B e chegar à caixa 2 é $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ou 50%.
c) Existem três situações possíveis para que, no final, haja uma bolinha em cada caixa. Descrevemos estas situações na tabela abaixo, onde (por exemplo) a primeira linha indica a situação em que uma bolinha colocada em A cai na caixa 1, outra colocada em B cai na caixa 2 e a última, colocada em C, cai na caixa 3.

	caixa 1	**caixa 2**	**caixa 3**
1ª situação	A	B	C
2ª situação	A	C	B
3ª situação	B	A	C

Observando que os eventos "bola colocada em X caiu na caixa Y" são independentes e lembrando que a probabilidade de eventos independentes ocorrerem simultaneamente é igual ao produto das probabilidades de cada evento, a probabilidade de que cada uma destas situações ocorra é:

$$\text{1ª situação: } \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{32}$$

$$\text{2ª situação: } \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$$

$$\text{3ª situação: } \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$$

Por outro lado, a ocorrência de cada uma das configurações acima é um evento disjunto dos outros dois; a probabilidade de ao menos um deles ocorrer é então igual à soma das probabilidades dos eventos individuais. Logo, a probabilidade de que haja uma bolinha em cada caixa é

$$\frac{9}{32} + \frac{3}{64} + \frac{3}{64} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$$

A título de observação, listamos abaixo as 12 possibilidades para a distribuição de três bolinhas pelas caixas e suas respectivas probabilidades.

caixa 1	caixa 2	caixa 3	probabilidade
A	B	C	18/64
A	C	B	3/64
A	BC	vazia	6/64
A	vazia	BC	9/64
AB	vazia	C	9/64
AB	C	vazia	3/64
B	A	C	3/64
B	AC	vazia	1/64
vazia	AB	C	6/64
vazia	ABC	vazia	2/64
vazia	AC	B	1/64
vazia	A	BC	3/64

19 ***Jogo Diferente*** – *Solução*

a) Como saiu ímpar na primeira jogada, Isaura deu metade dos seus palitos para o Fernando; desse modo, Isaura ficou com 64 palitos, e como o número total de palitos é 256 segue que Fernando ficou com $256 - 64 = 192$ palitos. Do mesmo modo, após a segunda jogada, Isaura ficou com 32 palitos e Fernando com $256 - 32 = 224$ palitos. Na terceira jogada saiu par, e Fernando deu metade de seus palitos para a Isaura; logo, Fernando ficou com 112 palitos e Isaura com $256 - 112 = 144$ palitos.

Fernando	Isaura
128	128

$\xrightarrow[1^a \text{ jogada}]{\textbf{ímpar}}$

Fernando	Isaura
192	64

$\xrightarrow[2^a \text{ jogada}]{\textbf{ímpar}}$

Fernando	Isaura
224	32

$\xrightarrow[3^a \text{ jogada}]{\textbf{par}}$

Fernando	Isaura
112	144

b) 1^a *solução*: Após qualquer jogada, o perdedor não pode ter mais que 127 palitos; de fato, se isso ocorresse, antes dessa jogada ele teria pelo menos $2 \times 128 = 256$ palitos, o que não pode acontecer. O ganhador terá então no mínimo $256 - 127 = 129$ palitos; logo, o ganhador da jogada anterior é aquele que tem mais palitos.

2^a *solução*: Suponhamos que em um dado momento Fernando tem x palitos e Isaura tem y palitos; notamos que como $x + y = 256$, que é um número par, então x e y são ambos pares ou ambos ímpares. Se o jogo ainda não acabou, então x e y são pares, e depois da jogada seguinte podem acontecer as seguintes situações:

• saiu **par**: nesse caso Fernando fica com $\frac{x}{2}$ palitos e Isaura com $y + \frac{x}{2}$ palitos, ou seja, Isaura fica com mais palitos do que Fernando;

• saiu **ímpar**: nesse caso Fernando fica com $x + \frac{y}{2}$ palitos e Isaura com $\frac{y}{2}$ palitos, ou seja, Fernando fica com mais palitos do que Isaura.

Isso mostra que basta saber quem tem o maior número de palitos para determinar o resultado da última jogada: se Isaura tiver mais, o resultado foi par e se Fernando tiver mais, o resultado foi ímpar. No nosso caso, a partida acabou quando Fernando ficou com 101 palitos e Isaura com $256 - 101 = 155$ palitos. Logo o resultado da última jogada foi **par**.

c) Aplicamos o raciocínio do item *b)* para recuperar as jogadas uma a uma em ordem inversa, do seguinte modo:

Fernando	Isaura
101	155

Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2 \times 101 = 202$ palitos e Isaura tinha $256 - 202 = 54$ palitos;

Fernando	Isaura
202	54

Fernando tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **ímpar**; então Isaura tinha $2 \times 54 = 108$ palitos e Fernando tinha $256 - 108 = 148$ palitos;

Fernando	Isaura
148	108

Fernando tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **ímpar**; então Isaura tinha $2 \times 108 = 216$ palitos e Fernando tinha $256 - 216 = 40$ palitos;

Fernando	Isaura
40	216

Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2 \times 40 = 80$ palitos e Isaura tinha $256 - 80 = 176$ palitos;

Fernando	Isaura
80	176

Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2 \times 80 = 160$ palitos e Isaura tinha $256 - 160 = 96$ palitos;

Fernando	Isaura
160	96

Fernando tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **ímpar**; então Isaura tinha $2 \times 96 = 192$ palitos e Fernando tinha $256 - 192 = 64$ palitos;

Fernando	Isaura
64	192

Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu **par**; então Fernando tinha $2 \times 64 = 128$ palitos e Isaura tinha $256 - 128 = 128$ palitos. Essa é a situação inicial do jogo.

Logo, a sequência de jogadas dessa partida foi **par**, **ímpar**, **par**, **par**, **ímpar**, **ímpar**, **par**.
d) Vamos aproveitar o trabalho do item anterior e fazer o seguinte diagrama do número de palitos de Fernando e Isaura, jogada a jogada:

Fernando	$128 = 2^7 \times 1$	$64 = 2^6 \times 1$	$160 = 2^5 \times 5$	$80 = 2^4 \times 5$	$40 = 2^3 \times 5$	$202 = 2^1 \times 101$	$101 = 2^0 \times 101$
Isaura	$128 = 2^7 \times 1$	$192 = 2^6 \times 3$	$96 = 2^5 \times 3$	$176 = 2^4 \times 11$	$108 = 2^2 \times 27$	$54 = 2^1 \times 27$	$155 = 2^0 \times 155$

Esse diagrama e outros exemplos semelhantes sugerem que, em um momento qualquer de uma partida, o número de palitos de Fernando e o número de palitos de Isaura se escrevem, respectivamente, como $2^n a$ e $2^n b$, onde a e b são inteiros ímpares. Além disso, se o jogo não acabou, então depois da próxima jogada eles terão $2^{n-1}a'$ e $2^{n-1}b'$ palitos, respectivamente, onde a' e b' também são inteiros ímpares. Vamos mostrar que essas afirmativas são verdadeiras. Suponhamos que em alguma etapa de uma partida os dois jogadores têm, respectivamente, $2^n a$ e $2^n b$ palitos, onde a e b são inteiros ímpares, e que o jogo não acabou, ou seja, que $n \geq 1$. Se a próxima jogada sair par, então Fernando ficará com $\frac{2^n a}{2} = 2^{n-1}a$ palitos e Isaura ficará com $2^{n-1}a + 2^n b = 2^{n-1}(a + 2b)$ palitos. Como a é ímpar então $b' = a + 2b$ também é ímpar. Desse modo, após essa jogada, Fernando e Isaura ficarão com $2^{n-1}a$ e $2^{n-1}b'$ palitos, onde a e b' são ímpares. Um argumento idêntico leva à mesma conclusão no caso em que a próxima jogada sair ímpar, e acabamos de provar nossa afirmativa. O jogo começa com ambos os jogadores com $128 = 2^7 \times 1$ palitos, ou seja, com $n = 7$. Como uma partida acaba quando $n = 0$ e n decresce de uma unidade a cada jogada, segue imediatamente que qualquer partida acaba depois da sétima jogada.

20 *Quadrados especiais* – Solução

a) A solução está apresentada na figura abaixo:

1	2	**4**	**3**
3	4	2	1
2	**3**	1	**4**
4	**1**	**3**	2

b) Não. Como os quadradinhos na última coluna do quadrado D estão preenchidos com 1 e 2, então os dois quadradinhos na última coluna no quadrado B deveriam ser preenchidos com 3 e 4. Mas nem o 3 nem o 4 podem aparecer na segunda linha, já que eles já aparecem na segunda linha do quadrado A.
c) No quadrado D, o 2 pode aparecer na mesma coluna do 1 (como visto no item anterior). Com um argumento semelhante, mostra-se que o 3 não pode aparecer na mesma linha do 1. Temos, assim, as seguintes possibilidades para o preenchimento do quadrado D:

2	**3**
4	1

ou

3	**4**
2	1

ou

4	**3**
2	1

Em cada um destes casos, o quadrado especial pode ser preenchido de modo único:

1	2	**3**	**4**
3	4	**1**	**2**
4	**1**	**2**	**3**
2	**3**	**4**	1

1	2	**4**	**3**
3	4	**1**	**2**
2	**1**	**3**	**4**
4	**3**	**2**	1

1	2	**3**	**4**
3	4	**1**	**2**
2	**1**	**4**	**3**
4	**3**	**2**	1

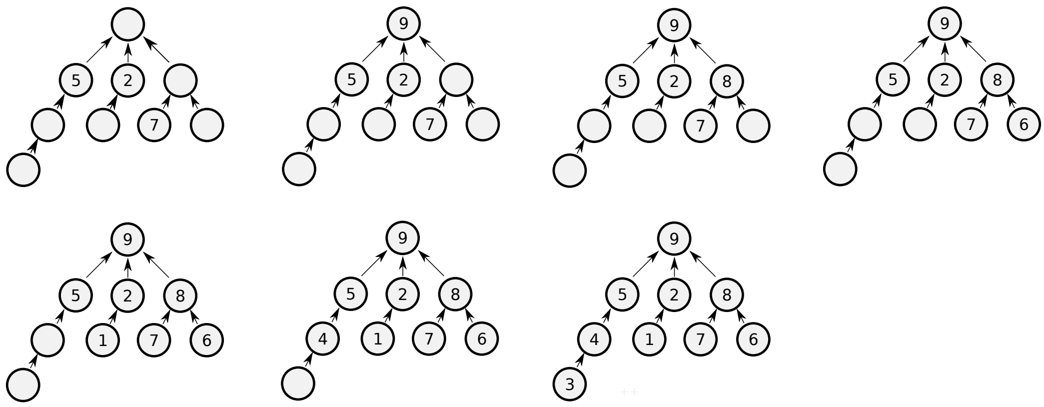
d) Para preencher o quadrado A, podemos colocar o 1 de 4 modos, o 2 de 3 modos, o 3 de 2 modos e o 4 de 1 modo. Logo, ele pode ser preenchido de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ modos. Para cada uma destas escolhas, o número de modos de preencher o restante do quadrado especial é o mesmo. Portanto, para contar quantas são as maneiras de terminarmos de preencher o quadrado especial, podemos supor que o quadrado A está preenchido como no item anterior. Para preencher o quadrado C, podemos colocar o 1 em qualquer das 4 casas. Uma vez fixado o 1, há 3 modos de completar o quadrado, como visto no item anterior. O número total de possibilidades de preenchimento é, portanto, $24 \times 4 \times 3 = 288$.

21 *Um bom preenchimento* – *Solução*

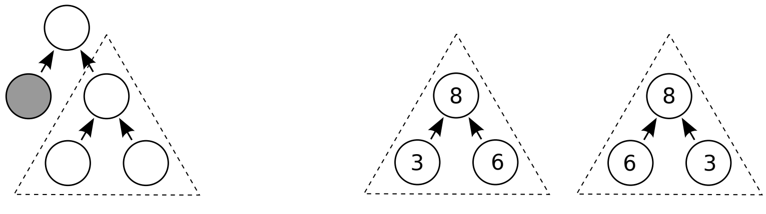
a) Só existe uma maneira de preencher o diagrama, como mostramos a seguir.

- O número 9 não pode ficar abaixo de nenhum número, logo deve ficar no topo.
- Acima do número 7 só podemos colocar o 9 ou o 8. Como o 9 já está no topo, o 8 ficará acima do 7.
- O número 6 não pode ficar abaixo do 5 nem do 2, logo ficará abaixo do 8, ao lado do 7.
- O número 1 é o único que pode ficar abaixo do 2.
- Os números 3 e 4 devem ficar abaixo do 5, com o 3 abaixo do 4.

A sequência de figuras a seguir ilustra as etapas deste raciocínio.



b) 1ª *solução*: Primeiro vamos examinar o diagrama menor de três bolinhas contidas no triângulo pontilhado, abaixo à esquerda. Para que ele fique bem preenchido com quaisquer três números positivos distintos, o maior número deve ficar no topo e os outros dois poderão ser colocados nos dois círculos de baixo de duas maneiras diferentes. Por exemplo, se os números forem 3, 6 e 8, podemos dispô-los das duas maneiras ilustradas abaixo à direita.



Para que o diagrama completo do problema fique bem preenchido com os números de 1 a 5, o 5 deve ficar no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 4. As três casas restantes, marcadas com o triângulo pontilhado, formam o diagrama analisado acima e poderão então ser preenchidas de duas maneiras, com os três números restantes. Resumindo, podemos preencher o diagrama do seguinte modo:

• preenchemos o círculo do topo com o 5: uma possibilidade;
• preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 ou 4: quatro possibilidades;
• preenchemos as três casas que faltam com os três algarismos restantes: duas possibilidades.

Logo, o diagrama pode ser preenchido de $1 \times 4 \times 2 = 8$ maneiras diferentes. Notamos que este raciocínio se aplica para quaisquer cinco números positivos distintos. Isto será importante na resolução do próximo item.

2ª *solução*: Notamos primeiro que o 5 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 4 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 5, e então:

• se o 4 ocupar a bolinha sombreada, o 3 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 5, e o 1 e o 2 podem ser colocados de duas maneiras diferentes nas duas bolinhas que sobram; temos duas possibilidades neste caso;

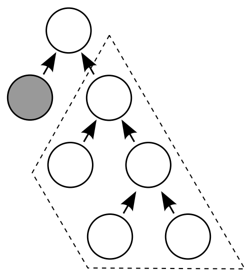
• se o 4 ocupar a outra bolinha abaixo do 5, a casa sombreada pode ser ocupada por qualquer dos números de 1 a 3, e os outros dois números podem ser colocados nas duas últimas bolinhas vazias; neste caso temos $3 \times 2 = 6$ possibilidades.

Deste modo, o número total de maneiras de preencher o diagrama é $2 + 6 = 8$.

c) 1ª *solução*: Para que o diagrama fique bem preenchido com os números de 1 a 7, temos que colocar o 7 no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 6. A parte circundada pela linha pontilhada foi analisada no item *b)* e pode ser preenchida com os 5 números restantes de 8 formas diferentes. Ou seja, podemos preencher o diagrama como segue:

• preenchemos o círculo do topo com o 7: uma possibilidade;
• preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3, 4, 5 ou 6: seis possibilidades;
• preenchemos a parte circundada com os algarismos restantes: oito possibilidades.

Logo, o diagrama pode ser preenchido de $1 \times 6 \times 8 = 48$ maneiras diferentes.



2ª *solução*: Notamos primeiro que o 7 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 6 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 7, e então:

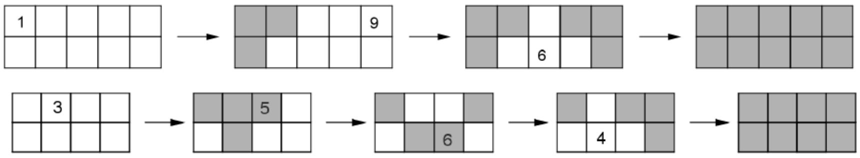
• se o 6 ocupar a bolinha sombreada, os números de 1 a 5 devem ocupar as casas circundadas com a linha pontilhada. De acordo com o item *b)*, isto pode ser feito de oito maneiras distintas.

• se o 6 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 7, podemos colocar qualquer número de 1 a 5 na casa sombreada e distribuir os números restantes pelas quatro bolinhas ainda vazias, o que pode ser feito de oito maneiras diferentes, de acordo com o item *b)*. Aqui temos $5 \times 8 = 40$ possibilidades.

Logo, o diagrama pode ser preenchido de $8 + 40 = 48$ maneiras diferentes.

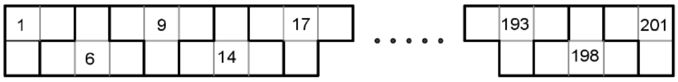
22 ***Troca-cor*** – *Solução*

a) Mostramos abaixo um jogo completo para cada tabuleiro, destacando as casas apertadas.



b) Dividimos o tabuleiro 2×100 em 25 retângulos 2×4 e, em cada um desses retângulos, tornamos as

casas cinzas procedendo como ilustrado no item *a)*; notamos que ao aplicar este procedimento em um retângulo os demais não são afetados. Desse modo podemos preencher todas as casas do jogo 2×100.
c) Dividimos o tabuleiro como ilustrado na figura a seguir.

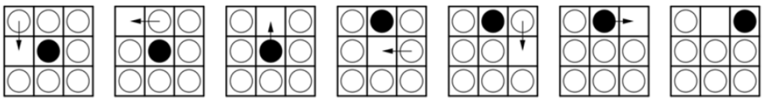


Na primeira linha selecionamos as casas $1, 9, 17, \ldots, 193, 201$ e na segunda as casas $6, 14, 22, \ldots, 190, 198$. Cada uma das casas selecionadas está dentro de uma região destacada com traço mais forte. Ao apertar uma destas casas, ela e todas as outras casas de sua região ficam cinzas, sem afetar as outras regiões. Apertando todas estas casas podemos então preencher todas as casas do jogo 2×101.

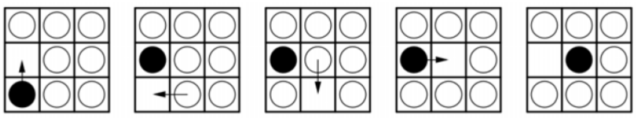
Notamos que há uma casa selecionada de duas em duas colunas, começando da primeira à esquerda, e uma na última coluna. Como as colunas são em número de 101, vemos que foram selecionadas 51 casas, que é o número de jogadas que foram necessárias para terminar o jogo do modo descrito.
d) Não é possível acabar o jogo 2×101 com menos de 51 jogadas, pois cada jogada muda a cor de no máximo quatro casas. Assim, com 50 jogadas ou menos conseguiremos mudar a cor de no máximo $50 \times 4 = 200$ casas, mas no jogo 2×101 devemos mudar a cor de 202 casas. Logo, é impossível fazer menos do que 51 jogadas e deixar cinzas todas as casas.
Observação: A solução dos itens *b)* e *c)* mostra como terminar o jogo no caso de tabuleiros $2 \times n$, onde n deixa restos 0 ou 1 quando dividido por 4. É interessante completar a análise nos casos em que os restos são 2 ou 3; deixamos isto para o(a) leitor(a).

23 *Arrasta Um* – *Solução*

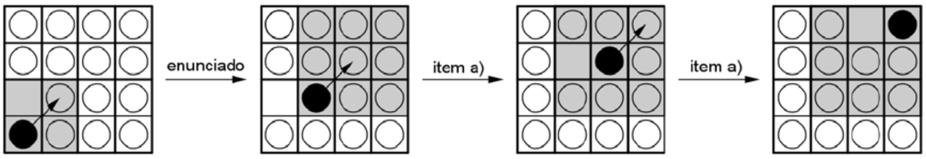
a) A figura abaixo mostra que a sequência de seis movimentos $(\downarrow, \leftarrow, \uparrow, \leftarrow, \downarrow, \rightarrow)$ termina o jogo a partir da posição inicial dada.



b) A figura abaixo mostra que a sequência de quatro movimentos $(\uparrow, \leftarrow, \downarrow, \rightarrow)$ transforma a posição inicial dada na posição inicial do item *a)*, a partir da qual é possível terminar o jogo em seis movimentos.



Assim, podemos terminar o jogo num total de $4 + 6 = 10$ movimentos.
c) A ideia é fazer com que a peça preta se mova ao longo da diagonal do tabuleiro. Isso pode ser feito uma casa de cada vez usando primeiro os movimentos do exemplo do enunciado seguidos da repetição dos movimentos do item *a)*. Abaixo ilustramos esse procedimento em um tabuleiro 4×4.



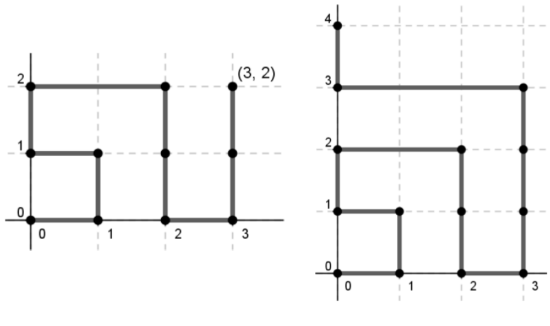
Em geral, em um tabuleiro $n \times n$, a peça preta deverá subir $n - 1$ casas na diagonal. Pelo método indicado acima, pode-se subir a primeira delas em 4 movimentos e cada uma das $n - 2$ restantes em 6 movimentos cada uma. Logo, pode-se acabar o jogo em $4 + 6(n - 2) = 6n - 8$ movimentos.

24 ***Ora bolas*** – *Solução*

a) 1ª *solução*: O princípio multiplicativo mostra que o número de maneiras de retirar duas bolas, uma a uma, é $10 \times 9 = 90$. Dessas retiradas, há dez para as quais o segmento determinado pelos pontos retirados é um diâmetro, a saber, $(1,6)$, $(2,7)$, $(3,8)$, $(4,9)$, $(5,10)$, $(6,1)$, $(7,2)$, $(8,3)$, $(9,4)$ e $(10,5)$. Logo, a probabilidade pedida é $\frac{10}{90} = \frac{1}{9}$.
2ª *solução*: Retira-se uma bola qualquer. Das nove possibilidades de retirar outra bola, apenas uma determinará, junto com a primeira, um diâmetro. Logo, a probabilidade de retirar duas bolas que determinam um diâmetro é $\frac{1}{9}$.
3ª *solução*: É possível retirar duas bolas de $\binom{10}{2} = 45$ maneiras diferentes. Dessas retiradas há cinco que determinam diâmetros; logo a probabilidade procurada é $\frac{5}{45} = \frac{1}{9}$.
b) 1ª *solução*: O princípio multiplicativo mostra que o número de maneiras de retirar três bolas, uma a uma, é $10 \times 9 \times 8 = 720$. Para que uma retirada determine um triângulo retângulo, ela deve conter duas bolas a e b que determinam um diâmetro e uma terceira bola x distinta dessas duas. Ordenando essas três bolas das $3! = 6$ maneiras possíveis, vemos que há seis retiradas que consistem dessas bolas. Como há cinco pares de bolas que determinam um diâmetro e a bola extra pode ser escolhida de oito maneiras diferentes, o número de retiradas que determinam um triângulo retângulo inscrito é $6 \times 5 \times 8 = 240$. Logo, a probabilidade procurada é $\frac{240}{720} = \frac{1}{3}$.
2ª *solução*: Uma vez retiradas três bolas, podemos formar com elas três grupos de duas bolas. Observamos que se um desses grupos determina um diâmetro, então isso não pode acontecer para os outros dois grupos. Como cada grupo de duas bolas tem probabilidade $\frac{1}{9}$ de determinar um diâmetro, a probabilidade procurada é então $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$.
3ª *solução*: Há $\binom{10}{3} = 120$ maneiras de escolher três bolas, ou seja, há 120 triângulos inscritos com vértices nos vértices do decágono. Por outro lado, cada diâmetro determina oito triângulos retângulos inscritos, num total de $5 \times 8 = 40$; ou seja, há 40 escolhas de três bolas que determinam triângulos retângulos inscritos. A probabilidade procurada é então $\frac{40}{120} = \frac{1}{3}$.
c) 1ª *solução*: O número de retiradas de quatro bolas é $10 \times 9 \times 8 \times 7$ e cada uma dessas retiradas determina um quadrilátero inscrito. Por outro lado, as bolas de uma retirada que determina um retângulo inscrito devem determinar dois diâmetros. Há dez escolhas para a primeira bola de uma tal retirada e a bola diametralmente oposta pode então aparecer em qualquer uma das três posições seguintes; as outras duas bolas podem então ser escolhidas de oito maneiras diferentes, correspondentes aos quatro diâmetros ainda não determinados. Assim, as retiradas que determinam um triângulo retângulo são em número de $10 \times 3 \times 8$ e a probabilidade procurada é então $\frac{10 \times 3 \times 8}{10 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{1}{21}$.
2ª *solução*: Para que as quatro bolas retiradas determinem um retângulo, as três primeiras devem determinar um triângulo retângulo, o que acontece com probabilidade $\frac{1}{3}$; uma vez isso feito, há uma única escolha para a quarta bola entre as sete remanescentes. Logo, a probabilidade procurada é $\frac{1}{3} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{21}$.
3ª *solução*: Há $\binom{10}{4} = 210$ maneiras de escolher quatro bolas, ou seja, há 210 quadriláteros inscritos com vértices nos vértices do decágono. Por outro lado, um retângulo inscrito é determinado por dois diâmetros, ou seja, há $\binom{5}{2} = 10$ retângulos inscritos, correspondentes a dez escolhas de quatro bolas. Logo, a probabilidade procurada é $\frac{10}{210} = \frac{1}{21}$.

25 ***Lonjura*** – *Solução*

a) Por contagem direta, vemos que a lonjura de $(3,2)$ é 11 e a de $(0,4)$ é 16.



b) Os pontos de coordenadas inteiras no interior e nos lados desse quadrado formam $n+1$ linhas, cada uma com $n+1$ pontos; o total de pontos no interior e nos lados desse quadrado é então $(n+1)^2$. Excluindo a borda desse quadrado, sobra um quadrado de $n-1$ linhas e $n-1$ colunas, que contém $(n-1)^2$ pontos inteiros; segue que o número de pontos na borda do quadrado original é $(n+1)^2-(n-1)^2=4n$.
Observação: Pode-se também calcular o número de pontos de coordenadas inteiras no quadrado notando que de $(0,0)$ a $(0,1)$ a poligonal passa por $1+3=2^2$ pontos; de $(0,0)$ a $(2,0)$ a poligonal passa por $1+3+5=3^2$ pontos, de $(0,0)$ a $(0,3)$ a poligonal passa por $1+3+5+7=4^2$ pontos e assim por diante. Logo, o número de pontos inteiros do quadrado que tem um de seus vértices no ponto (n,n) é $(n+1)^2$.
c) 1ª *solução*: Para ir de $(0,0)$ até $(1,1)$ são 2 passos, de $(1,1)$ até $(2,2)$ são 4 passos, de $(2,2)$ até $(3,3)$ são 6 passos e assim por diante. Logo, para chegar ao ponto (n,n) serão necessários $2+4+6+\cdots+2n=2\times(1+2+3+\cdots+n)=2\frac{n(n+1)}{2}=n^2+n$ passos.
2ª *solução*: A poligonal chega ao ponto (n,n) passando por todos os pontos com coordenadas inteiras do interior e da borda do quadrado do item anterior, com a exceção dos n pontos da horizontal de $(0,n)$ até $(n-1,n)$, caso n seja ímpar ou da vertical de $(n,0)$ até $(n,n-1)$, caso n seja par. Logo, a poligonal passa por $(n+1)^2-n=n^2+n+1$ pontos, incluindo seus extremos, e seu comprimento é então n^2+n.
d) 1ª *solução*: Como $425=(20^2+20)+5$ e 20^2+20 é a lonjura do ponto $(20,20)$, vemos que para chegar ao ponto de lonjura 425 devemos chegar a $(20,20)$ e andar mais 5 segmentos ao longo da poligonal. Como 20 é par, esses segmentos partirão do ponto $(20,20)$ na vertical para baixo; assim chegamos ao ponto $(20,15)$, que é o ponto procurado.
2 ª *solução*: Para ir de $(0,0)$ até $(1,1)$ são 2 passos; de $(1,1)$ até $(2,2)$ são 4 passos, de $(2,2)$ até $(3,3)$ são 6 passos e assim por diante. Logo, para chegar ao ponto $(20,20)$, serão necessários $2+4+6+\cdots+40=2\times(1+2+3+\cdots+20)=2\times210=420$ passos. A partir daí a solução procede como acima.

26 *Baralho embaralhado* – *Solução*

a) Vamos calcular a posição ocupada, após um embaralhamento, pela n-ésima carta da pilha. Há dois casos a considerar:

1. **Primeiro caso:** $n\leq 52$ (ou seja, a carta está na metade superior da pilha)

   Neste caso, após um embaralhamento, ficarão acima dela as primeiras n cartas da metade inferior e as primeiras $n-1$ cartas da parte superior. Logo, sua posição na pilha passará a ser $n+(n-1)+1=2n$.

2. **Segundo caso:** $n>52$ (ou seja, a carta está na metade inferior da pilha)

   Neste caso, após um embaralhamento, ficarão acima dela as cartas precedentes da metade inferior, que são em número de $n-52-1=n-53$ e igual quantidade de cartas da metade superior. Logo, sua nova posição na pilha é $(n-53)+(n-53)+1=2n-105$.

Em particular, podemos agora completar a tabela, observando que $55=2\times80-105$ e $5=2\times55-105$.

número de embaralhamentos a partir da situação inicial	1	2	3	4	5	6
posição da carta de número 5 a partir do topo da pilha	10ª	20ª	40ª	80ª	55ª	5ª

b) Como visto acima, a carta que ocupa a posição n passa a ocupar, após um embaralhamento, a posição $2n$, se n$\leq$ 52 ou $2n-105$, se $n>52$.
c) Inicialmente, observamos que após um embaralhamento
- as cartas da metade superior da pilha se movem para baixo, pois $2n>n$ para todo n positivo;
- as cartas da metade inferior da pilha se movem para cima, pois $2n-105<n$ para todo $n<105$.

Logo, para que duas cartas troquem de posição entre si, uma delas deverá estar na metade superior da pilha e outra na metade inferior. Suponhamos que existam duas cartas com essa propriedade, e seja n a posição da carta de metade superior. Após um embaralhamento ela se move para a posição $2n$, e então a carta na posição $2n$ deve passar para a posição n. Como a carta na posição $2n$ está na metade inferior da pilha, devemos ter $2(2n)-105=n$, donde $n=35$. E, de fato, as cartas nas posições 35 e 70 trocam de posição entre si a cada embaralhamento, pois $2\times35=70$ e $2\times(2\times35)-105=35$. Além disso, concluímos que não há outro par de posições com esta propriedade.

d) Para simplificar a exposição, vamos escrever $x \to y$ para indicar que a carta que está na posição x vai para a posição y após um embaralhamento. Suponhamos que exista um trio fixo, e seja n a posição da primeira carta desse trio a contar do topo da pilha. O argumento do item *c)* mostra que as cartas não podem estar todas na metade superior ou todas na metade inferior da pilha; logo a posição n está na metade superior da pilha. Após um embaralhamento temos $n \to 2n$; se $2n$ está na parte superior da pilha então o trio fixo deve ser $n \to 2n \to 4n \to n$; se $2n$ está na metade inferior da pilha então o trio fixo deve ser $n \to 2n \to 4n - 105 \to n$. No primeiro caso, temos

$$n = 2(4n) - 105 = 8n - 105$$

donde $n = 15$; no segundo temos

$$n = 2(4n - 105) - 105 = 8n - 315$$

donde $n = 45$. Agora basta verificar que $(15, 30, 60)$ e $(45, 90, 75)$ são efetivamente trios fixos.

A título de curiosidade e/ou como exercício para o(a) leitor(a), listamos na tabela a seguir todas as k-uplas fixas, incluindo os casos $k = 2$ e $k = 3$ trabalhados nos itens *c)* e *d)* acima.

k	**k-uplas fixas**
2	(35, 70)
3	(15, 30, 60), (45, 90, 75)
4	(7, 14, 28, 56), (21, 42, 84, 63), (49, 98, 91, 77)
6	(5, 10, 20, 40, 80, 55), (25, 50, 100, 95, 85, 65)
12	(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 23, 46, 92, 79, 53), (3, 6, 12, 24, 48, 96, 87, 69, 33, 66, 27, 54), (9, 18, 36, 72, 39, 78, 51, 102, 99, 93, 81, 57), (11, 22, 44, 88, 71, 37, 74, 43, 86, 67, 29, 58), (13, 26, 52, 104, 103, 101, 97, 89, 73, 41, 82, 59), (17, 34, 68, 31, 62, 19, 38, 76, 47, 94, 83, 61)

Observamos ainda que após 12 embaralhamentos todas as cartas voltam à posição inicial.

Assunto

Geometria

27 *Porta de garagem* – *Solução*

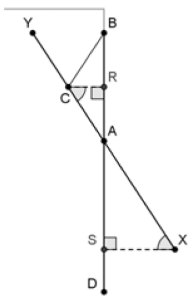
a) 1ª *solução*: Na figura abaixo, temos $XS = 0,2$ e queremos achar CR. Notamos que os ângulos indicados na figura com vértices em C e X são iguais, pois são determinados pelas paralelas CR e XS e pela transversal XY. Logo, os triângulos retângulos ARC e ASX são semelhantes e temos

$$\frac{CR}{XS} = \frac{AC}{AX}$$

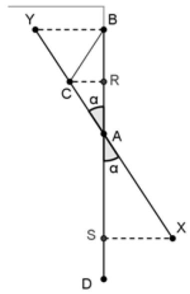
ou seja,

$$CR = XS \times \frac{AC}{AX} = 0,2 \times \frac{0,5}{1} = 0,1$$

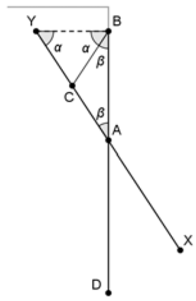
Podemos também argumentar como segue. A razão de semelhança entre os triângulos ARC e ASX é igual a $\frac{AC}{AX} = \frac{0,5}{1} = 0,5$; como os segmentos CR e XS são correspondentes, segue que o comprimento de CR é a metade do comprimento de AX, ou seja, é igual a $0,1$m.



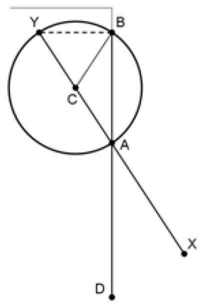
2 ª *solução*: Denotemos por α o ângulo $D\hat{A}X$, como na figura abaixo. Como $D\hat{A}X$ e $B\hat{A}Y$ são opostos pelos vértices, temos também $B\hat{A}Y = \alpha$. Nos triângulos retângulos ASX e ARC, temos $XS = AXsen\alpha = sen\alpha$ e $CR = ACsen\alpha = \frac{1}{2}sen\alpha$. Logo $CR = \frac{1}{2}XS = 0,1$m.



b) 1ª *solução*: Como $AC = BC = YC$ os triângulos ACB e BCY são isósceles; podemos então marcar os ângulos α e β como na figura abaixo. A soma dos ângulos do triângulo ABY é $2\alpha + 2\beta = 180°$; donde $\alpha + \beta = 90°$. Logo BY é perpendicular ao trilho BD, ou seja, BY é horizontal qualquer que seja a posição de Y.



2ª *solução*: Como $AC = BC = YC$, podemos traçar um círculo com centro C e passando por A, B e Y, como na figura à esquerda. Como os pontos A, C e Y estão alinhados, o segmento AY é um diâmetro desse círculo. Logo o ângulo $A\hat{B}Y$ está inscrito no semicírculo, donde sua medida é 90°. Assim BY é horizontal qualquer que seja a posição de Y.



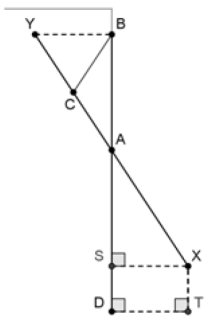
c) Na figura abaixo, queremos calcular DT quando $XT = 0,4$. Para isso, notamos primeiro que, quando a porta se fecha, XY coincide com BD; logo

$$BD = XY = XA + AC + CY = 1 + 0,5 + 0,5 = 2\,.$$

Como $DTXS$ é um retângulo, temos $SD = XT = 0,4$ e segue que $BS = BD - SD = 2 - 0,4 = 1,6$. Por outro lado, os triângulos ASX e ABY são congruentes; de fato, eles são ambos retângulos, seus ângulos em X e Y são iguais (como no item *a)*) e $AX = AY$. Logo $AS = AB$ e como $BS = 1,6$ segue que $AS = 0,8$. O teorema de Pitágoras nos diz então que

$$SX = \sqrt{AX^2 - AS^2} = \sqrt{1 - 0,64} = \sqrt{0,36} = 0,6$$

e concluímos que $DT = 0,6$m.



28 *Triângulos retângulos* – *Solução*

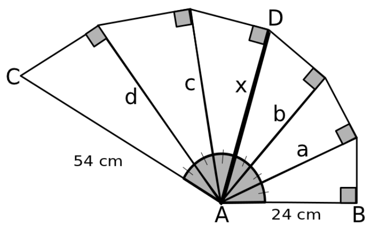
ALTERNATIVA C

Vamos denotar as medidas, em centímetros, das hipotenusas dos triângulos retângulos que aparecem na figura por a, b, x, d e c, como na figura abaixo. O nosso objetivo é achar $x = AD$.

Os seis triângulos retângulos são semelhantes, pois têm em comum o ângulo de vértice A. Logo,

$$\frac{24}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{x} = \frac{x}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{54}$$

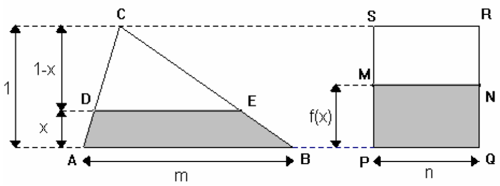
Multiplicando os três primeiros termos acima e, separadamente, os três últimos, obtemos $\frac{24}{x} = \frac{x}{54}$. Logo $x^2 = 24 \times 54 = 2^3 \times 3 \times 2 \times 3^3 = 2^4 \times 3^4 = 4^2 \times 9^2 = 36^2$, donde $x = 36$.



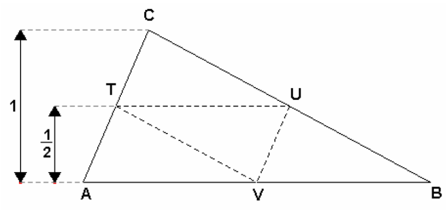
Alternativamente, seja $\lambda = \frac{24}{a}$. Multiplicando os seis termos da sequência de igualdades acima, obtemos $\lambda^6 = \frac{24}{54} = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, donde $\lambda^3 = \frac{2}{3}$. Por outro lado, $\lambda^3 = \frac{24}{a} \times \frac{a}{b} \times \frac{b}{x} = \frac{24}{x}$ e obtemos $\frac{24}{x} = \frac{2}{3}$, donde $x = 36$.

29 *Mesma área* – *Solução*

a) Sejam m e n, respectivamente, as medidas das bases do triângulo ABC e do retângulo $PQRS$, como na figura abaixo. Como a altura destas figuras é 1, segue que área$(ABC) = \frac{m}{2}$ e área$(PQRS) = n$. Da igualdade destas áreas segue $\frac{m}{2} = n$, donde $\frac{m}{n} = 2$.



b) Quando $x = \frac{1}{2}$ os pontos D e E coincidem com os pontos médios T e U dos lados AC e BC, respectivamente. Se V é o ponto médio do lado AB, podemos decompor o triângulo ABC em quatro triângulos congruentes, como na figura a seguir.



Assim,

$$\text{área}(ABUT) = \frac{3}{4}\,\text{área}(ABC) = \frac{3}{4}\frac{m}{2} = \frac{3m}{8}.$$

Por outro lado, temos que

$$\text{área}(PQNM) = f\left(\frac{1}{2}\right)n$$

assim, para que as áreas sejam iguais devemos ter:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)n = \frac{3m}{8} = \frac{3(2n)}{8} = \frac{3n}{4}$$

donde $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

c) Vamos primeiro calcular a área do trapézio $ABED$ em função de x. Como DE é paralela a AB, os triângulos DEC e ABC são semelhantes; a razão de semelhança é a razão de suas alturas, que é $\frac{1-x}{1} = 1-x$. Como áreas de figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança, segue que

$$\text{área}(DEC) = (1-x)^2\text{área}(ABC) = \frac{(1-x)^2 m}{2}$$

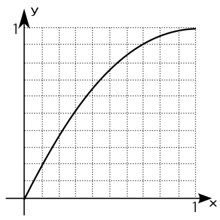
Logo

$$\text{área}(ABED) = \text{área}(ABC) - \text{área}(DEC) = \frac{m}{2} - \frac{(1-x)^2 m}{2} = (2x - x^2)n$$

Da igualdade das áreas de $ABED$ e $PQMN$, segue que

$$(2x - x^2)n = f(x)n$$

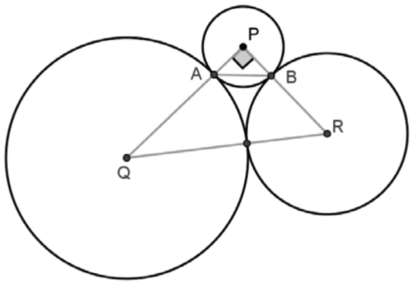
e concluímos que $f(x) = 2x - x^2$. A figura a seguir mostra o gráfico de $f(x)$ para $0 \leq x \leq 1$.



30 *Três circunferências e um comprimento* – *Solução*

ALTERNATIVA B

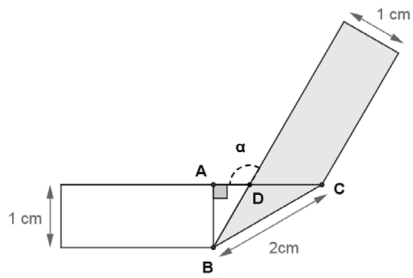
Lembramos primeiro que se duas circunferências são tangentes, então, a reta que passa por seus centros passa também pelo ponto de tangência. No nosso caso, chamando de P, Q e R os centros das circunferências (como na figura), isso mostra que $PR = 3, PQ = 4$ e $QR = 5$. Como $3^2 + 4^2 = 5^2$, segue que o triângulo PQR é retângulo em P. Além disso, como $PA = PB = 1$, vemos que AB é a diagonal de um quadrado de lado 1, ou seja, $AB = \sqrt{2}$.



31 *Papel dobrado* – *Solução*

ALTERNATIVA C

Consideremos o triângulo ABC na figura ao lado. Ele é retângulo com $AB = 1$cm e $BC = 2$cm, ou seja, um cateto é metade da hipotenusa. Segue que $D\hat{C}B = A\hat{C}B = 30°$ e, analogamente, $C\hat{B}D = 30°$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, segue que $B\hat{D}C = 180° - 30° - 30° = 120°$. Como $B\hat{D}C$ e α são opostos pelo vértice, concluímos que $\alpha = 120°$.



32 *Muitos quadrados* – *Solução*

a) A área da folha, era igual a soma das áreas dos nove quadrados, que é (em centímetros quadrados):

$$1^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 14^2 + 15^2 + 18^2 = 1056.$$

b) Sejam a e b as dimensões da folha, onde supomos $a \leq b$. Como a área de um retângulo é o produto de suas dimensões, temos $ab = 1056$. Além disso, como as medidas dos lados dos quadrados em que a folha foi cortada são números inteiros, segue que a e b devem ser números inteiros. Observamos, finalmente, que a e b devem ser maiores ou iguais a 18, pois um dos quadrados em que a folha foi cortada tem lado com esta medida. Como a e b são divisores de 1056, a fatoração em fatores primos $1056 = 2^5 \times 3 \times 11$ nos mostra que a e b são da forma $2^x \times 3^y \times 11^z$, onde x, y e z são inteiros tais que $0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$. Lembrando que $ab = 1056$ e que a e b são maiores que 18, obtemos as seguintes possibilidades:

a	**b**
$2 \times 11 = 22$	$2^4 \times 3 = 48$
$2^3 \times 3 = 24$	$2^2 \times 11 = 44$
$2^5 = 32$	$3 \times 11 = 33$

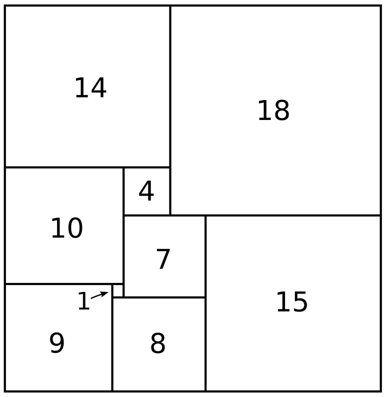
Temos agora que decidir quais destas possibilidades podem ocorrer como medidas da folha. Como o maior quadrado tem lado 18, que é menor que 22, 24 e 32, vemos que nenhum quadrado pode encostar nos dois lados de comprimento b da folha. Isto quer dizer que b pode ser expresso de duas maneiras como uma soma, na qual as parcelas são medidas dos lados dos quadrados, sendo que:

- não há parcelas repetidas em nenhuma das duas expressões e
- não há parcelas comuns às duas expressões.

Este argumento mostra que $2b \leq 1 + 4 + 7 + 8 + 9 + 10 + 14 + 15 + 18$ ou seja, $2b \leq 86$. Logo $b \leq 43$ e a única possibilidade é $b = 33$. Segue que as dimensões da folha eram $a = 32$ e $b = 33$.

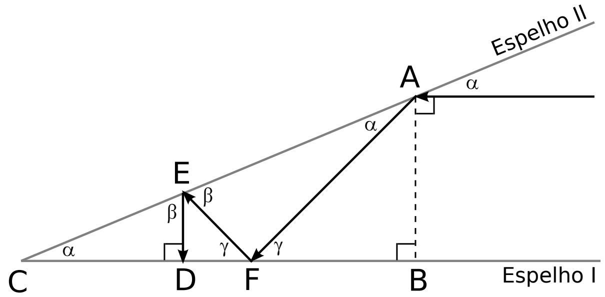
Existem outras maneiras de eliminar os pares $(22, 48)$ e $(24, 44)$, usando o argumento acima e mostrando, por exemplo, que não existem duas maneiras de escrever 22 e 24 como soma dos lados dos quadrados de duas maneiras com parcelas distintas e sem parcelas comuns. Esta solução depende do fato de que, em qualquer decomposição de um retângulo em quadrados, os lados dos quadrados são necessariamente paralelos a um dos lados do retângulo. Um argumento intuitivo para demonstrar este fato consiste em selecionar um vértice do retângulo e observar que o quadrado ao qual este vértice pertence tem seus lados apoiados sobre os lados do retângulo. Qualquer quadrado que toca este primeiro quadrado (mesmo que em apenas um vértice) tem seus lados necessariamente paralelos aos lados do retângulo, pois, caso contrário, teríamos ângulos diferentes de 90° ou 180° na decomposição, e estes ângulos não podem ser preenchidos com quadrados.

c) A única possibilidade (a menos de rotações e simetrias) é mostrada a seguir:



33 *Luz e espelho* – *Solução*

a) 1ª *solução*: Marcamos na figura os ângulos relevantes para a solução. Notamos em particular que em A o ângulo de incidência (e, portanto, o de reflexão) é igual a α; de fato, o raio de luz entra paralelo ao espelho **I** e a reta suporte do espelho **II** é transversal a ambos. Como γ é ângulo externo do triângulo AFC, segue que $\gamma = 2\alpha$. Analogamente, como β é ângulo externo do triângulo CEF, temos $\beta = \alpha + \gamma = 3\alpha$. Finalmente, do triângulo retângulo CDE temos $180° = \alpha + \beta + 90° = 4\alpha + 90°$, donde $4\alpha = 90°$, ou seja, $\alpha = 22,5°$.



2ª *solução*: Como a soma dos ângulos do triângulo ABF é 180°, segue que $B\hat{A}F = 90° - \gamma$. E como a soma dos ângulos com vértice em A também é 180°, segue que $2\alpha + (90° - \gamma) + 90° = 180°$, donde $\gamma = 2\alpha$. Considerando agora o triângulo AFE, temos $\alpha + \beta + (180° - 2\gamma) = 180°$, donde tiramos $\beta = 2\gamma - \alpha = 3\alpha$. Finalmente, o triângulo CDE nos diz que $180° = \alpha + \beta + 90° = 4\alpha + 90°$ e segue que $4\alpha = 90°$, ou seja, $\alpha = 22,5°$.

b) 1ª *solução*: Observamos que, como $\gamma = 2\alpha = 45°$, o triângulo DEF é isósceles, isto é, $ED = DF$. O teorema de Pitágoras nos diz que

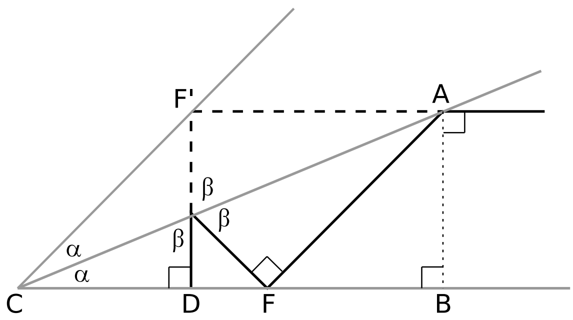
$$EF^2 = ED^2 + DF^2 = 2ED^2$$

donde tiramos $EF = \sqrt{2}ED$. O mesmo argumento aplicado ao triângulo ABF mostra que $AF = \sqrt{2}AB = 10\sqrt{2}$.

Notamos agora que os triângulos CDE e AFE são semelhantes, pois têm os ângulos α e β em comum. Logo

$$\frac{CD}{AF} = \frac{CD}{10\sqrt{2}} = \frac{DE}{FE} = \frac{DE}{\sqrt{2}DE} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

donde tiramos $CD = 10$.
2ª *solução*: Refletimos a reta CF usando a reta CA como eixo de simetria, obtendo a semi-reta CF', onde F' é o simétrico de F (figura abaixo).



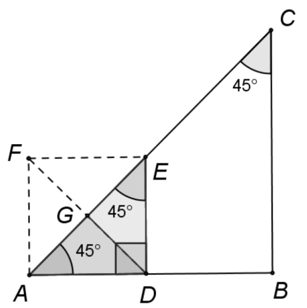
Note que

$$C\hat{E}A = C\hat{E}F + \beta = C\hat{E}F' + F'\hat{E}A.$$

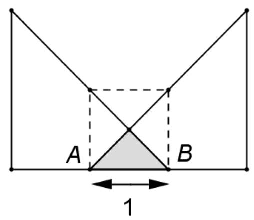
Como $C\hat{E}F = C\hat{E}F'$, a equação anterior só pode ser válida se $F'\hat{E}A = \beta$. Isso implica que os pontos D, E e F' estão alinhados (ver figura acima); assim, CDF' é um triângulo. Como $\alpha = 22{,}5°$ segue que $D\hat{C}F' = 45°$, donde CDF' é isósceles e então $CD = DF'$. Para terminar, notamos que $ABDF'$ é um retângulo, e segue que $DF' = AB$. Logo $CD = AB = 10$.

34 *Região comum* – *Solução*

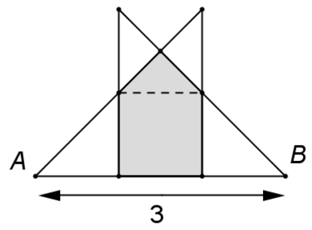
Observação: O argumento geral para a resolução desta questão está ilustrado abaixo. O triângulo ABC é um dos triângulos resultantes do corte do quadrado, e D é um ponto qualquer no lado AB. Fazendo DE perpendicular a AB, o triângulo ADE também é retângulo de lados iguais, e sua área é igual a metade da área do quadrado $ADEF$; a área do triângulo ADG é então igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado $ADEF$.



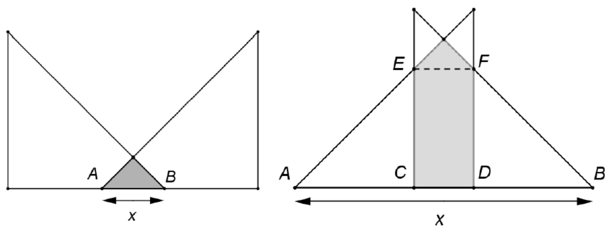
a) Quando $x = 1$, a figura formada pela sobreposição dos triângulos maiores é um triângulo menor, indicado em cinza na figura abaixo. A observação acima mostra que sua área é a quarta parte da área de um quadrado de lado 1, isto é, $f(1) = \frac{1}{4}$.



Quando $x = 3$, a figura formada pela sobreposição dos dois triângulos é um pentágono, como na figura abaixo. Como os triângulos têm catetos de medida 2 e $AB = 3$, vemos que os catetos se sobrepõem em um segmento de medida 1. Logo, o pentágono é a união de um quadrado de lado 1 e um triângulo idêntico ao que consideramos no início desta questão. Logo, $f(3) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.



b) Para valores de x tais que $0 \leq x \leq 2$, a figura formada pela sobreposição dos triângulos é o triângulo em cinza à esquerda na figura abaixo, donde $f(x) = \frac{x^2}{4}$ para $0 \leq x \leq 2$, conforme a observação inicial. Quando $2 < x \leq 4$, a figura formada pela sobreposição dos triângulos é um pentágono, como ilustrado abaixo.



Temos então $AC + CD = 2 = BD + CD$, donde

$$4 = AC + BD + CD + CD = x + CD,$$

ou seja, $CD = 4 - x$; logo $AC = BD = 2 - (4 - x) = x - 2$. Vemos assim que o pentágono pode ser decomposto em um retângulo $CDFE$ de base $4 - x$ e altura $CE = AC = x - 2$ e um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa $4 - x$.

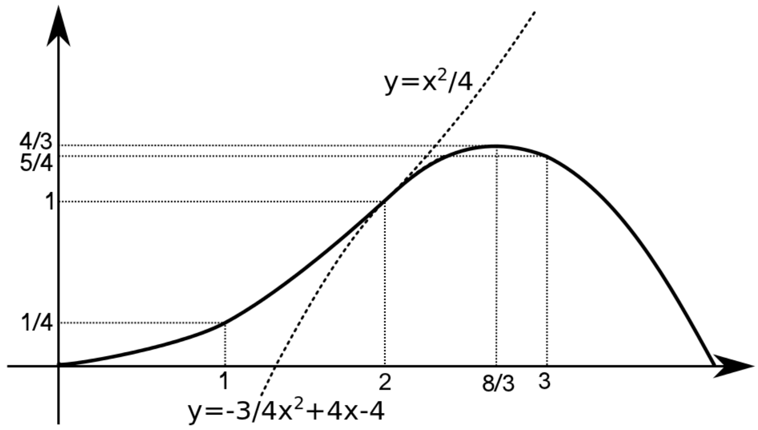
Então, para $2 < x \leq 4$, temos que:

$$f(x) = (4 - x)(x - 2) + \frac{(4 - x)^2}{4} = -\frac{3}{4}x^2 + 4x - 4.$$

Notamos que esta última expressão também assume o valor 1 para $x = 2$. Em resumo, temos:

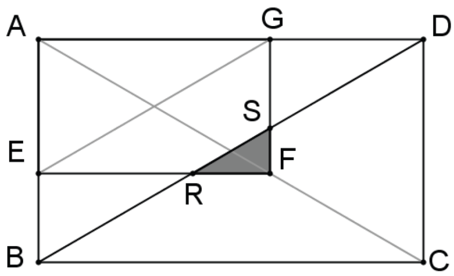
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & \text{se } \ 0 \leq x \leq 2; \\ -\frac{3}{4}x^2 + 4x - 4, & \text{se } \ 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Notamos também que $f(4) = 0$ (como era de se esperar). O gráfico de f está esboçado a seguir; nele marcamos os valores calculados no item anterior, bem como outros valores importantes para a resolução do item *c)*.



c) A observação direta do gráfico mostra que o valor máximo da função no intervalo $[0,2]$ é $f(2) = 1$. Resta analisar a função no intervalo $[2,4]$. Esquecendo por um momento que estamos neste intervalo, vamos considerar a função quadrática $g(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 4x - 4$ definida para todo número real x; ela é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a = -\frac{3}{4}, b = 4$ e $c = -4$. Como $a < 0$, ela assume um valor máximo para $x = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{3}$ e seu valor neste ponto é $-\frac{\Delta}{4a} = \frac{4}{3}$ (podemos também calcular diretamente $g\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{4}{3}$). Uma vez que $\frac{8}{3}$ pertence ao intervalo $[2,4]$, segue que o máximo de f neste intervalo é $\frac{4}{3}$, e como $\frac{4}{3} > 1$ concluímos que este é o valor máximo de f no intervalo $[0,4]$.

35 *Qual a razão?* – *Solução*



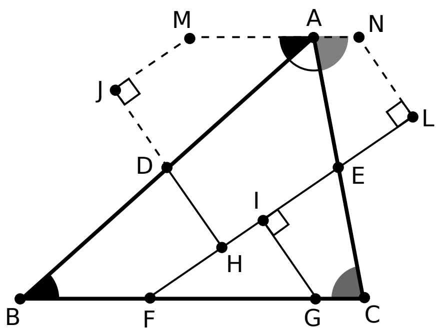
Como a área do triângulo RFS é igual a $\frac{1}{18}$ da área do retângulo $AEFG$, ela é igual a $\frac{1}{9}$ da área do triângulo EFG. Como esses triângulos são semelhantes e a razão entre suas áreas é o quadrado de sua razão de semelhança, segue que essa última razão é $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$. Logo $FR = \frac{1}{3}EF$ e então $ER = EF - \frac{1}{3}EF = \frac{2}{3}EF$. Como os triângulos FRS e EBR são semelhantes, isso nos mostra que sua razão de semelhança é

$$\frac{FR}{RE} = \frac{\frac{1}{3}EF}{\frac{2}{3}EF} = \frac{1}{2}$$

Temos então $AE = GF = 3FS$ e $EB = 2FS$, donde $AB = AE + EB = 3FS + 2FS = 5FS$ e $\frac{AE}{AB} = \frac{3FS}{5FS} = \frac{3}{5}$. Pelo teorema de Tales temos $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$ e obtemos $\frac{AF}{AC} = \frac{3}{5}$.

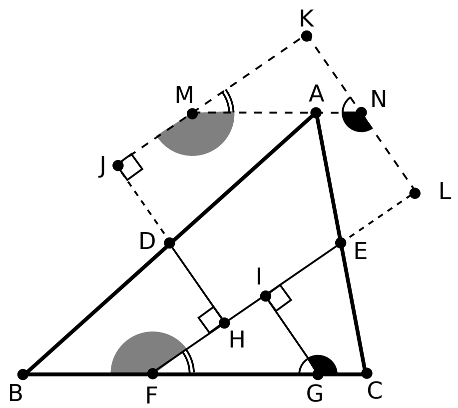
36 *Um triângulo em quatro partes* – *Solução*

a) 1ª *solução*: Na figura a seguir marcamos, em preto, o ângulo em B do triângulo ABC e o ângulo correspondente no polígono $AMJD$; em cinza, marcamos o ângulo em C do triângulo ABC e o ângulo correspondente do polígono $AELN$. Podemos observar na parte superior da figura que o ângulo MAN é a soma desses dois ângulos com o ângulo em A do triângulo ABC; como a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$, segue que $MAN = 180°$. Logo, M, A e N estão alinhados.

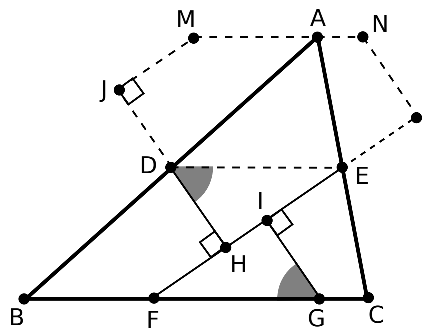


2ª *solução*: Observamos primeiro que AM é paralelo a BF, pois ele é obtido de BF por meio de uma rotação de 180°; do mesmo modo, AN é paralelo a CG. Como BF e CG estão na mesma reta suporte e AM e AN têm o ponto A em comum, segue que os pontos M, A e N estão alinhados.

b) Na figura abaixo os ângulos marcados em cinza são congruentes, assim como os ângulos marcados em preto. Segue que os ângulos marcados em branco com traço duplo também são congruentes, pois são ambos suplementos do ângulo vermelho; do mesmo modo, os ângulos em branco com traço simples são também congruentes. Notamos agora que $MN = MA + AN = BF + CG = BC - FG = 2FG = FG = FG$. Segue, pelo critério *ângulo-lado-ângulo*, que os triângulos FGI e MNK são congruentes.



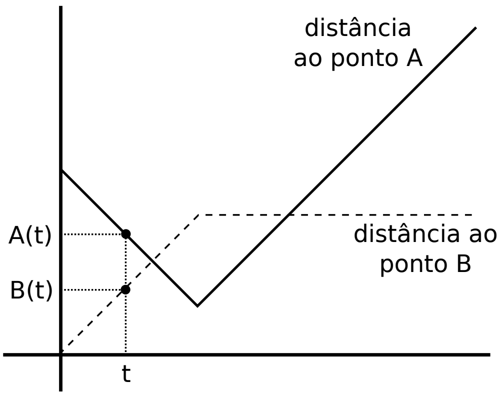
c) Na figura abaixo traçamos a base média DE do triângulo ABC. O teorema da base média nos diz que DE é paralelo a BC e que $DE = \frac{1}{2}BC = FG$. Segue que os triângulos FGI e EHD são congruentes, pois são retângulos, tem os ângulos cinzas congruentes (pois são agudos de lados paralelos) e hipotenusas congruentes. Em particular, temos $FI = EH$, donde $FH = FI - HI = EH - HI = EI$. Logo $LH = LE + EI + IH = FH + HI + IE = EF$.



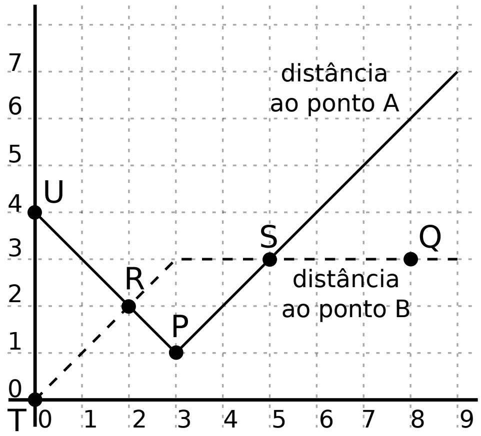
d) A área do quadrado $HJKL$ é igual à área do triângulo ABC, que é 9; logo o lado do quadrado mede 3. Em particular, $LH = 3$ e segue do item anterior que $EF = 3$.

37 *As distâncias da formiguinha* – Solução

Vamos denotar as distâncias da formiguinha aos pontos **A** e **B**, no instante t, por $A(t)$ e $B(t)$, respectivamente. As funções $A(t)$ e $B(t)$ estão representadas no gráfico abaixo:

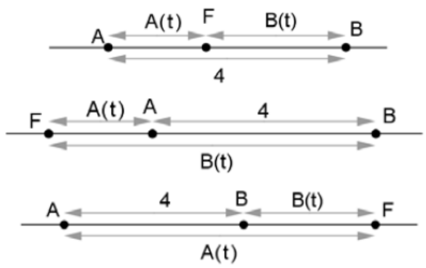


No gráfico abaixo, o ponto P mostra que $A(3) = 1$ e o ponto Q mostra que $B(8) = 3$



a) Os pontos R e S, onde os gráficos se cruzam, correspondem aos instantes t nos quais $A(t) = B(t)$, ou seja, quando a formiguinha se encontrava à mesma distância dos pontos A e B. Em R temos $t = 2$ e $A(2) = B(2) = 2$; em S temos $t = 5$ e $A(5) = B(5) = 3$.
b) Os pontos T e U mostram que $B(0) = 0$ e $A(0) = 4$, ou seja, em $t = 0$ a formiguinha se encontrava sobre **B** e à distância 4 de **A**. Logo, a distância entre **A** e **B** é 4.
c) Quando a formiguinha **F** estava na reta que passa por **A** e **B**, uma das três possibilidades a seguir deve ter ocorrido:

1. **F** estava entre **A** e **B**, ou seja, $A(t) + B(t) = 4$
2. **A** estava entre **F** e **B**, ou seja, $B(t) - A(t) = 4$
3. **B** estava entre **A** e **F**, ou seja, $A(t) - B(t) = 4$

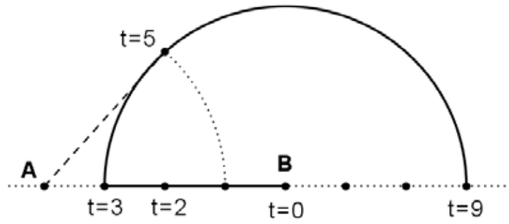


No gráfico anterior, vemos que a primeira possibilidade ocorreu no intervalo de tempo entre $t = 0$ e $t = 3$; a segunda possibilidade não ocorreu e a terceira ocorreu apenas no instante $t = 9$.
d) Como vimos no item anterior, de até $t = 0$ até $t = 3$ a formiguinha partiu de **B** e se moveu ao longo do segmento **AB**. Nesse trajeto a função $A(t)$ decresceu, ou seja, a formiguinha se aproximou de **A** até chegar a um ponto que dista 1 de **A** e 3 de **B**.

Entre $t = 3$ e $t = 9$ o gráfico mostra que $B(t)$ foi constante e igual a 3, ou seja, a formiguinha andou ao longo de um arco de círculo de centro **B** e raio 3.

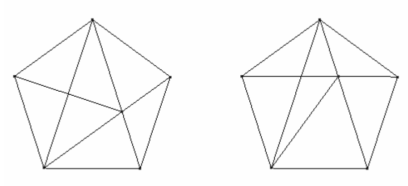
Finalmente, em $t = 9$ a formiguinha voltou à reta **AB**, dessa vez em um ponto que dista 7 de **A** e 3 de **B**.

Na figura abaixo, ilustramos esse trajeto, com as posições da formiguinha em instantes especiais. Assim, a formiguinha percorreu um segmento de comprimento 3 seguido de um semicírculo de raio 3; o comprimento desse trajeto é $3 + 3\pi$.



38 ***Triangulações legais*** – *Solução*

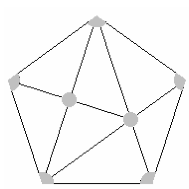
a) A figura a seguir mostra duas soluções para o problema.



b) A figura do enunciado mostra que, ao traçar as cinco diagonais do pentágono, obtemos 10 triângulos e um novo pentágono central. A repetição desse processo n vezes (pensamos na repetição de 0 vezes como não tendo feito nada) tem como resultado $10n$ triângulos e um pentágono central, que podemos dividir em $3, 5, 7, 9$, ou 11 triângulos como mostrado no enunciado. Desse modo, podemos triangular legalmente o pentágono em $10n + r$ triângulos onde r pode ser 3, 5, 7, 9 ou 11. Como qualquer número ímpar se escreve dessa forma, segue que podemos triangular legalmente o pentágono em qualquer número ímpar de triângulos.

Por exemplo, para triangular legalmente o pentágono em 229 triângulos, escrevemos $229 = 10 \times 22 + 9$, então efetuamos o processo de divisão por diagonais 22 vezes e finalmente dividimos o pentágono central restante em 9 triângulos.

c) 1ª *solução*: Consideremos um pentágono triangulado legalmente, e sejam n o número de triângulos e m o número de pontos legais interiores dessa divisão. A soma dos ângulos de todos os triângulos é $180n$ graus. Por outro lado, essa soma é igual à soma dos ângulos em volta dos pontos legais interiores mais a soma dos ângulos internos do pentágono, ou seja, é igual a $(360m + 540)$ graus. Logo $180n = 360m + 540$, ou seja, $n = 2m + 3$ que é um número ímpar. Exemplificamos essa demonstração com a figura abaixo: onde $n = 7$ e $m = 2$.



2ª *solução*: Consideremos como acima um pentágono triangulado legalmente em n triângulos, e seja m o número total de lados desses triângulos. Ao contar os lados desses triângulos um por um, teremos dois casos:

1. **Primeiro caso:** o lado é comum a dois triângulos

   Nesse caso, o lado em questão será contado duas vezes.

2. **Segundo caso:** o lado é um dos lados do pentágono

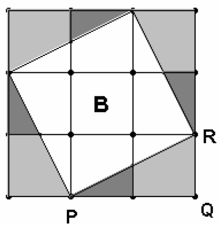
   Nesse caso ele só será contado uma única vez.

Obtemos então $m = \frac{3n-5}{2} + 5$. Como m e n são números inteiros segue que $\frac{3n-5}{2}$ também é inteiro, ou seja, $3n-5$ é par, donde n é ímpar. A figura usada na solução anterior exemplifica essa demonstração no caso em que $n = 7$ e $m = 13$.

39 *Quadrado legal* – *Solução*

Observação: Para facilitar a escrita desta solução, vamos nos referir aos pontos do quadriculado como *pontos legais*.

a) 1ª *solução:* Observando a figura abaixo, vemos que o quadrado B pode ser inscrito em um quadrado que consiste de 9 quadradinhos.



A parte exterior ao quadrado B na figura acima, pode ser decomposta em quatro triângulos iguais (em cinza). Cada triângulo é a metade de um retângulo feito de dois quadradinhos. Sendo assim a área de cada um desses triângulos é igual a 1cm^2. Logo a área do quadrado B é $9 - 4 = 5\text{cm}^2$.

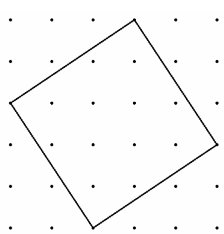
2ª *solução:* Utilizando novamente a figura da solução anterior, podemos também argumentar que o quadrado B foi decomposto em um quadradinho e quatro triângulos de área 1cm^2, donde sua área é $1 + 4 = 5\text{cm}^2$.

3ª *solução:* Podemos calcular o lado PR do quadrado observando o triângulo retângulo PQR na figura utilizada nas soluções anteriores. Seus catetos são PQ e QR, de medidas 1 e 2, respectivamente. Pelo teorema de Pitágoras, temos

$$PR^2 = \sqrt{PQ^2 + QR^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

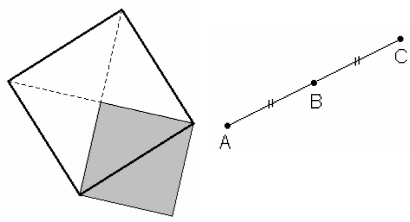
e segue que a área do quadrado é $(\sqrt{5})^2 = 5\text{cm}^2$.

b) Queremos desenhar um quadrado legal de área 13cm^2; seu lado deve então medir $\sqrt{13}$cm. Observando a segunda solução apresentada no item *a)*, vemos que o lado deve ser a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos de comprimentos a e b que são números inteiros e tais que $a^2 + b^2 = 13$. Podemos então escolher $a = 3$ e $b = 2$ (a única solução, a menos de trocas dos valores de a e b) e construir nosso quadrado de área 13cm^2 como, por exemplo, indicado na figura abaixo.



c) Se existe um quadrado legal de área n, então seu lado é $\sqrt{n}$; para construir um segmento deste comprimento devemos, como no item anterior, encontrar inteiros a e b tais que $a^2 + b^2 = n$. Para 41 não há problema, pois $41 = 4^2 + 5^2$; mas para 43 isto é impossível, como se pode ver por listagem direta. De fato, como $7^2 = 49$ ultrapassa 43, devemos testar apenas se 43 se escreve como soma de dois quadrados dos números de 1 a 6, o que não acontece pois $43 - 1^2 = 42, 43 - 2^2 = 39, 43 - 3^2 = 34, 43 - 4^2 = 27, 43 - 5^2 = 18$ e $43 - 6^2 = 7$ não são quadrados perfeitos. Logo é possível construir um quadrado legal de área 41cm^2, mas não é possível construir um de área 43cm^2.

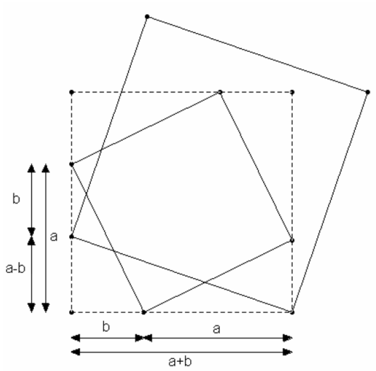
d) 1ª *solução:* A figura abaixo mostra um quadrado legal em cinza e a construção de um novo quadrado, em traço mais grosso, de área igual ao dobro da área do quadrado original.



Notamos que, como os vértices do quadrado original são pontos legais, então os vértices do quadrado maior também são pontos legais. Para justificar esta última afirmativa, basta notar que se A e B são pontos legais e C é o simétrico de A com relação a B (como na figura acima) então C também é um ponto legal. Desse modo, o novo quadrado também é legal.

2ª *solução:* Como vimos no item *b)*, se um quadrado legal tem área n então existem inteiros a e b tais que $n = a^2 + b^2$. Reciprocamente, se existem inteiros a e b tais que $n = a^2 + b^2$, então existe um quadrado legal de área n. Como $(a-b)^2 + (a+b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ vemos que um triângulo retângulo de catetos $a - b$ e $a + b$ terá hipotenusa $\sqrt{2n}$; o quadrado construído sobre esta hipotenusa terá área $2n$ (em outras palavras, mostramos que se n é soma de dois quadrados de inteiros então $2n$ também o é).

Usando este fato, ilustramos na figura abaixo uma construção de um quadrado legal de área $2n$ (o quadrado grande em linha contínua) a partir de um quadrado legal de área n (o quadrado pequeno em linha contínua). O quadrado pontilhado serve apenas para indicar os sentidos horizontal e vertical.



Notamos, como antes, que como o quadrado original é legal então todos os pontos indicados são legais.