Uma palavra aos alunos e professores

O Banco de Questões (BQ) foi concebido para divulgar nas escolas da rede pública material de competições de Matemática, nacionais ou internacionais. Por isso grande parte do conteúdo não é original, são questões dessas competições ou de preparação para elas encontradas em diversos *sites* e apostilas. Aproveitamos para agradecer a todos que mantêm esses *sites* com livre acesso pela grande contribuição que dão a tantos alunos e professores.

Como temos feito desde $2\,005$, não nos preocupamos com uniformidade. A cada ano o BQ apresenta formato, quantidade e nível de dificuldade diferentes dos anos anteriores. A linguagem usada nas soluções é bastante informal mas sem comprometer o rigor matemático. O BQ não é um livro didático e por isso continuamos a produzi-lo de forma bastante artesanal.

Incentivamos alunos e professores a procurar soluções diferentes das aqui apresentadas, com certeza elas existem e podem ser mais interessantes.

Por solicitação de muitos alunos, retomamos esse ano a sessão Desafios aonde os problemas requerem mais paciência, mais tempo e mais atenção. Aproveitamos para informar que temos agora no site da OBMEP (*www.obmep.org.br*) a sessão "Problemas da 15na" com material muito instigante e desafiador para aqueles que gostam de "quebrar a cabeça" com problemas de Matemática.

Os problemas estão agrupados em três níveis conforme é feito nas provas da OBMEP, mas muitos são interessantes para todos os alunos.

Sugestões quaisquer (por exemplo, de soluções diferentes) ou críticas serão bem recebidas no email: contato@obmep.org.br

Desejamos que esse Banco de Questões proporcione a todos bons momentos de reflexão e descobertas.

Direção Acadêmica da OBMEP

Organizado por:

- Suely Druck (UFF)
- Maria Elasir Seabra Gomes (UFMG)

Com a colaboração de:

- Ana Catarina P. Hellmeister (USP/SP)
- Fábio Brochero (UFMG)
- Francisco Dutenhefner (UFMG)

Texto já revisado pela nova ortografia.

Conteúdo

Nível 1

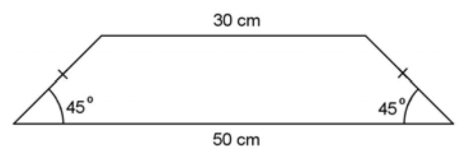
Lista 1

1. **Encontro de amigos** – Embora eu esteja certo de que meu relógio está adiantado 5 minutos, ele está, na realidade, com 10 minutos de atraso. Por outro lado, o relógio do meu amigo está realmente 5 minutos adiantado, embora ele pense que está correto. Nós marcamos um encontro às 10 horas e planejamos chegar pontualmente. Quem chegará em primeiro lugar? Depois de quanto tempo chegará o outro?

2. **Trabalho comunitário** – Uma classe tem 22 alunos e 18 alunas. Durante as férias, 60% dos alunos dessa classe foram prestar trabalho comunitário. No mínimo, quantas alunas participaram desse trabalho?

   (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

3. **Área de trapézios** – Unindo quatro trapézios iguais de bases 30 cm e 50 cm e lados não paralelos iguais, como o da figura, podemos formar um quadrado de área $2\,500$ cm^2, com um "buraco" quadrado no meio. Qual é a área de cada trapézio, em cm^2?



   (A) 200 (B) 250 (C) 300 (D) 350 (E) 400

4. **Adivinhação** – Pensei em 2 números de dois algarismos, que não possuem algarismos em comum, sendo um o dobro do outro. Além disso, os algarismos do menor número são a soma e a diferença dos algarismos do maior número. Quais são os números?

5. **18 números consecutivos** – Escreva 18 números consecutivos de 3 algarismos e verifique que um deles é divisível pela soma de seus algarismos.

   Isso é sempre verdade. Ou seja: se você escrever 18 números consecutivos de 3 algarismos, então um deles é divisível pela soma de seus algarismos. Mostre este fato.

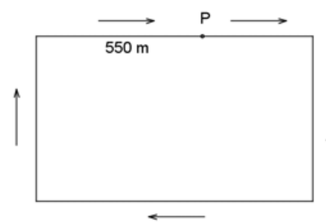
Lista 2

1. **Completar uma tabela** – Descubra a regra utilizada para as casas já preenchidas e complete a tabela. Qual é o valor de $\mathbf{A}$?

0	**1**	**2**	**3**	**4**
1	2	5	10	
2				
3				
4				**A**

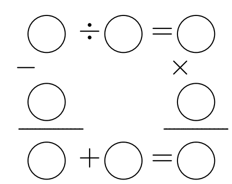
2. **Procurando múltiplos de 9** – Consideremos um conjunto formado por 10 números naturais diferentes. Se calculamos todas as diferenças entre esses números, pelo menos uma dessas diferenças é um múltiplo de 9?

3. **Correndo numa praça** – Um atleta costuma correr $15,5$ km ao redor de uma praça retangular de dimensões 900 m $\times$ 600 m. Ele inicia a corrida sempre do ponto P situado a 550 m de um dos vértices correndo no sentido horário, como mostra a figura. Em que ponto da praça ele para?



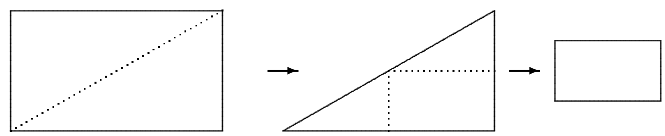
4. **Ovos para um bolo** – Uma doceira foi ao mercado comprar ovos para fazer 43 bolos, todos com a mesma receita, que gasta menos de 9 ovos. O vendedor repara que se tentar embrulhar os ovos que a doceira comprou em grupos de 2 ou de 3 ou de 4 ou de 5 ou de 6 ovos, sempre sobra 1 ovo. Quantos ovos ela usa em cada bolo? Qual o menor número de ovos que a doceira vai gastar para fazer os 43 bolos?

5. **Cálculos H e V** – Você consegue colocar os números de 1 a 8 dentro dos círculos, sem repeti-los, de modo que os cálculos na horizontal e na vertical sejam corretos?
Dica: Quais as possibilidades para a multiplicação? Quais os possíveis lugares para o número 1?



Lista 3

1. **Cortando uma cartolina** – Uma folha retangular de cartolina foi cortada ao longo de sua diagonal. Num dos pedaços obtidos, foram feitos 2 cortes paralelos aos 2 lados menores e pelos pontos médios desses lados. Ao final sobrou um retângulo de perímetro 129 cm. O desenho abaixo indica a sequência de cortes.



   Qual era o perímetro da folha antes do corte?

2. **A soma errada** – A soma ao lado está incorreta. Para corrigi-la basta substituir um certo algarismo em todos os lugares que ele aparece na conta por um outro algarismo. Quais são esses dois algarismos?

$$\begin{array}{r} 742586 \\ \underline{+829430} \\ 1212016 \end{array}$$

3. **Número de 5 algarismos** – Os algarismos $1, 2, 3, 4$ e 5 foram usados, cada um uma única vez, para escrever um número de 5 algarismos $a\,b\,c\,d\,e$, tal que: $a\,b\,c$ é divisível por 4, $b\,c\,d$ por 5, e $c\,d\,e$ por 3. Encontre esse número.

4. **Tabela misteriosa** – Complete a tabela 6×6 de modo que em cada linha e cada coluna apareçam apenas múltiplos de um dos números:

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\,.$$

   Você pode repetir apenas um número na tabela.

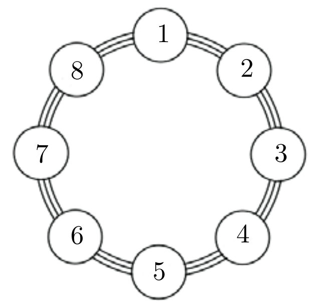
32			40		
				49	
		22			
	15				
		24			
				42	

5. **Habitantes e esporte** – Numa cidade com quase 30 mil habitantes, dois nonos dos homens e dois quinze avos das mulheres pratica esporte somente nos finais de semana, e o número de habitantes que não pratica esporte é o quíntuplo dos que praticam esporte regularmente. Com esses dados, complete a tabela.

Não praticam esporte		Praticam esporte somente nos finais de semana		Praticam esporte regularmente		População
fem.	masc.	fem.	masc.	fem.	masc.	total
8 563	8 322				1 252	

Lista 4

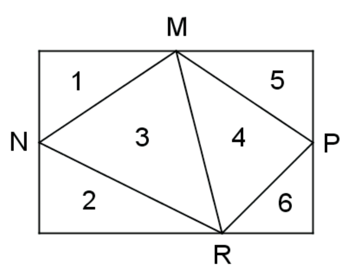
1. **Botões luminosos** – No mecanismo luminoso da figura, cada um dos oito botões pode acender as cores verde ou azul. O mecanismo funciona do seguinte modo: ao ser ligado, todos os botões acendem a luz azul, e se apertamos um botão, esse botão e seus vizinhos trocam de cor. Se ligarmos o mecanismo e apertarmos sucessivamente os botões 1, 3 e 5, qual será o número de luzes verdes que estarão acesas no final?



   (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

2. **Qual é o número?** – Um número de 6 algarismos começa por 1. Se deslocamos esse algarismo 1 da primeira posição para a última à direita, obtemos um novo número de 6 algarismos que é o triplo do número de partida. Qual é esse número?

3. **Jardim variado** – Um jardim retangular de 120 m por 80 m foi dividido em 6 regiões como na figura, onde N, M e P são pontos médios dos lados, e R divide o comprimento na razão $1/3$. Em cada região será plantado um dos seguintes tipos de flor: rosa, margarida, cravo, bem-me-quer, violeta e bromélia, cujos preços, por m^2 estão indicados na tabela. Quais as possíveis escolhas das flores em cada região, de modo a gastar o mínimo possível?



Tipo	Preço por m^2
rosa	3,50
margarida	1,20
cravo	2,20
bem-me-quer	0,80
violeta	1,70
bromélia	3,00

4. **O algarismo 3** – Luis escreveu a sequência de números naturais a partir de 1:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \cdots .$$

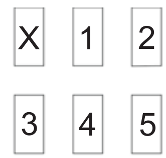
   Quando ele escreveu o algarismo 3 pela $25^{\underline{a}}$ vez?

5. **Soma de potências** – O número $3^{444} + 4^{333}$ é divisível por 5?

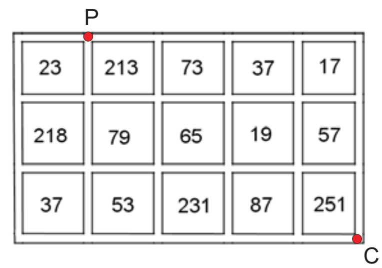
Lista 5

1. **Telefonemas** – João mora em Salvador e seus pais em Recife. Para matar a saudade, ele telefona para seus pais a cada três dias. O primeiro telefonema foi feito no domingo, o segundo telefonema na 4ª feira, o terceiro telefonema no sábado, e assim por diante. Em qual dia da semana João telefonou para seus pais pela centésima vez?

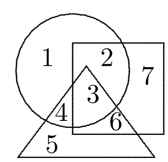
2. **O maior produto** – Com os algarismos de 1 a 5 e um sinal de multiplicação $\times$ Clara forma o produto de 2 números, com o sinal $\times$ entre eles. Como Clara deve colocar os cartões para obter o maior produto possível?



3. **O caminho da Joaninha** – Dona Joaninha quer atravessar um pátio com azulejos quadrados numerados como mostra a figura. Ela vai partir do ponto P e quer chegar ao ponto C andando somente sobre os lados dos azulejos. Dona Joaninha não quer ter números primos à sua direita ao longo de todo o percurso. Qual é o menor percurso que ela pode fazer?



4. **O lugar dos amigos** – Sete amigos traçaram um triângulo, um quadrado e um círculo. Cada um marcou seu lugar com um número:



Ana:	*"Eu não falarei nada."*
Bento:	*"Eu estou dentro de uma única figura."*
Celina:	*"Eu estou dentro das três figuras."*
Diana:	*"Eu estou dentro do triângulo mas não do quadrado."*
Elisa:	*"Eu estou dentro do triângulo e do círculo."*
Fábio:	*"Eu não estou dentro de um polígono."*
Guilherme:	*"Eu estou dentro do círculo."*

Encontre o lugar de cada um.

5. **Quadrado perfeito?** – Cada um dos cinco números abaixo tem 100 algarismos, e é formado pela repetição de um ou dois algarismos:

$$N_1 = 333333\ldots3$$
$$N_2 = 666666\ldots6$$
$$N_3 = 151515\ldots15$$
$$N_4 = 212121\ldots21$$
$$N_5 = 272727\ldots27$$

Algum destes números é um quadrado perfeito?

Lista 6

1. **Preenchendo quadradinhos** – Complete os quadradinhos com os números $1, 2, 3, 5, 6$.

$$(\square + \square - \square) \times \square \div \square = 4$$

2. **Os 3 números** – Sofia brinca de escrever todos os números de 4 algarismos diferentes que se pode escrever com os algarismos $1, 2, 4$ e 7. Ela soma 3 desses números – todos diferentes – e obtém $13\,983$. Quais são esses 3 números?

3. **Preencher uma tabela** – Jandira deve preencher uma tabela 4×4 que já vem com duas casas preenchidas com os números 1 e 2 - veja ao lado. Duas casas são consideradas vizinhas se têm um vértice ou um lado em comum.
As regras que ela tem que obedecer são:

1	**2**		

   - uma casa só pode ser preenchida se alguma de suas casas vizinhas já contém um número;
   - ao preencher uma casa, deve-se colocar a soma de todos os números que já constam em suas casas vizinhas.

   Qual é o maior número que é possível escrever na tabela?

4. **Olimpíada de Pequim** – Na Olimpíada de Pequim sentaram-se, em uma mesa quadrada, as mulheres, Maria e Tânia, e os homens, Juan e David, todos atletas. Cada um deles pratica um esporte diferente: natação, vôlei, ginástica e atletismo. Eles estavam sentados da seguinte maneira:

   (a) Quem pratica a natação estava à esquerda de Maria.
   (b) Quem pratica ginástica estava em frente a Juan.
   (c) Tânia e David sentaram-se lado a lado.
   (d) Uma mulher sentou-se ao lado de quem pratica volei.

   Qual dos atletas pratica atletismo?

5. **Culturas diferentes** – Jorge, que mora em Recife, se corresponde com seu amigo inglês Ralph que mora na Inglaterra. Os dois se compreendem muito bem nas duas línguas, mas têm um problema com as datas: a data 08/10 no Brasil significa 8 de outubro, e na Inglaterra 10 de agosto. Por causa disso, os dois combinaram não se escrever nos dias em que a data for ambígua. Eles preferem datas como 25/03 que só pode significar 25 de março.

   (a) Em quais das datas a seguir Jorge e Ralph não podem se escrever?

   (i) 3 de dezembro (ii) 18 de agosto (iii) 5 de maio

   (b) Quando ocorre o maior período em que os dois amigos não podem se escrever?

Lista 7

1. **Uma liquidação** – Na liquidação da loja SUPER-SUPER todos os produtos estão 50% mais baratos, e aos sábados existe ainda um desconto adicional de 20%. Carla comprou uma calça antes da liquidação, e agora ela se lamenta: *Nesse sábado eu teria economizado R$ 50,40 na calça.* Qual era o preço da calça antes da liquidação?

2. **Número com muitos zeros** – Se a é o número $0,\underbrace{000\ldots000}_{2009 \text{ zeros}}1$, então qual das expressões a seguir representa o maior número?

   (A) $3+a$ (B) $3-a$ (C) $3a$ (D) $3/a$ (E) $a/3$

3. **Corrida das tartarugas** – Cinco tartarugas apostaram uma corrida em linha reta e na chegada a situação foi a seguinte: Sininha está 10 m atrás de Olguinha e 25 m à frente de Rosinha que está 5 m atrás de Elzinha que está 25 m atrás de Pulinha. Qual foi a ordem de chegada?

4. **Que memória...** – Esquecinaldo tem péssima memória para guardar números, mas ótima para lembrar sequências de operações. Por isso, para lembrar do seu código bancário de 5 algarismos, ele consegue se lembrar que nenhum dos algarismos é zero, os dois primeiros algarismos formam uma potência de 5, os dois últimos formam uma potência de 2, o do meio é um múltiplo de 3 e a soma de todos os algarismos é um número ímpar. Agora ele não precisa mais decorar o número porque ele sabe que é o maior número que satisfaz essas condições e que não tem algarismos repetidos. Qual é esse código?

5. **Uma fração irredutível** – Encontre uma fração irredutível tal que o produto de seu numerador pelo denominador seja $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times 10$. Quantas dessas frações irredutíveis existem?

Lista 8

1. **Transformar em decimal** – Escreva o resultado das seguintes expressões na forma decimal:

   (a) $7 \times \frac{2}{3} + 16 \times \frac{5}{12}$ (b) $5 - \left(2 \div \frac{5}{3}\right)$ (c) $1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{3}{1+4}}$

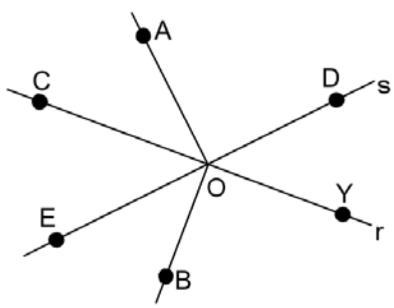
2. **Uma sequência especial** – Escrevendo sucessivamente os números naturais, obtemos a sequência:

   $$1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\,15\,16\,17\,18\,19\,20\,21\,22\ \ldots$$

   Qual algarismo está na $2\,009^{\underline{a}}$ posição dessa sequência?

3. **Cortar um retângulo** – Como cortar um retângulo de 13 cm por 7 cm em 13 retângulos diferentes?

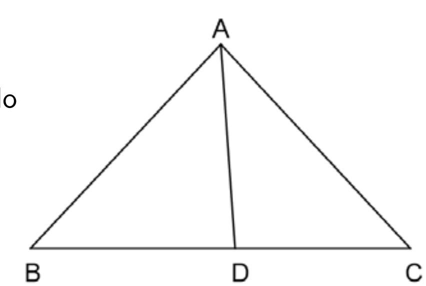
4. **Medida de ângulo** – Na figura, $A\widehat{O}D$ e $B\widehat{O}Y$ são ângulos retos e a medida de $D\widehat{O}Y$ está entre 40° e 50°. Além disso, os pontos C e Y estão sobre a reta r, enquanto D e E estão sobre a reta s. Os possíveis valores para a medida de $A\widehat{O}C$ variam de:



   (A) 30° a 40°
   (B) 40° a 50°
   (C) 50° a 60°
   (D) 40° a 60°
   (E) não podem ser determinados

5. **Perímetros e áreas** – Um quadrado tem $\sqrt{3} + 3$ cm de lado, e as dimensões de um retângulo, em centímetros, são $\sqrt{72} + 3\sqrt{6}$ e $\sqrt{2}$. Qual dos dois tem maior área? E maior perímetro?

6. **Cálculo de ângulo** – Encontre $B\widehat{A}D$, sabendo que $D\widehat{A}C = 39^\circ$, $AB = AC$ e $AD = BD$.



Lista 9

1. **O caminho da formiga** – Uma formiga sai de um ponto A, anda 7 cm para a esquerda, 5 cm para cima, 3 cm para a direita, 2 cm para baixo, 9 cm para a direita, 2 cm para baixo, 1 cm para a esquerda e 1 cm para baixo, chegando no ponto B. Qual é a distância d entre A e B?

   (A) 0 cm (B) 1 cm (C) 4 cm (D) 5 cm (E) 7 cm

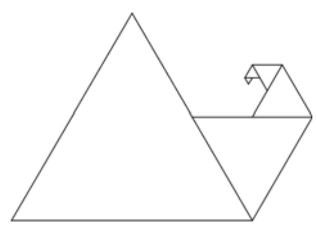
2. **Menino mentiroso** – Joãozinho mente nas terças-feiras, quintas-feiras e sábados e o resto dos dias fala a verdade. Um dia Pedrinho encontra com Joãozinho e têm o seguinte diálogo:

   - Pedrinho pergunta: Que dia é hoje?
   - Joãozinho responde: Sábado.
   - Pedrinho pergunta: E que dia será amanhã?
   - Joãozinho responde: Quarta-feira.

   Que dia da semana o Pedrinho encontrou com o Joãozinho?

3. **Encontre os 4 números** – Encontre quatro números distintos de 3 algarismos, tais que a soma de três quaisquer deles é divisível pelo quarto número.

4. **Colando 6 triângulos** – Construa 6 triângulos equiláteros, o primeiro com lado de comprimento 1 cm e os triângulos seguintes com lado igual a metade do lado do triângulo anterior, como indicado na figura ao lado. Qual é o perímetro desta figura?



5. **Os livros da Elisa** – Elisa tem 24 livros de ciências e outros de matemática e literatura. Se Elisa tivesse um livro a mais de matemática, então $\frac{1}{9}$ de seus livros seria de matemática e um quarto de literatura. Se Elisa tem menos que 100 livros, quantos livros de matemática ela possui?

Lista 10

1. **Divisão por 9 –**

   (a) Listemos os primeiros $20\,092\,009$ números naturais. Em seguida, substituímos, sucessivamente, cada número pela soma dos seus algarismos, até obtermos uma lista de números com apenas um algarismo. A lista tem mais algarismos 4 ou 5? Quantos 9 tem a lista?

   (b) Aplicando o mesmo processo ao número $3^{2\,009}$, isto é, substituindo o número pela soma dos seus algarismos, qual é o número de apenas um algarismo obtido?

   (c) E para o número $17^{2\,009}$?

2. **Uma brincadeira na sala de aula** – A professora Raquel inventou a seguinte brincadeira: escreva um número no quadro, se ele for ímpar acrescente 3 unidades ao número, e se ele for par divida o número por 2.

   Esta operação pode ser feita diversas vezes. A professora está interessada em obter no final o número 1 e perguntou para a classe: Como obter o número 1 após 3 operações? E após 4 operações? E após 5 operações?

3. **Calcule a idade** – Laura e sua avó Ana acabaram de descobrir que, no ano passado, suas idades eram divisíveis por 8 e, no próximo ano, serão divisíveis por 7. Vovó Ana ainda não é centenária. Qual é a idade de Laura?

4. **Divisões e restos** – O dobro de um número dividido por 5 deixa resto 1. Qual o resto da divisão desse número por 5?

5. **Preenchendo o círculo** – Cada um dos sinais $\square$, $\boxplus$, $\boxtimes$, $\boxminus$ e $\boxdot$ representa um número de 1 algarismo. Descubra quem são eles e complete o número que falta no círculo em branco.

$$47 \xrightarrow{\times\square} 423 \xrightarrow{\times\,\boxplus/\boxdot} 282 \xrightarrow{\times\boxminus} \bigcirc \xrightarrow{+\,\boxdot\boxtimes} 1448$$

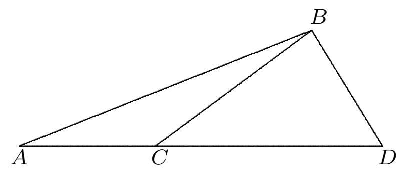
Nível 2

Lista 1

1. **Vista ruim** – Numa classe, 40% dos alunos não enxergam bem. Desses, 70% usam óculos e os 30% restantes usam lentes de contato. Sabendo que 21 alunos usam óculos, quantos alunos tem essa classe?

2. **Idade média da população de Campo Verde** – A razão entre o número de homens e o de mulheres na cidade de Campo Verde é $\frac{2}{3}$. A idade média dos homens é 37 anos e a das mulheres é 42 anos. Qual é a idade média dos habitantes de Campo Verde?

3. **Área de triângulo** – Se $AC = 1{,}5$ cm e $AD = 4$ cm, qual é a relação entre as áreas dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DBC$?



4. **Construindo quadrados perfeitos** – Observe as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} 1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 & = & 25 & = & 5^2 \\ 2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 & = & 121 & = & 11^2 \\ & \vdots & & & \\ 10 \times 11 \times 12 \times 13 + 1 & = & 17\,161 & = & 131^2 \\ & \vdots & & & \end{cases}$$

Será que isso é **sempre** verdadeiro? Isto é: o produto de quatro números inteiros consecutivos, mais 1, é sempre um quadrado perfeito?

5. **Feira de Ciências** – Na Feira de Ciências de uma escola, observou-se que metade dos alunos do ensino fundamental e um quarto dos alunos do ensino médio presentes nesse evento compraram um adesivo cada.

FEIRA DE CIÊNCIAS	
Preço dos Adesivos (unidade)	
R\$ 0,30	alunos do ensino fundamental
R\$ 0,50	alunos do ensino médio

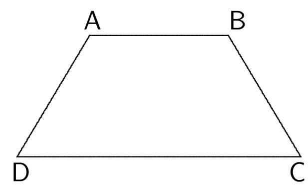
Notou-se também que o número de alunos do ensino médio presentes que não compraram adesivos foi o dobro do número de alunos do ensino fundamental que não compraram adesivos. Sabendo que arrecadou-se R\$ $38{,}00$ na venda de adesivos para os alunos desse dois níveis quantos alunos de cada nível participaram da feira?

Lista 2

1. **Par perfeito** – Dizemos que 2 números naturais *formam um par perfeito* quando a soma e o produto desses dois números são quadrados perfeitos. Por exemplo, 5 e 20 formam um par perfeito, pois $5 + 20 = 25 = 5^2$ e $5 \times 20 = 100 = 10^2$. Será que 122 forma um par perfeito com outro natural?

2. **Um trapézio** – No trapézio da figura abaixo AB é paralelo a CD, $AD = AB = BC = 1$ cm e $DC = 2$ cm. Quanto mede o ângulo $C\widehat{A}D$?

   (A) $30°$
   (B) $45°$
   (C) $60°$
   (D) $90°$
   (E) $120°$



3. **Mistério das bolas** – Henrique têm duas urnas. A primeira urna contém somente bolas pretas e a segunda somente bolas brancas. Henrique retirou um número de bolas da primeira urna e as colocou na segunda. Em seguida, retirou o mesmo número de bolas da segunda urna e as colocou na primeira. Depois disso o número de bolas brancas na primeira urna é maior, menor ou igual ao número de bolas pretas na segunda urna?

4. **Contando a palavra BRASIL** – Quantas vezes aparece a palavra BRASIL na figura ao lado? Só vale ler a palavra emendando letras que estão escritas em quadradinhos adjacentes.

					B
				B	R
			B	R	A
		B	R	A	S
	B	R	A	S	I
B	R	A	S	I	L

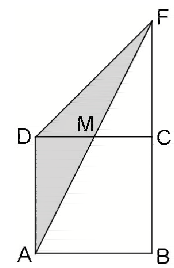
5. **Quais são os números?** – Descubra quais números inteiros positivos x e y satisfazem a equação $x^4 = y^2 + 71$.

Lista 3

1. **No jogo** – Aldo, Bernardo e Carlos jogam baralho. No início, a quantia em dinheiro que eles tinham estava na proporção $7 : 6 : 5$. No final do jogo, a proporção era $6 : 5 : 4$. Um dos jogadores ganhou $1\,200$ reais. Qual a quantidade de dinheiro com que ficou cada jogador, no final da partida?

2. **Um número inteiro** – Mostre que $M = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ é um número inteiro.

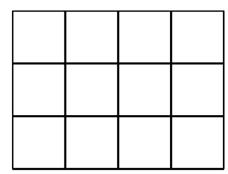
3. **Área de triângulos** – A área do quadrado $ABCD$ é 300 cm^2. Na figura, M é o ponto médio de CD e o ponto F pertence à reta que passa por B e C.



   (a) Qual é a área do triângulo $\triangle ABF$?

   (b) Qual é área do triângulo $\triangle ADF$?

4. **Um quadriculado** – O retângulo quadriculado na figura é feito de 31 segmentos de $0{,}5$ cm, e compreende 12 quadrados. Rosa desenhou numa folha retangular de 21 cm por $29{,}7$ cm quadriculada com quadrados de lado $0{,}5$ cm, um grande retângulo quadriculado feito com $1\,997$ segmentos. Quantos quadrados tem esse retângulo?



5. **Inteiros de 4 algarismos** – Sabendo que a é um número natural, e que $4a^2$ e $\frac{4}{3} \times a^3$ são números naturais de 4 algarismos, determine a.

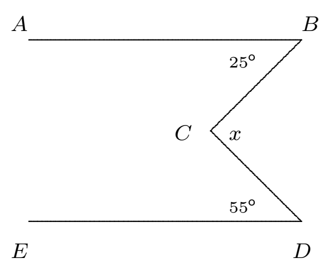
Lista 4

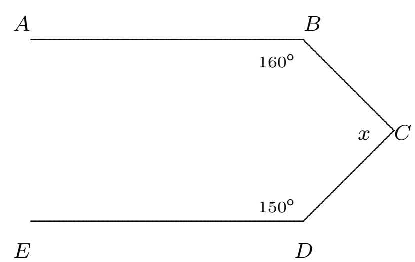
1. **Pares positivos** – Quantos pares de inteiros positivos (x, y) são soluções da equação $3x + 5y = 501$?

2. **Diferença de quadrados** – Se a diferença dos quadrados de dois números inteiros consecutivos é $2\,000$, então os dois números são:

   (A) menores que 100.
   (B) menores que $1\,000$, porém maiores que 99.
   (C) menores que $10\,000$, porém maiores que 999.
   (D) menores que $100\,000$, porém maiores que $9\,999$.
   (E) não existem estes dois números.

3. **Cálculo de ângulos** – Em cada uma das figuras a seguir, calcule o valor do ângulo x, sabendo que os segmentos AB e DE são paralelos.





4. **Tabela** – Na tabela ao lado, com 6 colunas e diversas linhas, estão escritos os números $1, 2, 3, 4, \ldots$ Qual é a posição do número $1\,000$?

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	$\cdots$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

5. **Entre 1 e 2** – Complete os numeradores com inteiros positivos para satisfazer as condições: $\dfrac{a}{5}$ e $\dfrac{b}{7}$ são menores do que 1, e $1 < \dfrac{a}{5} + \dfrac{b}{7} < 2$.

Lista 5

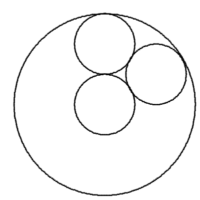
1. **Triatlon** – Maria está planejando participar do Triatlon-Brasil que começa às 24 horas de domingo e consta de 800 m a nado, seguido de 20 km de bicicleta e finalmente 4 km de corrida. Maria corre a uma velocidade constante e que é o triplo da velocidade que nada, e pedala $2{,}5$ vezes mais rápido do que corre. Para terminar a prova em no máximo 1 hora e 20 minutos, quanto tempo ela deve gastar em cada uma das 3 etapas?

2. **Foto de formatura** – O diretor da escola decidiu tirar uma foto dos formandos de $2\,008$. Ele colocou os alunos em filas paralelas, todas com o mesmo número de alunos, mas essa disposição era muito larga para o campo de visão de sua máquina fotográfica. Para resolver esse problema, o diretor reparou que bastava tirar um aluno por fila e colocá-los numa nova fila. Essa disposição não agradou o diretor porque a nova fila tinha 4 alunos a menos que as outras. Ele decide então tirar mais 1 aluno por fila colocando-os na nova fila que ele criou, e constata que assim todas as filas ficam com o mesmo número de alunos, e finalmente tira a foto. Quantos alunos apareceram na foto?

3. **Circunferências tangentes** – Desenhe duas circunferências de mesmo centro, uma de raio 1 cm e a outra de raio 3 cm. Na região exterior a circunferência de raio 1 cm e interior a de raio 3 cm, desenhe circunferências que sejam simultaneamente tangentes às duas circunferências, como mostrado na figura a seguir.

   (a) Qual deve ser o raio dessas circunferências?

   (b) Qual o número máximo dessas circunferências, caso elas não se sobreponham?



4. **Festa na escola** – Para a festa de aniversário da escola, Ana, Pedro, Miriam e Fábio levaram juntos 90 docinhos. A professora deles observou que:

   - se Ana tivesse levado 2 docinhos a mais;
   - se Pedro tivesse levado 2 docinhos a menos;
   - se Miriam tivesse levado o dobro;
   - se Fábio tivesse levado a metade;

   os 4 amigos teriam levado todos o mesmo número de docinhos. Quantos docinhos levou cada um dos amigos?

5. **Inflação** – Márcia está numa loja comprando um gravador que ela queria há muito tempo. Quando o caixa registra o preço ela exclama: *"Não é possível, você registrou o número ao contrário, trocou a ordem de dois algarismos, lembro que na semana passada custava menos que 50 reais!"* Responde o caixa: *Sinto muito, mas ontem todos os nossos artigos tiveram um aumento de* 20%. Qual é o novo preço do gravador?

Lista 6

1. **Gatos no condomínio** – Em um condomínio moram 29 famílias, cada uma delas possui ou 1 gato ou 3 gatos ou 5 gatos. O número de famílias que possuem apenas 1 gato é o mesmo que o de famílias que possuem 5 gatos. Quantos gatos tem esse condomínio?

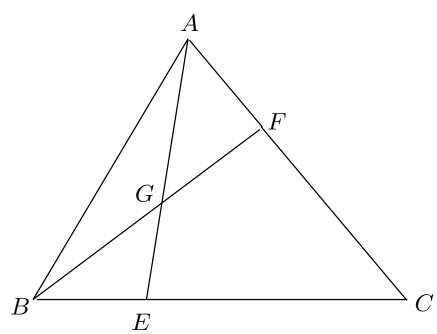
2. **Soma constante** – Preencha as 5 casas em branco da tabela 3×3 com os números de 3 a 8, sem repeti-los, de modo que as somas dos 4 números escritos nas subtabelas formadas por quadrados 2×2 seja a mesma nas 4 subtabelas.

1		2
	9	

3. **Qual é o número?** – Na adição ao lado, letras iguais representam o mesmo algarismo e letras diferentes algarismos diferentes. Encontre o número $ABCDE$.

$$\begin{array}{r} A\,B\,C\,D\,E \\ B\,C\,D\,E \\ C\,D\,E \\ D\,E \\ E \\ \hline A\,A\,A\,A\,A \end{array}$$

4. **Proporção triangular** – Num triângulo $\triangle ABC$, o ponto F está sobre o lado AC e $FC = 2AF$. Se G é o ponto médio do segmento BF e E o ponto de interseção da reta passando por A e G com o segmento BC, calcule a razão $\dfrac{EC}{EB}$.



5. **Números primos entre si** – Encontre todos os pares de inteiros positivos $x\,, y$ tais que x e y são primos entre si, $x < y$ e $2\,000\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)$ é um inteiro ímpar.

Lista 7

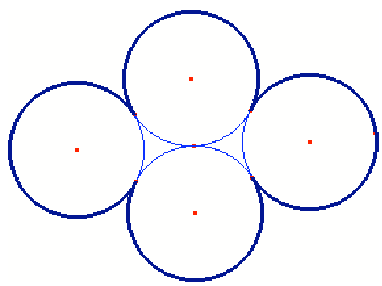
1. **Fique atento** – Determine todas as soluções da equação $\sqrt{x} = x - 2$.

2. **Soluções inteiras** – Determine todos os números inteiros x e y tais que:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{19}.$$

3. **No ponto de ônibus** – Um grupo de meninos e meninas aguarda em um ponto pelo ônibus. No primeiro ônibus que passa embarcam somente 15 meninas, e ficam 2 meninos para cada menina no ponto de ônibus. No segundo ônibus que passa, embarcam somente 45 meninos, e ficam 5 meninas para cada menino no ponto de ônibus. Determine o número de meninos e meninas que estavam no ponto antes da parada do primeiro ônibus.

4. **Contorno circular** – A figura a seguir é formada por quatro círculos tangentes de raio a. Determine o comprimento do contorno externo que está com o traçado destacado.



5. **Um quadrilátero especial** – Dois lados consecutivos de um quadrilátero medem 10 cm e 15 cm. Se cada diagonal divide o quadrilátero em duas regiões de mesma área, calcule o seu perímetro.

Lista 8

1. **Número curioso** – O número 81 tem a seguinte propriedade: ele é divisível pela soma de seus algarismos $8 + 1 = 9$. Quantos números de dois algarismos cumprem esta propriedade?

2. **Número premiado** – Um número de 6 algarismos é "premiado" se a soma de seus primeiros 3 algarismos é igual à soma de seus 3 últimos algarismos. Por exemplo $342\,531$ é premiado pois $3 + 4 + 2 = 5 + 3 + 1$.

   (a) Qual é o maior e o menor número premiado, com 6 algarismos diferentes?

   (b) Mostre que a soma de todos os números premiados, com 6 algarismos diferentes, é divisível por 13.

3. **Altura versus lado** – Seja $\triangle ABC$ um triângulo tal que a altura relativa ao lado BC não é menor do que o lado BC e a altura relativa ao lado AB não é menor do que o lado AB. Determine as medidas dos ângulos deste triângulo.

4. **Frações egípcias** – Encontre números inteiros positivos a e b, com $a > b$, tais que:

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\,.$$

5. **Tabuleiro de xadrez** – De quantas maneiras podemos colocar dois bispos num tabuleiro de xadrez em filas, colunas e casas de cores distintas?

Lista 9

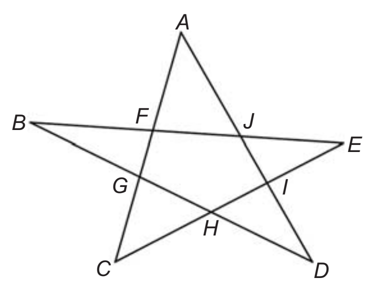
1. **Quem é menor?** – Sem usar calculadora, decida qual dos números 33^{12}, 63^{10} e 127^8 é o menor.

2. **Brincando com números** – A soma $1 + 1 + 4$ dos algarismos do número 114, divide o próprio número. Qual é o maior número, menor do que 900, que satisfaz esta propriedade?

3. **Cortando papéis** – No início de uma brincadeira, André tinha 7 pedaços de papel. Na primeira rodada, ele pegou alguns destes pedaços e cortou cada um deles em 7 pedaços, que são misturados aos pedaços de papel que não foram cortados nesta rodada. Na segunda rodada, ele novamente pegou alguns pedaços e cortou cada um deles em 7 pedaços que foram misturados aos demais papéis. Continuando desta maneira, ao final de alguma rodada, André poderá ter exatamente $2\,009$ pedaços de papel?

4. **Um trapézio especial** – A base AD de um trapézio $ABCD$ mede 30 cm. Suponhamos que existe um ponto E sobre AD tal que os triângulos $\triangle ABE$, $\triangle BCE$ e $\triangle CDE$ tenham perímetros iguais. Determine o comprimento de BC.

5. **Uma estrela** – Na estrela $ABCDE$ na figura que se segue, sabemos que $\measuredangle GBF = 20°$ e $\measuredangle GHI = 130°$. Qual é o valor do ângulo $\measuredangle JEI$?



Lista 10

1. **Número palindrome** – Um número é dito *palindrome* se a leitura da direita para a esquerda é igual a da esquerda para a direita. Por exemplo, os números $23\,432$ e $18\,781$ são palindromes. Quantos números palindromes de 4 algarismos são divisíveis por 9?

2. **Multiplicação com letras** – Na operação abaixo, as letras a, b e c são algarismos distintos e diferentes de 1.

$$\begin{array}{r} a\,b\,b \\ \times \quad c \\ \hline b\,c\,b\,1 \end{array}$$

   Determine os valores de a, b e c.

3. **Números sortudos** – Um *número sortudo* é aquele cuja soma de seus algarismos é divisível por 7. Por exemplo, 7, 25 e 849 são números sortudos. O menor par de números sortudos é 7 e 16.

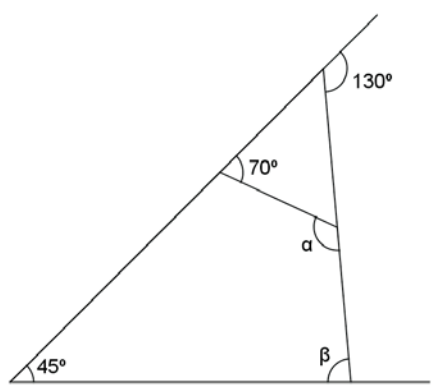
   (a) Encontre oito números consecutivos, dos quais dois são números sortudos.

   (b) Encontre 12 números consecutivos, tal que nenhum seja sortudo.

   (c) Mostre que qualquer sequência de 13 números consecutivos contém pelo menos um número sortudo.

4. **Uma sequência especial** – Na sequência $1, 3, 2, \ldots$ cada termo depois dos dois primeiros é igual ao termo precedente subtraído do termo que o precede, ou seja: se $n > 2$ então $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$. Qual é a soma dos 100 primeiros termos dessa sequência?

5. **Triângulos e ângulos...** – Determine os ângulos α e β.



Nível 3

Lista 1

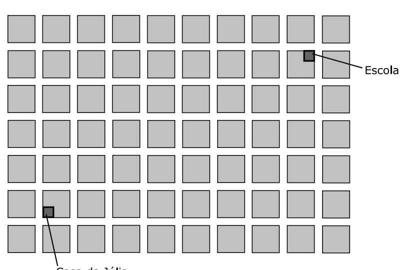
1. **Brincando com a calculadora** – Digite numa calculadora um número qualquer de 3 algarismos. Em seguida, digite o mesmo número, obtendo assim um número de 6 algarismos da forma $a\,b\,c\,a\,b\,c$. Divida esse número por 7, divida o resultado por 11 e, finalmente, divida o número obtido por 13. O que aconteceu? Por que você obteve este resultado?

2. **No galinheiro** – Um galinheiro com área igual a 240 m^2 deve abrigar galinhas e pintinhos, sendo desejável que haja um espaço livre de 4 m^2 para cada galinha e 2 m^2 para cada pintinho. Além disso, cada pintinho come 40 g de ração por dia e cada galinha come 160 g por dia, sendo permitido um gasto diário máximo de 8 kg de ração.
   (a) Represente algebricamente as condições do problema.
   (b) Represente graficamente as condições acima no plano cartesiano xOy.
   (c) Esse galinheiro comporta 20 galinhas e 80 pintinhos? E 30 galinhas e 100 pintinhos?
   (d) Qual o número máximo de galinhas que podem ser colocadas no galinheiro, respeitando os espaços desejáveis e o gasto máximo de ração? E de pintinhos?

3. **Um número perfeito** – Um número natural n é dito *perfeito* se a soma de todos os seus divisores próprios, isto é, diferentes de n, é igual a n. Por exemplo, 6 e 28 são perfeitos, pois: $6 = 1 + 2 + 3$ e $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Sabendo que $2^{31} - 1$ é um número primo, mostre que $2^{30}(2^{31} - 1)$ é um número perfeito.

4. **Quinze minutos a mais** – Dois carros partem ao mesmo tempo de uma cidade A em direção a uma cidade B. Um deles viaja com velocidade constante de 60 km/h e o outro com velocidade constante de 70 km/h. Se o carro mais rápido faz esta viagem em 15 minutos a menos que o outro carro, qual a distância entre as duas cidades?

5. **Outros caminhos** – Partindo de sua casa para chegar na escola, Júlia deve caminhar 8 quarteirões para a direita e 5 quarteirões para cima, como indicado na figura abaixo.



Ela sabe que existem muitas maneiras diferentes de fazer o percurso casa-escola, sempre seguindo o caminho mais curto. Como ela é uma menina muito curiosa, ela gostaria de sempre fazer caminhos diferentes.

Quantos desses caminhos existem da casa de Júlia até a escola?

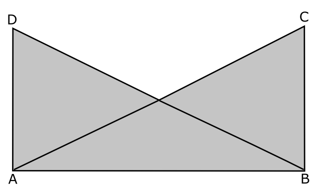
Lista 2

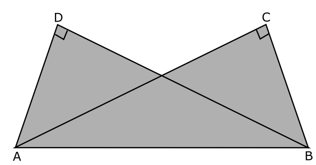
1. **Escrevendo em um tabuleiro** – Um tabuleiro quadrado de 3 linhas por 3 colunas contém nove casas. De quantos modos diferentes podemos escrever as três letras **A**, **B** e **C** em três casas diferentes, de modo que em cada linha esteja escrita exatamente uma letra?

2. **Fração e porcentagem** – Se na fração $\dfrac{x}{y}$ diminuirmos o numerador de 40% e o denominador y de 60%, então a fração $\dfrac{x}{y}$:

   (A) diminui 20% (B) aumenta 20% (C) diminui 50% (D) aumenta 50%

3. **Triângulos sobrepostos** – Dois triângulos retângulos congruentes possuem catetos de medidas 4 cm e 7 cm. Na figura abaixo, à esquerda, os triângulos foram desenhados de modo a coincidirem os catetos de 7 cm. Assim, $AB = 7$ cm e $AD = BC = 4$ cm. Já na figura à direita, eles foram desenhados de modo a coincidirem as hipotenusas donde, $AD = BC = 4$ cm e $AC = BD = 7$ cm.





   Calcule as áreas sombreadas nas duas figuras.

4. **Dois motoristas** – Dois motoristas viajam da cidade A até a cidade B e, imediatamente, regressam à cidade A. O primeiro motorista viaja com velocidade constante de 80 km/h, tanto na ida quanto na volta. O segundo motorista viaja até a cidade B com velocidade constante de 90 km/h e retorna com velocidade constante de 70 km/h. Qual desses motoristas gasta menos tempo no percurso de ida e volta?

5. **Soma e inverte** – Podemos formar sequências a partir de um número inicial, usando duas operações "$+1 = \text{somar } 1$" e "$-i = \text{menos o inverso}$". Por exemplo, iniciando com o número 3, podemos formar várias sequências, veja uma delas:

$$3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+1} 5 \xrightarrow{-i} -\frac{1}{5} \xrightarrow{+1} \frac{4}{5} \xrightarrow{-i} -\frac{5}{4} \xrightarrow{+1} -\frac{1}{4} \xrightarrow{+1} \frac{3}{4} \xrightarrow{-i} -\frac{4}{3}.$$

   Iniciando com 0, com qual sequência obteremos novamente o 0, usando apenas as duas operações "$+1$" e "$-i$"?

Lista 3

1. **Carro flex** – Um carro é denominado flex se ele pode ser abastecido com gasolina ou com álcool. Considere que os preços do álcool e da gasolina sejam, respectivamente, R\$ $1{,}59$ e R\$ $2{,}49$ por litro.

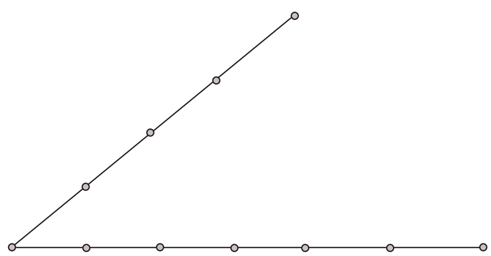
   (a) Suponha que um carro flex rode $12,3$ km por litro de gasolina, que indicamos $12,3$ km/l. Qual deve ser a relação km/l desse carro, para o álcool, para que a utilização do álcool seja financeiramente mais vantajosa que a de gasolina?

   (b) Se o desempenho de um carro flex é de x km/l com gasolina e de $\left(\frac{x}{2}+1\right)$ km/l com álcool, escreva a expressão da função $g(x)$ que fornece o custo desse carro rodar 100 km utilizando gasolina e a expressão da função $a(x)$ que fornece o custo desse carro rodar 100 km utilizando álcool.

   (c) Para que o custo seja o mesmo, tanto com álcool como com gasolina, qual deve ser a relação km/l para a gasolina e para o álcool?

   (d) Em que condição o uso do álcool é mais vantajoso, financeiramente, que o da gasolina? Dê um exemplo numérico que satisfaça a condição.

2. **Contando triângulos** – Na figura a seguir estão marcados 11 pontos sobre dois segmentos. Quantos triângulos podem ser formados com estes 11 pontos?



3. **Quadrado perfeito** – Existe um número de 8 algarismos da forma

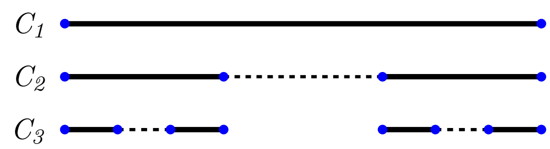
$$9999****$$

   que é um quadrado perfeito?

4. **Diferença quase nula** – Qual o menor número inteiro positivo n tal que

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<0{,}01?$$

5. **Conjunto de Cantor** – Desenhe um segmento de reta de comprimento 1, e denote-o por C_1. Remova o terço central (sem remover os extremos). Denote por C_2 o que sobrou. Agora, remova o terço central (sem os extremos) de cada segmento de reta de C_2. Denote por C_3 o que sobrou. Podemos continuar esse processo, em cada estágio removendo o terço central de cada segmento em C_n para formar C_{n+1}.



(a) Desenhe C_1, C_2 e C_3, indicando os números nos extremos dos segmentos.

(b) Quais dos seguintes pontos pertencem ao conjunto de Cantor? $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{4}{9}$, $\dfrac{3}{81}$, $\dfrac{4}{81}$.

(c) Quais são os comprimentos de C_3, C_4 e C_5? Você pode achar uma expressão para o comprimento de C_n?

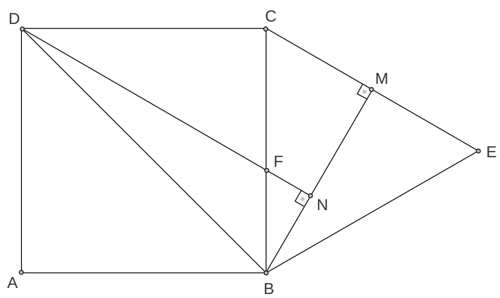
Lista 4

1. **Enchendo uma piscina** – Uma piscina vazia foi abastecida de água por duas torneiras A e B, ambas com vazão constante. Durante 4 horas, as duas torneiras ficaram abertas e encheram 50% da piscina. Em seguida, a torneira B foi fechada e durante 2 horas a torneira A encheu 15% do volume da piscina. Após este período a torneira A foi fechada e a torneira B aberta. Durante quanto tempo esta torneira teve de ficar aberta para que ela sozinha terminasse de encher a piscina?

2. **Probabilidade de ser um número par** – Uma urna tem 9 bolas, numeradas com os números de 1 a 9. José e Maria retiram simultaneamente uma bola da urna. Com as bolas retiradas eles formam um número de 2 algarismos, sendo que o número que está escrito na bola de José é o algarismo das dezenas e o número que está escrito na bola de Maria é o algarismo das unidades. Qual a probabilidade deste número ser par?

3. **Múltiplo de 7** – Mostre que se o produto $N = (n+6m)(2n+5m)(3n+4m)$ é múltiplo de 7, com m e n números naturais, então N é múltiplo de $7^3 = 343$.

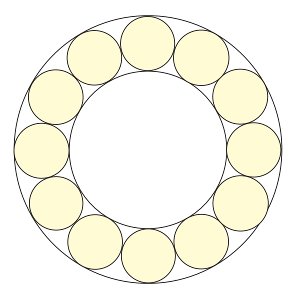
4. **Os ângulos 15° e 75°** – Na figura, $ABCD$ é um quadrado de lado 1 cm e $\triangle BCE$ é um triângulo equilátero. O ponto M é o ponto médio do segmento CE, DN é perpendicular a BM e BM é perpendicular a CE.



   (a) Calcule os comprimentos dos lados do triângulo $\triangle DBN$.

   (b) Use o item (a) para calcular o cosseno, o seno e a tangente dos ângulos de 15° e 75°.

5. **Circunfências tangentes** – Na figura, estão desenhadas duas circunferências concêntricas de raios r e R, com $r < R$, e 12 circunferências, de raio x, compreendidas entre essas duas. Além disso, as 14 circunferências são disjuntas ou tangentes.

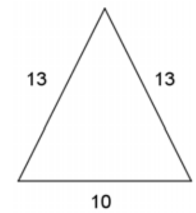


   (a) Mostre que $x = \dfrac{R-r}{2}$.

   (b) Mostre que $\dfrac{R}{r} = \dfrac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

Lista 5

1. **Mudando a base** – Um triângulo isósceles tem base medindo 10 cm e dois lados iguais a 13 cm. É possível mudar a base do triângulo e obter outro triângulo isósceles com mesma área?



2. **Clube de Matemática** – Eu faço parte de um clube de matemática onde tenho o mesmo número de colegas homens do que colegas mulheres. Quando um garoto falta, os três quartos da equipe são de meninas. Eu sou homem ou mulher? Quantas mulheres e quantos homens tem o clube?

3. **Uma calculadora diferente** – Davi tem uma calculadora muito original; ela efetua apenas duas operações: a adição usual $(+)$ e uma outra operação, denotada por $*$, que satisfaz:

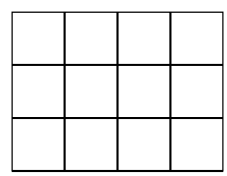
   (i) $a * a = a$

   (ii) $a * 0 = 2a$

   (iii) $(a * b) + (c * d) = (a * c) + (b * d)$

   Quais são os resultados das operações $(2 + 3) * (0 + 3)$ e $1\,024 * 48$?

4. **Retângulo m $\times$ n** – O retângulo quadriculado na figura é feito de 31 segmentos de 0,5 cm e compreende 12 quadrados. Rosa desenhou numa folha retangular de 21 cm por 29,7 cm, quadriculada com quadrados de lado 0,5 cm, um grande retângulo quadriculado feito com $1\,997$ segmentos. Quantos quadrados tem esse retângulo?



5. **Cercando o Globo Terrestre** – O raio do Globo Terrestre é aproximadamente $6\,670$ km. Suponhamos que um fio esteja ajustado exatamente sobre o Equador, que é um círculo de raio aproximadamente igual a $6\,670$ km.

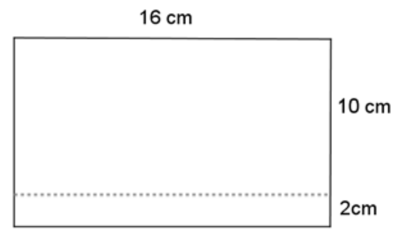
   Em seguida, suponhamos que o comprimento do fio seja aumentado em 1 m, de modo que o fio e o Equador fiquem como círculos concêntricos ao redor da Terra. Um homem em pé, uma formiga ou um elefante são capazes de passar por baixo desse fio?

Lista 6

1. **Comprimento de uma corda** – Em uma circunferência de raio 10 cm, o segmento AB é um diâmetro e o segmento AC é uma corda de 12 cm. Determine a distância entre os pontos B e C.

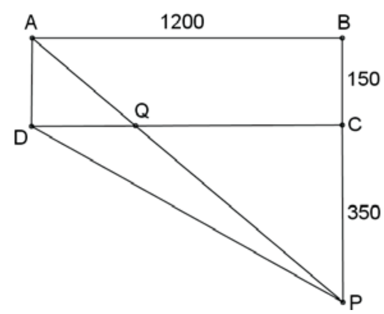
2. **Dois irmãos** – A diferença de idade entre dois irmãos é de 3 anos. Um ano atrás, a idade de seu pai era o dôbro da soma das idades dos irmãos e, dentro de 20 anos, a idade do pai será a soma das idades desses dois filhos. Qual a idade de cada um?

3. **Canelonis de ricota** – Todo domingo, Pedro prepara canelonis para o almoço. Primeiro ele corta retângulos de massa de 16 cm por 12 cm e depois cola os dois lados mais longos, superpondo uma faixa de 2 cm.



Dessa forma ele obtém cilindros que ele recheia com ricota, ele já sabe que sempre gasta 500 g de ricota. Num belo domingo, com o mesmo número de retângulos de massa de 16 cm por 12 cm, ele decide produzir os cilindros colando os lados menores, sempre superpondo uma faixa de 2 cm. Nessa situação, ele vai gastar mais ou menos ricota que antes? Quanto?

4. **Cálculo de segmentos** – As medidas do retângulo $ABCD$ são $1\,200$ m por 150 m. Além disso, P está no prolongamento do lado BC e dista 350 m de C. Determine AP, PQ, PD, CQ e DP.



5. **Prá chegar junto!** – Ana e Luíza treinam todos os dias para a Grande Corrida que vai acontecer no final do ano na escola, cada uma delas sempre com a mesma velocidade. O treino começa num ponto A e termina no ponto B, distantes $3\,000$ m. Elas partem no mesmo instante, mas quando Luíza termina a corrida, ainda faltam 120 m para Ana chegar ao ponto B. Ontem Luíza deu uma chance para Ana: *"Partimos ao mesmo tempo, mas eu parto alguns metros antes do ponto A para chegarmos juntas."* Quantos metros antes do ponto A Luíza deve partir?

Lista 7

1. **Um professor enfurecido** – Para castigar os alunos de sua turma por indisciplina, o professor Zerus decidiu descontar da nota mensal de cada aluno uma percentagem igual à nota da prova, isto é: quem tirou 60, terá um desconto de 60% na nota, quem tirou 20, um desconto de 20% da nota, e assim por diante. A nota mensal máxima é 100.

   (a) Quem vai ficar com a maior nota?

   (b) E a menor?

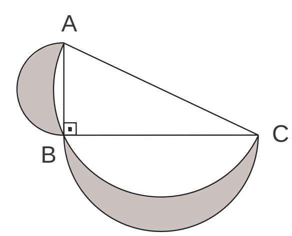
   (c) Alunos que tiraram boas notas reclamaram que vão ficar com a mesma nota dos que tiraram más notas. Eles estão certos?

2. **O percurso de um atleta** – Um atleta resolveu fazer uma corrida de 15 km. Começou correndo 5 km na direção Sul, depois virou para direção Leste, correndo mais 5 km e, novamente, virou para a direção Norte, correndo os 5 km restantes. Após esse percurso, constatou, para seu espanto, que estava no ponto de onde havia partido.

   Descubra dois possíveis pontos sobre o Globo Terrestre de onde esse atleta possa ter iniciado sua corrida.

3. **Áreas iguais** – Na figura ao lado, o triângulo $\triangle ABC$ é retângulo e os semicírculos desenhados têm diâmetros AB, BC e AC.

   Mostre que a área sombreada é igual à área do triângulo $\triangle ABC$.



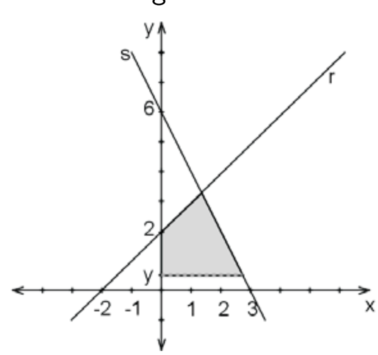
4. **Função definida por área** – A função f está definida para cada y, $0 \leq y < 2$, de modo que $f(y) =$ área do quadrilátero sombreado, como indicado na figura abaixo.

   (a) Escreva as equações das retas r e s.

   (b) Determine $f(0)$.

   (c) Escreva a expressão de $f(y),\ 0 \leq y < 2$.

   (d) Esboce o gráfico de $f(y)$.



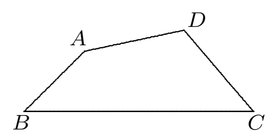
5. **PA e PG** – Determine 4 números distintos a_1, a_2, a_3 e a_4 que sejam termos consecutivos de uma progressão aritmética e que os números a_1, a_3 e a_4 formem uma progressão geométrica.

Lista 8

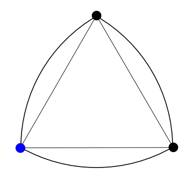
1. **Plano cartesiano** – No plano cartesiano, chama-se *ponto inteiro* a um ponto de coordenadas inteiras. Se n é inteiro positivo, seja $f(n)$ o número de pontos inteiros que estão sobre o segmento que liga a origem ao ponto inteiro $(n\,, n+3)$, sem contar os extremos. Mostre que:

$$f(n) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad n \text{ é múltiplo de } 3 \\ 0 & \text{se} \quad n \text{ não é múltiplo de } 3\,. \end{cases}$$

2. **Trabalhando com quadrilátero** – No quadrilátero $ABCD$, tem-se: $AB = 5$, $BC = 17$, $CD = 5$, $DA = 9$, e a medida do segmento DB é um inteiro. Determine DB.

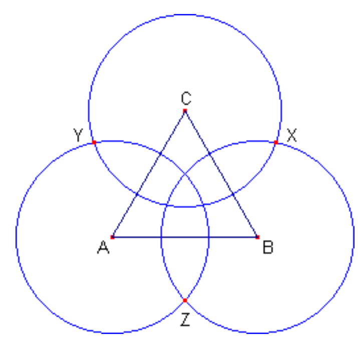


3. **O triângulo de Reuleaux** – O triângulo de Reuleaux é um disco formado a partir de um triângulo equilátero, agregando arcos de circunferência com centros nos vértices do triângulo e raios iguais ao lado do triângulo.



Qual é a área de um triângulo de Reuleaux, se o triângulo equilátero tem lado de medida 1 cm?

4. **Interseção entre circunferências** – Com centros nos vértices do triângulo equilátero $\triangle ABC$ de lado a, foram desenhadas três circunferências de raio r.
Se $r < a$ e $2r > a$, estas três circunferências são duas a duas concorrentes nos pontos X, Y e Z, exteriores ao triângulo $\triangle ABC$. Mostre que $\triangle XYZ$ é um triângulo equilátero e calcule o comprimento do seu lado em termos de a e r.



5. **Valor máximo** – Para qual número natural k a expressão $\dfrac{k^2}{1{,}001^k}$ atinge seu maior valor?

Lista 9

1. **Moedas falsas** – Aladim tem 10 sacos de moedas, onde cada saco tem somente moedas verdadeiras ou moedas falsas. Cada moeda verdadeira pesa 10 g e cada moeda falsa pesa 9 g.

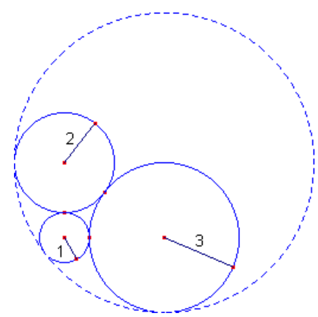
   (a) Suponhamos que em cada saco existam exatamente 10 moedas e somente um dos sacos é de moedas falsas. Utilizando uma balança e efetuando apenas uma pesagem, como Aladim deve proceder para descobrir qual é o saco das moedas falsas?

   (b) Suponhamos que os sacos estejam cheios de moedas e que Aladim não saiba quantos destes sacos são de moedas falsas. Como pode ele identificar os sacos que têm moedas falsas com apenas uma pesagem?

2. **Menor inteiro** – Sejam p e q inteiros positivos tais que $\dfrac{5}{8} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{7}{8}$. Qual é o menor valor de p para que $p + q = 2\,005$?

3. **Mais áreas...** – Um triângulo tem vértice $A = (3, 0)$, $B = (0, 3)$ e C, onde C está sobre a reta $x + y = 7$. Qual é a área do triângulo?

4. **Circunferências tangentes** – Três circunferências de raios 1 cm, 2 cm e 3 cm são duas a duas tangentes exteriormente, como na figura ao lado.
   Determine o raio da circunferência tangente exteriormente às três circunferências.



5. **Soma finita** – Cada um dos números $x_1, x_2, \ldots, x_{2\,004}$ pode ser igual a $\sqrt{2} - 1$ ou a $\sqrt{2} + 1$. Quantos valores inteiros distintos a soma

$$\sum_{k=1}^{2\,004} x_{2k-1}x_{2k} = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \cdots + x_{2\,003}x_{2\,004}$$

   pode assumir?

Lista 10

1. **Múltiplos** – Seja a um número inteiro positivo tal que a é múltiplo de 5, $a+1$ é múltiplo de 7, $a+2$ é múltiplo de 9 e $a+3$ é múltiplo de 11. Determine o menor valor que a pode assumir.

2. **Equação de duas variáveis** – Determine todos os pares de inteiros (x, y) tais que $9xy - x^2 - 8y^2 = 2\,005$.

3. **Trapézio retângulo** – Seja $ABCD$ um trapézio retângulo de bases AB e CD, com ângulos retos em A e D. Dado que a diagonal menor BD é perpendicular ao lado BC, determine o menor valor possível para a razão $\dfrac{CD}{AD}$.

4. **Jogos de futebol** – Os doze alunos de uma turma de olimpíada saíam para jogar futebol todos os dias após a aula de matemática, formando dois times de 6 jogadores cada e jogando entre si. A cada dia eles formavam dois times diferentes dos times formados em dias anteriores. Ao final do ano, eles verificaram que cada 5 alunos haviam jogado juntos num mesmo time exatamente uma vez. Quantos times diferentes foram formados ao longo do ano?

5. **A soma dos algarismos de um número** – Denotemos por $s(n)$ a soma dos algarismos do número n. Por exemplo $s(2\,345) = 2+3+4+5 = 14$. Observemos que:

   $$40 - s(40) = 36 = 9\times 4;\ 500 - s(500) = 495 = 9\times 55;\ 2\,345 - s(2\,345) = 2\,331 = 9\times 259\,.$$

   (a) O que podemos afirmar sobre o número $n - s(n)$?

   (b) Usando o item anterior calcule $s(s(s(2^{2\,009})))$.

   Sugestão: Mostre que o número procurado é menor do que 9.

Desafios

1. **Data fatídica** – Em $1\,950$ um "profeta" anunciou que o fim do mundo ocorreria em $11.08.1\,999$ (11 de agosto de $1\,999$). Como nada aconteceu nesse dia, ele refez seus cálculos e fez a seguinte previsão: *"O fim do mundo ocorrerá na próxima data que se escreve com 8 algarismos diferentes."* Você pode descobrir essa data?

2. **Todos com o 2** – Qual operação devemos fazer com todos os 5 números

$$418\,,\ 244\,,\ 816\,,\ 426\,,\ 24$$

para obter 5 números que tenham todos o algarismo 2?

   (a) dividir 2;

   (b) somar 4;

   (c) dividir por 6;

   (d) subtrair 5;

   (e) multiplicar por 3.

3. **Tortas da vovó** – Sofia foi levar uns docinhos para sua avó; são 7 docinhos de amora, 6 de côco e 3 de chocolate. Durante o caminho, a gulosa Sofia come 2 docinhos. Qual das situações abaixo é possível?

   (A) Vovó não recebeu docinhos de chocolate.

   (B) Vovó recebeu menos docinhos de côco do que de chocolate.

   (C) Vovó recebeu o mesmo número de docinhos de cada uma das 3 variedades.

   (D) Existem 2 variedades de docinhos das quais vovó recebeu o mesmo número.

   (E) O número de docinhos de amora que vovó recebeu é maior que o dos outros 2 somados.

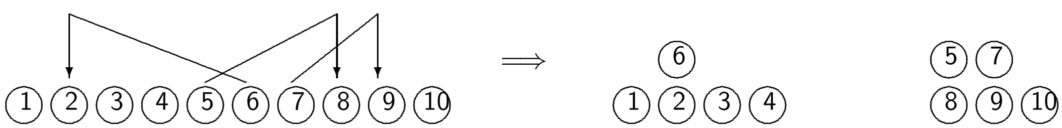
4. **Família Sétimo** – O Sr. e Sra. Sétimo têm 7 filhos, todos nascidos em 1º de abril, na verdade em seis 1º de abril consecutivos. Este ano, para seus aniversários, a Sra. Sétimo fez um bolo com velinhas para cada um – o número de velas igual ao número de anos de cada um. João Sétimo, o filho que mais gosta de Matemática, reparou que nesse ano o número total de velinhas é o dobro do que havia 2 anos atrás e que há 2 bolos a mais. Quantas velinhas serão acesas esse ano?

5. **O Salta-Ficha** – Temos 10 fichas numeradas colocadas em linha reta como na figura.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Queremos arrumá-las em 5 pilhas com 2 fichas cada uma. A regra para isso é que só podemos movimentar uma ficha fazendo-a saltar sobre uma ou mais fichas, ou sobre uma pilha. Veja um exemplo de 3 movimentos:

- a ficha 5 pode saltar sobre as fichas 6 e 7 e formar uma pilha com a 8.
- a ficha 7 pode saltar sobre a ficha 8 e formar uma pilha com a 9.
- a ficha 6 pode saltar sobre as fichas 5, 4 e 3 formar uma pilha com a 2.



Como formar 5 pilhas de 2 fichas com apenas 5 movimentos?

6. **O menor** – Qual é o menor: 5^{2002} ou $3^{2002} + 4^{2002}$?

7. **O maior resultado** – Qual o maior resultado que podemos encontrar quando dividimos um número de 2 algarismos pela soma de seus algarismos?

8. **Dois mil** – O peso de um número é a soma de seus algarismos. Qual é o menor número que pesa $2\,000$?

9. **No cabeleireiro** – Três clientes estão no cabeleireiro pagando cada um a sua conta no caixa.

   - o primeiro cliente paga o mesmo montante que há no caixa e retirar 10 reais de troco;
   - o segundo cliente efetua a mesma operação que o primeiro;
   - o terceiro cliente efetua a mesma operação que os dois primeiros.

   Encontre o montante que estava inicialmente no caixa, sabendo que ao fim das 3 operações o caixa ficou zerado.

10. **O macaco e a raposa** – O macaco diz para a raposa:

    – *Você vê as 3 pessoas que estão correndo lá longe? Eu sei que o produto de suas idades é $2\,450$; e que a soma das idades é o dôbro da sua idade. Você pode me dizer suas idades?*

    – *Não*, responde a raposa.

    – *E se eu te disser que o mais jovem dos três é o único louro, você pode agora descobrir as idades?*

    E a raposa dá as idades das 3 pessoas.

    Porque a raposa não pode responder inicialmente? E porque pode responder depois?

11. **Nova sequência** – Encontre a lei que forma a sequência e dê seus próximos 2 termos:

$$425,\ 470,\ 535,\ 594,\ 716,\ 802,\ \ldots$$

12. **Retângulo quase quadrado** – Um terreno retangular é *quase quadrado*: sua largura e seu comprimento são números inteiros de metros que diferem exatamente de 1 metro. A área do terreno, em metros quadrados, é um número de 4 algarismos, sendo o das unidades de milhar e o das centenas iguais, e o mesmo ocorre com o das dezenas e das unidades. Quais são as possíveis dimensões do terreno?

13. **Aonde está o erro?** – Seja x solução de $x^2 + x + 1 = 0$. Então $x \neq 0$ e por isso podemos dividir ambos os membros da equação por x, obtendo $x + 1 + \dfrac{1}{x} = 0$. Da equação temos que $x + 1 = -x^2$, logo $-x^2 + \dfrac{1}{x} = 0$, isto é: $x^2 = 1/x$ ou ainda $x^3 = 1$ e $x = 1$. Substituindo $x = 1$ na equação $x^2 + x + 1 = 0$ encontramos $3 = 0$!!!! Aonde erramos?

Soluções do Nível 1

Lista 1

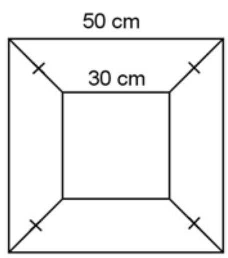
1. **Encontro de amigos** – Eu chegarei quando meu relógio marcar 10 h 5 min, uma vez que penso que o relógio está adiantado 5 min. Como ele está atrasado 10 min, chegarei, na verdade, as 10 h 15 min.

   Meu amigo chegará quando seu relógio marcar 10 horas, pois ele pensa que o relógio está correto, mas na realidade serão 9 h 55 min. Logo meu amigo chegará 20 min antes de mim.

2. **Trabalho comunitário** – A resposta correta é **(B)**.

   Do número total de alunos dessa classe, 60% foram prestar trabalho comunitário, isto é, $0{,}6 \times 40 = 24$. O número mínimo de alunas que participaram desse trabalho é obtido quando o número de alunos que participaram é máximo, ou seja, quando 22 alunos se envolverem no trabalho, restando o mínimo de 2 vagas para as alunas.

3. **Área de trapézios** – A resposta correta é **(E)**.

   Unindo os quatro trapézios, formamos um quadrado de lado 50 cm, e portanto de área $2\,500$ cm^2. Como o "buraco" quadrado tem lado 30 cm, sua área é $30 \times 30 = 900$ cm^2. Logo, a área de cada um dos 4 trapézios, em cm^2, é

   $$(2\,500 - 900) \div 4 = 1\,600 \div 4 = 400\,.$$

4. **Adivinhação** – Já de início sabemos sobre o maior número:

   - é par por ser o dobro do menor mas não termina em zero porque o maior e o menor número não possuem algarismos em comum;
   - seu algarismo das dezenas é no mínimo 2 porque sua metade é um número com 2 algarismos;
   - a soma de seus algarismos é no máximo 9, porque essa soma é um dos algarismos do menor número;

   Logo, os candidatos ao maior e menor número são:

maior	22	32	62	72	34	44	54	26	36
menor	11	16	31	36	17	22	27	13	18

   Por verificação, temos que 17 e 34 são os números que satisfazem as condições do problema.

5. **18 números consecutivos** – Uma sequência de 18 números consecutivos possui sempre 2 termos que são múltiplos de 9. Logo, a soma dos algarismos de cada um desses 2 números é um múltiplo de 9. Observe que como os números têm 3 algarismos, a maior das somas que pode ocorrer é 27. Logo as possibilidades para as somas dos algarismos desses 2 números são:

(i) 9 e 9

(ii) 9 e 18

(iii) 18 e 18

(iv) 18 e 27

Vamos examinar alguns exemplos de cada um dos 4 casos.

(i) 9 e 9

Exemplo: um dos números é 144, e o outro 135 ou 153. Veja algumas possíveis sequências:

$$\underbrace{141}_{1^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{2^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{3^{\underline{o}}}, \underbrace{144}_{4^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{5^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{6^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{7^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{8^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{9^{\underline{o}}},$$
$$\underbrace{\qquad}_{10^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{11^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{12^{\underline{o}}}, \underbrace{153}_{13^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{14^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{15^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{16^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{17^{\underline{o}}}, \underbrace{158}_{18^{\underline{o}}},$$
$$\underbrace{130}_{1^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{2^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{3^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{4^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{5^{\underline{o}}}, \underbrace{135}_{6^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{7^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{8^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{9^{\underline{o}}},$$
$$\underbrace{\qquad}_{10^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{11^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{12^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{13^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{14^{\underline{o}}}, \underbrace{144}_{15^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{16^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{17^{\underline{o}}}, \underbrace{147}_{18^{\underline{o}}}.$$

(ii) 9 e 18

Exemplo: um dos números é 900 e o outro 891 ou 909. Veja algumas possíveis sequências:

$$\underbrace{887}_{1^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{2^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{3^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{4^{\underline{o}}}, \underbrace{891}_{5^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{6^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{7^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{8^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{9^{\underline{o}}},$$
$$\underbrace{\qquad}_{10^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{11^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{12^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{13^{\underline{o}}}, \underbrace{900}_{14^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{15^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{16^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{17^{\underline{o}}}, \underbrace{904}_{18^{\underline{o}}},$$
$$\underbrace{898}_{1^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{2^{\underline{o}}}, \underbrace{900}_{3^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{4^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{5^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{6^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{7^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{8^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{9^{\underline{o}}},$$
$$\underbrace{\qquad}_{10^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{11^{\underline{o}}}, \underbrace{909}_{12^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{13^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{14^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{15^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{16^{\underline{o}}}, \underbrace{\qquad}_{17^{\underline{o}}}, \underbrace{915}_{18^{\underline{o}}}.$$

(iii) 18 e 18

Exemplo: um dos números é 828 e o outro 819 ou 837. Veja algumas possíveis sequências:

$$\underbrace{811}_{1^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{2^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{3^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{4^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{5^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{6^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{7^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{8^{\underline{o}}},\underbrace{819}_{9^{\underline{o}}},$$

$$\underbrace{\qquad}_{10^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{11^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{12^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{13^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{14^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{15^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{16^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{17^{\underline{o}}},\underbrace{828}_{18^{\underline{o}}},$$

$$\underbrace{823}_{1^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{2^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{3^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{4^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{5^{\underline{o}}},\underbrace{828}_{6^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{7^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{8^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{9^{\underline{o}}},$$

$$\underbrace{\qquad}_{10^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{11^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{12^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{13^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{14^{\underline{o}}},\underbrace{837}_{15^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{16^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{17^{\underline{o}}},\underbrace{840}_{18^{\underline{o}}}.$$

(iv) 18 e 27.

Nesse caso um dos números é 999 e temos uma única opção para a sequência:

$$\underbrace{982}_{1^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{2^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{3^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{4^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{5^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{6^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{7^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{8^{\underline{o}}},\underbrace{990}_{9^{\underline{o}}},$$

$$\underbrace{\qquad}_{10^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{11^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{12^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{13^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{14^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{15^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{16^{\underline{o}}},\underbrace{\qquad}_{17^{\underline{o}}},\underbrace{999}_{18^{\underline{o}}}.$$

Vamos agora analisar cada caso. Nos casos (i) e (ii) um dos números é divisível por 9 que é a soma de seus algarismos. No caso (iv) um dos números é 999 que é divisível por 27. Finalmente no caso (iii) um dos números tem de ser par, pois são 2 múltiplos consecutivos de 9. Logo, esse número é múltiplo de 2 e 9, portanto múltiplo de 18.

Lista 2

1. **Completar uma tabela** – Observe que em cada quadrado formado por 4 quadradinhos, o número que está na parte inferior direita é a soma dos outros 3 números. Assim, temos:

0	**1**	**2**	**3**	**4**
1	2	5	10	$3+4+10=17$
2	$1+2+2=5$	$2+5+5=12$	$5+10+12=27$	$10+17+27=54$
3	10	27	66	147
4	17	54	147	**A**

Logo:

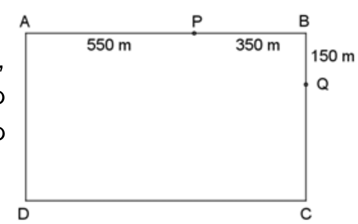
$$\mathbf{A} = 66 + 147 + 147 = 360\,.$$

2. **Procurando múltiplos de 9** – Sempre existe uma diferença que é um múltiplo de 9. De fato, quando dividimos um número por 9, podemos encontrar nove restos diferentes: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ou 8. Logo, entre os 10 números do conjunto, pelo menos dois deles têm mesmo resto quando divididos por 9, já que temos no máximo 9 restos diferentes.

   Quando fazemos a diferença desses dois números que têm o mesmo resto, obtemos um número com resto zero, ou seja, divisível por 9.

3. **Correndo numa praça** – A distância que ele percorre a cada volta completa é igual ao perímetro da praça:

$$2 \times 900 + 2 \times 600 = 3\,000 \text{ m}\,.$$



   Como $15{,}5$ km$=$ $15\,500$ m e $15\,500 = 5 \times 3\,000 + 500$, o atleta dá 5 voltas completas (partindo de P e retornando a P), e corre ainda mais 500 m. Portanto, ele para no ponto Q, a 150 m do vértice B, como na figura.

4. **Ovos para um bolo** – Como os 43 bolos têm a mesma receita, o número de ovos que a doceira precisa é um múltiplo de 43. Por outro lado, esse número também é um múltiplo de $2, 3, 4, 5$ e 6 acrescido de 1. O mmc de $2, 3, 4, 5$ e 6 é 60, mas $60 + 1 = 61$ não é múltiplo de 43! Precisamos, então, encontrar um número com essas duas propriedades:

   - é múltiplo de 43;
   - acrescido de 1 é múltiplo de $2, 3, 4, 5$ e 6.

   Lembre também que como a receita gasta menos de 9 ovos, o número que estamos procurando é menor do que $43 \times 9 = 387$. Temos:

$$\begin{array}{ll} 60 \times 2 + 1 = 121 & \text{não é múltiplo de } 43 \\ 60 \times 3 + 1 = 181 & \text{não é múltiplo de } 43 \\ 60 \times 4 + 1 = 241 & \text{não é múltiplo de } 43 \\ 60 \times 5 + 1 = 301 & \text{é múltiplo de } 43 \\ 60 \times 6 + 1 = 361 & \text{não é múltiplo de } 43 \end{array}$$

Podemos parar por aqui porque os próximos números serão maiores do que 387. Logo, a doceira comprou 301 ovos.

5. **Cálculos H e V** – Inicialmente, veja que os possíveis lugares para o número 1 estão mostrados ao lado. Já as multiplicações só podem ser $2 \times 3 = 6$ e $2 \times 4 = 8$. Agora, repare que o 2 só pode ser o multiplicando e não o multiplicador (tente colocá-lo como multiplicador e veja que isso não é possível).

$$\begin{array}{ccccc} \bigcirc & \div & \bigcirc & = & 2 \\ - & & & & \times \\ 1 & & & & \bigcirc \\ \hline 1 & + & 1 & = & \bigcirc \end{array}$$

Temos agora duas opções para preencher.

1ª opção: $2 \times 3 = 6$

$$\begin{array}{ccccc} \bigcirc & \div & \bigcirc & = & 2 \\ - & & & & \times \\ \bigcirc & & & & 3 \\ \hline \bigcirc & + & \bigcirc & = & 6 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} 8 & \div & 4 & = & 2 \\ - & & & & \times \\ \bigcirc & & & & 3 \\ \hline \bigcirc & + & \bigcirc & = & 6 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} 8 & \div & 4 & = & 2 \\ - & & & & \times \\ 7 & & & & 3 \\ \hline 1 & + & 5 & = & 6 \end{array}$$

2ª opção: $2 \times 4 = 8$

$$\begin{array}{ccccc} \bigcirc & \div & \bigcirc & = & 2 \\ - & & & & \times \\ \bigcirc & & & & 4 \\ \hline \bigcirc & + & \bigcirc & = & 8 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} 6 & \div & 3 & = & 2 \\ - & & & & \times \\ \bigcirc & & & & 4 \\ \hline \bigcirc & + & \bigcirc & = & 8 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} 6 & \div & 3 & = & 2 \\ - & & & & \times \\ 5 & & & & 4 \\ \hline 1 & + & 7 & = & 8 \end{array}$$

Lista 3

1. **Cortando uma cartolina** – Os lados do retângulo final obtido após os cortes são, cada um, a metade dos lados da cartolina original. Assim, o perímetro do retângulo original é o dobro do perímetro do retângulo final. Logo, o perímetro da cartolina antes do corte é 2×129 = 258 cm.

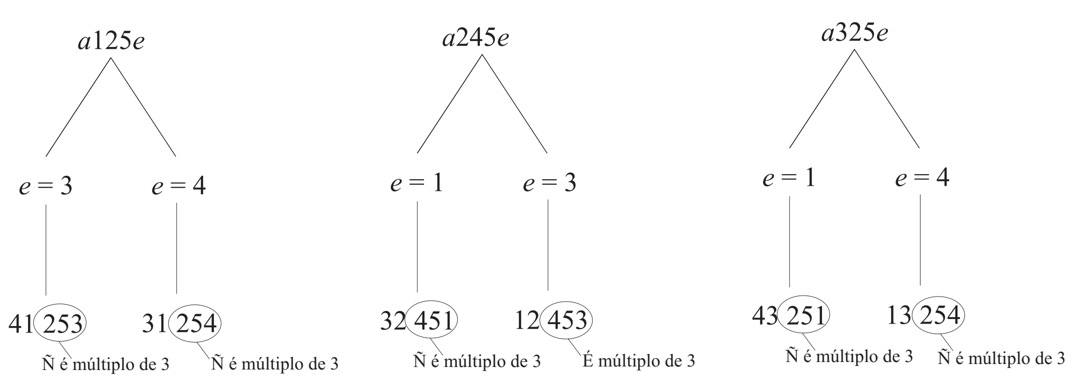
   Observação. *Ao fazer um corte paralelo a um dos lados do triângulo e pelo ponto médio desse lado, o outro corte que formará o retângulo, só pode ocorrer no ponto médio do outro lado, em vista da semelhança que ocorre desses triângulos. Assim, o enunciado contém um dado a mais, desnecessário para os que conhecem semelhança de triângulos.*

2. **A soma errada** – À primeira inspeção, podemos admitir que os três algarismos à direita dos números estão corretos, isto é, estão corretos os algarismos 0, 1, 3, 4, 5, 6 e 8. Portanto, dentre os algarismos 2, 7 e 9, um deles está errado. O algarismo 9 está certo, pois se o mudarmos, a soma com 2 não estará certa. Sendo assim, sobraram 2 e 7. Se o 7 estiver errado, então 2 estará correto, mas isso não é possível pois $1+4+2=7$. Logo, o 2 é que deve ser substituído. Olhando novamente para a soma $1+4+2$, vemos que o resultado é um número com o algarismo da unidade igual a 1. Logo, o algarismo 2 deve ser substituído por 6. Fazendo a substituição, verificamos que a soma fica correta.

3. **Número de 5 algarismos** – Para que $a\,b\,c$ seja divisível por 4, seus dois últimos algarismos devem formar um número divisível por 4. Como os algarismos são $1, 2, 3, 4$ e 5, as únicas possibilidades são: $b\,c = 12$, $b\,c = 24$, $b\,c = 32$, $b\,c = 52$. Por outro lado, os números divisíveis por 5 terminam em 0 ou 5. Como 0 não está incluído, segue que $d = 5$ pois bcd é divisível por 5. Isso exclui a possibilidade $bc = 52$ porque não podemos repetir o 5. Até agora temos 3 possibilidades:

   $$a\,1\,2\,5\,e, \quad a\,2\,4\,5\,e, \quad a\,3\,2\,5\,e\,.$$

   Vamos agora examinar esses 3 casos, para escolher os algarismos a e e, lembrando que não pode haver repetição.



   Logo, o número é $12\,453$.

4. **Tabela misteriosa** – Observemos que:

- **na última coluna** estarão os múltiplos de 9 porque essa coluna está em branco e nenhum dos números que aparecem na tabela é múltiplo de 9;
- **na 5ª linha** estarão os múltiplos de 12, pois é nessa linha que aparece o único múltiplo de 12 da tabela (24);
- **na 4ª coluna** estarão os múltiplos de 10, pois 40 é o único múltiplo de 10 na tabela;
- **na 5ª coluna** teremos múltiplos de 7, pois 42 e 49 são os únicos múltiplos de 7 na tabela;
- **na 2ª linha** estarão os múltiplos de 7, porque 1 e 7 são os únicos divisores de 49 menores do que 12;
- **na 3ª coluna** aparecerão os múltiplos de 2, pois 2 é o único divisor comum de 22 e 24 diferente de 1;
- **na 3ª linha** aparecerão os múltiplos de 11, pois $22 = 2 \times 11$ e os múltiplos de 2 já estão na 3ª coluna;
- **na 6ª linha** aparecerão os múltiplos de 6, pois os divisores de $42 = 2 \times 3 \times 7$ menores do que 12 e diferentes de 1 são 2, 3, 6 e 7. Os múltiplos de 2 e 7 já estão em seus respectivos lugares. Faltam os múltiplos de 3 e 6. Os únicos múltiplos de 6 na tabela são 24 e 42, e 24 já aparece na 5ª linha.

  Como $15 = 3 \times 5$ e os divisores comuns de 32 e 40, menores do que 12 e diferentes de 1, são 2 (já colocado na tabela), 4 e 8, até o momento temos a seguinte situação:

	4 ou 8	3 ou 5	2	10	7	9
4 ou 8	32			40		
7			**14**	**70**	49	**63**
11			22	**110**	**77**	**99**
3 ou 5		15				
12			24	**120**	**84**	**108**
6			**12**	**60**	42	**54**

Examinemos agora as possibilidades:

I - Repetição de 2 números: 30 e 60

	8	5	2	10	7	9
4	32	20	8	40	28	36
7	56	35	14	70	49	63
11	88	55	22	110	77	99
3	24	15	6	**30**	21	27
12	96	**60**	24	120	84	108
6	48	**30**	12	**60**	42	54

II - Repetição de 3 números: 24, 30 e 60

	4	5	2	10	7	9
8	32	40	16	80	56	72
7	28	35	14	70	49	63
11	44	55	22	110	77	99
3	12	15	6	**30**	21	27
12	48	**60**	**24**	120	84	108
6	**24**	**30**	12	**60**	42	54

III - Repetição de 2 números: 12 e 40

	8	3	2	10	7	9
4	32	**12**	8	**40**	28	36
7	56	21	14	70	49	63
11	88	33	22	110	77	99
5	**40**	15	10	50	35	45
12	96	36	24	120	84	108
6	48	18	**12**	60	42	54

IV - Repetição de apenas um número: 24

	4	3	2	10	7	9
8	32	**24**	16	80	56	72
7	28	21	14	70	49	63
11	44	33	22	110	77	99
5	20	15	10	50	35	45
12	48	36	**24**	120	84	108
6	**24**	18	12	60	42	54

Logo, a única solução é a tabela IV.

5. **Habitantes e esporte** – Dos dados na tabela temos $8\,563 + 8\,322 = 16\,885$ pessoas que não praticam esporte. Logo, a cidade tem $16\,885 \div 5 = 3\,377$ pessoas que praticam esporte regularmente, e portanto $3\,377 - 1\,252 = 2\,125$ pessoas do sexo feminino praticam esporte regularmente.

   Note que o número de pessoas que praticam esporte somente no fim de semana é divisível por 15 e por 9. Logo, precisamos encontrar o maior número, não superior a $30\,000$, múltiplo de 15 e 9. Este número deve terminar em 0 ou 5 e a soma de seus algarismos deve ser um múltiplo de 9. Como $29\,970$ é o número mais próximo de $30\,000$, menor do que $30\,000$ e múltiplo de 5 e 9, podemos assumir que ele é a população total da cidade.

   Logo, $\dfrac{2}{15} \times 29\,970 = 3\,996$ e $\dfrac{2}{9} \times 29\,970 = 6\,660$ são as mulheres e os homens, respectivamente, que praticam esporte somente nos finais de semana.

Lista 4

1. **Botões luminosos** – A resposta correta é **(C)**.

   A tabela mostra a cor de cada botão em cada etapa.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
início	azul	azul	azul	azul	azul	azul	azul	azul
apertando botão 1	verde	verde	azul	azul	azul	azul	azul	verde
apertando botão 3	verde	azul	verde	verde	azul	azul	azul	verde
apertando botão 5	verde	azul	verde	azul	verde	verde	azul	verde

   Logo, os botões que ficaram com luzes verdes acesas no final são $1, 3, 5, 6$ e 8, o que nos dá um total de 5 botões.

2. **Qual é o número?** – O problema é determinar os algarismos a, b, c, d e e tais que o número $abcde1$ seja o triplo de $1abcde$:

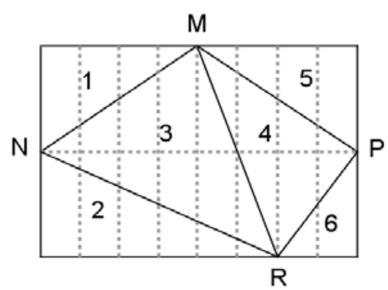
$$\begin{array}{r} 1\,a\,b\,c\,d\,e \\ \times\;\;3 \\ \hline a\,b\,c\,d\,e\,1 \end{array}$$

   De início vemos que $e = 7$, e a partir daí podemos ir descobrindo cada um dos algarismos:

$$\begin{array}{r} 1\,a\,b\,c\,d\,7 \\ \times\;\;3 \\ \hline a\,b\,c\,d\,7\,1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 1\,a\,b\,c\,5\,7 \\ \times\;\;3 \\ \hline a\,b\,c\,5\,7\,1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 1\,a\,b\,8\,5\,7 \\ \times\;\;3 \\ \hline a\,b\,8\,5\,7\,1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 1\,a\,2\,8\,5\,7 \\ \times\;\;3 \\ \hline a\,2\,8\,5\,7\,1 \end{array}$$

   Portanto, $a = 4$ e o número de partida é $142\,857$.

3. **Jardim variado** – Os triângulos 1, 2, 5 e 6 são retângulos, logo para calcular suas áreas vamos "enxergar" cada um deles como metade de um retângulo. Para isso precisamos saber dividir o terreno retangular em retângulos menores, de modo que nossa estratégia funcione: subdividimos o terreno em 16 retângulos de 15 m por 40 m, como mostra a figura. Cada um desses retângulos tem 15×40=600 m^2 de área.



   Temos então:

   - área do triângulo 1 = área do triângulo 5 = $\dfrac{1}{2} \times 4 \times 600 = 1\,200$ m^2
   - área do triângulo 2 = $\dfrac{1}{2} \times 6 \times 600 = 1\,800$ m^2
   - área do triângulo 6 = $\dfrac{1}{2} \times 2 \times 600 = 600$ m^2.

   Observe que a área do triângulo 4 é a metade da área do terreno todo subtraída das áreas de 3 triângulos: triângulo 5, triângulo 6 e um triângulo formado por metade de 4 desses retângulos menores, temos então:

   área do triângulo $4 = \dfrac{120 \times 80}{2} - \left(1\,200 + 600 + \dfrac{4 \times 600}{2}\right) = 4\,800 - 3\,000 = 1\,800$ m^2.

Finalmente, a área do triângulo 3 é a área total do terreno subtraída da soma das áreas já calculadas dos outros 5 triângulos

$$120 \times 80 - (2 \times 1\,200 + 2 \times 1\,800 + 600) = 9\,600 - 6\,600 = 3\,000 \text{ m}^2.$$

Para que o gasto seja o menor possível, as flores mais caras devem ser plantadas nas menores regiões. Assim, a menor região é a 6, onde deve ser plantada a flor mais cara, rosa, gastando $3{,}50 \times 600 = 2\,100{,}00$. A maior região é a 3 onde deve ser plantada a flor mais barata, bem-me-quer, gastando $0{,}80 \times 3\,000 = 2\,400{,}00$.

As regiões 1 e 5 com áreas iguais a $1\,200$ m^2 devem ser plantadas bromélias e cravos, tendo os gastos: $(3{,}00 + 2{,}20) \times 1\,200 = 6\,240$.

As regiões 2 e 4 com áreas $1\,800$ m^2 devem ser plantadas margarida e violeta com gasto de $(1{,}20 + 1{,}70) \times 1\,800 = 5\,220$. Temos então 4 diferentes maneiras de formar o jardim mantendo o mesmo preço mínimo.

O gasto mínimo é $2\,100 + 2\,400 + 6\,240 + 5\,220 =$R\$ $15\,960,00$. Veja a seguir uma das 4 possibilidades de escolhas das flores com o menor orçamento.

Região	Área m^2	Flor	Preço m^2	Total por flor
1	$1\,200$	bromélia	3,00	$3{,}00 \times 1\,200 = 3\,600$
2	$1\,800$	margarida	1,20	$1{,}20 \times 1\,800 = 2\,160$
3	$3\,000$	bem-me quer	0,80	$0{,}80 \times 3\,000 = 2\,400$
4	$1\,800$	violeta	1,70	$1{,}70 \times 1\,800 = 3\,060$
5	$1\,200$	cravo	2,20	$2{,}20 \times 1\,200 = 2\,640$
6	600	rosa	3,50	$3{,}50 \times 6 = 2\,100$
				TOTAL: 15 960

4. **O algarismo 3** – Vejamos cada vez que Luis escreveu o algarismo 3:

- $3 \ \rightarrow \ 1;$
- $\underbrace{13\ ,\ 23}_{2}\ ,\ \underbrace{30\ ,\ 31\ ,\ 32\ ,\ 33\ ,\ \ldots\ ,\ 39}_{11}\ ,\ \underbrace{43\ ,\ \ldots\ ,\ 93}_{6} \ \rightarrow \ 2 + 6 + 11 = 19;$

Até aqui ele escreveu 20 vezes o algarismo 3. Daí temos:

$$\underbrace{103}_{21^{\underline{a}}}\ ,\ \underbrace{113}_{22^{\underline{a}}}\ ,\ \underbrace{123}_{23^{\underline{a}}}\ ,\ \underbrace{130}_{24^{\underline{a}}}\ ,\ \underbrace{131}_{25^{\underline{a}}}\ .$$

Logo, ao escrever o número 131, ele escreveu o algarismo 3 pela $25^{\underline{a}}$ vez.

5. **Soma de potências** – Existe um padrão para o algarismo das unidades de uma potência de 3: ele tem período 4, pois se repete de 4 em 4 vezes.

$$\begin{aligned}&3\\&3^2=9\\&3^3=27\\&3^4=81\\&3^5=243\\&3^6=\ldots9\\&3^7=\ldots7\\&3^8=\ldots1\end{aligned}$$

Como 444 é múltiplo de 4, o algarismo das unidades de 3^{444} é 1.

Analogamente, o algarismo das unidades de potências de 4 tem período 2. De fato temos:

$$\begin{array}{lcl}4^1=4 & ; & 4^3=64\\ 4^2=16 & ; & 4^4=256\end{array}$$

Como 333 é ímpar, o algarismo das unidades de 4^{333} é 4. Portanto, o algarismo das unidades de $3^{444}+4^{333}$ é $1+4=5$, e logo ele é divisível por 5.

LEMBRE: Os números divisíveis por 5 terminam em 0 ou em 5.

Lista 5

1. **Telefonemas** – Uma vez que João liga para seus pais a cada 3 dias, podemos montar uma tabela que indica os dias da semana em que ocorreram os 14 primeiros telefonemas do João:

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
$1^{\underline{o}}$	$6^{\underline{o}}$	$4^{\underline{o}}$	$2^{\underline{o}}$	$7^{\underline{o}}$	$5^{\underline{o}}$	$3^{\underline{o}}$
$8^{\underline{o}}$	$13^{\underline{o}}$	$11^{\underline{o}}$	$9^{\underline{o}}$	$14^{\underline{o}}$	$12^{\underline{o}}$	$10^{\underline{o}}$

Analisando a primeira linha dessa tabela percebemos que são 7 telefonemas, 1 em cada dia da semana e que, a partir do $7^{\underline{o}}$ telefonema, os dias começam a se repetir. Isto implica que, os números que aparecem na segunda linha da tabela são obtidos dos números que aparecem na primeira linha somados de 7.

Por exemplo, João telefonará para seus pais aos domingos nos telefonemas de números:

$$\begin{aligned}
&1\\
&1+7=8\\
&8+7=15\\
&15+7=22\\
&22+7=29\\
&29+7=36\\
&\vdots
\end{aligned}$$

ou seja, nos números que deixam resto 1 quando divididos por 7.

Com este raciocínio podemos determinar o dia da semana que cai uma ligação, analisando o resto da divisão do número do telefonema por 7.

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
1	6	4	2	7	5	3
8	13	11	9	14	12	10
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
resto 1	resto 6	resto 4	resto 2	resto 0	resto 5	resto 3

Dividindo 100 por 7, obtemos $100 = 7 \times 14 + 2$. Logo, o resto da divisão de 100 por 7 é 2, e segue que o $100^{\underline{o}}$ telefonema será numa quarta-feira.

2. **O maior produto** – Observe que obtemos o maior resultado possível se um dos números começar com o algarismo 5 e o outro com 4. Vejamos as possibilidades que dão o maior produto:

- um dos fatores tem 1 algarismo:

  $5\,321 \times 4 = 21\,284$; $4\,321 \times 5 = 21\,605$

- um dos fatores tem 2 algarismos:

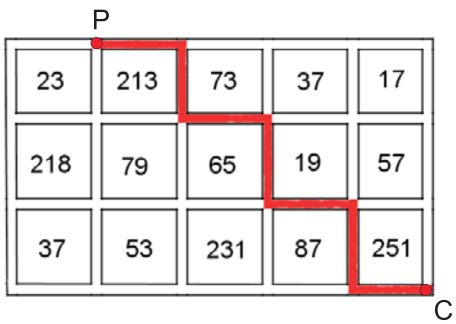
  $532 \times 41 = 21\,812$; $531 \times 42 = 22\,302$; $521 \times 43 = 22\,403$

  $432 \times 51 = 22\,032$; $431 \times 52 = 22\,412$; $421 \times 53 = 22\,313$.

É bom usar uma calculadora. 

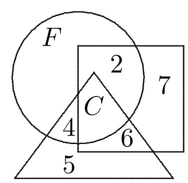
Logo, o melhor resultado é $431 \times 52 = 22\,412$.

3. **O caminho da Joaninha** – Os números primos que aparecem na tabela são: $23, 73, 37, 17, 79, 19, 37, 53$ e 251. Logo, o caminho a ser percorrido pela Joaninha é apresentado na figura a seguir:

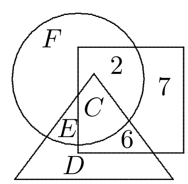


4. **O lugar dos amigos** –

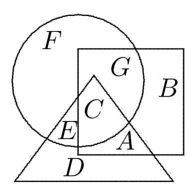
Observe que 3 é o único número dentro das três figuras, e 1 é o único que não está dentro de um polígono, logo: Celina $\to 3$; Fábio $\to 1$.



Agora, 4 é o único número dentro do triângulo e do círculo, logo: Elisa $\to 4$. Nessa situação, 5 é o único dentro do triângulo mas não do quadrado, assim Diana $\to 5$.



Finalmente, 7 é o único número dentro de uma única figura, logo: Bento $\to 7$. Resta então, 2 dentro do círculo, assim Guilherme $\to 2$, e 6 para Ana.



5. **Quadrado perfeito?** – Lembre que um número é um quadrado perfeito se na sua decomposição em fatores primos os expoentes são todos pares. Por exemplo:

- $5^4 \times 7^6 \times 13^2$ é quadrado perfeito, pois é igual a $(5^2 \times 7^3 \times 13)^2$.

Como nenhum número elevado ao quadrado termina em 3, segue que $N_1 = 333\ldots3$ não é um quadrado.

Temos que $N_2 = 666\ldots6 = 2 \times 333\ldots3$. Como $333\ldots3$ é ímpar, então na decomposição de N_2 em fatores primos não aparece 2 com expoente par. Logo, N_2 não é quadrado.

Vejamos a divisibilidade por 3. A soma dos algarismos de cada um dos números é:

$$\begin{aligned} N_3 &\rightsquigarrow \quad 50 \times 15 = 750 \\ N_4 &\rightsquigarrow \quad 50 \times 21 = 1\,050 \\ N_5 &\rightsquigarrow \quad 50 \times 27 = 1\,350 \end{aligned}$$

Como todas essas somas são divisíveis por 3, todos os números também são divisíveis por 3. Logo, se algum deles fosse um quadrado perfeito teria que ser divisível por 9.

A soma dos algarismos de N_3 e N_4 não é divisível por 9, logo esses números não são divisíveis por 9 e, consequentemente, não são quadrados perfeitos.

Como $1\,350$ é divisível por 9, então N_5 é divisível por 9. Temos:

$$2727272727\ldots27 \div 9 = 303030\ldots03$$

e

$$303030\ldots03 \div 3 = 101010\ldots01,$$

logo:

$$2727272727\ldots27 = 3^2 \times 303030\ldots03 = 3^3 \times 101010\ldots01.$$

Note que $101010\ldots01$ tem 49 algarismos, dos quais 25 são iguais a 1 e os outros iguais a 0. Logo a soma de seus algarismos é 25 e portanto não é divisível por 3. Assim, $2727272727\ldots27$ é divisível por 3^2 mas não por 3^4, e por isso concluímos que não é um quadrado perfeito.

Lista 6

1. **Preenchendo quadradinhos** – A operação é equivalente a

$$\left(\square + \square - \square\right) \times \square = 4 \times \square$$

Logo, o lado esquerdo da igualdade é um múltiplo de 4, portanto as únicas possibilidades são:

$$\left(\square + \square - \square\right) \times \boxed{2} = 4 \times \boxed{1} \quad \text{ou} \quad \left(\square + \square - \square\right) \times \boxed{1} = 4 \times \boxed{2}$$

Daí, podemos concluir que:

$$\left(\boxed{3} + \boxed{5} - \boxed{6}\right) \times \boxed{2} = 4 \times \boxed{1} \quad \text{ou} \quad \left(\boxed{6} + \boxed{5} - \boxed{3}\right) \times \boxed{1} = 4 \times \boxed{2}$$

2. **Os 3 números** – Como $13\,983$ termina em 3, a soma dos algarismos das unidades dos 3 números deve ser 13, e para isso só temos uma opção: $2+4+7=13$.

			1	
				2
				4
				7
1	3	9	8	3

Agora, a soma dos algarismos das dezenas deve ser $8-1=7$, e logo tem de ser $1+2+4=7$. Completamos os algarismos das dezenas, tendo o cuidado de não repetir o mesmo algarismo num mesmo número. Temos três opções:

			1	
			1	2
			2	4
			4	7
1	3	9	8	3

			1	
			4	2
			2	4
			1	7
1	3	9	8	3

			1	
			4	2
			1	4
			2	7
1	3	9	8	3

Os algarismos das centenas devem somar 9, aí temos duas opções: $4+4+1$ e $1+1+7$. Como nas três possibilidades anteriores o algarismo 4 ocorre em dois dos três números, escolhemos a segunda opção, para que não apareça o algarismo 4 repetido. Temos de tomar cuidado para que 1 e 7 também não apareçam repetidos.

			1	
		7	1	2
		1	2	4
		1	4	7
1	3	9	8	3

			1	
		1	4	2
		7	1	4
		1	2	7
1	3	9	8	3

Finalmente, os algarismos das unidades de milhar devem somar 13, agora é fácil escolhê-los:

			1	
	4	7	1	2
	7	1	2	4
	2	1	4	7
1	3	9	8	3

			1	
	7	1	4	2
	2	7	1	4
	4	1	2	7
1	3	9	8	3

3. **Preencher uma tabela** – Existem várias maneiras de preencher a tabela, dependendo de como selecionamos a casa a ser preenchida. A cada vez temos várias casas que podem ser preenchidas.

Veja um exemplo de como preencher a tabela: inicialmente temos 4 casas que podem ser preenchidas – marcadas com X. Escolhemos uma delas e preenchemos de acordo com a segunda regra, e repetimos esse processo até a tabela estar completamente preenchida.

X	X	X	
1	**2**	X	

1	**2**	2	

3			
1	**2**	2	

3		4	
1	**2**	2	

3		4	
1	**2**	2	6

Mas para colocar em cada casa o maior número possível, a ideia é a cada vez examinar todas as casas que podem ser preenchidas, e só preencher a casa onde podemos colocar o maior número. Se em duas dessas casas o número a ser colocado é o mesmo, preencheremos a que tem o menor número de vizinhos preenchidos. Vamos lá!

3			
1	**2**		

$\Rightarrow$

3	6		
1	**2**		

$\Rightarrow$

9			
3	6		
1	**2**		

9	18		
3	6		
1	**2**		

$\Rightarrow$

27	54		
9	18		
3	6		
1	**2**		

$\Rightarrow$

27	54	72	
9	18		
3	6		
1	**2**		

27	54	72	
9	18	144	
3	6		
1	**2**		

$\Rightarrow$

27	54	72	216
9	18	144	
3	6		
1	**2**		

$\Rightarrow$

27	54	72	216
9	18	144	432
3	6		
1	**2**		

27	54	72	216
9	18	144	432
3	6		576
1	**2**		

$\Rightarrow$

27	54	72	216
9	18	144	432
3	6	1178	576
1	**2**		

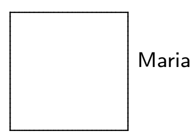
$\Rightarrow$

27	54	72	216
9	18	144	432
3	6	1178	576
1	**2**		1754

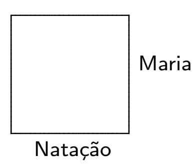
27	54	72	216
9	18	144	432
3	6	1178	576
1	**2**	3516	1754

Logo, o maior número é $3\,516$.

4. **Olimpíada de Pequim** – Para iniciar, escolhemos um lugar para Maria.

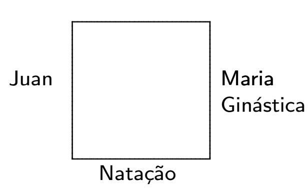


(a) Quem pratica natação está à esquerda de Maria. Logo, só podemos ter a configuração abaixo.

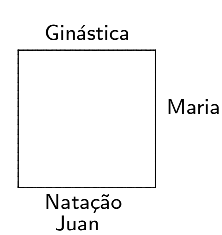


(b) Quem pratica ginástica está na frente de Juan. Existem duas únicas possibilidades: Maria pratica ginástica ou Maria não pratica ginástica.

Maria pratica ginástica

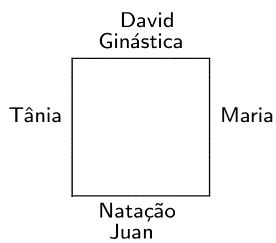


Maria não pratica ginástica

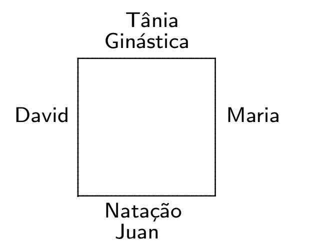


(c) Como Tânia e David sentaram-se juntos, então somente a segunda opção do item anterior – *Maria não pratica ginástica* - pode satisfazer essa condição. Ela gera as seguintes duas possibilidades:

Maria não pratica ginástica

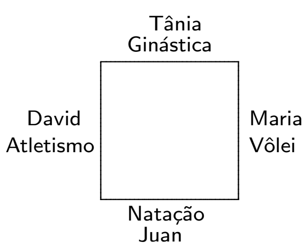


Maria não pratica ginástica

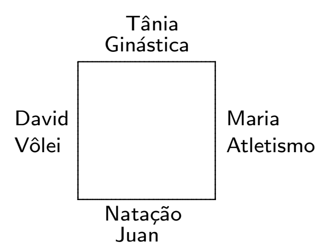


(d) Como uma mulher sentou-se ao lado de quem pratica vôlei, a segunda opção do item anterior é a correta, e temos:

Maria não pratica ginástica



Maria não pratica ginástica



Logo, David ou Maria pratica atletismo.

5. **Culturas diferentes** –

(a) (i) $03/12$ significa para Ralph 12 de março e para Jorge 3 de dezembro; logo é ambígua.

(ii) $18/08$ só pode ser mesmo 18 de agosto.

(iii) $05/05$ só pode ser 5 de maio.

Logo, (i) é uma data que eles não podem se escrever.

(b) A data só é ambígua quando o número do dia pode representar também um número do mês, logo quando é um número de 1 a 12. Por outro lado, nesses números não há ambiguidade quando o número do mês é igual ao número do dia, por exemplo $05/05$, que só pode ser 5 de maio. Por isso, em cada mês eles têm de evitar 11 dias. Logo, os períodos mais longos que eles não podem se escrever ocorrem em 11 dias consecutivos em janeiro de 02 a 12 de janeiro, e em dezembro, de 02 a 12 de dezembro. Observe que nos outros meses os períodos que eles não podem se escrever são menores, veja os exemplos:

- em abril eles não podem se escrever de $01/04$ a $03/04$ e depois de $05/04$ a $12/04$.
- em setembro eles não podem se escrever de $01/09$ a $08/09$ e depois de $10/09$ a $12/09$.

Lista 7

1. **Uma liquidação** – Na liquidação, exceto nos sábados, os preços estão valendo 50% dos preços originais. Nos sábados, com o desconto adicional de 20%, os preços valem 80% dos preços fora dos sábados, ou seja

$$80\% \text{ de } 50\% = \frac{80}{100} \times \frac{50}{100} = \frac{40}{100} = 40\% \text{ do preço fora de liquidação}\,.$$

Logo, Roberta deixou de economizar 60% que corresponde a R$ 50,40. Temos:

$$\begin{aligned} 60\% \quad &\Rightarrow \quad 50,40 \\ 10\% \quad &\Rightarrow \quad 50,40 \div 6 = 8,4 \\ 100\% \quad &\Rightarrow \quad 8,4 \times 10 = 84\,. \end{aligned}$$

O preço da calça antes da liquidação era de R$ 84,00.

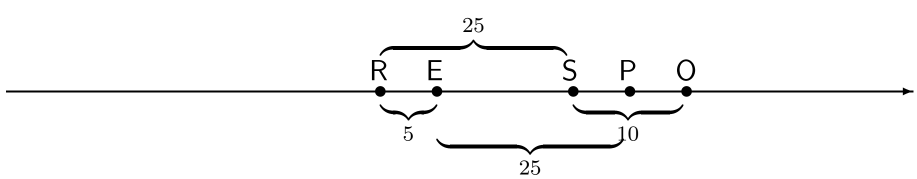
2. **Número com muitos zeros** – A resposta correta é **(D)**.

Vamos tentar comparar os 5 números sem efetuar cálculos. Temos:

$$\begin{array}{rcl} 3+a & = & 3{,}000\ldots0001 \text{ é menor do que } 4 \\ 3-a & & \text{é menor do que } 3 \\ 3a & = & 0,000\ldots0003 \text{ é menor do que } 1 \\ \dfrac{3}{a} & = & \dfrac{3}{0,000\ldots0001} = \dfrac{3}{\frac{1}{10^{2010}}} = 3\times 10^{2010} \text{ é maior do que } 10 \\ \dfrac{a}{3} & = & \dfrac{0,000\ldots0001}{3} \text{ é menor do que } 0,000\ldots0001\,. \end{array}$$

Logo, o maior número é $\dfrac{3}{a}$.

3. **Corrida das tartarugas** – Vamos representar cada tartaruga numa reta, utilizando a sua letra inicial. Temos então a seguinte situação:



Logo, Sininha está 20 m à frente de Elzinha. Portanto, Pulinha está 5 m à frente de Sininha. A ordem de chegada forma a palavra: OPSER.

4. **Que memória...** – O número começa com 25 porque 5^2 é a única potência de 5 com 2 algarismos.

2	5			

Os candidatos aos 2 últimos algarismos são as potências de 2 com 2 algarismos: 16, 32 e 64:

$$25\_16, \quad 25\_32, \quad 25\_64.$$

Já o algarismo do meio pode ser 3, 6 ou 9. Para escolher entre esse números, lembremos que a soma dos 5 algarismos é ímpar, e como $2+5$ é ímpar, a soma dos 3 últimos tem de ser par. Nessa situação temos os números

$$25\,316, \ 25\,916, \ 25\,332, \ 25\,932, \ 25\,664.$$

Dentre esses números os que não têm algarismos repetidos são

$$25\,316, \ 25\,916\,.$$

Logo, o código é $25\,916$.

5. **Uma fração irredutível** – Para que a fração seja irredutível, o numerador e o denominador não podem ter fator comum.

   Inicialmente, vamos ver quais são os fatores primos de $N = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times 10$:

$$2 \times 3 \times \underbrace{4}_{2^2} \times 5 \times \underbrace{6}_{2\times 3} \times 7 \times \underbrace{8}_{2^3} \times \underbrace{9}_{3^2} \times \underbrace{10}_{2\times 5}.$$

   Logo, a decomposição de N em fatores primos é:

$$N = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 \ (*)$$

   Podemos escolher diversas frações que satisfazem o problema. Por exemplo:

   (i) O numerador tem apenas 1 fator de $(*)$:

$$\frac{2^8}{3^4 \times 5^2 \times 7} \ ; \ \frac{3^4}{2^8 \times 5^2 \times 7} \ ; \ \frac{5^2}{2^8 \times 3^4 \times 7} \ ; \ \frac{7}{2^8 \times 3^4 \times 5^2}.$$

   Nesse caso temos 4 frações mais as 4 frações inversas, com denominadores com apenas 1 fator de $(*)$.
   Não podemos esquecer do número 1, obtendo as 2 frações:

$$\frac{1}{2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7} \ ; \ \frac{2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7}{1}.$$

   (ii) O numerador tem 2 fatores de $(*)$:

$$\frac{2^8 \times 3^4}{5^2 \times 7} \ ; \ \frac{2^8 \times 5^2}{3^4 \times 7} \ ; \ \frac{2^8 \times 7}{3^4 \times 5^2} \ ; \ \frac{3^4 \times 5^2}{2^8 \times 7} \ ; \ \frac{3^4 \times 7}{2^8 \times 5^2} \ ; \ \frac{5^2 \times 7}{2^8 \times 3^4}.$$

   Nesse caso temos 6 frações.

   (iii) O numerador tem 3 fatores de $(*)$:

$$\frac{2^8 \times 3^4 \times 5^2}{7} \ ; \ \frac{2^8 \times 3^4 \times 7}{5^2} \ ; \ \frac{2^8 \times 5^2 \times 7}{3^4} \ ; \ \frac{3^4 \times 5^2 \times 7}{2^8}.$$

Ao todo temos 16 frações irredutíveis.

Lista 8

1. **Transformar em decimal** – Temos:

   (a) $7 \times \dfrac{2}{3} + 16 \times \dfrac{5}{12} = \dfrac{14}{3} + \dfrac{20}{3} = \dfrac{34}{3} = 11{,}3333\ldots$

   (b) $5 - \left(2 \div \dfrac{5}{3}\right) = 5 - \left(2 \times \dfrac{3}{5}\right) = 5 - \dfrac{6}{5} = 5 - 1{,}2 = 3,8$

   (c) $1 + \dfrac{2}{1 + \dfrac{3}{1+4}} = 1 + \dfrac{2}{1 + \dfrac{3}{5}} = 1 + \dfrac{2}{\dfrac{8}{5}} = 1 + 2 \times \dfrac{5}{8} = 1 + \dfrac{10}{8} = 1 + 1{,}25 = 2{,}25\,.$

2. **Uma sequência especial** –

   - os números 1 a 9 ocupam 9 posições;
   - os números 10 a 99 ocupam $2 \times 90 = 180$ posições;
   - os números 100 a 199 ocupam $3 \times 100 = 300$ posições; os de 200 a 299 ocupam $3 \times 100 = 300$ posições; os números 300 a 399 ocupam $3 \times 100 = 300$ posições; etc.

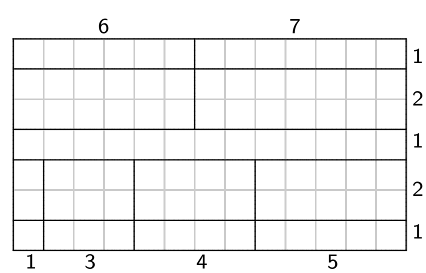
$$\underbrace{100\,,\ldots 199}_{3\times 100=300},\ \underbrace{200\,,\ldots\,,\,299}_{3\times 100=300},\ \underbrace{300\,,\ldots\,,\,399}_{3\times 100=300},\ \underbrace{400\,,\ldots\,,\,499}_{3\times 100=300},\ \underbrace{500\,,\ldots\,,\,599}_{3\times 100=300},\ \underbrace{600\,,\ldots\,,\,699}_{3\times 100=300}$$

   Assim, os algarismos usados para escrever de 1 a 699 ocupam $9+180+6\times 300 = 1\,989$ posições, logo faltam $2\,009 - 1\,989 = 20$ posições. Como $20 = 3\times 6 + 2$ precisamos ainda escrever de 700 a 706, obtendo 21 posições, com o algarismo 6 ocupando a posição 21. Logo o algarismo 0 é que ocupa a $2009^{\underline{a}}$ posição.

3. **Cortar um retângulo** – Dividimos o retângulo em 13×7 quadradinhos de 1 cm de lado cada um. Agora, usamos que

$$13 = 1 + 3 + 4 + 5 = 6 + 7 = 0 + 13$$

   para obter a divisão em 13 retângulos diferentes. Você pode encontrar outras formas de fazer essa divisão?



4. **Medida de ângulo** – A resposta correta é **(B)**.

   Temos que $A\widehat{O}C + C\widehat{O}E = 90^\circ$ e $C\widehat{O}E = D\widehat{O}Y$. Logo, $A\widehat{O}C = 90^\circ - D\widehat{O}Y$. Como $D\widehat{O}Y$ está entre 40° e 50°, segue que $A\widehat{O}C$ está entre $90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ e $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.

5. **Perímetros e áreas** – A área do quadrado é

$$(\sqrt{3}+3)^2 = \sqrt{3}^2 + 2 \times 3\sqrt{3} + 3^2 = 12 + 6\sqrt{3}$$

e a do retângulo:

$$(\sqrt{72}+3\sqrt{6}) \times \sqrt{2} = \sqrt{144} + 3\sqrt{12} = 12 + 6\sqrt{3}\,.$$

Logo eles têm a mesma área. Vamos agora comparar os perímetros. O do quadrado é

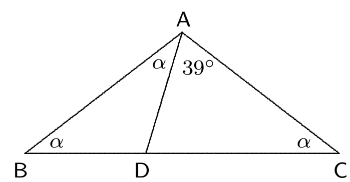
$$4 \times (\sqrt{3}+3) = 4\sqrt{3} + 12$$

e o do retângulo é

$$2 \times (\sqrt{72} + 3\sqrt{6} + \sqrt{2}) = 2 \times (6\sqrt{2} + 3\sqrt{6} + \sqrt{2}) = 14\sqrt{2} + 6\sqrt{6}\,.$$

Como $4\sqrt{3} < 6\sqrt{6}$ e $12 < 14\sqrt{2}$, segue que $4\sqrt{3}+12 < 6\sqrt{6}+14\sqrt{2}$. Logo, o retângulo tem o maior perímetro.

6. **Cálculo de ângulo** – Como $AB = AC$, o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles, logo $A\widehat{B}C = A\widehat{C}B$. Sendo $AD = BD$ o triângulo $\triangle ABD$ também é isósceles, logo $A\widehat{B}D = B\widehat{A}D$. Temos então



$$A\widehat{B}C = A\widehat{C}B = B\widehat{A}D\,.$$

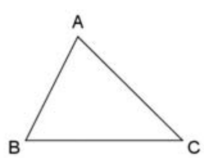
Na figura, esses 3 ângulos iguais estão representados pela letra α. Os ângulos internos de $\triangle ABC$ são $\alpha + 39°$, α e α; logo:

$$\alpha + 39° + \alpha + \alpha = 180° \;\Rightarrow\; 3\alpha = 180° - 39° = 141°\,.$$

Assim, $B\widehat{A}D = 47°$.

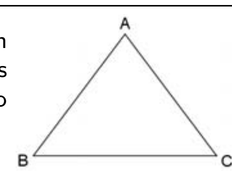
Lembrete 1: Em um triângulo a soma dos ângulos internos é $180°$:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°\,.$$



Lembrete 2: Em um triângulo isósceles os ângulos da base são iguais:

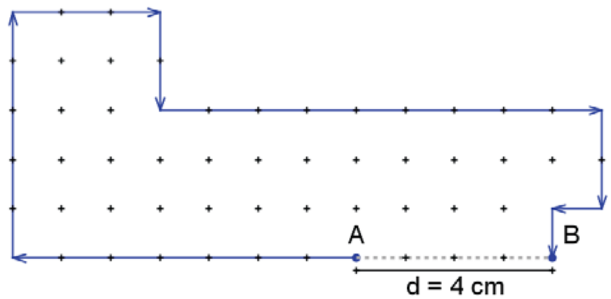
$\widehat{B} = \widehat{C}$ e $AB = AC\,.$



Lista 9

1. **O caminho da formiga –**

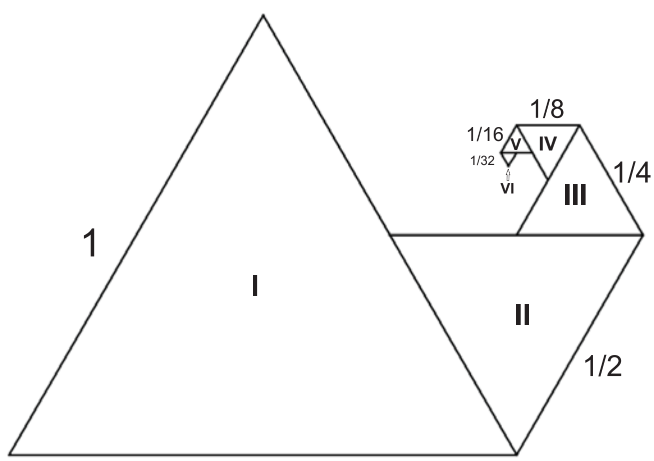
   A resposta correta é **(C)**.



2. **Menino mentiroso –** Claramente Pedrinho encontrou Joãozinho em um dia que ele mente. O sábado está descartado pois, caso contrário, ele estaria falando a verdade. Assim, o encontro entre eles foi numa terça-feira ou quinta-feira. Como o dia seguinte não pode ser quarta-feira, a única possibilidade é quinta-feira.

3. **Encontre os 4 números –** Observemos que os números $1, 2, 3$ e 6 satisfazem a propriedade. Portanto, os múltiplos $a, 2a, 3a$ e $6a$, para qualquer valor de a, também satisfazem a propriedade. Como estamos procurando números de 3 algarismos e $999 \div 6 = 166{,}5$ então basta considerar qualquer valor de a entre 100 e 166 para obter os 4 números de 3 algarismos.

4. **Colando 6 triângulos –**



A figura é formada por 12 segmentos, na sequência de formação dos triângulos.

- 2 segmentos de 1 cm e 1 segmento de $\dfrac{1}{2}$ cm no triângulo I.
- 1 segmento de $\dfrac{1}{2}$ cm e 1 segmento de $\dfrac{1}{4}$ cm no triângulo II.
- 1 segmento de $\dfrac{1}{4}$ cm e 1 segmento de $\dfrac{1}{8}$ cm no triângulo III.

- 1 segmento de $\frac{1}{8}$ cm e 1 segmento de $\frac{1}{16}$ cm no triângulo IV.
- 1 segmento de $\frac{1}{16}$ cm e 1 segmento de $\frac{1}{32}$ cm no triângulo V.
- 2 segmentos de $\frac{1}{32}$ cm no triângulo VI.

Logo o perímetro é:

$$\begin{aligned} 2\times 1+2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{16}+3\times\frac{1}{32} &= 2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{3}{32}\\ &= 3+\frac{16+8+4+3}{32}\\ &= 3+\frac{31}{32}. \end{aligned}$$

5. **Os livros da Elisa –** Seja N o número total de livros da Elisa. Como $N+1$ é múltiplo de 9 e 4, temos que ele é múltiplo de 36. Logo $N+1$ é 36 ou 72, pois Elisa tem menos que 100 livros. Se $N=35$ então, o número de livros de matemática é $36\div 9-1=3$ e o número de livros de literatura é $36\div 4=9$. Logo, Elisa teria: $24+3+9=36$ livros, o que é impossível porque 36 é maior que 35.

   Portanto, $N=71$ e o número de livros de matemática é $72\div 9-1=7$.

Lista 10

1. **Divisão por 9 –**

(a) Sabemos que um número e a soma de seus algarismos sempre deixam o mesmo resto quando divididos por 9. Assim, o número inicial menos o número final é sempre divisível por 9.

Efetuando, sucessivamente os passos, obtemos os algarismos de 1 a 9. Daí, a lista final é:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, \ldots$$

Como o resto da divisão do número $20\,092\,009$ por 9 é 4, então os 6 últimos algarismos da lista são: $\ldots, 8, 9, 1, 2, 3, 4$. Portanto, a lista tem mais 4 do que 5.

O número de vezes que aparece o 9 na lista, é o número de múltiplos de 9, que são menores ou iguais a $20\,092\,009$. Como $20\,092\,005$ é o maior múltiplo de 9 que é menor do que $20\,092\,009$, temos que $20\,092\,005 \div 9 = 2\,232\,445$ vezes aparece o algarismo 9 na lista.

(b) Como $3^{2\,009} = 3^{2\,008} \times 3 = (3^2)^{1\,004} \times 3 = 9^{1\,004} \times 3$, então, o resto da divisão por 9 é 0. Logo, o número final de apenas um algarismo é o 9.

(c) Observemos que $17^2 =$ múltiplo de $9 + 1$. Logo,

$$17^{2\,008} = (17^2)^{1\,004} = \text{múltiplo de } 9 + 1,$$

assim $17^{2\,009} =$ múltiplo de $9 + 17 =$ múltiplo de $9 + 8$.

Daí, podemos concluir que, se fazemos o mesmo processo com o número $17^{2\,009}$ obtemos no final o algarismo 8.

2. **Uma brincadeira na sala de aula –**

(a) O número 1 só pode ser obtido a partir do $2 \rightsquigarrow 1 = 2 \div 2$, e o 2 a partir do $4 \rightsquigarrow 2 = 4 \div 2$, mas o 4 pode ser obtido a partir do $1 \rightsquigarrow 1 + 3 = 4$ ou do $8 \rightsquigarrow 4 = 8 \div 2$.

Logo, temos 2 maneiras de obter 1, a partir de 1 e 8 depois de 3 operações:
$$\begin{cases} 1 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1 \\ 8 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1 \end{cases}.$$

(b) Para uma operação a mais vemos que o número 8 pode ser obtido a partir do $5 \rightsquigarrow 8 = 5 + 3$ ou do $16 \rightsquigarrow 8 = 16 \div 2$. Logo, temos 3 maneiras de obter 1 a partir de 2, 5 e 16:
$$\begin{cases} 2 \rightsquigarrow 1 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1 \\ 5 \rightsquigarrow 8 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1 \\ 16 \rightsquigarrow 8 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1 \end{cases}.$$

(c) De maneira similar vemos que para 5 operações temos os números: 4, 10, 13 ou 32:
$$\begin{cases} 4 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1 \\ 10 \rightsquigarrow 5 \rightsquigarrow 8 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1 \\ 13 \rightsquigarrow 16 \rightsquigarrow 8 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1 \\ 32 \rightsquigarrow 16 \rightsquigarrow 8 \rightsquigarrow 4 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1 \end{cases}.$$

3. **Calcule a idade** – No próximo ano Laura será 2 anos mais velha do que no ano passado. Logo sua idade no ano passado é um múltiplo de 8 que somado a 2 dá um múltiplo de 7. Vamos procurar esse número:

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} \text{múltiplos de } 7: & 7 & 14 & 21 & 28 & 35 & 42 & 49 & 56 & 63 & 70 & \ldots & 98 & \ldots \\ (\text{múltiplos de } 7) - 2: & 5 & 12 & 19 & 26 & 33 & \boxed{40} & 47 & 54 & 61 & 68 & \ldots & \boxed{96} & \ldots \end{array}$$

Note que 40 e 96 são os únicos múltiplos de 8 menores que 100 que aparecem na segunda linha. Como Vovó Ana tem menos do que 100 anos, podemos concluir que ano passado ela tinha 96 anos e Laura 40. Logo, a idade atual de Laura é 41 anos.

4. **Divisões e restos** – De acordo com os dados do problema, o dobro do número é um múltiplo de 5 acrescido de 1. Como os múltiplos de 5 terminam em 0 ou 5, o dobro termina em 1 ou 6. Mas o dobro é um número par, logo termina em 6. Assim, o número termina em 3 ou 8, portanto dividido por 5 deixa resto 3.

5. **Preenchendo o círculo** – Sabemos que $\square = 423 \div 47 = 9$. Por outro lado, temos que

$$1448 = \underbrace{282 \times \boxminus}_{\text{múltiplo de } 282} + \underbrace{\boxdot\,\boxtimes}_{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ com 2 algarismos}}$$

Como 282 tem 3 algarismos, concluímos que $\boxdot\,\boxtimes$ só pode ser o resto da divisão de $1\,448$ por 282. Efetuando essa divisão, obtemos $1\,448 = 282 \times 5 + 38$. Logo, $\boxdot = 3$ e $\boxtimes = 8$. Obtemos também que $\boxminus = 5$. Finalmente, temos:

$$423 \times \frac{\boxplus}{3} = 282 \;\Rightarrow\; 141 \times \boxplus = 282 \;\Rightarrow\; \boxplus = 2\,.$$

A sequência completa:

$$47 \xrightarrow{\times 9} 423 \xrightarrow{\times 2/3} 282 \xrightarrow{\times 5} 1410 \xrightarrow{+\ 38} 1448$$

Soluções do Nível 2

Lista 1

1. **Vista ruim** – Seja A o número total de alunos da sala. Logo, $\frac{40}{100} \times A$ não enchergam bem. Portanto, $\frac{70}{100} \times \frac{40}{100} \times A$ usam óculos. Consequentemente, temos que:

$$\frac{70}{100} \times \frac{40}{100} \times A = 21 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{21 \times 100}{7 \times 4} = 3 \times 25 = 75\,.$$

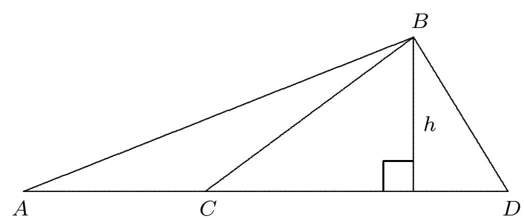
2. **Idade média da população de Campo Verde** – Se H indica o número de homens e M o de mulheres, então:

$$\frac{H}{M} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{3H}{2}\,.$$

A idade média da população é:

$$\frac{37H + 42M}{H + M} = \frac{37H + 42\frac{3H}{2}}{H + \frac{3H}{2}} = \frac{100H}{\frac{5H}{2}} = \frac{100 \times 2}{5} = 40 \text{ anos}\,.$$

3. **Área de triângulo** – Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DBC$ têm bases AC e CD respectivamente, e a mesma altura h em relação a essas bases.



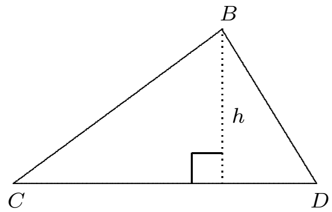
Assim temos:

$$\text{área } \triangle ABC = \frac{AC \times h}{2} \qquad \text{e} \qquad \text{área } \triangle DBC = \frac{CD \times h}{2}\,.$$

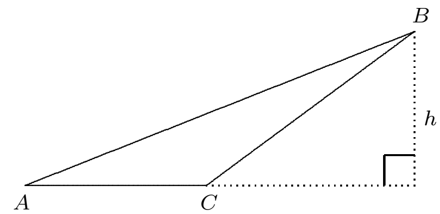
Logo, a relação entre as áreas é dada por:

$$\frac{\text{área } \triangle ABC}{\text{área } \triangle DBC} = \frac{\frac{AC\times h}{2}}{\frac{CD\times h}{2}} = \frac{AC}{CD} = \frac{1,5}{4-1,5} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}\,.$$

LEMBRE-SE: A área de um triângulo é a metade do produto de um dos seus lados pela altura h relativa a este lado, como exemplificado nas duas figuras a seguir.



Área do$\triangle BCD = \dfrac{CD \times h}{2}$



Área do$\triangle ABC = \dfrac{AC \times h}{2}$

4. **Construindo quadrados perfeitos** – Sim, será sempre um quadrado perfeito. De fato, se $n-1, n, n+1$ e $n+2$, são quatro inteiros consecutivos, então seu produto mais 1, é dado por:

$$\begin{aligned}
(n-1)n(n+1)(n+2)+1 &= n(n^2-1)(n+2)+1 \\
&= n(n^3+2n^2-n-2)+1 \\
&= n^4+2n^3-n^2-2n+1 \\
&= n^4+2n^3+(n^2-2n^2)-2n+1 \\
&= (n^4+2n^3+n^2)-2n^2-2n+1 \\
&= (n^2+n)^2-2(n^2+n)+1 \\
&= [(n^2+n)-1]^2.
\end{aligned}$$

5. **Feira de Ciências** – Sejam x e y o número de alunos do ensino fundamental e do médio respectivamente, presentes na feira. Logo, o número daqueles que compraram um adesivo é:

$$\frac{x}{2} \text{ do ensino fundamental} \quad \text{e} \quad \frac{y}{4} \text{ do ensino médio;}$$

e os que não compraram foram

$$\frac{x}{2} \text{ do ensino fundamental} \quad \text{e} \quad \frac{3y}{4} \text{ do ensino médio.}$$

Dentre os alunos que não compraram adesivos, os do ensino médio representam o dobro dos do ensino fundamental. Logo,

$$\frac{3y}{4} = 2 \times \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{3y}{8}\,.$$

Sabendo que o total arrecadado foi de R\$ $38{,}00$, concluímos que:

$$\begin{aligned}
38 = 0,30\,\frac{x}{2} + 0,50\,\frac{y}{4} = 0,30\,\frac{3y}{8} + 0,50\,\frac{y}{4} \quad &\Rightarrow \quad 1,90\,y = 8 \times 38 \\
&\Rightarrow \quad y = 160\,.
\end{aligned}$$

Agora, de $x = \frac{3y}{4}$, segue que $x = 120$.

Lista 2

1. **Par perfeito** – Chamemos de n o natural "candidato" a formar um par perfeito com 122. Então, devemos ter: $122 + n = A^2$ e $122 \times n = B^2$ onde A e B são números naturais.

   Como $B^2 = 2 \times 61 \times n$, concluímos que n tem também os fatores primos 2 e 61. Logo, podemos escrever n como $n = 2 \times 61 \times m^2 = 122m^2$.

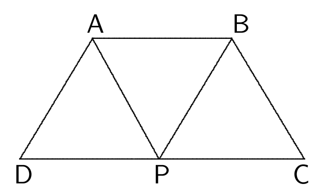
   Obtemos então $A^2 = 122 + 122m^2 = 122(1 + m^2)$. O **menor** valor de $(1 + m^2)$ que satisfaz esta igualdade é $1 + m^2 = 122$, ou seja, $m^2 = 121$. Daí segue que $m = 11$. Consequentemente, $n = 122 \times 121$ e temos:

   $$A^2 = 122 + 122 \times 121 = 122^2 \quad \text{e} \quad B^2 = 122 \times 122 \times 121 = (122 \times 11)^2 .$$

   Logo, 122 e 122×121 formam um par perfeito.

   Observação. Na verdade, 122×121 é o **menor** natural que forma um par perfeito com 122. Será que existem outros?

2. **Um trapézio** – A resposta correta é **(D)**.
   Seja P o ponto médio do segmento CD e traçemos os segmentos AP e BP. Os três triângulos formados $\triangle ADP$, $\triangle ABP$ e $\triangle BCP$ são equiláteros (porquê?). Então, os ângulos $D\widehat{A}P = 60° = P\widehat{A}B$. Como o segmento AC é a bissetriz do ângulo $P\widehat{A}B$ (porquê?), concluímos que $P\widehat{A}C = 30°$. Portanto:

   $$C\widehat{A}D = D\widehat{A}P + P\widehat{A}C = 60° + 30° = 90° .$$

3. **Mistério das bolas** – Seja m o número de bolas pretas na primeira urna e n o de bolas brancas na segunda urna. Inicialmente, Henrique retirou k bolas pretas da primeira urna e as colocou na segunda urna. Nesse ponto a situação é a seguinte:

   - na 1ª urna temos: $\underbrace{m-k}_{\text{pretas}}$
   - na 2ª urna temos: $\underbrace{n}_{\text{brancas}} + \underbrace{k}_{\text{pretas}}$

   Depois, ele retirou k bolas da segunda urna e as colocou na primeira urna. Agora esse grupo de k bolas pode ter bolas brancas e pretas. Assim chamemos de p o número de bolas pretas e de b o de bolas brancas retiradas da 2ª urna, e logo $k = b + p$. Temos então:

   - na 1ª urna temos: $\underbrace{m-k}_{\text{pretas}} + \underbrace{p}_{\text{pretas}} + \underbrace{b}_{\text{brancas}} = \underbrace{m-k+p}_{\text{pretas}} + \underbrace{b}_{\text{brancas}}$
   - na 2ª urna temos: $\underbrace{n}_{\text{brancas}} + \underbrace{k}_{\text{pretas}} - \underbrace{b}_{\text{brancas}} - \underbrace{p}_{\text{pretas}} = \underbrace{n-b}_{\text{brancas}} + \underbrace{k-p}_{\text{pretas}}$

Assim, ele ficou com b bolas brancas na primeira urna e $k - p$ bolas pretas na segunda urna. Mas, $k = p + b$, ou seja, $b = k - p$. Logo, o número de bolas brancas na primeira urna é igual ao número de bolas pretas na segunda urna.

4. **Contando a palavra BRASIL** – Para ler a palavra BRASIL, devemos percorrer um caminho que começa em uma letra B e termina em uma letra L. Observemos que o caminho a ser percorrido é composto sucessivamente de deslocamentos horizontais para a direita e verticais para baixo. Assim, vamos representar estes caminhos por sequências de letras H (significando deslocamento para a direita) e letras V (significando deslocamento para baixo).

   Vamos ver dois exemplos:

   (i) Começamos em B na segunda linha (de cima para baixo) e seguimos o caminho VHVVV.

   (ii) Começamos em B na terceira linha e seguimos o caminho HVVHH.

   Para resolver o problema devemos contar quantos caminhos começam com B e terminam com L. Para isto, temos que listar esses caminhos. Seja $\mathcal{C}_j$ o número de tais caminhos começando na linha j, onde j varia de 1 a 6:

Linha 1: VVVVV $\rightsquigarrow \mathcal{C}_1 = 1$;

Linha 2: HVVVV, VHVVV, VVHVV, VVVHV, VVVVH $\rightsquigarrow \mathcal{C}_2 = 5$;

Linha 3: HHVVV, HVHVV, HVVHV, HVVVH, VHHVV, VHVHV, VHVVH, VVHHV, VVHVH, VVVHH $\rightsquigarrow \mathcal{C}_3 = 10$;

Linha 4: HHHVV, HHVHV, HHVVH, HVHHV, HVHVH, HVVHH, VHHHV, VHHVH, VHVHH, VVHHH $\rightsquigarrow \mathcal{C}_4 = 10$;

Linha 5: HHHHV, HHHVH, HHVHH, HVHHH, VHHHH $\rightsquigarrow \mathcal{C}_5 = 5$;

Linha 6: HHHHH $\rightsquigarrow \mathcal{C}_6 = 1$.

Portanto, a palavra BRASIL aparece

$$\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4 + \mathcal{C}_5 + \mathcal{C}_6 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$$

vezes na figura (Procure entender a simetria: $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_6$; $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_5$ e $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_4$).

5. **Quais são os números?** – A equação pode ser escrita na forma $x^4 - y^2 = 71$. Agora, fatorando $x^4 - y^2$ temos:

$$(x^2 - y)(x^2 + y) = 71 \ (*)\,.$$

Como x e y são inteiros, então cada um dos fatores $(x^2 - y)$ e $(x^2 + y)$ também é um número inteiro. Logo em (*) escrevemos 71 como o produto de 2 números inteiros. Como 71 é um número primo, ele só pode ser escrito como produto de inteiros na forma: $71 = 1 \times 71$. Temos então dois casos a considerar: $(x^2 - y) = 1$ e $(x^2 + y) = 71$, ou $(x^2 - y) = 71$ e $(x^2 + y) = 1$.

Vamos estudar cada caso.

1º caso: $\begin{cases} x^2 - y &= 1 \\ x^2 + y &= 71 \end{cases}$.

Somando as duas equações obtemos: $2x^2 = 72$, o que implica $x = \pm 6$. Portanto, $y = (\pm 6)^2 - 1 = 35$. Como x, y são inteiros positivos, concluímos que a solução nesse primeiro caso é: $x = 6$ e $y = 35$.

2º caso: $\begin{cases} x^2 - y &= 71 \\ x^2 + y &= 1 \end{cases}$.

Se $x^2 + y = 1$, então $x = 0$ e $y = 1$ ou $x = 1$ e $y = 0$ já que x, y são inteiros positivos. Por outro lado, é fácil verificar que tais valores não satisfazem a equação $x^4 = y^2 + 71$.

Logo, a solução para o problema é: $x = 6$ e $y = 35$.

Lista 3

1. **No jogo** – Seja T a quantidade total de dinheiro no jogo. Assim, no início, os jogadores possuíam:

$$\begin{array}{ll} \text{Aldo:} & \frac{7}{18}T \\ \text{Bernardo:} & \frac{6}{18}T \\ \text{Carlos:} & \frac{5}{18}T\,. \end{array}$$

No final eles possuíam:

$$\begin{array}{ll} \text{Aldo:} & \frac{6}{15}T \\ \text{Bernardo:} & \frac{5}{15}T \\ \text{Carlos:} & \frac{4}{15}T\,. \end{array}$$

Para melhor comparar essas frações, coloquemo-las com um denominador comum:

No início:

$$\begin{array}{ll} \text{Aldo:} & \frac{7}{18}T = \frac{35}{90}T \\ \text{Bernardo:} & \frac{6}{18}T = \frac{30}{90}T \\ \text{Carlos:} & \frac{5}{18}T = \frac{25}{90}T\,. \end{array}$$

No final:

$$\begin{array}{ll} \text{Aldo:} & \frac{6}{15}T = \frac{36}{90}T \\ \text{Bernardo:} & \frac{5}{15}T = \frac{30}{90}T \\ \text{Carlos:} & \frac{4}{15}T = \frac{24}{90}T\,. \end{array}$$

Logo, Carlos perdeu $1/90$ do total e Aldo ganhou $1/90$. Portanto, $1\,220$ corresponde a $1/90$ do total de dinheiro. Portanto, o total T de dinheiro no início o jogo é:

$$\frac{1}{90}T = 1\,200 \quad \Rightarrow \quad T = 90 \times 1\,200 = 108\,000$$

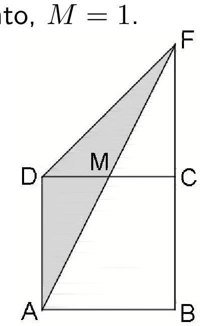
Assim, no final da partida os jogadores possuiam:

$$\begin{array}{ll} \text{Aldo:} & \frac{35}{90} \text{ de } 108\,000 = 42\,000 \\ \text{Bernardo:} & \frac{30}{90} \text{ de } 108\,000 = 36\,000 \\ \text{Carlos:} & \frac{25}{90} \text{ de } 108\,000 = 30\,000\,. \end{array}$$

2. **Um número inteiro** – Sejam $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$ e $b = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$. Assim, $M = a - b$ e temos:
$$M^3 = (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)\,.$$
Sabemos que $a^3 - b^3 = 4$ e $ab = 1$. Assim, $M^3 + 3M - 4 = 0$, ou seja, o número M é raiz do polinômio $x^3 + 3x - 4$.

Por sua vez, o número 1 é uma raiz do polinômio $x^3 + 3x - 4$. Fatorando tal polinômio, obtemos $(x-1)(x^2+x+4)$. Mas o trinômio $x^2 + x + 4$ tem discriminante negativo. Consequentemente, 1 é a única raiz real de $x^3 + 3x - 4$. Portanto, $M = 1$.

3. **Área de triângulos** –
(a) Note que $F\widehat{M}C$ e $A\widehat{M}D$ são ângulos opostos pelo vértice. Logo, $F\widehat{M}C = A\widehat{M}D$. Como $MC = MD$ e os triângulos $\triangle AMD$ e $\triangle FMC$ são retângulos, concluímos que eles são congruentes. Logo, possuem a mesma área, donde concluímos que a área do triângulo $\triangle ABF$ é igual a área do quadrado $ABCD$, ou seja 300 cm².



(b) Como $AD = FC$ (do item anterior) e $DM = MC$, segue que os triângulos $\triangle ADM$, $\triangle DMF$ e $\triangle MCF$ têm a mesma área. Por outro lado, a área dos dois últimos é a metade da área do quadrado. Portanto, a área do triângulo $\triangle ADF$ é a metade da área do quadrado, ou seja 150 cm².

4. **Um quadriculado** – Sejam m e n respectivamente, o número de segmentos de $0,5$ cm sobre dois lados consecutivos do retângulo. Sabemos que o número total de segmentos de $0,5$ cm na divisão do retângulo em $m \times n$ quadrados de lado $0,5$ cm é: $m(n+1)+n(m+1)$ (prove isso). Assim,
$$m(n+1) + n(m+1) = 1\,997 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{1\,997 - m}{2m+1}\,.$$
Além disso, um dos lados considerados é menor ou igual ao outro, digamos: $m \leq n$. Nesse caso podemos concluir que $m \leq 31$, pois
$$n \geq m \Rightarrow n(m+1) + m(n+1) \geq 2m(m+1).$$
Logo $1\,997 \geq 2m(m+1)$ e como $1\,998 > 1\,997$ segue que
$$1\,998 > 2m(m+1) \Rightarrow 999 > m(m+1).$$
Daí concluímos que $m < 32$.

Por outro lado temos que:
$$n = \frac{1\,997-m}{2m+1} \Rightarrow 2n = \frac{3\,994 - 2m}{2m+1} = \frac{3\,995 - (2m+1)}{2m+1} \Rightarrow 2n = \frac{3\,995}{2m+1} - 1\,.$$
Assim, a questão se resume agora em pesquisar os divisores de $3\,995 = 5 \times 17 \times 47$. Os únicos valores de m que atendem a condição $1 \leq m \leq 31$ são $m = 2$, $m = 8$ e $m = 23$, que correspondem, respectivamente, aos divisores $5, 17$ e 47. Para esses valores

de m temos $n = 399$, $n = 117$ e $n = 42$ respectivamente. Os outros divisores darão configurações equivalentes (trocando m por n).

Portanto, Rosa pode ter construído 3 configurações diferentes com os $1\,997$ segmentos. A primeira com 2×399 quadrados, a segunda com 8×117 quadrados e a terceira com 23×42 quadrados.

5. **Inteiros de 4 algarismos** – Temos que $1\,000 \leq 4a^2 < 10\,000$ e também $1\,000 \leq \frac{4}{3} \times a^3 < 10\,000$.

   De $1\,000 \leq 4a^2 < 10\,000$ segue que $250 \leq a^2 < 2\,500$. Sendo a um número inteiro e $15^2 = 225$, $16^2 = 256$ e $50^2 = 2\,500$, temos que $15 < a < 50$.

   De $1\,000 \leq \frac{4}{3}a^3 < 10\,000$ temos $750 \leq a^3 < 7\,500$. Mas, $10^3 = 1\,000$, $9^3 = 729$, $20^3 = 8\,000$ e $19^3 = 6\,859$. Assim, $9 < a < 20$.

   Portanto, temos $a = 16, 17, 18$ ou 19.

   Por outro lado, como $\frac{4}{3} \times a^3$ é um número inteiro, concluímos que a^3 é múltiplo de 3 e consequentemente, a é múltiplo de 3. Logo, $a = 18$.

   Outra maneira de finalizar a solução é substituir os 4 possíveis valores para a e verificar que o único valor é $a = 18$.

Lista 4

1. **Pares positivos** – A equação dada é equivalente a $y = \dfrac{3(167 - x)}{5}$. Como y é um inteiro positivo, $167 - x$ deve ser um múltiplo positivo de 5, ou seja:

$$167 - x = 5k \quad \Rightarrow \quad x = 167 - 5k \quad \Rightarrow \quad x = 5 \times 33 + 2 - 5k \quad \Rightarrow \quad x = 5(33 - k) + 2$$

onde k é um inteiro positivo. Como x é positivo, devemos ter $k \leq 33$. Consequentemente, $k = 1, 2, \ldots, 33$ o que nos garante 33 soluções para o problema proposto.

2. **Diferença de quadrados** – A resposta correta é **(E)**.

Inicialmente, observe que o quadrado de um número par é par, e o quadrado de um número ímpar é ímpar. Se os dois números são consecutivos, então um número é par e o outro é ímpar. Portanto, elevando ao quadrado, um deles é par e o outro é ímpar. Mas, a diferença entre um número par e um número ímpar é sempre um número ímpar. Como $2\,000$ é um número par, concluímos que não existem dois números consecutivos cuja diferença dos seus quadrados seja $2\,000$.

Outra solução para o problema é a seguinte. Primeiramente, suponhamos que tais inteiros a e $a+1$ são maiores ou iguais a zero. Nesse caso, temos:

$$(a+1)^2 - a^2 = 2\,000\,.$$

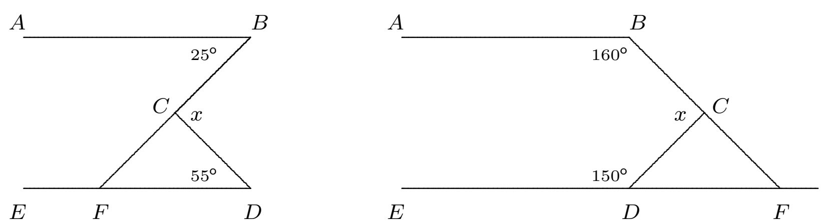
Fatorando a diferença de quadrados $(a+1)^2 - a^2$ obtemos:

$$(a+1+a)(a+1-a) = 2\,000 \quad \Rightarrow \quad 2a+1 = 2\,000$$

que não tem solução pois $2a+1$ é ímpar e $2\,000$ é par.

Se a e $a+1$ fossem menores ou iguais a zero então $-a$ e $-a-1$ seriam inteiros maiores ou iguais a zero e sucessivos, satisfazendo a condição $(-a)^2 - (-a-1)^2 = 2\,000$ o que não pode ocorrer como provado acima.

3. **Cálculo de ângulos** – Na primeira figura, prolongue o segmento BC até que ele intercepte o segmento ED em um ponto F. Uma vez que os segmentos AB e ED são paralelos, os ângulos $A\widehat{B}F$ e $B\widehat{F}D$ são alternos internos. Isto implica que esses ângulos possuem a mesma medida, ou seja, $C\widehat{F}D = 25^\circ$. Agora vemos que o ângulo x é externo ao triângulo $\triangle CDF$. Logo, x é igual a soma dos dois ângulos internos não adjacentes, ou seja, $x = 25^\circ + 55^\circ = 80^\circ$.



Na segunda figura, também prolongue o segmento BC até que ele intercepte o prolongamento do segmento ED em um ponto F. Como os segmentos AB e EF são paralelos, os ângulos $A\widehat{B}F$ e $D\widehat{F}B$ são colaterais internos. Isto implica que esses ângulos são suplementares, ou seja,

$$D\widehat{F}C = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ \,.$$

Por outro lado, o ângulo $C\widehat{D}F$ é igual a 30°, pois ele é o suplemento do ângulo $E\widehat{D}C = 150^\circ$. Finalmente, como x é ângulo externo ao triângulo $\triangle CDF$ temos que: $x = 20^\circ + 30^\circ = 50^\circ$.

4. **Tabela** – Como a tabela tem 6 colunas, em cada linha escrevemos 6 números consecutivos. Dividindo $1\,000$ por 6 obtemos

$$1\,000 = 6 \times 166 + 4\,.$$

1ª linha	1	2	3	4	5	6
2ª linha	7	8	9	10	11	12
3ª linha	13	14	15	16	17	18
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
167ª linha	997	998	999	1 000		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Deste modo, para escrever o número $1\,000$ na tabela serão necessárias 166 linhas completas (terminando no número $6 \times 166 = 996$) e mais uma linha com os 4 números: $997, 998, 999$ e $1\,000$. Logo, $1\,000$ está escrito na $167^{\underline{a}}$ linha e na $4^{\underline{a}}$ coluna.

5. **Entre 1 e 2** – Como as duas frações são positivas e menores do que 1, seus numeradores devem ser respectivamente menores que seus denominadores, logo devemos ter:

$$0 < a < 5 \ \text{ e } \ 0 < b < 7 \quad (1)$$

Temos $\frac{a}{5} + \frac{b}{7} = \dfrac{7a+5b}{35}$, portanto:

$$1 < \frac{7a+5b}{35} < 2 \ \Rightarrow \ 35 < 7a + 5b < 70 \quad (2)$$

Vejamos as opções para que a e b sejam inteiros positivos e satisfaçam (1) e (2):

- $a = 1 \ \Rightarrow \ 7a + 5b = 7 + 5b$. Logo,

  $$35 < 7 + 5b < 70 \ \Rightarrow \ 28 < 5b < 63 \ \Rightarrow \ \frac{28}{5} < b < \frac{63}{5} \ \Rightarrow \ 5,6 < b < 12,6\,.$$

  Como b é um número inteiro, concluímos que $b = 6, 7, 8, \ldots, 12$. No entanto, só podemos escolher $b = 6$, pois $b < 7$.

- $a = 2 \ \Rightarrow \ 7a + 5b = 14 + 5b$. Logo,

  $$35 < 14 + 5b < 70 \ \Rightarrow \ 21 < 5b < 56 \ \Rightarrow \ \frac{21}{5} < b < \frac{56}{5} \ \Rightarrow \ b = 5, 6, 7, 8, \ldots, 11\,.$$

  Nesse caso, só podemos escolher $b = 5$ e $b = 6$, pois $b < 7$.

- $a = 3 \ \Rightarrow \ 7a + 5b = 21 + 5b$. Logo,

  $$35 < 21 + 5b < 70 \ \Rightarrow \ 14 < 5b < 49 \ \Rightarrow \ \frac{14}{5} < b < \frac{49}{5} \ \Rightarrow \ b = 3, 4, 5, 6, \ldots, 9\,.$$

  Aqui, podemos escolher $b = 3, 4, 5, 6$.

- $a = 4 \Rightarrow 7a + 5b = 28 + 5b$. Logo,

$$35 < 28 + 5b < 70 \Rightarrow 7 < 5b < 42 \Rightarrow \frac{7}{5} < b < \frac{42}{5} \Rightarrow b = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 8\,.$$

  Podemos escolher $b = 2, 3, 4, 5, 6$.

Para finalizar, exibimos as soluções na tabela abaixo:

a	b	$\frac{a}{5} + \frac{b}{7}$
1	6	$\frac{1}{5} + \frac{6}{7} = \frac{37}{35}$
2	5	$\frac{2}{5} + \frac{5}{7} = \frac{39}{35}$
	6	$\frac{2}{5} + \frac{6}{7} = \frac{44}{35}$
3	3	$\frac{3}{5} + \frac{3}{7} = \frac{36}{35}$
	4	$\frac{3}{5} + \frac{4}{7} = \frac{41}{35}$
	5	$\frac{3}{5} + \frac{5}{7} = \frac{46}{35}$
	6	$\frac{3}{5} + \frac{6}{7} = \frac{51}{35}$
4	2	$\frac{4}{5} + \frac{2}{7} = \frac{38}{35}$
	3	$\frac{4}{5} + \frac{3}{7} = \frac{43}{35}$
	4	$\frac{4}{5} + \frac{4}{7} = \frac{48}{35}$
	5	$\frac{4}{5} + \frac{5}{7} = \frac{53}{35}$
	6	$\frac{4}{5} + \frac{6}{7} = \frac{58}{35}$

Lista 5

1. **Triatlon** – Seja x a velocidade em metros por minuto com que Maria nada. Logo, a sua velocidade na corrida é $3x$ e na bicicleta $2{,}5 \times 3x = 7{,}5x$. Logo, o tempo total que ela gastará nas 3 etapas é:

$$\underbrace{\frac{800}{x}}_{\text{nadando}} + \underbrace{\frac{20\,000}{3x}}_{\text{correndo}} + \underbrace{\frac{4\,000}{7{,}5x}}_{\text{pedalando}} = \frac{800 \times 7{,}5 + 20\,000 \times 2,5 + 4\,000}{7{,}5\,x} = \frac{60\,000}{7{,}5\,x}\,.$$

Logo, para que ela vença as 3 etapas em 1 hora e 20 minutos (=80min), devemos ter:

$$\frac{60\,000}{7{,}5\,x} = 80 \;\Rightarrow\; x = \frac{60\,000}{7{,}5 \times 80} = 100 \text{ m/min}\,.$$

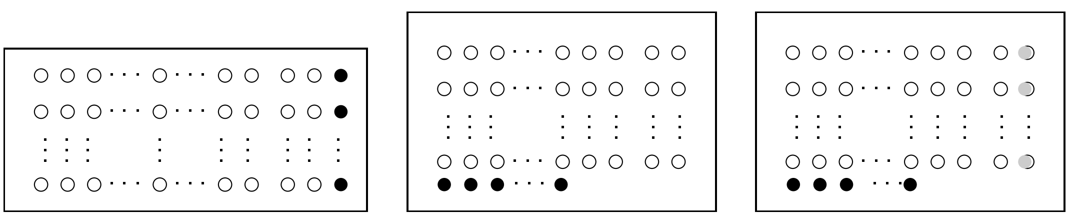
Segue que

$$3x = 300 \text{ m/min} \;\text{ e }\; 7{,}5x = 750 \text{ m/seg}\,.$$

Assim, para que Maria termine a prova em no máximo 1 hora e 10 minutos, ela deve desenvolver as seguintes velocidades:

- nadar: a uma velocidade mínima de 100 m/min;
- correr: a uma velocidade mínima de 300 m/min;
- pedalar: a uma velocidade mínima de 750 m/min.

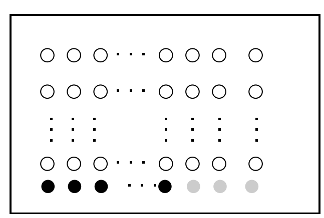
2. **Foto de formatura** – As figuras a seguir representam a situação do problema, onde em preto estão representados os alunos que foram inicialmente retirados e em cinza os alunos retirados na segunda vez.



Sejam n e m o número de filas (linhas horizontais) e de colunas da formação inicial, respectivamente. Ao retirar 1 aluno de cada fila, o diretor obtém uma formação com uma coluna a menos e uma fila incompleta – faltam 4 alunos. Logo, podemos concluir que:

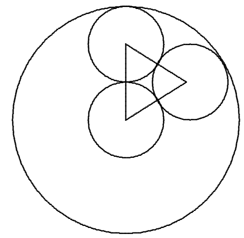
$$n + 4 = m - 1 \quad \Rightarrow \quad m = n + 5\,.$$

Retirando agora mais um aluno de cada fila obtém-se uma formação retangular com 2 colunas a menos que a formação inicial. Logo, podemos concluir que o número de filas (iniciais) é $n = 3$. Assim, $m = 8$ e o número de alunos é dado por $n \times m = 3 \times 8 = 24$.



3. **Circunferências tangentes** –

(a) Como as circunferências de raios 1 cm e 3 cm são concêntricas, as outras circunferência mostradas na figura devem ter raio igual a 1 cm.



(b) Os centros das 3 circunferências de raio 1 cm mostradas na figura formam um triângulo equilátero de lado 2 cm. Logo seus ângulos internos medem $60°$. Como $\dfrac{360}{60} = 6$ concluímos que até 6 circunferências podem ser dispostas nas condições exigidas.

4. **Festa na escola** – Representando o número de docinhos que cada um dos 4 amigos levou pela inicial de seu nome temos:

$$\begin{cases} A+P+M+F=90 \\ A+2=P-2=2M=\frac{F}{2} \end{cases}.$$

Segue da segunda equação que:

$$P=A+4 \quad ; \quad M=\frac{A+2}{2} \quad ; \quad F=2(A+2)\,.$$

Substituindo esses valores na primeira equação obtemos:

$$A+A+4+\frac{A+2}{2}+2(A+2)=90 \Rightarrow 9A=180-18 \Rightarrow A=18\,.$$

Logo:

$$P=18+4=22\;;\; M=\frac{18+2}{2}=10 \quad \text{e} \quad F=2(18+2)=40\,.$$

5. **Inflação** – O preço antigo era menor que 50 reais e sofreu um acréscimo de 20%. Logo, o novo preço ainda é um número de 2 algarismos. Vamos representá-lo por ab, onde a é o algarismo das dezenas e b é o algarismo das unidades. Logo, o novo preço é ba, e temos:

$$10b+a=1,2(10a+b) \;\Rightarrow\; 10b-1,2b=12a-a\,.$$

Portanto:

$$8,8\,b=11a \quad \Rightarrow \quad a=\frac{8}{10}\times b \;=\frac{4}{5}\times b\,.$$

Como a e b são algarismos, só podemos ter $a=4$ e $b=5$. Logo, o novo preço é R$ 54,00.

Lista 6

1. **Gatos no condomínio** – Sejam:

$$\begin{aligned} x &= \text{número de famílias que possuem apenas } 1 \text{ gato;} \\ y &= \text{número de famílias que possuem exatamente } 3 \text{ gatos;} \\ z &= \text{número de famílias que possuem } 5 \text{ gatos.} \end{aligned}$$

Segue então que $x + y + z = 29$ e $x = z$. Portanto, $2x + y = 29$. Por outro lado, o número de gatos é $x + 3y + 5z$. Daí temos:

$$\text{número de gatos} = x + 3y + 5z = 6x + 3y = 3(2x + y) = 3 \times 29 = 87\,.$$

2. **Soma constante** –

Sejam a, b, c, d, e e f os números que colocaremos na tabela. De acordo com a regra para as 4 subtabelas 2×2

1	a	2
b	9	c
d	e	f

1	a
b	9

a	2
9	c

b	9
d	e

9	c
e	f

temos:

$$\begin{aligned} 1 + a + b + 9 = a + 2 + 9 + c &\;\Rightarrow\; b = c + 1 \\ 1 + a + b + 9 = b + 9 + d + e &\;\Rightarrow\; a + 1 = d + e \\ a + 2 + 9 + c = 9 + c + e + f &\;\Rightarrow\; a + 2 = e + f\,. \end{aligned}$$

Subtraindo a 2ª igualdade da 3ª, obtemos $f = 1 + d$. A nossa tabela então ficará assim:

1	a	2
b	9	b-1
d	e	d+1

Como $a+1 = d+e$ e $\{a, b, d, e\} \subset \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, temos os seguintes casos a considerar:

<table>
<tr><th>$\mathbf{a}$</th><th>$\mathbf{a+1=d+e}$</th><th colspan="3">Solução</th></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td colspan="3">não possui</td></tr>
<tr><td>4</td><td>5</td><td colspan="3">não possui</td></tr>
<tr><td>5</td><td>6</td><td colspan="3">não possui</td></tr>
<tr><td rowspan="3">6</td><td rowspan="3">7</td><td>1</td><td>6</td><td>2</td></tr>
<tr><td>8</td><td>9</td><td>7</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>7</td><td>8</td><td colspan="3">não possui</td></tr>
<tr><td rowspan="3">8</td><td rowspan="3">9</td><td>1</td><td>8</td><td>2</td></tr>
<tr><td>5</td><td>9</td><td>4</td></tr>
<tr><td>6</td><td>3</td><td>7</td></tr>
</table>

3. **Qual é o número?** –

$$\begin{array}{r} 5\,B\,C\,D\,E \\ B\,C\,D\,E \\ C\,D\,E \\ D\,E \\ E \\ \hline A\;A\;A\;A\;A \end{array}$$

Note que $5 \times E$ é um múltiplo de 5, e no caso, terminado em A. Como A não pode ser 0, segue que $A = 5$. Por outro lado, E é ímpar pois se fosse par teríamos $A = 0$. Observe que E não pode ser 1, pois senão $4D = 5$, o que é impossível. Logo, $E = 3, 5, 7, 9$.

Analizemos cada possibilidade:

$E = 3 \quad \Rightarrow \quad 4D + 1$ termina em $5 \quad \Rightarrow D = 1$ ou $D = 6$;

$E = 5 \quad \Rightarrow \quad 4D + 2$ termina em $5 \quad \Rightarrow$ impossível porque $4D + 2$ é par;

$E = 7 \quad \Rightarrow \quad 4D + 3$ termina em $5 \quad \Rightarrow D = 3$ ou $D = 5$. Logo $D = 3$;

$E = 9 \quad \Rightarrow \quad 4D + 4$ termina em $5 \quad \Rightarrow$ impossível porque $4D + 4$ é par.

Restaram então os seguintes 3 casos:

$$\begin{array}{r} 5\,B\,C\,1\,3 \\ B\,C\,1\,3 \\ C\,1\,3 \\ 1\,3 \\ 3 \\ \hline 5\;5\;5\;5\;5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\,B\,C\,6\,3 \\ B\,C\,6\,3 \\ C\,6\,3 \\ 6\,3 \\ 3 \\ \hline 5\;5\;5\;5\;5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\,B\,C\,3\,7 \\ B\,C\,3\,7 \\ C\,3\,7 \\ 3\,7 \\ 7 \\ \hline 5\;5\;5\;5\;5 \end{array}$$

Antes de analisar cada caso, observe que B tem de ser menor do que 5, ou seja $B = 1, 2, 3, 4$. Lembre que letras distintas representam algarismos distintos.

1º caso: $3C$ termina em 5.

Como 1, 3 e 5 já foram usados concluímos que esse caso não ocorre pois C teria que valer 5.

2º caso: $3C + 2$ termina em 5.

Logo, $C = 1$ e portanto $2B = 5$, o que não é possível.

3º caso: $3C + 1$ termina em 5.

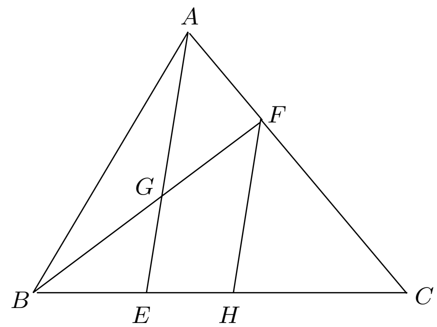
Logo, $C = 8$ e portanto $2B + 2 = 5$, o que implica $B = 2$. Finalmente, temos que $ABCDE = 52\,837$.

4. **Proporção triangular** – Temos que $\dfrac{FC}{AF} = 2$. Agora, trace o segmento FH, paralelo ao segmento AE onde H está sobre o segmento BC, como na figura a seguir.

Os triângulos $\triangle AEC$ e $\triangle FHC$ são semelhantes pois têm lados paralelos. Isto implica que $CH = 2EH$.

Por outro lado, os triângulos $\triangle BFH$ e $\triangle BGE$ também são semelhantes, pois têm lados paralelos. Dessa semelhança e do fato que G é ponto médio do segmento BF concluímos que E é ponto médio do segmento BH.

Assim, $BE = EH$ e, portanto, $EC = EH + CH = EH + 2EH = 3EH = 3EB$. Consequentemente, $\dfrac{EC}{EB} = 3$.



5. **Números primos entre si –**

Solução 1: Temos:

$$2000\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=16\times 125\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right).$$

Como x e y são primos entre si, concluímos que xy e x^2+y^2 não têm fatores em comum (prove isso). Logo, x e y são divisores de $2\,000=16\times 125=2^4\times 5^3$. Além disso, 16 tem que dividir xy porque a expressão tem que ser ímpar. Portanto, $16=2^4$ divide x ou y.

1º caso: 16 divide x.

Se $x>16$ então, x é no mínimo $16\times 5=80$, já que x divide 2000. Nesse caso, $x>y$ pois xy divide 2000. Logo, $x=16$. Assim, como x e y são primos entre si, $x<y$ e y divide 2000 concluímos que as únicas possibilidades são $y=25$ ou 125.

2º caso: 16 divide y.

Como no item anterior fazemos:

Se $y>16$ então as possibilidades seriam: $y=16\times 5$ e $x=1$; $y=16\times 25$ e $x=1$; $y=16\times 125$ e $x=1$.

Se $y=16$ então as possibilidades para x seria: $x=1$; $x=5$.

Logo, os pares (x,y) satisfazendo as condições do problema são:

$$(16,25)\,;\ (16,125)\,;\ (5,16)\,;\ (1,16)\,;\ (1,80)\,;\ (1,400)\,;\ (1,2\,000).$$

Porém, como podemos trocar x e y em vista da simetria da expressão, temos ainda as soluções:

$$(25,16)\,;\ (125,16)\,;\ (16,5)\,;\ (16,1)\,;\ (80,1)\,;\ (400,1)\,;\ (2\,000,1).$$

Solução 2:

Temos $N=2\,000(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})=\frac{16\times 125\times(x^2+y^2)}{xy}=\frac{2^4\times 5^3}{xy}\times(x^2+y^2)$.

Como N é ímpar segue que $\frac{2^4\times 5^3}{xy}$ e x^2+y^2 são ímpares. As opções para isso são:

$xy = 2^4$, $2^4 \times 5$, $2^4 \times 5^2$, $2^4 \times 5^3$ e, x e y têm paridades distintas. Vamos determinar x e y para cada uma dessas opções:

xy	x	y
2^4	1	2^4
$2^4.5$	1	$2^4.5$
	2^4	5
$2^4.5^2$	1	$2^4.5^2$
	2^4	5^2
$2^4.5^3$	1	$2^4.5^3$
	2^4	5^3

Logo, os pares (x, y) satisfazendo as condições do problema são:

$$(1,16)\,;\ (1,80)\,;\ (16,5)\,;\ (1,400)\,;\ (16,25)\,;\ (1,2\,000)\,;\ (16,125).$$

Porém, como podemos trocar x e y em vista da simetria da expressão, temos ainda as soluções:

$$(16,1)\,;\ (80,1)\,;\ (5,16)\,;\ (400,1)\,;\ (25,16)\,;\ (2\,000,1)\,;\ (125,16).$$

Lista 7

1. **Fique atento** – Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, obtemos $x = x^2 - 4x + 4$, que é equivalente a $x^2 - 5x + 4 = 0$. As raízes dessa equação do segundo grau são $x = 1$ e $x = 4$. Entretanto, quando substituímos $x = 1$ na equação original $\sqrt{x} = x - 2$ obtemos $\sqrt{1} = -1$, que é falso. No entanto, quando substituímos $x = 4$ obtemos $\sqrt{4} = 2$, que é verdadeiro. Portanto, a equação dada possui $x = 4$ como única solução.

   Atenção: O aparecimento da "solução estranha" $x = 1$ deve-se ao fato que a implicação

   $$a^2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad a = b$$

   não é verdadeira em geral. O correto é

   $$a^2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad a = \pm b\,.$$

   Deste modo, quando elevamos os dois membros de uma equação ao quadrado, obtemos uma nova equação que pode, eventualmente, conter mais soluções que a equação original. Você também pode ver isso com clareza, por exemplo, nas equações: $x = 1$ e $x^2 = 1^2$.

2. **Soluções inteiras** – A equação é equivalente a $xy = 19(x + y)$. Uma vez que estamos procurando soluções inteiras e 19 é um número primo, esta igualdade implica que x ou y devem ser divisíveis por 19. Como a equação é simétrica em relação as variáveis x e y, podemos supor que x é divisível por 19. Isto é, $x = 19k$ para algum valor inteiro de k. Nessa condição, temos:

   $$xy = 19(x + y) \quad \Leftrightarrow \quad ky = 19k + y\,.$$

   Desta igualdade concluímos que $19k + y$ é divisível por k. Uma vez que $19k$ já é divisível por k concluímos que y é divisível por k (prove isso). Isto é, $y = km$ para algum valor inteiro de m. Assim,

   $$ky = 19k + y \;\Rightarrow\; k^2m = 19k + km \;\Rightarrow\; km - m = 19 \;\Rightarrow\; m(k-1) = 19\,.$$

   Visto que m e k são números inteiros e 19 é um número primo, existem somente 4 possibilidades para a igualdade $m(k - 1) = 19$:

   - $m = 19$ e $k - 1 = 1$. Isto implica que $x = 38$ e $y = 38$;
   - $m = -19$ e $k - 1 = -1$. Isto implica que $x = 0$ e $y = 0$, que não é possível, pois na equação original, $x \neq 0$ e $y \neq 0$;
   - $m = 1$ e $k - 1 = 19$. Isto implica que $x = 380$ e $y = 20$;
   - $m = -1$ e $k - 1 = -19$. Isto implica que $x = -342$ e $y = 18$.

   Deste modo, obtemos as seguintes possibilidades para o par de números inteiros (x, y) que são soluções da equação dada:

   $$(38,\,38)\,;\,(380,\,20)\,;\,(20,\,380)\,;\,(-342,\,18)\,;\,(18,\,-342)\,.$$

3. **No ponto de ônibus** – Vamos representar por M o número de meninas e por H o número de meninos que estavam no ponto antes da parada do primeiro ônibus. Depois do embarque das 15 meninas no primeiro ônibus , ficaram no ponto $M-15$ meninas e H meninos. Uma vez que, neste momento, ficam no ponto 2 meninos para cada menina, temos: $H = 2(M-15)$. No segundo ônibus embarcam 45 meninos, e ficaram no ponto $M-15$ meninas e $H-45$ meninos. Como, neste momento, ficaram no ponto 5 meninas para cada menino, temos: $M-15 = 5(H-45)$.

   Deste modo, obtemos o sistema linear

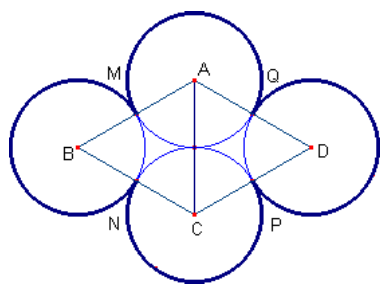
$$\begin{cases} H = 2(M-15) \\ M-15 = 5(H-45) \end{cases} .$$

   Substituindo a primeira equação na segunda obtemos: $M-15 = 5(2M-30-45)$. Logo:

$$375 - 15 = 10M - M \;\Rightarrow\; M = 40$$

   e $H = 2(40-15) = 50$.

4. **Contorno circular** – Sejam A, B, C e D os centros dos círculos, e M, N, P e Q os pontos de tangência.



   Observe que $AD = DC = BC = AB = AC = 2a$. Logo, os triângulos ABC e ACD são equiláteros e por isso seus ângulos internos são iguais a 60^o. Assim, temos:

$$A\widehat{B}C = 60^o \Rightarrow \widehat{MN} = \frac{5}{6} \times 2\pi a \;\text{ e }\; B\widehat{A}D = 120^o \Rightarrow \widehat{MQ} = \frac{2}{3} \times 2\pi a.$$

   Como $\widehat{MN} = \widehat{PQ}$ e $\widehat{MQ} = \widehat{NP}$ segue que o contorno externo da figura dada tem comprimento igual a:

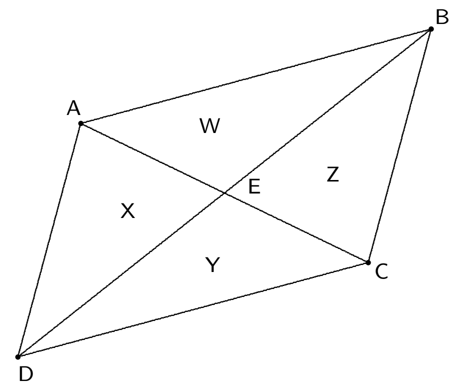
$$\left(2 \times \frac{5}{6} + 2 \times \frac{2}{3}\right) 2\pi a = 6\pi a\,.$$

5. **Um quadrilátero especial** – Se cada diagonal divide o quadrilátero em duas regiões de mesma área temos:

$$\text{Área}(\triangle ABD) = \text{Área}(\triangle BCD) \text{ e } \text{Área}(\triangle ABC) = \text{Área}(\triangle ACD)\,.$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
\text{Área}(\triangle ABD) &= X + W \\
\text{Área}(\triangle BCD) &= Y + Z \\
\text{Área}(\triangle ABC) &= Z + W \\
\text{Área}(\triangle CDA) &= X + Y
\end{aligned}
$$



Assim,

$$Z - X = \text{Área}(\triangle ABC) - \text{Área}(\triangle ABD) = \text{Área}(\triangle CDA) - \text{Área}(\triangle BCD) = X - Z$$

e portanto, $Z = X$. Consequentemente, também temos $Y = W$.
Como as áreas opostas são iguais, resulta da semelhança de triângulos que:

$$AE \times ED = BE \times EC \quad \text{e} \quad AE \times EB = CE \times ED\,.$$

Dividindo esta duas equações obtemos:

$$\frac{ED}{EB} = \frac{EB}{ED} \quad \Rightarrow \quad ED = EB\,.$$

Analogamente podemos mostrar que $EA = EC$. Logo, as diagonais se cortam no ponto médio, e consequentemente o quadrilátero é um paralelogramo donde, o perímetro é igual a $2 \times 10 + 2 \times 15 = 50$ cm.

Lista 8

1. **Número curioso** – Seja ab um tal número. Por hipótese $ab = 10a + b$ é divisível por $a + b$. Logo, a diferença $(10a + b) - (a + b) = 9a$, também é divisível por $a + b$. Além disso, sabemos que $10a+b$ é divisível por $a+b$ se, e somente se, $(10a+b)-(a+b) = 9a$ é divisível por $a + b$ (prove isso).

   Antes de prosseguirmos na solução, note que como ab é um número de dois algarismos então $a \neq 0$. Agora, basta atribuir valores para a e calcular os valores de b para os quais $a + b$ divide $9a$. O resultado é mostrado na tabela a seguir.

a	$9a$	b
1	9	0, 2, 8
2	1 8	0, 1, 4, 7
3	27	0, 6
4	36	0, 2, 5, 8
5	45	0, 4
6	54	0, 3
7	63	0, 2
8	72	0, 1, 4
9	8 1	0

   Logo os números que satisfazem a propriedade são:

$$10, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 60, 63, 70, 72, 80, 81, 84, 90$$

   ou seja, existem 23 números nas condições exigidas.

2. **Número premiado** -

   (a) O maior número premiado tem de começar com 98. Assim o número procurado é da forma: $98abcd$. Por hipótese temos: $9 + 8 + a = b + c + d$. Para que a seja máximo precisamos que $b + c + d$ seja máximo, e isto acontece quando $b = 7$, $c = 6$ e $d = 5$. Neste caso, $a = 1$ e consequentemente, o maior número premiado é $981\,765$.

   Vamos agora determinar o menor número premiado. Tentemos um número da forma $10abcd$. Agora, não é difícil verificar que $108\,234$ é o menor número premiado.

   (b) Se o número $ABCDEF$ é premiado, então o número $DEFABC$ também é premiado. A soma desses números é:

$$\begin{aligned} ABCDEF + DEFABC &= (1000ABC + DEF) + (1000DEF + ABC) \\ &= 1001(ABC + DEF) = 13 \times 11 \times 7 \times (ABC + DEF)\,. \end{aligned}$$

   Somando todos os números premiados com 6 algarismos diferentes aos pares, resulta que cada par é divisível por 13. Logo, a soma de todos eles é divisível por 13.

   Nota: De fato também é divisível por 11 e 7.

3. **Altura versus lado** – Sejam h_a e h_c as alturas relativas aos lados $BC = a$ e $AB = c$, respectivamente. Por hipótese temos que $h_a \geq a$ e $h_c \geq c$. Como h_a e h_c são os comprimentos das alturas, então $h_a \leq c$ e $h_c \leq a$.

   Um dos lados considerados é maior ou igual ao outro: digamos $a \geq c$. Das desigualdades acima temos:
$$h_a \geq a \geq c \geq h_a \quad \Rightarrow \quad a = c = h_a\,.$$
   Daí, segue que AB é perpendicular a BC. Logo, o triângulo é retângulo isósceles e portanto, os ângulos medem 45°, 45° e 90°.

4. **Frações egípcias** – A equação é equivalente a $2ab = 7(a+b)$. Como 2 e 7 são números primos entre si, segue que ab é múltiplo de 7 e que $a+b$ é múltiplo de 2. Mas, para ab ser múltiplo de 7, a única possibilidade é a ser múltiplo de 7 ou b ser múltiplo de 7. Suponhamos primeiramente que a é múltiplo positivo de 7, ou seja, $a = 7k$ para algum inteiro positivo k. Daí obtemos:
$$2ab = 7(a+b) \;\Rightarrow\; 2kb = 7k + b \;\Rightarrow\; (2k-1)b = 7k\,.$$
   Esta última equação implica que b ou $2k-1$ são mútiplos de 7. Se b é múltiplo de 7, $b = 7m$, e assim
$$\frac{2}{7} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \;\Rightarrow\; \frac{2}{7} = \frac{1}{7k} + \frac{1}{7m} \;\Rightarrow\; \frac{1}{k} + \frac{1}{m} = 2\,.$$
   Mas, $\dfrac{1}{k} \leq 1$ e $\dfrac{1}{m} \leq 1$. Assim $\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{m} \leq 2$. Portanto, a equação $\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{m} = 2$ possui única solução inteira positiva, a saber, $k = 1 = m$. Entretanto, esta solução não nos interessa, pois neste caso $a = b$.

   Passemos então ao caso em que $2k-1$ é múltiplo de 7.

   Uma possibilidade para $2k-1$ ser múltiplo de 7 ocorre quando $k = 4$. Neste caso, temos que
$$k = 4 \;\Rightarrow\; a = 7k = 28\,;$$
$$(2k-1)b = 7k \Rightarrow\; 7b = 28 \;\Rightarrow\; b = 4\,.$$
   Obtemos então
$$\frac{2}{7} = \frac{1}{28} + \frac{1}{4}\,.$$

5. **Tabuleiro de xadrez** – Um tabuleiro de xadrez é um quadrado reticulado de 64 quadradinhos, sendo 32 claros e 32 escuros, posicionados alternadamente. Cada quadradinho recebe o nome de casa. As peças são denominadas: rei, dama, torre, bispo, cavalo e peão. São 16 peças claras e 16 escuras, sendo 2 peças de cada categoria.

Inicialmente, é possível colocar um bispo em $8 \times 8 = 64$ casas. Suponhamos que o bispo está numa casa branca, então na fila e na coluna onde ele está temos 8 casas pretas. Assim, o segundo bispo pode ser colocado em qualquer uma das $32 - 8 = 24$ casas pretas restantes. Concluímos então que se um dos bispos ocupa uma das 32 casas brancas então o outro terá 24 casas pretas para se localizar. Portanto, o número de configurações distintas que podem ser obtidas é: 32×24.

NOTA: Aqui estamos entendendo que alternando a posição desses dois bispos não mudamos a configuração no tabuleiro de xadrez. Mais precisamente, os bispos têm a mesma cor, isto é, pertencem a um mesmo competidor.

Lista 9

1. **Quem é menor?** – Observemos que:

$$\begin{array}{rcrcl} 33^{12} & > & 32^{12} & = & (2^5)^{12} = 2^{60}; \\ 63^{10} & < & 64^{10} & = & (2^6)^{10} = 2^{60}; \\ 127^8 & < & 128^8 & = & (2^7)^8 = 2^{56}. \end{array}$$

Logo, o maior dos números é 33^{12}.

Por outro lado, $\frac{127}{63} = 2 + \frac{1}{63} < 2,1$. Logo:

$$\left(\frac{127}{63}\right)^2 < 2{,}1^2 < 7 \quad \text{e} \quad \left(\frac{127}{63}\right)^4 < 49 < 63 \Rightarrow 127^4 < 63^5 \Rightarrow 127^8 < 63^{10}.$$

Logo, o menor dos três números dados é 127^8.

2. **Brincando com números** – Como queremos encontrar o maior número possível, menor do que 900, iniciaremos com o algarismo 8 na casa da centena. Observemos que o número 800 satisfaz a propriedade. Logo, o número procurado é maior que ou igual a 800.

Devemos então encontrar a e b tais que $8 + a + b$ divida $8ab = 800 + 10a + b$. Lembramos que $8 + a + b$ divide $8ab = 800 + 10a + b$ se, e somente se, $8 + a + b$ divide $800 + 10a + b - (8 + a + b) = 792 + 9a$. Agora, atribuindo valores para a na ordem decrescente obtemos:

- $a = 9 \Rightarrow 792 + 9 \times 9 = 873 = 9 \times 97$ e este número não possui nenhum divisor entre 17 $(b = 0)$ e 26 $(b = 9)$.
- $a = 8 \Rightarrow 792 + 9 \times 8 = 864 = 2^5 \times 3^3$. O maior divisor deste número entre 16 e 25 é 24, isto é, $b = 8$. Logo, o número procurado é 888.

3. **Cortando papéis** – Se na primeira rodada André pega n_1 pedaços de papel para cortar cada um deles em sete pedaços, ao final desta rodada ele ficará com $7 - n_1$ pedaços sem cortar mais $7n_1$ pedaços cortados, totalizando $(7 - n_1) + 7n_1 = 7 + 6n_1$ pedaços de papel. Analogamente, se na segunda rodada André pega n_2 pedaços de papel para cortar, ao final desta rodada ele ficará com $7 + 6n_1 - n_2$ pedaços que não foram cortados nesta rodada, mais $7n_2$ pedaços de papel provenientes dos cortes que ele fez nesta rodada. Assim, ao final da segunda rodada André ficará com

$$(7 + 6n_1 - n_2) + 7n_2 = 7 + 6(n_1 + n_2).$$

Continuando deste modo, conclui-se que ao final de k rodadas André fica com $7 + 6(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)$ pedaços de papel. Para ele ficar então com $2\,009$ pedaços de papel ao final de alguma rodada, deve-se ter

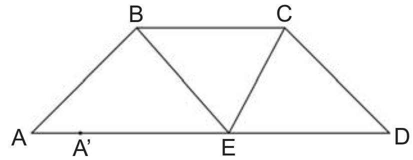
$$7 + 6(n_1 + n_2 + \cdots + n_k) = 2\,009;$$

ou equivalentemente

$$6(n_1 + n_2 + \cdots + n_k) = 2\,002.$$

Uma vez que $2\,002$ não é mútiplo de 6, esta equação não admite solução e, portanto, André nunca poderá ficar com $2\,009$ pedaços ao final de alguma rodada do jogo.

4. **Um trapézio especial** – Suponhamos que AE seja maior do que BC, e seja A' um ponto sobre AE tal que $A'E = BC$.



Como $A'E$ e BC são paralelos temos que $A'BCE$ é um paralelogramo, em particular $BA' = CE$. Mas, $AA' + AB > BA'$ pela desigualdade triangular. Assim:

$$AB + AE + BE = AB + AA' + A'E + BE > BA' + A'E + BE = BC + CE + EB\,.$$

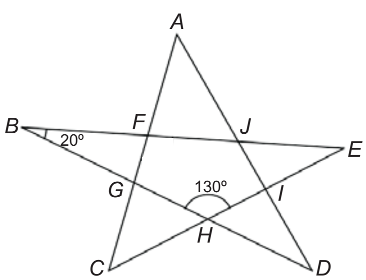
Portanto, o perímetro do triângulo $\triangle ABE$ é maior que o perímetro do triângulo $\triangle BCE$. Desta forma, AE não pode ser maior que BC.

Por um processo similar podemos também concluir que BC não pode ser maior que AE e portanto $BC = AE$.

Analogamente, temos que $ED = BC$. Consequentemente,

$$BC = \frac{1}{2}(AE + ED) = 15\,\text{cm}\,.$$

5. **Uma estrela** –



No triângulo BHE temos:

$$20^\circ + 130^\circ + B\widehat{E}H = 180^\circ \Rightarrow B\widehat{E}H = 30^\circ.$$

Note que $J\widehat{E}I = B\widehat{E}H = 30^\circ$.

Lista 10

1. **Número palindrome** – Um número palindrome de 4 algarismos é da forma: $abba$, onde a é um algarismo entre 1 e 9 e b é um algarismo entre 0 e 9. Como o número é divisível por 9, então a soma de seus algarismos: $2a + 2b = 2(a + b)$ é divisível por 9, ou seja $a + b$ é divisível por 9. Se $a + b = 9$, temos as 9 soluções:

   $a = 1$ e $b = 8$; $a = 2$ e $b = 7$; $a = 3$ e $b = 6$; $a = 4$ e $b = 5$

   $a = 5$ e $b = 4$; $a = 6$ e $b = 3$; $a = 7$ e $b = 2$; $a = 8$ e $b = 1$

   $a = 9$ e $b = 0$.

   Se $a + b = 18$ então a única solução é: $a = b = 9$.

   Logo, o número de palindromes de 4 algarismos divisíveis por 9 é 10, são eles: $1\,881$, $2\,772$, $3\,663$, $4\,554$, $8\,118$, $7\,227$, $6\,336$, $5\,445$, $9\,009$ e $9\,999$.

2. **Multiplicação com letras** – Se o produto de b por c termina em 1, então $b \times c$ pode ser 21 ou 81 segue que $b \times c = 3 \times 7$ ou 9×9. A única possibilidade de escrever o produto de dois números distintos menores que 10 é $21 = 3 \times 7$. Assim temos dois possíveis casos:

   1º caso: $b = 3$ e $c = 7$:

   $$\begin{array}{r} a\,3\,3 \\ \times \quad 7 \\ \hline 3\,7\,3\,1 \end{array}$$

   Neste caso $\dfrac{3731}{7} = 533$ e, consequentemente, $a = 5$.

   2º caso: $b = 7$ e $c = 3$:

   Nesta caso $\dfrac{7371}{3} = 2457$. Logo, este caso não ocorre.

3. **Números sortudos** –

   (a) A sequência de oito números consecutivos de 52 a 59 tem exatamente, dois números sortudos: 52 e 59. Outro exemplo é qualquer sequência de 8 números que contenha 59 e 61, por exemplo: 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62.

   (b) Dois exemplos: $994, \ldots, 1\,005$ e $7\,994, \ldots, 8\,005$. Existem mais exemplos, encontre alguns.

   (c) Chamemos de *década* qualquer sequência de 10 números consecutivos cujo primeiro termo é múltiplo de 10:

   $$\begin{array}{l} 10\,,\ 11\,,\ 12\,,\ 13\,,\ 14\,,\ 15\,,\ 16\,,\ 17\,,\ 18\,,\ 19 \\ 140\,,\ 141\,,\ 142\,,\ 143\,,\ 144\,,\ 145\,,\ 146\,,\ 147\,,\ 148\,,\ 149. \end{array}$$

   Note que qualquer sequência de 7 números consecutivos numa década contém pelo menos um número sortudo porque a soma de seus algarismos é uma sequência de 7 números consecutivos, um dos quais tem de ser divisível por 7. Finalmente, qualquer sequência de 13 números consecutivos contém pelo menos 7 números consecutivos de uma década, que sempre contém um número sortudo. Examine alguns exemplos para melhor entender essa justificativa.

4. **Uma sequência especial** – Vamos inicialmente escrever alguns termos:

$$1\,,\,3\,,\,2\,,\,-1\,,\,-3\,,\,-2\,,\,1\,,\,3\,,\,2\,,\,\ldots$$

O 7º e 8º termos são, respectivamente iguais ao 1º e 2º. Isso significa que a sequência se repete de 6 em 6 termos. A soma dos 6 primeiros termos é $1+3+2-1-3-2=0$, e portanto, a soma dos 96 primeiros termos também é 0. Logo, a soma dos 100 primeiros termos dessa sequência é igual a soma dos 4 últimos termos, ou seja, $1+3+2-1=5$.

5. **Triângulos e ângulos...** – No triângulo menor, os ângulos medem 70°, $180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ enquanto que o terceiro medirá

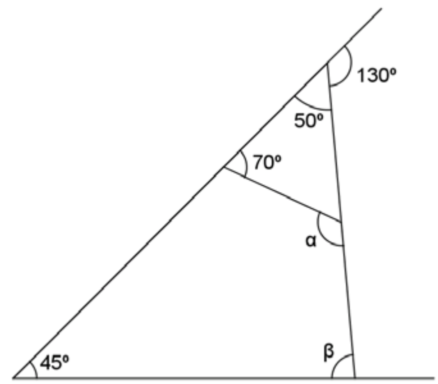
$$180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ\,.$$

Assim,

$$\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ\,.$$

Agora, no triângulo maior temos:

$$45^\circ + \beta + 50^\circ = 180^\circ \;\Rightarrow\; \beta = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ\,.$$



Soluções do Nível 3

Lista 1

1. **Brincando com a calculadora** – O resultado é o mesmo número inicial de 3 algarismos $a\,b\,c$. De fato, se $a\,b\,c$ é um número de 3 algarismos então o número $a\,b\,c\,a\,b\,c$ de 6 algarismos é da forma:

$$a\,b\,c\,a\,b\,c = 1\,000\,a\,b\,c + a\,b\,c = 1\,001\,a\,b\,c\,.$$

Como $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$, dividindo $a\,b\,c\,a\,b\,c$, sucessivamente, por 7, 11 e por 13, obtemos:

$$\frac{a\,b\,c\,a\,b\,c}{7 \times 11 \times 13} = \frac{1\,001\,a\,b\,c}{7 \times 11 \times 13} = a\,b\,c\,.$$

2. **No galinheiro** – Sejam x e y, respectivamente, o número de galinhas e pintinhos no galinheiro.

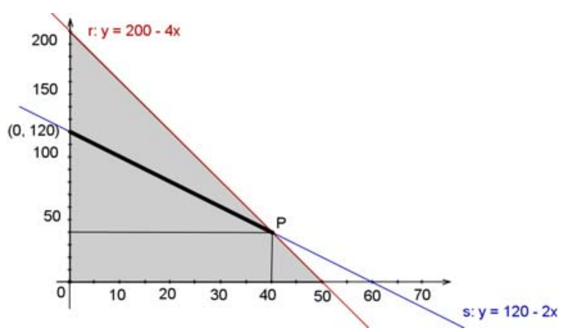
(a) Temos $4x + 2y = 240$, ou seja, $2x + y = 120$.

Como, $8\,kg = 8\,000\,g$ temos: $160x + 40y \leq 8\,000$. Assim, $4x + y \leq 200$. Em resumo, o número x de galinhas e y de pintinhos satisfazem:

$$(*) \begin{cases} 2x + y = 120 \\ 4x + y \leq 200. \end{cases}$$

(b) A reta $2x + y = 120$ corta o eixo Ox em $x = 60$ e o eixo Oy em $y = 120$.

A reta $4x + y = 200$ corta o eixo Ox em $x = 50$ e o eixo Oy em $y = 200$. Os gráficos dessas retas estão abaixo, onde a desigualdade $4x + y \leq 200$ é representada pela região sombreada.



Observe que a condição (*) é representada na figura pelo segmento que liga os pontos P e $(0\,,\,120)$. As coordenadas do ponto P são a solução do sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 120 \\ 4x + y = 200; \end{cases}$$

ou seja, $x = 40$ e $y = 40$, e $P = (40, 40)$.

(c) Temos que $2 \times 20 + 80 = 120$ e $4 \times 20 + 80 \leq 200$. Logo, $x = 20$ e $y = 80$ satisfazem a condição (*) e, por isso, a resposta é sim.

Agora $2 \times 30 + 100 \neq 120$, logo, $x = 30$ e $y = 100$ não satisfazem a condição (*) e, por isso, a resposta é não.

(d) O número máximo de galinhas é 40, e nesse caso teremos também 40 pintinhos. O número máximo de pintinhos é 120, e nesse caso teremos 0 galinhas.

3. **Um número perfeito** - Se $2^{31}-1$ é um número primo, seu único divisor próprio é o número 1. Então os divisores próprios de $2^{30}(2^{31}-1)$ são:

$$1\,,\,2\,,\,2^2\,,\,2^3\,,\,\ldots\,,\,2^{29}\,,\,2^{30}\,,\,(2^{31}-1)\,,\,2(2^{31}-1)\,,\,2^2(2^{31}-1)\,,\,\ldots\,,\,2^{29}(2^{31}-1)\,.$$

A soma S desses divisores é:

$$S=[1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{29}+2^{30}]+(2^{31}-1)[1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{29}]\,.$$

Em cada um dos dois colchetes aparece a soma S_n de uma progressão geométrica de primeiro termo igual a 1 e razão 2.

O primeiro colchete, S_{31}, contém 31 termos e o segundo, S_{30}, contém 30 termos. Usando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica, temos:

$$S_{31}=\frac{2^{31}-1}{2-1}=2^{31}-1 \quad \text{e} \quad S_{30}=\frac{2^{30}-1}{2-1}=2^{30}-1\,.$$

Então a soma dos divisores próprios de $2^{30}(2^{31}-1)$ é :

$$S=(2^{31}-1)+(2^{31}-1)[2^{30}-1]=(2^{31}-1)(1+2^{30}-1)=2^{30}(2^{31}-1)\,.$$

Logo, essa soma é igual a $2^{30}(2^{31}-1)$, como queríamos provar.

4. **Quinze minutos a mais –**

Solução 1: Sabemos que espaço = velocidade × tempo. Denotemos por t o tempo gasto pelo carro menos rápido (aquele que faz a viagem com velocidade de 60 km/h). Logo, o tempo gasto pelo outro carro foi $t-15$. Como ambos percorrem a mesma distância, convertendo horas em minutos, segue que:

$$\frac{60}{60}\times t=\frac{70}{60}\times(t-15)\ \Rightarrow t=105\,\text{min}=1\,\frac{3}{4}\,\text{h}\,.$$

Logo, a distância entre as duas cidades é:

$$60\times 1\,\frac{3}{4}=60\times\frac{7}{4}=105\,\text{km}\,.$$

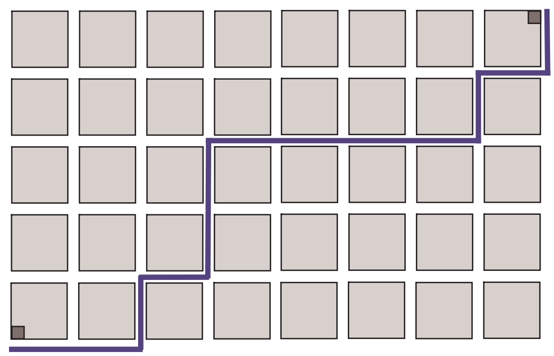
Solução 2: Vamos representar por d a distância entre as cidades A e B, e por T o tempo gasto, em horas, pelo carro mais veloz. Como o outro carro gasta 15 minutos a mais para fazer o mesmo percurso, temos que o tempo gasto por ele é igual a $T+0,25$ horas, pois $15\,\text{min}=0{,}25\,\text{h}$.

Como a velocidade é a razão da distância percorrida pelo tempo gasto, concluímos que $70=\dfrac{d}{T}$ e $60=\dfrac{d}{T+0,25}$. Daí segue que $d=70\,T=60(T+0,25)$, ou seja, $T=1,5\,\text{h}$. Logo, $d=70\times 1{,}5=105\,\text{km}$.

5. **Outros caminhos** – Qualquer que seja a maneira que Júlia caminhe da sua casa até a escola, ela deve percorrer 8 quarteirões para a direita e 5 quarteirões para cima. Um caminho ligando a sua casa até a escola é então uma sequência de "travessias de

quarteirões", sendo 8 no sentido horizontal (para a direita) e 5 no sentido vertical (para cima). Assim, para definir um caminho ela precisa apenas decidir em que ordem fará essas travessias.

Desse modo, imaginemos 8 cartelas impressas com a letra D e 5 cartelas impressas com a letra C. Uma permutação qualquer destas cartelas pode ser interpretada como um caminho a ser percorrido por Júlia. Por exemplo, a sequência de cartelas DDCDCCDDDDCDC define o seguinte caminho:



Para determinar o número de maneiras que se pode ordenar essas cartelas, devemos contar de quantas maneiras diferentes se pode colocar 5 cartelas impressas com a letra C em uma fila com 13 lugares vagos e os demais 8 lugares na fila ocupados com as cartelas impressas com a letra D.

Inicialmente, devemos escolher um dos 13 lugares vagos para colocar uma letra C. Colocada esta letra, sobram 12 lugares vagos para a segunda letra C. Colocada esta letra, sobram 11 lugares vagos para a terceira letra, 10 lugares para a quarta letra e, finalmente, 9 lugares para a quinta letra C. Agora, uma vez colocadas as cinco letras C, qualquer permutação dessas letras entre si não altera a distribuição das letras na fila. Como a quantidade de permutações de cinco objetos é $5! = 120$, pelo princípio multiplicativo temos que o número de maneiras de ordenar as 13 cartelas é

$$\frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{120} = 1\,287\,.$$

Lista 2

1. **Escrevendo em um tabuleiro** – Começando com a letra **A**, ela pode ser escrita em qualquer uma das 9 casas do tabuleiro. Uma vez escrita a letra **A**, sobram 6 casas onde a letra **B** pode ser escrita. Uma vez escritas as letras **A** e **B** no tabuleiro, sobram 3 casas para a letra **C** ser escrita.

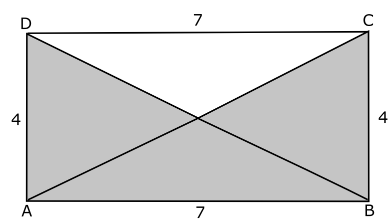
   Assim, pelo princípio multiplicativo, existem $9 \times 6 \times 3 = 162$ maneiras diferentes das letras **A**, **B** e **C** serem escritas no tabuleiro.

A	C	B
C	B	A
B	A	C

2. **Fração e porcentagem** – A opção correta é **(D)**.

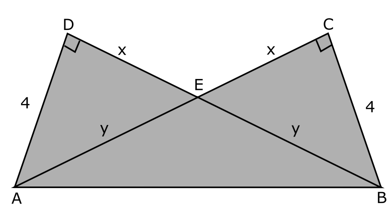
   Se um número x é diminuído de 40%, ele passa a valer 60% de x, ou seja: $0,6x$. Do mesmo modo, quando um número y é diminuído de 60%, ele passa a valer $0,4y$. Portanto, a fração $\dfrac{x}{y}$ passa a ter o valor $\dfrac{0,6x}{0,4y} = \dfrac{6}{4}\,\dfrac{x}{y} = 1,5\dfrac{x}{y}$. Isto significa que a fração $\dfrac{x}{y}$ aumentou 50% do seu valor.

3. **Triângulos sobrepostos** – Os pontos A, B, C e D formam o retângulo $ABCD$.



   Como as diagonais de um retângulo o dividem em quatro triângulos de mesma área, a área sombreada é igual a três quartos da área do retângulo $ABCD$. Portanto, a área sombreada é igual a $\dfrac{3}{4}(7 \times 4) = 21\,\text{cm}^2$.

   Vejamos agora o caso da outra figura. Sejam E o ponto de interseção dos segmentos AC e BD, $x = DE = CE$ e $y = AE = BE$.



   A área sombreada é a soma das áreas dos triângulos ADE e ABC, ou seja:

$$\frac{4 \times x}{2} + \frac{4 \times 7}{2} = 2x + 14\,.$$

   Logo, basta calcularmos x. Temos que $x + y = 7$ e, pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo AED, $y^2 = x^2+4^2$. Substituindo $y = 7-x$ nessa última equação obtemos:

$$(7-x)^2 = x^2+16 \;\Rightarrow\; 49-14x+x^2 = x^2+16 \;\Rightarrow\; x = \frac{49-16}{14} = \frac{33}{14}\,.$$

Finalmente, a área sombreada é:

$$2\times\frac{33}{14}+14 = \frac{33}{7}+14 = 4\,\frac{5}{7}+14 = 18\,\frac{5}{7}\,.$$

4. **Dois motoristas** – Seja d a distância entre as cidades A e B, e lembre que tempo = distância/velocidade.

   - O primeiro motorista viaja a distância de $2d$ com velocidade constante igual a 80 km/h. Logo, o tempo total gasto por ele é:

   $$t = \frac{2d}{80} = \frac{d}{40}\,.$$

   - O segundo motorista percorre a distância d, na ida, com velocidade igual a 90 km/h e, na volta, a mesma distância com velocidade de 70 km/h. Logo o tempo gasto na ida e volta é:

   $$t' = \frac{d}{70}+\frac{d}{90} = \frac{16\,d}{630} = \frac{8d}{315}\,.$$

   Como

   $$\frac{d}{40} = \frac{8d}{320} \;<\; \frac{8d}{315}\,,$$

   conclui-se que o motorista que viaja com velocidade constante de 80 km/h é o que gasta menos tempo no percurso de ida e volta.

5. **Soma e inverte** – Para obter 0, a sequência tem de terminar como:

   $$-2 \xrightarrow{+1} -1 \xrightarrow{+1} 0\,.$$

   Uma sequência pedida é a seguinte:

   $$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{-i} -\frac{1}{3} \xrightarrow{+1} \frac{2}{3} \xrightarrow{+1} \frac{5}{3} \xrightarrow{+1} \frac{8}{3} \xrightarrow{-i} -\frac{3}{8} \xrightarrow{+1} \frac{5}{8} \xrightarrow{+1} \frac{13}{8} \xrightarrow{+1} \frac{21}{8}$$
   $$\xrightarrow{-i} -\frac{8}{21} \xrightarrow{+1} \frac{13}{21} \xrightarrow{-i} -\frac{21}{13} \xrightarrow{+1} -\frac{8}{13} \xrightarrow{+1} \frac{5}{13} \xrightarrow{-i} -\frac{13}{5} \xrightarrow{+1} -\frac{8}{5} \xrightarrow{+1} -\frac{3}{5} \xrightarrow{+1} \frac{2}{5}$$
   $$\xrightarrow{-i} -\frac{5}{2} \xrightarrow{+1} -\frac{3}{2} \xrightarrow{+1} -\frac{1}{2} \xrightarrow{+1} \frac{1}{2} \xrightarrow{-i} -2 \xrightarrow{+1} -1 \xrightarrow{+1} 0.$$

   Temos outra solução bem mais rápida e simples:

   $$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{-i} -1 \xrightarrow{+1} 0.$$

Lista 3

1. **Carro flex –**

(a) Com gasolina o carro faz $\dfrac{12{,}3}{2{,}49} = 4{,}94\,\text{km}$ por R\$$1,00$. Para que o álcool seja mais vantajoso precisamos que o carro rode, com álcool, mais que $4,94$ km com R\$$1,00$. Logo, se o desempenho com álcool é y km/l, precisamos que $\dfrac{y}{1{,}59} > 4{,}94$, o que implica $y > 7{,}85$. Ou seja, o desempenho com álcool deve ser maior que $7{,}85$ km/l.

(b) Observe que $g(x) = 2{,}49\dfrac{100}{x} = \dfrac{249}{x}$ e $a(x) = 1{,}59\dfrac{100}{\dfrac{x}{2}+1} = \dfrac{318}{x+2}$.

(c) Precisamos ter $a(x) = g(x)$, ou seja, $\dfrac{249}{x} = \dfrac{318}{x+2}$, o que leva a $x = 7{,}22$ km/l, que deve ser o desempenho com gasolina. Com álcool, o carro deve fazer

$$\frac{7{,}22}{2} + 1 = 3{,}61\,\text{km/l}\,.$$

(d) Supondo que o desempenho do carro seja x km/l com gasolina e y km/l com álcool e pensando em um percurso de L km, devemos ter o custo com gasolina maior que o custo com álcool:

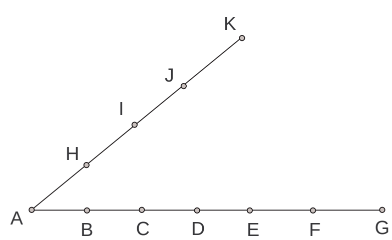
$$2{,}49\frac{L}{x} > 1{,}59\frac{L}{y} \Rightarrow 2{,}49y > 1{,}59x \Rightarrow y > 0{,}64x,$$

pois x e y são valores positivos.

Um exemplo é um carro que faz 10 km/l com gasolina, teria que fazer mais que $6{,}4$ km/l com álcool para que o uso do álcool seja mais vantajoso.

Observação. Os valores determinados na solução foram aproximados na segunda casa decimal.

2. **Contando triângulos** – Sejam A, B, $\ldots$, K os 11 pontos nomeados como na seguinte figura:



Dividiremos a contagem em três casos:

(i) Um vértice é A. Neste caso, um vértice do triângulo deve estar no conjunto $\{H, I, J, K\}$ e o outro vértice no conjunto $\{B, C, D, E, F, G\}$. Como existem 4 escolhas para um vértice e 6 escolhas para o outro vértice, a quantidade de triângulos com um vértice no ponto A é: $6 \times 4 = 24$.

(ii) Dois vértices em $\{B, C, D, E, F, G\}$. O outro vértice está no conjunto $\{H, I, J, K\}$, pois já contamos os triângulos com vértice em A. Devemos escolher dois entre os 6 pontos $\{B, C, D, E, F, G\}$. Assim, temos a quantidade de escolhas:

$$C_6^2 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15.$$

O outro vértice do triângulo é qualquer um dos 4 pontos $\{H, I, J, K\}$. Daí a quantidade de triângulos é $4 \times 15 = 60$.

(iii) Dois vértices em $\{H, I, J, K\}$. O outro vértice está no conjunto $\{B, C, D, E, F, G\}$. O número de maneira de escolher 2 entre os 4 pontos $\{H, I, J, K\}$ é

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6.$$

Como o outro vértice pode ser escolhido de 6 maneira diferentes, temos que a quantidade de triâgulos é $6 \times 6 = 36$.

Logo, a quantidade de triângulos cujos vértices são tomados dentre os 11 pontos da figura é $24 + 60 + 36 = 120$.

3. **Quadrado perfeito** – Seja x um número de oito algarismos da forma

$$x \;=\; 9999 * * * * \,.$$

Como o menor desses números é $99\,990\,000$ e o maior é $99\,999\,999$, temos que:

$$99\,990\,000 \leq x \leq 99\,999\,999\,.$$

Observemos que $10^8 = 100\,000\,000 = 99\,999\,999 + 1$. Então $99\,990\,000 \leq x < 10^8$. Como $10^8 = \left(10^4\right)^2 = 10\,000^2$, temos que $99\,990\,000 \leq x < 10\,000^2$. Agora, o maior quadrado perfeito menor que $10\,000^2$ é igual a

$$9\,999^2 = (10\,000 - 1)^2 = 10\,000^2 - 20\,000 + 1 = 100\,000\,000 - 20\,000 + 1 = 99\,980\,001.$$

Como $99\,980\,001 < 99\,990\,000$ concluímos que $9\,999^2 < x < 10\,000^2$. Isto mostra que x está compreendido entre dois quadrados perfeitos consecutivos. Portanto, x não pode ser um quadrado perfeito.

4. **Diferença quase nula** – A inequação $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 0{,}01$ é equivalente a $\sqrt{n} < 0{,}01 + \sqrt{n-1}$. Como os dois lados desta inequação são números positivos, podemos elevar esses dois membros ao quadrado para obter a inequação equivalente:

$$\left(\sqrt{n}\right)^2 < \left(0{,}01 + \sqrt{n-1}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad n < 0{,}01^2 + 0{,}02\sqrt{n-1} + n - 1\,.$$

Daí obtemos

$$\sqrt{n-1} > \frac{1 - 0{,}01^2}{0{,}02} = \frac{1 - \dfrac{1}{100^2}}{\dfrac{2}{100}} = \frac{100^2 - 1}{200}\,.$$

Elevando novamente ao quadrado os dois lados (não negativos) desta inequação, obtemos:

$$n-1 \; > \; \frac{(100^2-1)^2}{200^2} \; = \; \frac{100^4-2\times 100^2+1}{4\times 100^2} = \frac{100^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4\times 100^2} \; ,$$

ou seja,

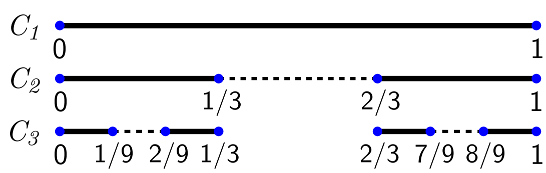
$$n-1 > 2\,500-\frac{1}{2}+\frac{1}{40\,000} \;\Leftrightarrow\; n > 2\,500-\frac{1}{2}+\frac{1}{40\,000}+1 \;\Leftrightarrow\; n > 2\,500+\frac{1}{2}+\frac{1}{40\,000}\,.$$

Uma vez que $\frac{1}{2}+\frac{1}{40\,000} < 1$, temos que o menor número inteiro maior que $2\,500+\frac{1}{2}+\frac{1}{40\,000}$ é $2\,501$.

Daí concluímos que o menor número inteiro positivo que satisfaz a desigualdade dada é o número $2\,501$.

5. **Conjunto de Cantor –**

(a) De acordo com a definição do Conjunto de Cantor temos os seguintes desenhos:



(b) $1/3$ é um extremo de C_2, logo pertence ao conjunto de Cantor.

$3/81 = 1/27$ e $1/27$ é um extremo de C_4, logo $3/81$ pertence ao conjunto de Cantor.

$4/9$ está entre $1/3$ e $2/3$, logo está no terço central de C_1 e é removido de C_2, logo $4/9$ não pertence ao conjunto de Cantor.

$4/81$ está entre $1/27$ e $2/27$, e portanto está no terço central de C_3 e é removido de C_4. Assim, $4/81$ não pertence ao conjunto de Cantor.

(c) Vamos tentar achar um padrão para os comprimentos dos segmentos. Por exemplo, C_1 tem comprimento 1 e C_2 tem comprimento $2/3$. Será que isso já fornece um padrão, ou seja o numerador é obtido multiplicando por 2 e o denominador por 3, ou seja por $2/3$?

Agora C_3 tem comprimento $4/9$, C_4 comprimento $8/27$ e C_5 comprimento $16/81$. Logo, o comprimento de C_n é $(\frac{2}{3})^{n-1}$

Note que os comprimentos de $C_1,\ C_2,\ C_3,\ \ldots,\ C_n,\ \ldots,$ formam uma progressão geométrica de razão $q=2/3$ e primeiro termo $a_1=1$.

$$1\;,\;\frac{2}{3}\,,\left(\frac{2}{3}\right)^2,\left(\frac{2}{3}\right)^3,\left(\frac{2}{3}\right)^4,\ldots,\left(\frac{2}{3}\right)^n,\ldots$$

Lista 4

1. **Enchendo uma piscina** – Como as torneiras A e B despejam água na piscina com vazão constante, o volume de água despejado na piscina por cada torneira é proporcional ao tempo em que ela fica aberta. Assim, se durante 2 horas a torneira A enche 15% do volume da piscina, então em 4 horas ela encherá 30% do volume da piscina.

   Mas, quando as torneiras A e B ficam simultaneamente abertas durante 4 horas, elas conseguem encher 50% do volume da piscina. Daí temos que a torneira B enche $50\% - 30\% = 20\%$ do volume da piscina em 4 horas.

   Para saber quanto tempo a torneira B deve ficar aberta para encher os 35% restantes do volume da piscina, basta utilizar a proporção:

$$\begin{array}{ccc} \text{horas} & \rightarrow & \text{percentual} \\ 4 & \rightarrow & 20\% \\ x & \rightarrow & 35\% \end{array}$$

   Logo, a torneira B gastará $x = \dfrac{35 \times 4}{20} = 7$ horas para encher os 35% restantes.

2. **Probabilidade de ser um número par** – Sejam a e b os números escritos nas bolas retiradas por José e Maria, respectivamente. Existem então 9 possibilidades para a e 8 possibilidades para b. Deste modo, existem $9 \times 8 = 72$ possibilidades para o número ab.

   Por outro lado, para contar quantos destes números são pares, precisamos analisar separadamente dois casos:

   - os números a e b são pares;
   - o número a é ímpar e o número b é par.

   No primeiro caso, em que a e b são pares, existem 4 possibilidades para a e 3 possibilidades para b. Deste modo, existem $4 \times 3 = 12$ possibilidades.

   No segundo caso, em que a é ímpar e b é par, existem 5 possibilidades para a e 4 possibilidades para b. Assim, existem $5 \times 4 = 20$ possibilidades.

   Portanto, a probabilidade do número ab ser par é $\dfrac{12+20}{72} = \dfrac{32}{72} = \dfrac{4}{9}$.

3. **Múltiplo de** 7 – Inicialmente, observemos que:

$$\begin{aligned} N &= (n+6m)(2n+5m)(3n+4m) \\ &= (n+7m-m)(2n+7m-2m)(3n+7m-3m) \\ &= (n-m+7m)[2(n-m)+7m][3(n-m)+7m] \\ &= (k+7m)(2k+7m)(3k+7m), \end{aligned}$$

   onde $k = n - m$.

   Afirmamos que se N é múltiplo de 7, então k é múltiplo de 7. De fato, como 7 é primo e divide N, então um dos fatores $k+7m$, $2k+7m$ ou $3k+7m$ é múltiplo de 7. Temos:

(i) Se $k+7m$ é múltiplo de 7, então $\dfrac{k+7m}{7} = \dfrac{k}{7} + m$ é inteiro, logo k é múltiplo de 7. Segue que $2k$ e $3k$ também são múltiplos de 7 e portanto os três fatores $k+7m$, $2k+7m$ e $3k+7m$ são múltiplos de 7. Concluímos que N é múltiplo de 7^3.

(ii) Se $2k+7m$ é múltiplo de 7, então $\dfrac{2k+7m}{7} = \dfrac{2k}{7} + m$ é inteiro, logo $2k$ é múltiplo de 7. Como 2 e 7 são primos entre si, segue que k é múltiplo de 7, o que leva ao caso anterior.

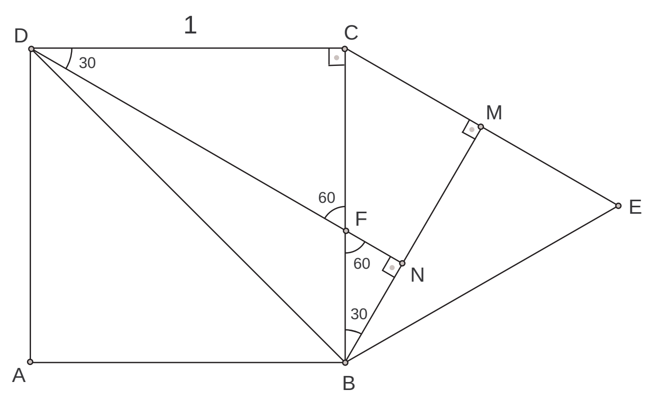
(iii) Se $3k+7m$ é múltiplo de 7, analogamente concluímos que k é múltiplo de 7.

4. **Os ângulos 15° e 75°** – Uma vez que DB é diagonal do quadrado de lado 1 cm, pelo Teorema de Pitágoras, temos que $DB^2 = 1^1 + 1^2$ implica $DB = \sqrt{2}$.

Recordemos que:

$$\begin{aligned} \cos 60^\circ &= \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}; \qquad \operatorname{sen} 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \tan 60^\circ &= \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \sqrt{3}; \qquad \tan 30^\circ = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

(a) O triângulo BCE é equilátero, logo seus ângulos internos valem 60°. A partir dessa informação obtemos os ângulos assinalados na figura.



No $\triangle CDF$ temos: $\operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{CD}{DF} = \dfrac{1}{DF}$. Como $\operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, temos:

$$\frac{1}{DF} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; DF = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ainda no $\triangle CDF$ temos: $\cos 60^\circ = \dfrac{CF}{DF} = \dfrac{CF}{2\sqrt{3}/3}$. Como $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$, temos:

$$\frac{1}{2} = \frac{CF}{2\sqrt{3}/3} \;\Rightarrow\; CF = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

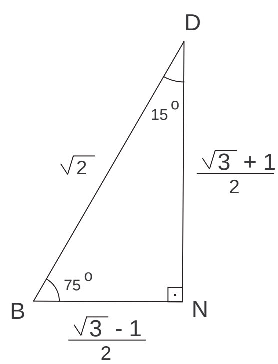
Segue que $BF = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Temos agora:

- $\operatorname{sen} 30^\circ = \dfrac{FN}{BF} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{FN}{1-\sqrt{3}/3} \Rightarrow FN = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$
- $\cos 30^\circ = \dfrac{BN}{BF} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{BN}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow BN = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Assim, calculamos os três lados do triângulo $\triangle DBN$:

- $DB = \sqrt{2}$;
- $DN = DF + FN = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} + \dfrac{3-\sqrt{3}}{6} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$;
- $BN = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

(b) No $\triangle DBN$ temos: $D\widehat{B}N = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$, donde concluímos que $B\widehat{D}N = 15^\circ$. Assim temos:



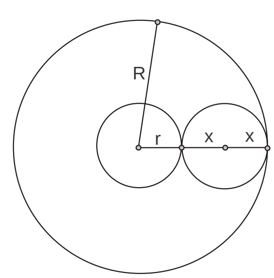
$$\cos 75^\circ = \frac{BN}{DB} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{DN}{DB} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

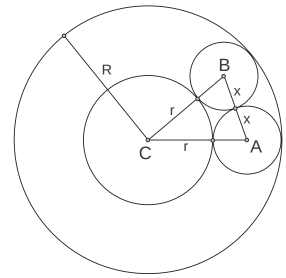
Como $\operatorname{sen}\, 15^\circ = \cos 75^\circ$ e $\cos 15^\circ = \operatorname{sen}\, 75^\circ$, o exercício está completo.

5. **Circunferências tangentes** -

(a) Na figura estão desenhadas as duas circunferências concêntricas, de raios r e R, e uma circunferência de raio x simultaneamente tangente a essas duas. Logo, temos: $r + 2x = R$ donde, $x = \dfrac{R-r}{2}$.

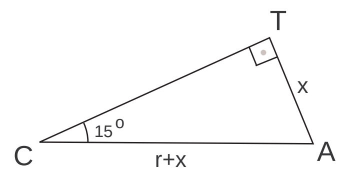


(b) Na figura ao lado temos 2 circunferências tangentes de raio x, e também tangentes às 2 circunferências concêntricas de raio r e R. Os pontos A, B e C são os centros destas circunferências.



Para traçar 12 circunferências de raio x na região entre as 2 circunferências concêntricas, deve-se ter $A\widehat{C}B = \dfrac{360^\circ}{12} = 30^\circ$.

Se T é o ponto de tangência das circunferências de raio x, T é ponto médio do segmento AB e $A\widehat{C}T = 15^\circ$.



Nesse triângulo retângulo temos $\operatorname{sen} 15^\circ = \dfrac{AT}{AC} = \dfrac{x}{r+x}$. Mas $x = \dfrac{R-r}{2}$ e, do problema anterior, $\operatorname{sen} 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Daí concluímos que

$$\frac{R-r}{R+r} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\ .$$

Dividindo por r o numerador e o denominador do membro esquerdo dessa igualdade encontramos

$$\frac{\dfrac{R}{r}-1}{\dfrac{R}{r}+1} = \frac{q-1}{q+1} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\ , \quad \text{onde} \quad q = \frac{R}{r}.$$

Segue que

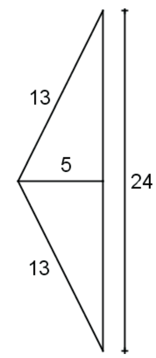
$$q = \frac{R}{r} = \frac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}\ .$$

Lista 5

1. **Mudando a base** – Em um triângulo isósceles, a altura relativa à base coincide com a mediana. Traçando esta altura, obtemos dois triângulos retângulos com catetos medindo h e 5, e hipotenusa 13. Pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$h^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow \; h^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \Rightarrow \; h = \sqrt{144} = 12.$$

Logo a área do triângulo é $A = \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{10 \times 12}{2} = 60\,\text{cm}^2$.



Vamos agora "colar" os 2 triângulos retângulos ao longo do lado medindo 5, obtendo um triângulo isósceles com base $12+12 = 24\,\text{m}$, os lados com $13\,\text{cm}$ e a altura relativa a base igual a $5\,\text{cm}$. Logo, este novo triângulo isósceles tem também área igual a $\dfrac{24 \times 5}{2} = 60\,\text{cm}^2$.

2. **Clube de Matemática** – Sejam H e M os números de homens e mulheres, respectivamente, no clube. Temos duas possibilidades: <u>Se eu sou menino</u>, temos $M = H - 1$. Quando falta um menino, o número total de pessoas no clube é

$$M + H - 1 = H - 1 + H - 1 = 2H - 2.$$

Logo:

$$M = \frac{3}{4}(2H-2) \;\Rightarrow\; H - 1 = \frac{3}{4}(2H-2) \;\Rightarrow\; H = 1\,.$$

Logo, $M = 1-1 = 0$, o que não é possível. Logo <u>eu sou uma menina</u>, então $M = H+1$ e temos

$$H + 1 = \frac{3}{4}(2H+1-1) \;\Rightarrow\; H = 2 \;\text{ e }\; M = 3.$$

3. **Uma calculadora diferente** – Para calcular $(2*3)+(0*3)$ utilizamos as propriedades (i), (ii) e (iii). Então

$$\begin{aligned}(2*3)+(0*3) &\overset{\text{(iii)}}{=} (2*0)+(3*3)\\ &\overset{\text{(i) (ii)}}{=} 2\times 2+3 = 7.\end{aligned}$$

Para calcular $1\,024 * 48$, observe que $1\,024 = 976 + 48$. Temos:

$$\begin{aligned}1\,024 * 48 &= (976+48)*(0+48)\\ &= (976*0)+(48*48)\\ &= 976\times 2+48\\ &= 1\,952+48 = 2\,000.\end{aligned}$$

4. **Retângulo m × n** – Sejam m e n respectivamente, o número de segmentos de $0,5$ cm sobre dois lados consecutivos do retângulo. Sabemos que o número total de segmentos de $0,5$ cm na divisão do retângulo em $m{\times}n$ quadrados de lado $0,5$ cm é: $m(n{+}1){+}n(m{+}1)$ (prove isso). Assim,

$$m(n+1)+n(m+1)=1\,997 \quad \Rightarrow \quad n=\frac{1\,997-m}{2m+1}\,.$$

Além disso, um dos lados considerados é menor ou igual ao outro, digamos: $m \leq n$. Nesse caso podemos concluir que $m \leq 31$, pois

$$n \geq m \Rightarrow n(m+1)+m(n+1) \geq 2m(m+1).$$

Logo $1\,997 \geq 2m(m+1)$ e como $1\,998 > 1\,997$ segue que

$$1\,998 > 2m(m+1) \Rightarrow 999 > m(m+1).$$

Daí concluímos que $m < 32$.

Por outro lado temos que

$$n=\frac{1997-m}{2m+1} \Rightarrow 2n=\frac{3\,994-2m}{2m+1}=\frac{3\,995-(2m+1)}{2m+1} \Rightarrow 2n=\frac{3\,995}{2m+1}-1\,.$$

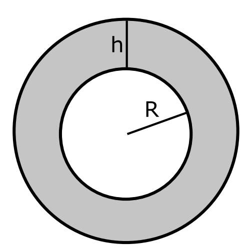
Assim, a questão se resume agora em pesquisar os divisores de $3\,995 = 5 \times 17 \times 47$. Os únicos valores de m que atendem a condição $1 \leq m \leq 31$ são $m = 2$, $m = 8$ e $m = 23$, que correspondem, respectivamente, aos divisores $5, 17$ e 47. Para esses valores de m temos $n = 399$, $n = 117$ e $n = 42$ respectivamente. Os outros divisores darão configurações equivalentes (trocando m por n).

Portanto, Rosa pode ter construído 3 configurações diferentes com os $1\,997$ segmentos. A primeira com 2×399 quadrados, a segunda com 8×117 quadrados e a terceira com 23×42 quadrados.

5. **Cercando o Globo Terrestre** – Como o raio da Terra é muito grande, e foi dado apenas um acréscimo de 1 m no comprimento do fio, parece que a folga entre o fio e o Equador é muito pequena. Mais ainda, se trocarmos o Globo Terrestre por Júpiter ou por uma bolinha de gude e realizarmos esta mesma experiência, parece que a altura da folga entre o fio aumentado e o equador da esfera também muda, sendo que quanto maior a esfera considerada, menor é a folga entre o fio e o equador da esfera.

Vejamos que esta ideia intuitiva é falsa e que a altura da folga, entre o fio e o Equador, é de aproximadamente 16 cm, independentemente do raio da esfera em que a experiência é realizada.

Consideremos um círculo de raio R. Seu comprimento é igual a $2\pi R$. Vamos considerar também um círculo de mesmo centro, mas que tenha comprimento igual a $2\pi R+1$.

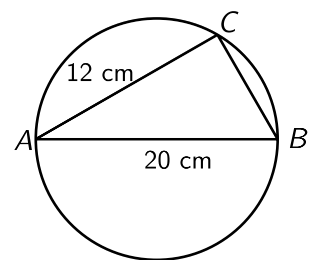


Este círculo tem raio igual a $R+h$, sendo h a altura da folga entre os dois círculos. Como um círculo de raio $R+h$ tem comprimento $2\pi(R+h)$ obtemos a igualdade $2\pi(R+h)=2\pi R+1$. Simplificando esta expressão obtemos $h=\dfrac{1}{2\pi}\approx\dfrac{1}{6,28}\approx 0,16$. Portanto, para qualquer valor de R, a altura da folga é de aproximadamente 16 cm.

Assim, somente a formiga é capaz de passar por debaixo do fio.

Lista 6

1. **Comprimento de uma corda** – Sendo AB um diâmetro, o triângulo $\triangle ABC$ está inscrito numa semicircunferência. Isto implica que este triângulo é retângulo no vértice C. Pelo Teorema de Pitágoras,



$$BC^2 = AB^2 - AC^2,$$

ou seja,

$$BC^2 = 20^2 - 12^2 = 256 = 16^2.$$

Assim, obtemos que $BC = 16$.

2. **Dois irmãos** – Sejam x, y as idades atuais dos dois irmãos, e z a idade do pai. Temos:

$$\begin{cases} x - y &= 3 \\ z - 1 &= 2[(x-1)+(y-1)] \\ z + 20 &= (x+20)+(y+20) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y &= 3 \\ z - 1 &= 2x + 2y - 4 \\ z + 20 &= x + y + 40 \end{cases}.$$

Uma maneira simples de obter z é multiplicar a 3ª equação por 2 e do resultado subtrair a 2ª: $2z + 40 - (z-1) = 80 - (-4)$, o que implica $z = 43$.

Vamos calcular agora a idade dos filhos usando as duas primeiras equações:

$$\begin{cases} x - y &= 3 & \Rightarrow x = y + 3 \\ 43 - 1 &= 2x + 2y - 4 & \Rightarrow x = 23 - y \end{cases}$$

Obtemos $2x = 26$, donde $x = 13$ e $y = 10$.

3. **Canelonis de ricota** – Colando os retângulos de massa ao longo do maior lado, Pedro obtém um cilindro de base circular com 10 cm de comprimento e 16 cm de altura. O volume então que ele recheia com ricota é o volume desse cilindro:

$$V = \text{área da base} \times \text{altura}\,.$$

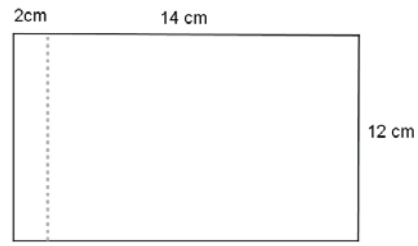
A área da base é dada por $\pi \times r^2$, onde r é o raio da base. Vamos então calcular o raio sabendo que o comprimento da base é 10 cm; temos:

$$2\pi r = 10 \Rightarrow r = \frac{5}{\pi}\,.$$

Logo, o volume de ricota para cada caneloni é

$$V = \pi \times \frac{5^2}{\pi^2} \times 16 = \frac{16 \times 25}{\pi} = \frac{400}{\pi}\,\text{cm}^3\,.$$

Agora, colando os retângulos de massa ao longo do menor lado, Pedro obtém um cilindro de base circular com 14 cm de comprimento e 12 cm de altura. O raio da base é $r' = \dfrac{14}{2\pi} = \dfrac{7}{\pi}$, logo o volume de ricota para cada caneloni será:



$$V' = \pi \times \frac{7^2}{\pi^2} \times 12 = \frac{588}{\pi}\,\text{cm}^3\,.$$

Finalmente, para calcular o novo gasto com ricota, usamos a seguinte Regra de Três direta:

Volume (cm^3)		Ricota(g)
$\dfrac{400}{\pi}$	$\longrightarrow$	500
$\dfrac{588}{\pi}$	$\longrightarrow$	x

Segue que

$$x = \frac{500 \times 588}{400} = 735\,\text{g}\,.$$

4. **Cálculo de segmentos** – O triângulo $\triangle ABP$ é retângulo com catetos $AB = 1\,200$ e $BP = 150 + 350 = 500$. Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$AP^2 = 1\,200^2 + 500^2 = (144 + 25) \times 10^4 = 169 \times 10^4 = (13 \times 10^2)^2\,.$$

Logo, $AP = 13 \times 10^2 = 1\,300\,\text{m}$.

Analogamente, considerando o triângulo retângulo $\triangle PCD$, temos:

$$DP^2 = 350^2 + 1\,200^2 = (7^2 + 12^2 \times 2^2)(5^2 \times 10^2) = 25^2 \times 50^2 \Longrightarrow DP = 1\,250\,\text{m}\,.$$

Os triângulos $\triangle PCQ$ e $\triangle PBA$ são retângulos com um ângulo em comum, logo são semelhantes; segue que:

$$\frac{PQ}{PA} = \frac{PC}{PB} = \frac{CQ}{AB}\,.$$

Substituindo os valores conhecidos temos:

$$\frac{PQ}{1\,300} = \frac{350}{500} = \frac{CQ}{1\,200}\,.$$

Logo,

$$PQ = \frac{350 \times 1\,300}{500} = 910\,\text{m}$$

e

$$CQ = \frac{350 \times 1\,200}{500} = 840\,\text{m}\,.$$

5. **Prá chegar junto!** – Sabemos que espaço $=$ velocidade $\times$ tempo .

Sejam v e v' as velocidades de Ana e de Luíza, respectivamente, e t o tempo que Luíza gasta para percorrer os $3\,000$ m. Logo, nesse mesmo tempo t, Ana percorre

$3\,000 - 120 = 2\,880$ m. Temos:

$$3\,000 = v \times t$$

e

$$3\,000 - 120 = v't \;\Rightarrow\; t = \frac{3\,000}{v} = \frac{2\,880}{v'}\,.$$

Portanto, $\dfrac{v'}{v} = \dfrac{24}{25}\,.$

Se denotarmos por x a distância que Luíza percorrerá a mais temos:

$$3\,000 + x = v \times t$$

e

$$3\,000 = v' \times t \;\Rightarrow\; \frac{3\,000 + x}{v} = \frac{3\,000}{v'} \;\Rightarrow\; \frac{3\,000}{3\,000 + x} = \frac{v'}{v}\,.$$

Segue que

$$\frac{3\,000}{3\,000 + x} = \frac{v'}{v} = \frac{24}{25} \;\Rightarrow\; x = 125\,.$$

Logo, a resposta é 125 m.

Lista 7

1. **Um professor enfurecido** – Quem teve x como nota mensal vai ter um desconto de $x\%$ sobre essa nota, ou seja vai perder

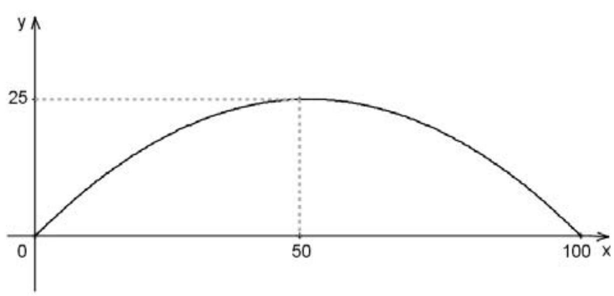
$$x\% \text{ de } x = \frac{x}{100} \times x = \frac{x^2}{100}\,.$$

Logo, depois do castigo, a nota fica sendo $x - \dfrac{x^2}{100}$, onde x era a nota inicial.

Consideremos a função "nota depois do castigo" dada por $f(x) = x - \dfrac{x^2}{100}$. Como as notas máximas e mínimas são 0 e 100, vamos considerar essa função no domínio $[0, 100]$, ou seja, para $0 \leq x \leq 100$. O gráfico de f é uma parábola com concavidade para baixo, e seu valor máximo ocorre no vértice: $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{\frac{-2}{100}} = 50$. Sendo assim, a maior nota depois do castigo é para os alunos que antes do castigo tiraram 50. Essa nota é

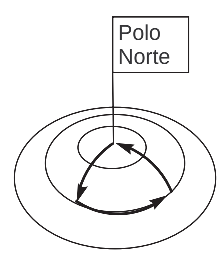
$$f(50) = 50 - \frac{50^2}{100} = 25\,.$$

O valor mínimo dessa função é 0 ocorre em $x = 0$ e $x = 100$. Logo a menor nota ocorre para os alunos que tiraram 0 ou 100(!!!!!) antes do castigo. De fato, $f(0) = f(100) = 0$.

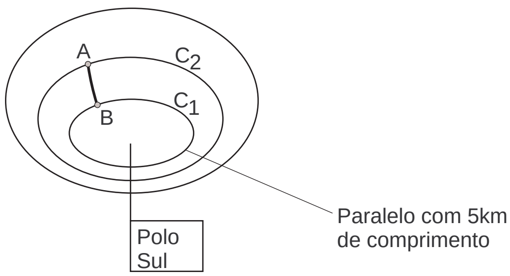


2. **O percurso de um atleta** –

O Polo Norte da Terra é o ponto mais fácil de ser identificado como solução: Saindo o atleta do Polo Norte, correndo 5 km para o sul, depois 5 km para o leste e finalmente 5 km para o norte, ele volta novamente para o Polo Norte.

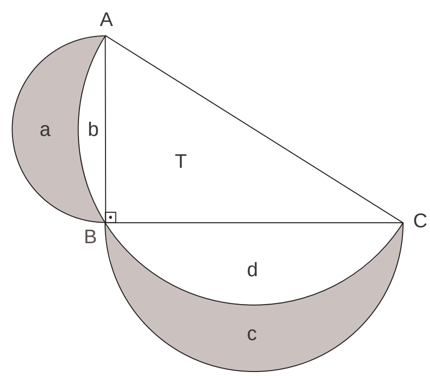


Vamos determinar um outro ponto sobre a Terra que satisfaz as hipóteses do problema. Consideremos um paralelo (linha paralela ao Equador) de comprimento 5 km. Existem dois deles: um próximo ao Polo Norte e outro próximo ao Polo Sul. Vamos denotar por C_1 o que está mais próximo do Polo Sul. Denotemos por C_2 o paralelo que está 5 km de distância de C_1, medida ao longo de um meridiano. Afirmamos que qualquer ponto A sobre o paralelo C_2 satisfaz as hipóteses do problema. De fato, saindo de A e caminhando 5 km para o sul, chega-se a um ponto B do paralelo C_1. Como C_1 tem comprimento 5 km, saindo de B e caminhando 5 km para leste retorna-se novamente para B.



Finalmente, saindo de B e caminhando 5 km para o norte, retorna-se novamente para o ponto de partida A.

3. **Áreas iguais** – Sejam T a área do triângulo $\triangle ABC$, a e c as áreas sombreadas na figura dada e b e d as áreas compreendidas entre os catetos do triângulo e o semicírculo de diâmetro AB.



A área $a+b$ é a área do semicírculo de diâmetro AB:

$$a+b=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\frac{\pi AB^2}{8}.$$

A área $c+d$ é a área do semicírculo de diâmetro BC:

$$c+d=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2=\frac{\pi BC^2}{8}.$$

A área $b+d+T$ é a área do semicírculo de diâmetro AC:

$$b+d+T=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2=\frac{\pi AC^2}{8}.$$

Portanto,

$$(a+b)+(c+d)=\frac{\pi AB^2}{8}+\frac{\pi BC^2}{8}.$$

Como $b+d=\dfrac{\pi AC^2}{8}-T$ temos

$$(a+c)+\left(\frac{\pi AC^2}{8}-T\right)=\frac{\pi AB^2}{8}+\frac{\pi BC^2}{8},$$

ou equivalentemente,

$$(a+c)+\frac{\pi}{8}AC^2=\frac{\pi}{8}\left(AB^2+BC^2\right)+T\,.$$

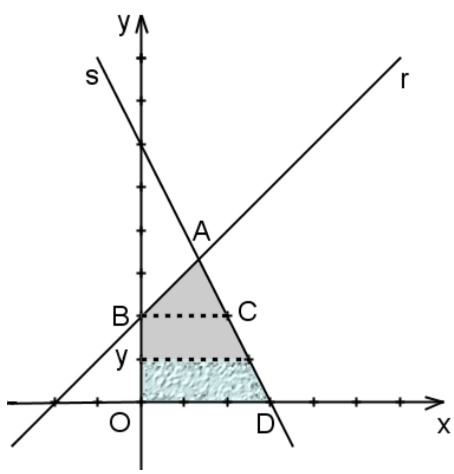
Uma vez que $AC^2 = AB^2 + BC^2$, pelo Teorema de Pitágoras, podemos simplificar a igualdade acima e obter $a + c = T$. Esta igualdade implica que a soma das áreas sombreadas é igual a área do triângulo retângulo $\triangle ABC$.

4. **Função definida por área –**

(a) A reta r passa pelo ponto $(0, 2)$, logo tem equação $y = mx + 2$. Como ela passa pelo ponto $(-2, 0)$, verifica-se que $0 = -2m + 2$, que implica $m = 1$. Assim, r tem equação $y = x + 2$.

A reta s passa pelo ponto $(0, 6)$ logo, $y = mx+6$ e como passa também pelo ponto $(3, 0)$, verifica-se que $0 = 3m + 6$, que implica $m = -2$. Logo, s tem equação $y = -2x + 6$.

(b) $f(0)$ é a área do triângulo $\triangle ABC$ mais a área do trapézio $BOCD$, sendo A o ponto de encontro de r e s.



Para determinar A fazemos: $x + 2 = -2x + 6$ de onde $x = 4/3$. Substituindo esse valor na equação de r ou s obtemos $y = 10/3$. Logo, $A = (4/3, 10/3)$. A altura do triângulo $\triangle ABC$, em relação à base BC, é $h = 10/3 - 2 = 4/3$. O ponto C pertence à reta s e tem $y = 2$, logo tem-se $2 = -2x + 6$ ou seja $x = 2$. Então $C = (2, 2)$. Logo, a área do triângulo $\triangle ABC$ é igual a $2\times\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$ e a área do trapézio $BOCD$ é $2\times\frac{3+2}{2}=5$. Logo,

$$f(0)=5+\frac{4}{3}=\frac{19}{3}\,.$$

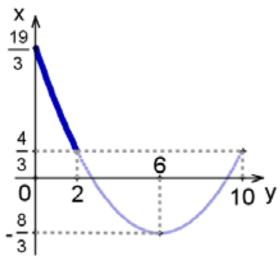
(c) $f(y)$ é igual a $f(0)$ menos a área do trapézio de altura y e bases 3 e x, sendo x a abscissa do ponto da reta s que tem ordenada y, logo

$$x=\frac{6-y}{2}\,.$$

Daí temos

$$f(y)=\frac{19}{3}-\frac{3+\frac{6-y}{2}}{2}y=\frac{19}{3}-\frac{12y-y^2}{4}=\frac{y^2}{4}-3y+\frac{19}{3}\,.$$

(d)



O gráfico de $f(y)=\dfrac{y^2}{4}-3y+\dfrac{19}{3}$ é uma parábola côncava para cima. As coordenadas do vértice V são: $x=\dfrac{3}{\frac{2}{4}}=6$ e

$y=f(6)=\dfrac{6^2}{4}-3.6+\dfrac{19}{3}=-9+\dfrac{19}{3}=-\dfrac{8}{3}$.

Logo $V=(6,-\dfrac{8}{3})$.

Como $f(2)=\dfrac{4}{3}$ o gráfico de f, com $0\leq y\leq 2$ é a parte em linha grossa.

5. **PA e PG** – Os 4 termos de uma progressão aritmética de razão r podem ser escritos como:

$$x-2r\ ,\ x-r\ ,\ x\ ,\ x+r\,.$$

Logo, os 3 termos da progressão geométrica de razão q serão

$$x-2r\ ,\ x\ ,\ x+r\,,$$

onde

$$x=(x-2r)q\quad\text{e}\quad x+r=xq\,.$$

Daí segue que:

$$x=xq-2rq\ \Rightarrow\ \ x=x+r-2rq\ \Rightarrow\ q=\frac{1}{2}\,.$$

Obtemos que $x+r=\dfrac{x}{2}\ \Rightarrow\ r=-\dfrac{x}{2}$. Logo a progressão aritmética é da forma:

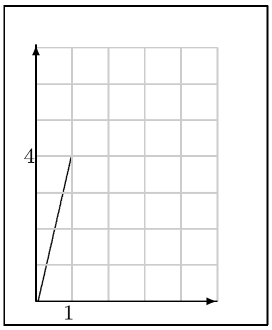
$$2x\ ,\ \frac{3x}{2}\ ,\ x\ ,\ \frac{x}{2}\,.$$

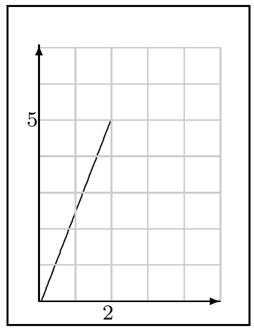
Escolhendo um valor para x, por exemplo $x=1$, obtemos 4 números formando uma progressão aritmética $2\ ,\ 3/2\ ,\ 1\ ,\ 1/2$ de razão $-1/2$ tais que $2\ ,\ 1\ ,\ 1/2$ formam uma progressão geométrica de razão $1/2$. Note que esse problema tem uma solução para cada escolha de x, portanto tem um infinidade de soluções.

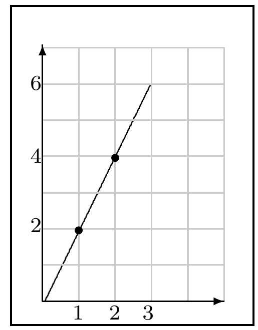
Lista 8

1. **Plano cartesiano** – Comecemos examinando alguns casos.

   - $f(1)$ é o número de pontos inteiros sobre o segmento que liga $(0\,,0)$ ao ponto $(1\,,4)$. Logo, $f(1)=0$.
   - $f(2)$ é o número de pontos inteiros sobre o segmento que liga $(0\,,0)$ ao ponto $(2\,,3)$. Logo, $f(2)=0$.
   - $f(3)$ é o número de pontos inteiros sobre o segmento que liga $(0\,,0)$ ao ponto $(3\,,6)$. Como nesse segmento estão 2 pontos inteiros $(1\,,2)$ e $(2\,,4)$, segue que $f(3)=2$.







Vejamos, agora o caso geral. Note que se um ponto inteiro $(x\,,y)$ está sobre o segmento que une $(0\,,0)$ a $(n\,,n+3)$, sem ser um dos extremos, então $0<x<n$ e $0<y<n+3$. Vamos precisar do seguinte resultado:

Lema: Se n não é múltiplo de 3, então n e $n+3$ são primos entre si.

Demonstração: Suponhamos que o mdc entre n e $n+3$ seja $d>1$. Então d divide n e $n+3$, portanto d divide $(n+3)-n=3$. Logo, como $d>1$, teremos $d=3$, o que não é possível porque partimos da hipótese que 3 não divide n.

- *Se* 3 *não divide* n *então* $f(n)=0$ *.*

  Isso equivale a dizer que não há pontos inteiros sobre o segmento que une $(0\,,0)$ a $(n\,,n+3)$, excluídos os extremos.

  De fato, suponhamos que esse segmento contenha um ponto inteiro $(x\,,y)$, então

  $$\frac{x}{y}=\frac{n}{n+3}\,.$$

  Pelo lema, a fração $\dfrac{n}{n+3}$ está na forma irredutível, logo, x seria múltiplo de n, o que não pode acontecer porque $x<n$.

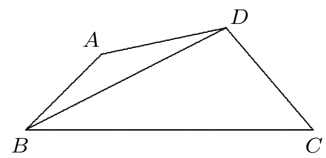
- *Se* 3 *divide* n *então* $f(n)=2$ *.*

  Se $n=3k$, com k inteiro, devemos achar o número de pontos inteiros no segmento que une $(0\,,0)$ ao ponto $(3k\,,3k+3)$. Seja $(x\,,y)$ um desses pontos, então

  $$\frac{x}{y}=\frac{3k}{3k+3}=\frac{k}{k+1}.$$

Sendo a última fração irredutível, deduzimos que x é múltiplo de k, e como $0 < x < 3k$, segue que $x = k$ ou $x = 2k$. Os pontos inteiros são $(k\,, k+1)$ e $(2k\,, 2k+2)$. Assim, temos $f(n) = 2$.

2. **Trabalhando com quadrilátero** – Lembre que, num triângulo, qualquer lado é maior que a diferença e menor que a soma dos outros dois. Do triângulo ADB temos $AD - AB < BD < AD + AB$, e do triângulo CBD segue que $BC - CD < BD < BC + CD$. Sustituindo os valores conhecidos obtemos:



$$9 - 5 < BD < 5 + 9 \quad \text{e} \quad 17 - 5 < BD < 17 + 5,$$

ou seja,

$$4 < BD < 14 \quad \text{e} \quad 12 < BD < 22\,.$$

Das duas desigualdades concluímos que:

$$12 < BD < 14\,.$$

Como BD é inteiro, só podemos ter $BD = 13$.

3. **O triângulo de Reuleaux** – O triângulo de Reuleaux é formado por 4 regiões: um triângulo equilátero e três calotas. Cada calota é um sexto de um círculo de raio 1 do qual foi retirado um triângulo equilátero de lado 1.

Pelo Teorema de Pitágoras, a altura do triângulo equilátero é:

$$h = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

logo a área do triângulo vale:

$$\frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}^2.$$

A área de um setor circular é um sexto da área do círculo, ou seja, igual a $\frac{\pi}{6}$. Logo, a área da calota é a diferença:

$$\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\,.$$

Portanto, a área do triângulo de Reuleaux é

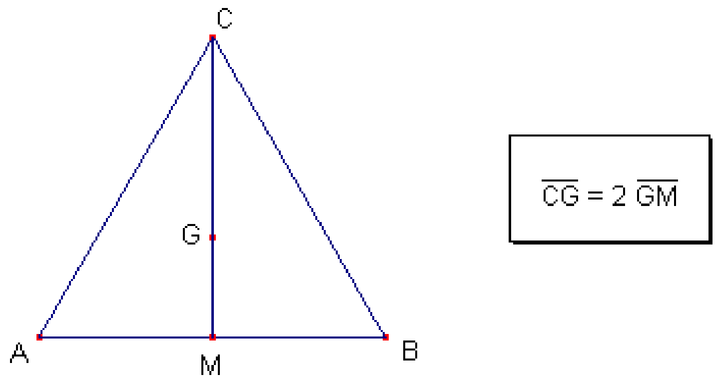
$$3\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}^2\,.$$

4. **Interseção entre circunferências** – Seja G o baricentro (encontro das medianas) do triângulo ABC. Como a figura é invariante por rotações de 60° ao redor do ponto G, temos que o triângulo $\triangle XYZ$ é equilátero, e que G também é o seu baricentro.

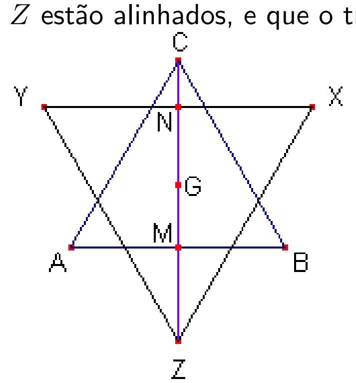
Vamos calcular o comprimento L do seu lado.

Seja CM a altura do triângulo $\triangle ABC$ em relação à base AB. Uma vez que a altura de um triângulo equilátero de lado a tem medida $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, e que o baricentro divide a altura em dois segmentos, um com o dobro do comprimento do outro, temos que:

$$CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \qquad GM = \frac{1}{3}CM = \frac{a\sqrt{3}}{6} \quad \text{e} \quad CG = \frac{2}{3}CM = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Como $AZ = BZ = r$ vemos que o ponto Z está na reta mediatriz do segmento AB. Entretanto, esta mediatriz é a reta suporte da altura CM do triângulo ABC. Isto implica que os pontos C, G, M e Z estão alinhados, e que o triângulo $\triangle MZB$ é retângulo.



Pelo Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$MZ = \sqrt{ZB^2 - MB^2} = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$$

e

$$GZ = GM + MZ = \frac{a\sqrt{3}}{6} + \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}\,.$$

Agora vamos considerar a altura NZ do triângulo XYZ em relação à sua base XY. Como esta altura tem comprimento $\dfrac{L\sqrt{3}}{2}$, e como $GZ = \dfrac{2}{3}NZ = \dfrac{L\sqrt{3}}{3}$, concluímos que

$$GZ = \frac{L\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6} + \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}\,.$$

Esta última igualdade implica que

$$L = \frac{a}{2} + \sqrt{3}\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}\,.$$

5. **Valor máximo** - Estamos procurando o valor de k para o qual é máximo o termo da sequência:

$$\frac{1^2}{1,001}\,,\ \frac{2^2}{1,001^2}\,,\ \frac{3^2}{1,001^3}\,,\ \ldots\,,\ \frac{k^2}{1,001^k}\,,\ \ldots$$

Considere as seguintes inequações equivalentes:

$$\frac{(k+1)^2}{1,001^{k+1}} < \frac{k^2}{1,001^k} \;\Leftrightarrow\; \frac{(k+1)^2}{1,001^{k+1}} - \frac{1,001k^2}{1,001^{k+1}} < 0\,.$$

A segunda inequação tem denominadores iguais e positivos, logo ela é equivalente a

$$(k+1)^2 - 1,001k^2 < 0 \;\Leftrightarrow\; k(k-2\,000) > 1\,000 \;\Leftrightarrow\; k > 2\,000\,.$$

Assim, a sequência decresce estritamente para $k \geq 2\,001$ e cresce estritamente para $k \leq 2\,000$. Logo, o maior termo da sequência corresponde a $k = 2\,001$.

Lista 9

1. **Moedas falsas –**

(a) Aladim deve retirar de cada saco um número diferente de moedas, do seguinte modo: retira uma moeda do primeiro saco, duas do segundo, três do terceiro, e assim sucessivamente, até o último saco de onde retira as dez moedas.

Ao todo foram retiradas $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$ moedas que são colocadas na balança.

Se todas essas moedas fossem verdadeiras, pesariam $55 \times 10 = 550\,\mathrm{g}$. Mas, como algumas são falsas, o peso será menor. Se faltar um grama é porque há somente uma moeda falsa e, portanto, o primeiro saco é o procurado. Se faltarem dois gramas, significa que as duas moedas falsa são do segundo saco, e assim sucessivamente.

(b) Vejamos que uma tentativa de solução como a anterior não permite a identificação dos sacos com moedas falsas. Suponhamos que Aladim retirou uma moeda do primeiro saco, duas moedas do segundo, e assim sucessivamente, até o último saco, de onde ele retirou dez moedas. Se existissem dois ou mais sacos com moedas falsas, esse procedimento de pesar estas 55 moedas pode ser inconclusivo. Por exemplo, suponhamos que na pesagem das 55 moedas faltassem 7 g, ou seja, foram pesadas 7 moedas falsas. Neste caso poderiam existir moedas falsas nos sacos 1 e 6; moedas falsas nos sacos 2 e 5; moedas falsas nos sacos 1, 2 e 4 etc. Ou seja, procedendo dessa maneira não é possível identificar quais sacos são de moedas falsas.

Para resolver esse problema, ele pode proceder do seguinte modo: retira 1 moeda do primeiro saco, 2 moedas do segundo saco, 4 moedas do terceiro saco, 8 moedas do quarto saco, 16 moedas do quinto saco etc. Sempre dobrando o número de moedas retiradas do saco anterior. Ao todo são retiradas

$$1+2+4+8+16+32+64+128+256+512=1\,023 \quad \text{moedas},$$

que pesariam juntas $10\,230$ g, se todas as moedas fossem verdadeiras. A diferença entre o peso real obtido na pesagem dessas moedas e o peso ideal ($10\,230$ gramas) indica a quantidade de moedas falsas pesadas e em quais os sacos elas estão. Vejamos isso através de um exemplo: imaginemos que na pesagem foram obtidos $10\,125\,\mathrm{g}$, ou seja, faltaram $10\,230-10\,125=105$ g, que corresponde ao número de moedas falsas. Retirando sucessivamente os números correspondentes às moedas retiradas de cada saco, começando sempre do maior número temos: $105-64=41$; $41-32=9$; $9-8=1$, ou seja, $105=1+8+32+64$. Desse resultado Aladim pode concluir que foram retiradas 1, 8, 32 e 64 moedas falsas do 1º, 4º, 6º e 7º saco.

Vamos agora justificar, de um modo mais formal, o raciocínio desenvolvido no exemplo numérico.

Seja p o peso obtido com a pesagem das $1\,023$ moedas. A diferença $10\,230-p$ é o número de moedas falsas retiradas dos sacos.

Efetuando divisões sucessivas por 2 pode-se provar que qualquer número inteiro positivo se escreve, **de maneira única**, como uma soma de potências de 2. Isso implica que

$$10\,230 - p = 1 \cdot a_0 + 2 \cdot a_1 + 2^2 \cdot a_2 + 2^3 \cdot a_3 + 2^4 \cdot a_4 + \cdots + 2^9 \cdot a_9$$

em que cada um dos números $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_9$ é zero ou um.

De cada saco foram retiradas quantidades de moedas que são potências de 2 e cada saco ou contém moedas falsas ou contém moedas verdadeiras, isto é, em um saco não existem os dois tipos de moedas. Daí temos que se algum desses números, digamos a_j é 1, então do saco $j+1$ foram retiradas 2^j moedas falsas. Por outro lado, se o número a_j é 0, então do saco $j+1$ foram retiradas 2^j moedas verdadeiras.

2. **Menor inteiro** – Como $q = 2\,005 - p$, temos

$$\frac{5}{8} < \frac{p}{2\,005 - p} < \frac{7}{8},$$

do qual segue que

$$5(2\,005 - p) < 8p \quad \text{e} \quad 8p < 7(2\,005 - p)\,.$$

Logo,

$$\frac{5 \times 2\,005}{13} < p < \frac{7 \times 2\,005}{15} \quad \Rightarrow \quad 771,15 < p < 935,66.$$

Logo 772 é o menor valor de p que satisfaz as condições do problema.

3. **Mais áreas...** – Observe que a altura h, relativa ao lado AB, de todos os triângulos ABC que têm o vértice C sobre a reta $x + y = 7$, é a mesma, pois esta última reta é paralela à reta que passa por A e por B. Logo, esses triângulos têm todos a mesma área, a saber:

$$\frac{AB \times h}{2}\,.$$

Precisamos, então determinar AB e h. Como AB é a hipotenusa de um triângulo retângulo que tem os dois catetos iguais a $7 - 4 = 3$, segue do Teorema de Pitágoras que:

$$AB = \sqrt{3^3 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\,.$$

Falta calcular h, que é a distância entre as retas paralelas. A reta $x+y = 7$ é determinada pelos pontos $C = (7, 0)$ e $D = (0, 7)$. A reta $x = y$ é perpendicular às retas paralelas acima e forma um ângulo de 45° com o eixo OY. Seja M o pé da perpendicular à reta $x + y = 7$ traçada a partir de B. Portanto, o triângulo BMC é retângulo isósceles com catetos iguais a h e hipotenusa $7 - 3 = 4$ cm.

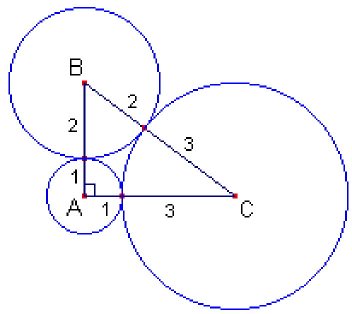
Do Teorema de Pitágoras segue que:

$$4^2 = h^2 + h^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{2}\,.$$

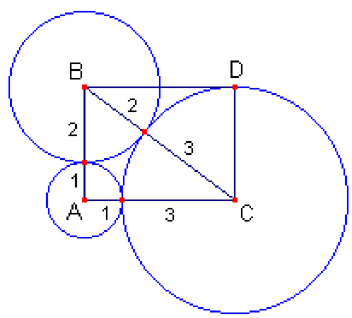
Finalmente, a área procurada é:

$$\frac{3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2} = 6\,.$$

4. **Circunferências tangentes** – Ligando os centros das três circunferências obtemos o triângulo $\triangle ABC$ de lados $AB = 3\,\text{cm}$, $AC = 4\,\text{cm}$ e $BC = 5\,\text{cm}$. Como $3^2 + 4^2 = 5^2$, esse triângulo é retângulo, com hipotenusa BC.

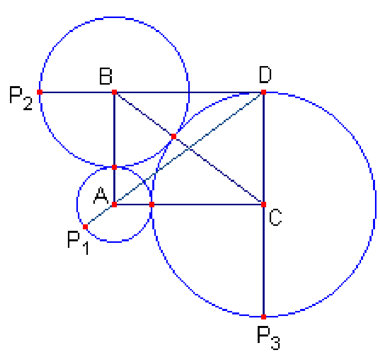


Construa o retângulo $ABDC$, fazendo uma cópia $\triangle BCD$, congruente ao triângulo $\triangle ABC$ e com lado comum BC.



Uma vez que $DC = AB = 3$ e que a circunferência de centro C também tem raio $3\,\text{cm}$, vemos que o ponto D está sobre essa circunferência.

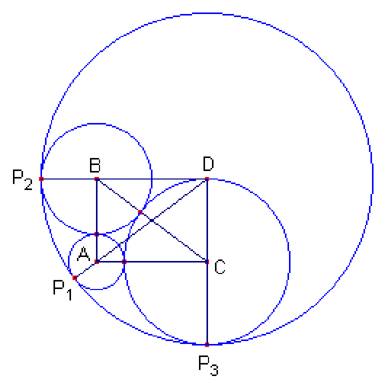
Ligando o ponto D a cada um dos vértices do triângulo $\triangle ABC$ e prolongando esses segmentos até interceptarem as circunferências, obtemos os pontos P_1, P_2 e P_3.



Temos que:

- $DP_2 = DB + BP_2 = CA + BP_2 = 4 + 2 = 6.$
- $DP_1 = DA + AP_1 = 5 + 1 = 6.$
- $DP_3 = DC + CP_3 = 3 + 3 = 6.$

Deste modo $DP_1 = DP_2 = DP_3 = 6$. Assim se considerarmos a circunferência de centro D e raio 6 cm vemos que esta circunferência passa por P_1, P_2 e P_3. Além disso, como os pontos $\{D, A, P_1\}$, $\{D, B, P_2\}$ e $\{D, C, P_3\}$ estão alinhados, segue que a circunferência de centro D e raio 6 cm é tangente às três circunferências dadas de centros A, B e C.



5. **Soma finita** – Temos que os possíveis produtos $x_{2k-1}x_{2k}$ onde $k \in \{1, 2, ..., 2\,004\}$ são $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1) = 3 - 2\sqrt{2}$, $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1) = 3 + 2\sqrt{2}$ e $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$.

   Suponha que a produtos são iguais a $3 - 2\sqrt{2}$, b produtos são iguais a $3 + 2\sqrt{2}$ e $1\,002 - a - b$ produtos são iguais a 1.

   A soma é igual a

$$a(3 - 2\sqrt{2}) + b(3 + 2\sqrt{2}) + 1\,002 - a - b = 1\,002 + 2a + 2b + 2(b - a)\sqrt{2}\,.$$

   Assim, para que a soma seja inteira, devemos ter $a = b$. Logo a soma é igual a $1\,002 + 4a$.

   Como a varia de 0 a 501 (pois $a + b$ não pode ser maior que $1\,002$), a soma pode assumir 502 valores inteiros distintos.

Lista 10

1. **Múltiplos** – As condições do problema equivalem a dizer que:

$$2a-5=2(a+1)-7=2(a+2)-9=2(a+3)-11,$$

é múltiplo de 5, 7, 9 e 11, donde é múltiplo de $5\cdot 7\cdot 9\cdot 11=3\,465$. Assim, o menor valor de a é tal que $2a-5=3\,465$, ou seja, $a=1\,735$.

2. **Equação de duas variáveis** – Temos:

$$\begin{aligned} 9xy-x^2-8y^2=2\,005 &\Leftrightarrow xy-x^2+8xy-8y^2=2\,005\\ &\Leftrightarrow x(y-x)+8y(x-y)=2\,005\\ &\Leftrightarrow (x-y)(8y-x)=2\,005(*). \end{aligned}$$

Observemos que a fatoração em primos de 2005 é $5\cdot 401$.

Além disso, a soma dos fatores $x-y$ e $8y-x$ é $7y$, que é múltiplo de 7. Devemos então escrever 2005 como produto de dois fatores, cuja soma é um múltiplo de 7. Para isso, os fatores devem ser ± 5 e ± 401. A soma dos fatores é ± 406.

Assim, por $(*)$ temos:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-y=5 & \text{e} & 8y-x=401\\ & \text{ou} & \\ x-y=401 & \text{e} & 8y-x=5\\ & \text{ou} & \\ x-y=-5 & \text{e} & 8y-x=-401\\ & \text{ou} & \\ x-y=-401 & \text{e} & 8y-x=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x=63 & \text{e} & y=58\\ & \text{ou} & \\ x=459 & \text{e} & y=58\\ & \text{ou} & \\ x=-63 & \text{e} & y=-58\\ & \text{ou} & \\ x=-459 & \text{e} & y=-58 \end{array}\right.$$

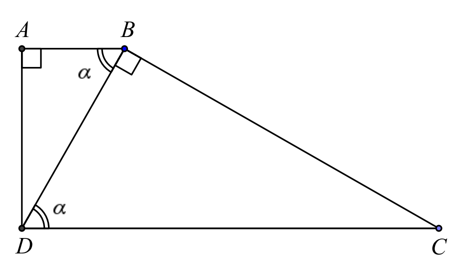
As soluções são, portanto $(63\,,58)$, $(459\,,58)$, $(-63\,,-58)$ e $(-459\,,-58)$.

3. **Trapézio retângulo** –

Seja $A\widehat{B}D=B\widehat{D}C=\alpha$. Então temos que $DC=\dfrac{BD}{\cos\alpha}$ e $AD=BD\operatorname{sen}\alpha$, donde

$$\frac{DC}{AD}=\frac{\dfrac{BD}{\cos\alpha}}{BD\operatorname{sen}\alpha}=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}=\frac{2}{\operatorname{sen}2\alpha}\geq 2\,.$$

A igualdade ocorre quando $\operatorname{sen}2\alpha=1$, ou seja, quando $\alpha=45^0$.



4. **Jogos de futebol** – Para cada grupo de 5 alunos, existe um único time formado que os contém. Logo, contamos $C_{12}^{5} = \dfrac{12.11.10.9.8}{5!} = 792$ times para cada 5 alunos escolhidos. Por outro lado, em cada time de 6 jogadores, temos $C_6^5 = 6$ modos de escolhermos cinco jogadores, ou seja, existem 6 grupos de 5 jogadores que eram mesmo time na nossa primeira contagem. Logo, o total de times formados é igual a $\dfrac{792}{6} = 132$.

5. **A soma dos algarismos de um número** –

(a) Observe esses dois exemplos:

$$\underbrace{2\,000}_{2\cdot 103} - \underbrace{s(2\,000)}_{2} = 1\,998 \quad , \quad \underbrace{60\,000}_{6\cdot 104} - \underbrace{s(60\,000)}_{6} = 59\,994\,.$$

A partir deles é fácil entender que se a é um algarismos entre 1 e 9, então $s(a\cdot 10^k) = a$. Daí temos:

$$a\cdot 10^k - s(a\cdot 10^k) = a\cdot 10^k - a = a(10^k - 1) = a \times \underbrace{9\cdots 9}_{k \text{ noves}} = a \times 9 \times \underbrace{1\cdots 1}_{k \text{ uns}}\,.$$

Como todo número pode ser decomposto em unidades, dezenas, centenas etc, isto é, todo número pode ser escrito na forma:

$$n = a_0 + a_1\cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_k \cdot 10^k,$$

temos que

$$n - s(n) = a_1 \times 9 + a_2 \times 99 + \cdots a_k \times \underbrace{9\cdots 9}_{k \text{ noves}}\,.$$

Logo, a diferença $n - s(n)$ é sempre divisível por 9.

(b) Seguindo o mesmo raciocínio temos que: $s(n) - s(s(n))$ e $s(s(n)) - s(s(s(n)))$ são divisíveis por 9, logo $n - s(s(s(n)$ é divisível por 9. Em particular $2^{2\,009} - s(s(s(2^{2\,009})))$ é divisível por 9, ou equivalentemente, $2^{2\,009}$ e $s(s(s(2^{2\,009})))$ deixam o mesmo resto quando são divididos por 9.

Como $2^6 - 1 = 63$ é divisível por 9 então, $(2^6)^{334} - 1 = 2^{2\,004} - 1$ é divisível por 9 e, portanto, $2^{2\,009} - 2^5$ é divisível por 9. Como $2^5 = 32$ deixa resto 5 quando dividido por 9, temos que $2^{2\,009}$ deixa resto 5 quando dividido por 9.

Por outro lado

$$2^{2\,009} < (2^9)^{224} < (10^3)^{224} = 10^{672}.$$

Assim, $2^{2\,009}$ tem menos que 672 algarismos e, portanto,

$$\begin{aligned} s(2^{2\,009}) &< 9 \times 672 = 6\,048; \\ s(s(2^{2\,009})) &\leq 5 + 9 + 9 + 9 = 32; \\ s(s(s(2^{2\,009}))) &\leq 2 + 9 = 13\,. \end{aligned}$$

Como o único número menor ou igual a 13 que deixa resto 5 quando dividido por 9 é o 5 temos que $s(s(s(2^{2\,009}))) = 5$.

Soluções dos Desafios

1. **Data fatídica** – Resposta: 17.06.2345

2. **Todos com o 2** – Resposta: multiplicar por 3.

3. **Tortas da vovó** – Vamos examinar cada uma das situações propostas. Lembre que no final vovó recebeu $7 + 6 + 3 - 2 = 14$ docinhos.

   (A) Impossível porque ela recebeu no mínimo $3 - 2 = 1$ docinho de chocolate.
   (B) Impossível porque ela recebeu no mínimo $6 - 2 = 4$ docinhos de côco.
   (C) Impossível porque $7 - 2 = 5 > 3$.
   (D) Possível porque Sofia pode ter comido 1 docinho de amora e 1 de chocolate, restando para vovó: 6 de amora, 6 de côco e 2 de chocolate.
   (E) Impossível porque 7 não é maior do que $6 + 2 - 3$.

   Logo, a única situação possível é (D).

4. **Família Sétimo** – Os nascimentos ocorreram em seis 1º de abril, logo existem irmãos gêmeos. Como nesse ano temos 2 bolos a mais que há 2 anos atrás, então há 2 anos atrás o mais jovem ainda não tinha nascido, o penúltimo filho tinha acabado de nascer, e os gêmeos já tinham nascido. Atualmente o mais jovem tem 1 ano e os gêmeos têm x anos com $x \geq 3$. Temos:

$$\underbrace{1+2+3+4+5+6+x}_{\text{número de velas nesse ano}} = 2 \times \underbrace{(1+2+3+4+x-2)}_{\text{número de velas 2 anos atrás}} \Rightarrow x = 5\,.$$

   Logo serão acesas $1 + 2 + 3 + 4 + 2 \times 5 + 6 = 26$ velinhas.

5. **O Salta-Ficha** –

   (a) ficha 7 salta sobre as fichas 8 e 9 formando uma pilha com a ficha 10;
   (b) ficha 4 salta sobre as fichas 5 e 6 formando uma pilha com a ficha 8;
   (c) ficha 6 salta sobre as fichas 3 e 5 formando uma pilha com a ficha 2;
   (d) ficha 5 salta sobre a pilha (4 , 8) formando uma pilha com a ficha 9;
   (e) ficha 1 salta sobre a pilha (6 , 2) formando uma pilha com a ficha 3.

   Veja o resultado:

   6 1 4 5 7
   2 3 8 9 10

6. **O menor** – Como $5^2 = 3^2 + 4^2$, temos $5^{2\,002} = (3^2 + 4^2)^{1\,001}$. Sabemos que para $a > 0$ e $b > 0$,

$$(a+b)^{1\,001} > a^{1\,001} + b^{1\,001}\,.$$

   Logo, $5^{2\,002} > 3^{2\,002} + 4^{2\,002}$.

7. **O maior resultado** – Estamos procurando o maior valor de $\frac{10a+b}{a+b}$, onde a e b representam algarismos, pelo menos um diferente de 0. Temos

$$\frac{10a+b}{a+b}=\frac{10a+10b-9b}{a+b}=\frac{10a+10b}{a+b}-\frac{9b}{a+b}=10-\frac{9b}{a+b}\leq 10\,.$$

Logo, se conseguirmos encontrar a e b tais que $\frac{10a+b}{a+b}=10$, teremos o maior resultado. Note que isso ocorre quando $b=0$, ou seja:

$$\frac{10}{1}=\frac{20}{2}=\frac{30}{3}=\frac{40}{4}=\frac{50}{5}=\frac{60}{6}=\frac{70}{7}=\frac{80}{8}=\frac{90}{9}=10\,.$$

Logo, a resposta é 10.

8. **Dois mil** – Observe que os números 189, $8\,307$ e 99 têm todos peso 18, e que 99 é o menor número que pesa 18. Note que: para aumentar o peso de um número e minimizar o número é preciso que o número seja composto do maior número possível de algarismos 9. Por outro lado, podemos dizer que o 0 está eliminado dos algarismos a ser considerados porque ele aumenta o número sem aumentar o peso.

Temos que $2\,000=9\times 222+2$. Logo, o número procurado tem então 222 algarismos 9, e um algarismo 2 ou dois algarismos 1. Eliminamos o caso dos números com dois algarismos 1 porque eles têm 224 algarismos, e logo são maiores do que os números que possuem o algarismo 2 e têm 223 algarismos. Finalmente, o número procurado tem 222 algarismos 9 e um 2. Logo esse número é $299\ldots999$, com 222 algarismos 9.

9. **No cabeleireiro** – Seja x o montante inicial no caixa. Esse montante mais o que os 3 clientes pagaram nos dará o caixa zerado.

- O 1º cliente paga $x-10$. Depois do primeiro cliente, há $x+x-10=2x-10$ reais no caixa.
- O 2º cliente paga $(2x-10)-10=2x-20$. Depois do 2º cliente, há $(2x-10)+(2x-20)=4x-30$ no caixa.
- O 3º cliente paga $(4x-30)-10=4x-40$. Depois do 3º cliente, há $(4x-30)+(4x-40)=8x-70$ no caixa, que sabemos ser igual a 0.

Logo, $8x=70$ e obtemos $x=8,75$ reais.

10. **O macaco e a raposa** – $2\,450$ é o produto dos números primos $1,2,5,5,7,7$. As 3 idades correspondem a uma combinação particular desses números ou de seus produtos.

A raposa não pode descobrir as idades no início porque pelo menos duas dessas combinações têm por soma o dobro de sua idade. De todas as combinações possíveis, somente {5, 10 49} e {7, 7, 50} têm a mesma soma 64.

Primeira conclusão: a raposa tem 32 anos.

Depois da nova dica do macaco, a raposa descobriu as idades porque pode eliminar uma combinação: aquela que contém dois números iguais, uma vez que um deles é o mais jovem de todos.

Segunda conclusão: as pessoas têm 5, 10 e 49 anos.

11. **Nova sequência** – Cada termo é a soma do termo precedente com os quadrados de cada um de seus algarismos:

$$470 = 425 + 4^2 + 2^2 + 5^2\,,\ 535 = 470 + 4^2 + 7^2 + 0^2\,,\ \ldots$$

Assim, os próximos termos são: 870 e 983.

12. **Retângulo quase quadrado** – A área é um número da forma $aabb$, onde a e b representam algarismos; agora lembre que

$$aabb = 1\,100a + 11b = 11(100a + b)\,.$$

Seja x a largura do terreno, logo

$$x(x+1) = 11(100a+b) \quad \text{(I)},$$

e deduzimos que x ou $x+1$ é um múltiplo de 11. Procurar múltiplos de 11 que satisfaçam a condição (I) é bastante trabalhoso, por isso, para simplificar, vamos estabelecer quais os valores que x pode ter. Vamos procurar os valores mínimo e máximo para x:

- Mínimo: a menor área possível é 1111, logo $x(x+1) = 1\,111 \Rightarrow x > 32$ (II).
- Máximo: a maior área possível é 9999, logo $x(x+1) = 9\,999 \Rightarrow x < 100$ (III).

Agora procuramos x e $x+1$ satisfazendo (I), (II) e (III).

$$\begin{array}{l} 33\times 34 = 1\,122\,;\ 43\times 44 = 1\,892\,;\ 44\times 45 = 1\,980\,;\ 54\times 55 = 2\,970\,;\ 55\times 56 = 2\,970\,; \\ 65\times 66 = 4\,290\,;\ 66\times 67 = 4\,422\,;\ 76\times 77 = 5\,852\,;\ 77\times 78 = 6\,006\,; \\ 87\times 88 = 7\,656\,;\ 88\times 89 = 7\,832\,;\ 99\times 100 = 9\,900\,. \end{array}$$

Encontramos 3 possibilidades para x: 33, 66 e 99.

13. **Aonde está o erro?** – Esse deixamos para os alunos!

Anotações