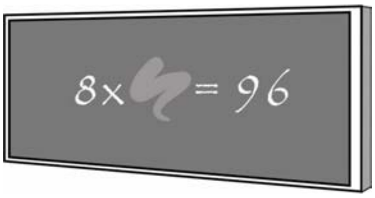
NÍVEL 1

1ª Lista

1) Quando Joana entrou em sua sala de aula, a professora estava apagando o quadro negro, mas ela ainda pôde ver algo escrito, conforme mostra a figura. Qual é o número que foi apagado?



A) 8
B) 9
C) 11
D) 12
E) 13

2) Numa papelaria, pacotes com 500 folhas de papel, cada um, são armazenados em pilhas de 60 pacotes. Cada folha de papel tem espessura de $0{,}1\,mm$. Ignorando a espessura do papel utilizado para embrulhar os pacotes, o que podemos afirmar sobre a altura de uma pilha?

A) É aproximadamente a sua altura.
B) É aproximadamente a altura de um bebê de um ano.
C) É aproximadamente a altura de uma mesa comum.
D) É aproximadamente a altura de um prédio de dez andares.
E) É aproximadamente a altura de uma sala de aula.

3) Considere dois números naturais, cada um deles com três algarismos diferentes. O maior deles só tem algarismos pares e o menor só tem algarismos ímpares. Se a diferença entre eles é a maior possível, qual é essa diferença?

A) 997 B) 777 C) 507 D) 531 E) 729

4) Uma farmácia dá desconto de 30%, sobre o preço de tabela, em todos os medicamentos que vende. Ao adquirir um remédio cujo preço de tabela é 120 reais, quanto uma pessoa irá pagar com esse desconto?

A) 36 reais B) 84 reais C) 64 reais D) mais de 116 reais E) 94 reais

5) Quatro cidades *A*, *B*, *C* e *D*, foram construídas à beira de uma rodovia reta, conforme a ilustração abaixo:

$A \qquad B \qquad C \qquad D$

A distância entre *A* e *C* é de $50\,km$ e a distância entre *B* e *D* é de $45\,km$. Além disso, sabe-se que a distância entre a primeira e a última é de $80\,km$. Qual é a distância entre as cidades *B* e *C*?

A) $15\,km$ B) $20\,km$ C) $25\,km$ D) $5\,km$ E) $10\,km$

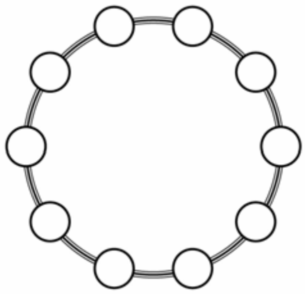
6) Na tabela a seguir vemos o consumo mensal de água de uma família, durante os 5 primeiros meses de 2004.

Meses	*Consumo (m^3)*
Janeiro	12,5
Fevereiro	13,8
Março	13,7
Abril	11,4
Maio	12,1

Qual é o consumo médio mensal dessa família de janeiro a maio?

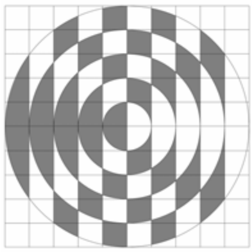
A) $11,3\,m^3$
B) $11,7\,m^3$
C) $12,7\,m^3$
D) $63,5\,m^3$
E) $317,5\,m^3$

7) Escreva os números de 0 a 9 nos círculos ao lado, de forma que eles cresçam no sentido anti-horário. Em seguida, subtraia 1 dos números ímpares e some 1 aos números pares. Escolhendo três círculos consecutivos, qual é a maior soma que se pode obter?



A) 19 B) 21 C) 23 D) 24 E) 25

8) Na malha quadriculada a seguir, todas as circunferências têm o mesmo centro. Então, pode-se concluir que a área cinza é:



A) Dois quintos da área do círculo maior.
B) Três sétimos da área do círculo maior.
C) Metade da área do círculo maior.
D) Quatro sétimos da área do círculo maior.
E) Três quintos da área do círculo maior

9) A prefeitura de uma certa cidade fez uma campanha que permite trocar 4 garrafas de 1 litro vazias por uma garrafa de 1 litro cheia de leite. Quantos litros de leite pode obter uma pessoa que possua 43 dessas garrafas vazias fazendo várias trocas?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

10) Ester vai a uma papelaria para comprar cadernos e canetas. Nesta papelaria os cadernos custam R$ 6,00 cada um. Se ela comprar 3 cadernos, sobram R$ 4,00. Se o seu irmão lhe emprestar R$ 4,00, com o total ela conseguirá comprar 2 cadernos e outras 7 canetas iguais.

a) Quanto custa cada caneta?
b) Se ela comprar 2 cadernos e não pedir dinheiro emprestado, quantas das canetas acima Ester poderá comprar?

1. **(D) Solução 1 -** Como $96 \div 8 = 12$, temos $8 \times 12 = 96$.
   Observe que a solução é equivalente a resolver a equação $8x = 96$, cuja raiz é $x = \frac{96}{8} = 12$.

   Solução 2 - Devemos encontrar na lista de cinco opções qual é o número que multiplicado por 8 dá 96. O algarismo das unidades deste número só pode ser 2 ou 7.
   Logo, só pode ser o número 12.

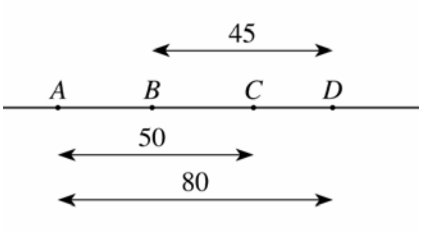
2. **(E)** Como a espessura de cada folha é $0{,}1\,mm$, a altura de um pacote com 500 folhas é $500 \times 0{,}1\,mm = 50\,mm$. Logo, a altura de cada pilha será $60 \times 50mm = 3000mm = 3m$.

3. **(E)** Para que a diferença seja a maior possível devemos escolher o maior número de 3 algarismos pares diferentes e o menor número de 3 algarismos ímpares diferentes. O maior número de 3 algarismos pares diferentes é 864 e o menor número de 3 algarismos ímpares diferentes é 135. A diferença entre eles é $864 - 135 = 729$.

4. **(B) Solução 1 -** A pessoa irá pagar 120 reais menos o desconto que é de 30 % sobre 120. Ou seja:
   $120 - 0{,}3 \times 120 = 120 - 36 = 84$ reais.

   Solução 2- Podemos também resolver este problema notando que se o desconto é de 30 % então o preço que a pessoa pagará é 70 % de 120, ou seja: $0{,}7 \times 120 = 84$ reais.

5. **(A) Solução 1 -** Temos $CD = 80 - 50 = 30$ e $AB = 80 - 45 = 35$. Logo $BC = 80 - 35 - 30 = 15$.



Solução 2 -

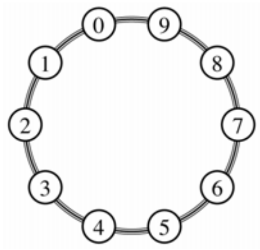
Do enunciado temos: $AC = 50$, $BD = 45$ e $AD = 80$. Da figura segue que $BC = AC - AB$, logo $BC = 50 - AB$.
Logo, basta calcular AB. Para isso, note na figura que $AB = AD - BD$, e portanto, $AB = 80 - 45 = 35$.
Finalmente, $BC = 50 - 35 = 15\,km$.

Solução 3 – Da figura temos que $45 - BC = 80 - 50$. Logo, $BC = 15\,km$.

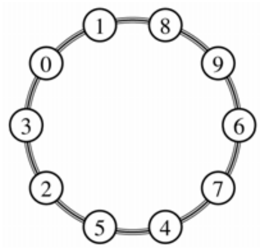
6. **(C)** Lembre que a *média aritmética* de *n* números é a soma desses números dividido por *n*. Por exemplo: a média aritmética dos números 3, 6, 8 e 26 é $\frac{3+6+8+26}{4} = \frac{43}{4} = 10{,}75$.

Analogamente, define-se o consumo mensal médio como a razão entre a soma dos consumos mensais e o número de meses. Logo, o consumo mensal médio é igual a $\frac{12{,}5+13{,}8+13{,}7+11{,}4+12{,}1}{5} = 12{,}7\ m^3$.

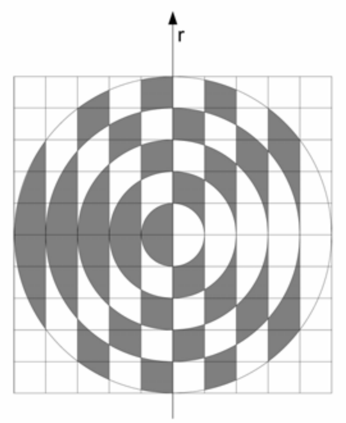
7. **(C)** A partir de qualquer círculo, obtemos inicialmente a seqüência 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;



Subtraindo 1 dos ímpares e somando 1 aos pares, a seqüência torna-se 1, 0, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 9, 8. Agora é fácil verificar que a maior soma possível com 3 números consecutivos é $6+9+8=23$.



8. **(C)** Observe que a figura é simétrica em relação à reta r que passa pelo centro comum das circunferências. Para cada região cinza de um lado de r existe uma região branca equivalente do outro lado de r, e vice-versa. Logo, a área cinza é igual à área branca. Além disso, a soma dessas duas áreas é igual à área do círculo maior. Portanto, a área cinza é metade da área do círculo maior.



9. **(D)** Como $43=10\times4+3$, numa primeira vez, as 43 garrafas vazias podem ser trocadas por 10 garrafas cheias, sobrando ainda 3 vazias. Agora, consumindo o leite dessas 10 garrafas, ficamos com 13 vazias, $13=4\times3+1$, que podem ser trocadas desta vez por 3 cheias, sobrando 1 vazia. Finalmente, consumindo o leite das 3 garrafas cheias, sobram 4 vazias, que podem ser trocadas por 1 cheia. Portanto, o total de garrafas cheias de leite que podem ser obtidas é $10+3+1=14$.

10. Comprando 3 cadernos por 6 reais cada um ainda sobram 4 reais para Ester, logo, a quantia que ela possui é:

$$3\times6+4=22 \text{ reais.}$$

(a) Se o irmão lhe empresta 4 reais, ela fica então com $22+4=26$ reais. Conforme dados do problema, com 26 reais, Ester pode comprar 2 cadernos a 6 reais cada um e 7 canetas. Portanto, o preço das 7 canetas é $26-2\times6=26-12=14$ reais. Concluímos que o preço de cada caneta é $14\div7=2$ reais.

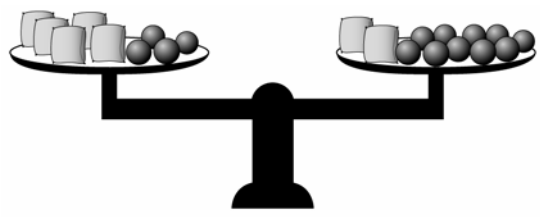
(b) Como Ester tinha 22 reais, se ela comprar 2 cadernos, sobram-lhe ainda $22-2\times6=22-12=10$ reais. Como cada caneta custa 2 reais, ela poderá comprar $10\div2=5$ canetas.

NÍVEL 1
2ª Lista

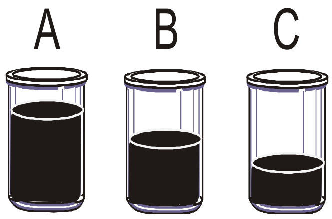
1) Um pedreiro é capaz de assentar 8 metros de muro por dia. Quantos metros de muro esse pedreiro consegue assentar em 15 dias?

A) 104 B) 110 C) 120 D) 128 E) 112

2) A balança da figura está em equilíbrio com bolas e saquinhos de areia em cada um de seus pratos. As bolas são todas iguais e os saquinhos também. O peso de um saquinho de areia é igual ao peso de quantas bolas?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

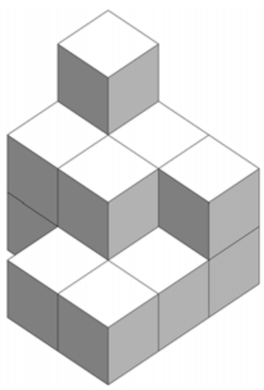


3) Três frascos, todos com capacidade igual a um litro, contêm quantidades diferentes de um mesmo líquido, conforme ilustração ao lado. Qual das alternativas abaixo melhor expressa, aproximadamente, o volume de líquido contido nos frascos A, B e C, nesta ordem?

A) $\frac{3}{7};\frac{4}{9};\frac{2}{5}$ B) $\frac{2}{3};\frac{1}{2};\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{3};\frac{4}{6};\frac{2}{4}$ D) $\frac{2}{3};\frac{4}{7};\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{3};\frac{4}{5};\frac{2}{3}$

4) Um litro de álcool custa R\$$0,75$. O carro de Maria percorre $25\,km$ com 3 litros de álcool.Quantos reais Maria gastará com álcool para percorrer $600\,km$?

A) 54 B) 72 C) 50 D) 52 E) 45



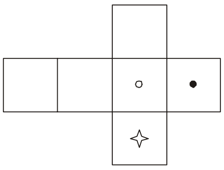
5) Num armazém foram empilhadas algumas caixas que formaram o monte mostrado na figura. Se cada caixa pesa $25\,kg$ quanto pesa o monte com todas as caixas?

A) $300\,kg$ B) $325\,kg$ C) $350\,kg$ D) $375\,kg$ E) $400\,kg$

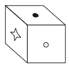
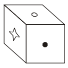
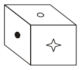
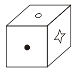
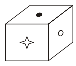
6) Um livro de 100 páginas tem suas páginas numeradas de 1 a 100. Quantas folhas desse livro possuem o algarismo 5 em sua numeração?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

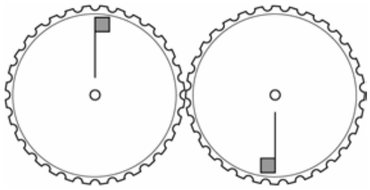
7) A figura abaixo foi desenhada em cartolina e dobrada de modo a formar um cubo.



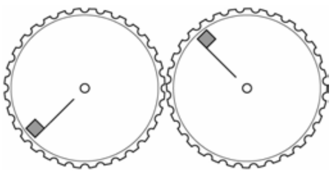
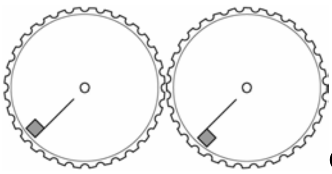
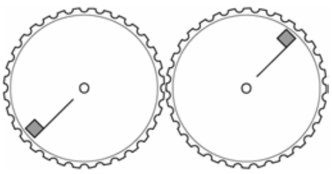
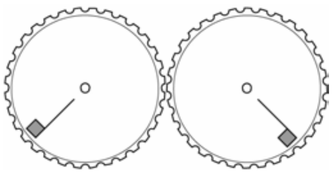
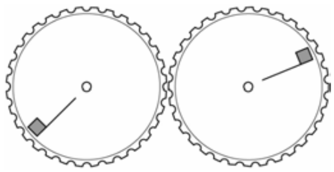
Qual das alternativas mostra o cubo assim formado?

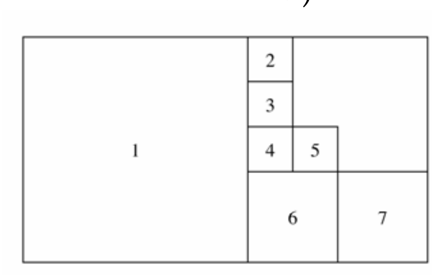
A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

8) José colou uma bandeirinha em cada um dos dois discos dentados que formam uma engrenagem, como mostra a figura ao lado:



Os dois discos são exatamente iguais. José girou a engrenagem, e é claro que as bandeirinhas mudaram de posição. Qual é a nova posição das duas bandeirinhas?

A) 
B) 
C) 
D) 
E) 



9) O desenho ao lado é a planta de uma casa, cujo piso é retangular, e no qual estão desenhados 7 quadrados – numerados de 1 a 7 na figura. Se a área do menor desses quadrados é 1m^2, a área total do piso, em metros quadrados, é igual a:

A) 42 B) 44 C) 45 D) 48 E) 49

10) O número da casa de Júlia tem exatamente três algarismos, cuja soma é 24. Encontre todos os possíveis números da casa de Júlia, em cada uma das situações a seguir:

a) Os três algarismos são iguais.
b) Os algarismos são todos diferentes.
c) Apenas dois algarismos são iguais.

1.**(C)** Se o pedreiro assenta 8 metros por dia, em 15 dias assentará $15\times 8=120$.

2. **(B)** Retirando-se dois saquinhos e quatro bolas de cada prato, a balança continua equilibrada, e restam 3 saquinhos no prato à esquerda e 6 bolas no prato da direita. Logo:

peso de 3 saquinhos = peso de 6 bolas.

Daí, concluímos que o peso de 1 saquinho é igual ao peso de 2 bolas.
Esta solução corresponde a explicitar x em função de y na equação $5x+4y=2x+10y$, onde x representa o peso de um saquinho e y o de uma bola. Desta equação segue que:

$$5x-2x=10y-4y \Rightarrow 3x=6y \Rightarrow x=2y.$$

3. **(B) Solução 1 -** As figuras mostram que os volumes ocupados pelos líquidos correspondem, aproximadamente a mais da metade no frasco A, a metade no frasco B e menos da metade no frasco C.

O único grupo de frações que corresponde a essas estimativas é:

$$\frac{2}{3}(\text{mais que a metade}); \frac{1}{2}(\text{metade}); \frac{1}{4}(\text{menos que a metade}).$$

Solução 2 – As figuras mostram que os volumes ocupados pelos líquidos são números decrescentes. As únicas opções possíveis são B e E. Como $\frac{3}{3}=1$ e nenhum frasco está cheio, a resposta é B.

4. **(A) Solução 1 -** Se num percurso de $25\,km$ ela gasta 3 litros, então para percorrer $100\,km$, Maria gastará $4\times 3=12$ litros. Portanto, para percorrer $600\,km$ o carro gastará $6\times 12=72$ litros. Como cada litro custa $0,75$ reais, então 72 litros custarão $0,75\times 72=54$ reais.

Solução 2 - Observe que podemos usar a Regra de Três para calcular quantos litros são gastos em $600\,km$:

3 litros	———	$25\,km$
x litros	———	$600\,km$

Como esta regra de três é direta temos: $25x=3\times 600 \Rightarrow x=3\times\frac{600}{5}=72$ litros.

Solução 3 - Como $600=25\times 24$, temos que o carro gastará $24\times 3=72$ litros.

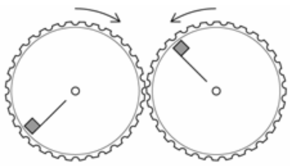
5. **(C)** Na figura, vemos: 1 coluna com 3 caixas, 4 colunas com 2 caixas e 3 colunas com uma caixa. Logo, o total de caixas é $1\times3+4\times2+3\times1=14$. Como cada caixa pesa $25kg$, o peso do monte de caixas é $14\times25=350$ kg.

6. **(C)** O algarismo 5 aparece nos números $5, 15, 25, 35, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 65, 75, 85$ e 95. Agora, como o livro é numerado de 1 a 100, a 1ª folha contém as páginas 1 e 2, a 2ª folha as páginas 3 e 4, a 3ª folha as páginas 5 e 6, e assim sucessivamente. Ou seja, as duas páginas que compõem cada folha têm a seguinte numeração: um número ímpar e o número par consecutivo.

$$1,2;\ \underbrace{3,4};\ldots;\ \underbrace{47,48};\ \underbrace{49,50};\ \underbrace{51,52};\ldots;\ \underbrace{59,60};\ \ldots;\underbrace{95,96};\ \underbrace{97,98};\ \underbrace{99,100}.$$

Assim, estão numa mesma folha as seguintes duplas de números: $\underbrace{49,50}$; $\underbrace{51,52}$; $\underbrace{53,54}$; $\underbrace{55,56}$; $\underbrace{57,58}$; $\underbrace{59,60}$. Logo, neste grupo temos 6 folhas. Por outro lado, de 1 a 48 temos 5 folhas com o algarismo 5, e de 61 a 100, 4 folhas. Portanto, o total de folhas contendo o algarismo 5 em sua numeração é: $6+5+4=15$.

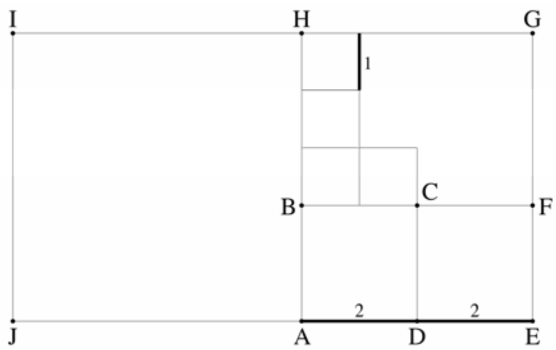
7. **(B)** As opções A e E; C e D são iguais entre si e distintas de (B).



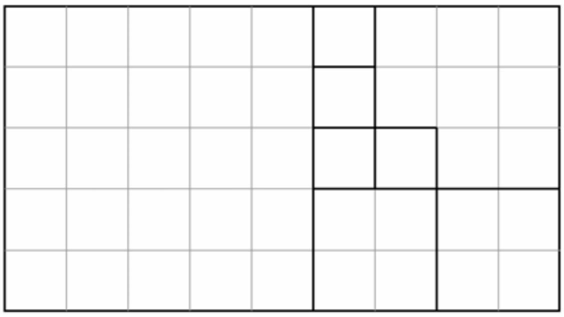
8. **(A)** A engrenagem desta questão é formada por dois discos dentados. Quando um deles gira no sentido horário, o outro gira no sentido anti-horário.

As 5 opções de resposta mostram a bandeira do disco à esquerda numa posição, que corresponde a uma rotação deste disco no sentido horário de um certo ângulo. Nesse caso, a engrenagem direita girou desse mesmo ângulo no sentido anti-horário, levando a bandeirinha para a posição indicada na primeira alternativa.

9. **(C) Solução 1 -** Como os quadrados menores têm $1m^2$ de área, cada um deles tem lado igual a $1m$. Da figura concluímos que $BC=2m$ e $BH=3m$.



Como $ABCD$ é um quadrado segue que $BC=CD=AD=AB=2m$. Sendo $CDEF$ também um quadrado, temos $CD=DE=2m$. Novamente da figura temos: $AH=AB+BH=2+3=5$, $JE=JA+AD+DE$ e $JA=AH$. Segue que $JE=5+2+2=9$. Como $EG=AH=5$, as dimensões do terreno são $9m$ de comprimento por $5m$ de largura. Portanto, a sua área é $9m\times5m=45m^2$.



Solução 2 - Quadriculando o retângulo maior com quadrados de $1m^2$ de área, obtemos um retângulo ($BFGH$) formado por 12 quadrados de $1m^2$ de área, dois quadrados ($ABCD$ e $DCFE$) formados por 4 quadrados cada um de $1m^2$ de área, e um quadrado ($AHIJ$) formado por 25 quadrados de $1m^2$ de área. Portanto, a área pedida é $12+4+4+25=45\ m^2$.

10. Nesta questão, o número 24 deve ser escrito como uma soma de 3 algarismos. Inicialmente, note que os algarismos $0, 1, 2, 3, 4$ e 5 não podem ser usados. Se um deles fosse usado, por exemplo o algarismo 5, então teríamos que encontrar dois algarismos cuja soma é 19, pois $24-5=19$. Sabemos que isso não é possível. O mesmo ocorre com os algarismos $0, 1, 2, 3$ e 4. Logo, o número da casa de Júlia só pode ser composto pelos algarismos $6, 7, 8$ e 9.

a) Se os três algarismos são iguais então o número da casa é 888.
b) Se os três algarismos são diferentes, temos apenas as seguintes alternativas:
Iniciando com o algarismo 9: 987 e 978
Iniciando com o algarismo 8: 897 e 879
Iniciando com o algarismo 7: 798 e 789

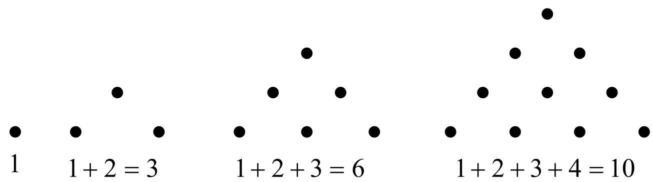
Note que neste item o número da casa não pode iniciar com o algarismo 6, pois $24-6=18$, e a única maneira de escrever 18 como soma de dois algarismos é $9+9$, o que daria um número com dois algarismos iguais.

c) Com apenas dois algarismos iguais temos 3 números: $996, 699$ e 969.

1) O famoso matemático grego Pitágoras chamou de *números triangulares* os números obtidos pela soma dos primeiros números inteiros maiores que 0. Por exemplo, 1, 3 , 6 e 10 são números triangulares:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3 &= 1 + 2 \\ 6 &= 1 + 2 + 3 \\ 10 &= 1 + 2 + 3 + 4 \end{aligned}$$

A figura ilustra a motivação para o nome *números triangulares*.



A seqüência de números triangulares continua com $1+2+3+4+5=15$, $1+2+3+4+5+6=21$, etc. Quantos são os números triangulares menores do que 100?

2) Uma bibliotecária recebe 130 livros de Matemática e 195 livros de Português. Ela quer arrumá-los em estantes, colocando igual quantidade de livros em cada estante, sem misturar livros de Matemática e de Português na mesma estante. Quantos livros ela deve colocar em cada estante para que o número de estantes utilizadas seja o menor possível?

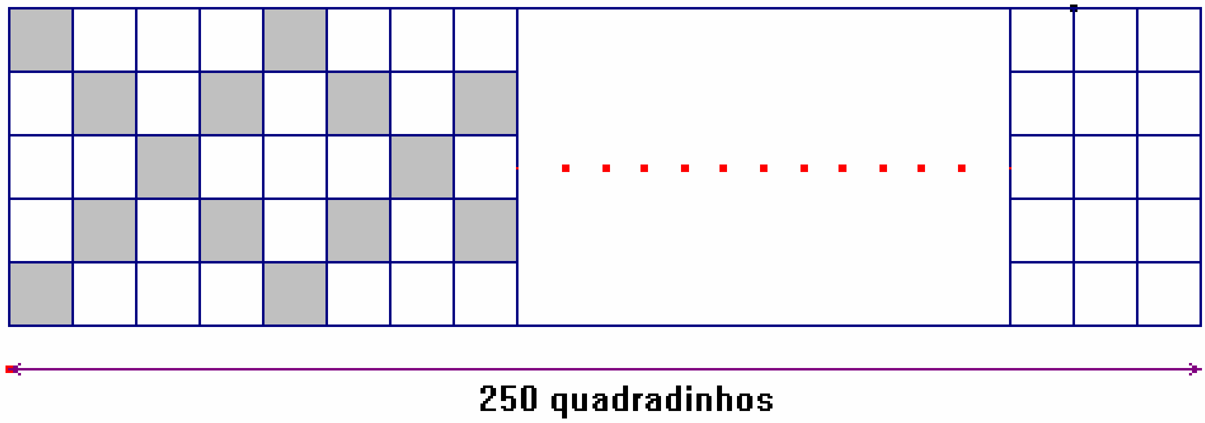
3) A sexta parte dos alunos de uma classe usam óculos. Dentre os que usam óculos, $\frac{1}{3}$ são meninas; além disso, 4 meninos usam óculos. Quantos são os alunos dessa classe?

		$3/5$
	$1/2$	
0,4	0,5	

4) Complete as casas em branco da tabela ao lado com frações de modo que a soma dos três números de qualquer linha, qualquer coluna e das duas diagonais seja sempre a mesma.

5) Sejam A, B e C algarismos diferentes de zero tais que $(AB)^2 = CAB$, isto é, o número de dois algarismos AB elevado ao quadrado dá o número de 3 algarismos CAB. Determine o valor de $A+B+C$.

6) Uma faixa quadriculada tem 5 quadradinhos na largura e 250 quadradinhos no comprimento.



Alguns quadradinhos serão pintados de cinza, começando da esquerda, conforme o modelo ilustrado na figura, e continuando com este padrão até chegar ao final da faixa à direita. Quantos quadradinhos não serão pintados?

7) João tem, em seu jardim, uma cisterna na qual ele armazena água de chuva e tira água para regar suas flores. À meia-noite do dia 31 de dezembro de 2005 a cisterna continha 156 litros de água. João tem o hábito de anotar em um quadro, todo dia, o número de litros de água gasta para regar as flores e de água recolhida da chuva. Abaixo vemos parte do quadro referente aos primeiros dias de 2006:

Data	litros de água gastos para regar as flores	litros de água recolhidos da chuva
1º de janeiro	6	2,5
2 de janeiro	9	0
3 de janeiro	0	5
4 de janeiro	4	0
5 de janeiro	9	3
6 de janeiro	0	0
7 de janeiro	11	4,5
8 de janeiro	0	0

Quantos litros de água havia na cisterna do João à meia noite do dia 8 de janeiro de 2006?

1. Notamos que o segundo número triangular é obtido a partir do primeiro acrescentando-se 2, o terceiro é obtido do segundo acrescentando-se 3 e assim por diante. Essa observação nos mostra como calcular os próximos números triangulares sem fazer muitas contas; por exemplo, já sabemos que o quarto número triangular é 10, donde o quinto será $10+5=15$, o sexto sendo então $15+6=21$. Podemos assim escrever os números triangulares até passar de 100:

$$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10 \xrightarrow{+5} 15 \xrightarrow{+6} 21 \xrightarrow{+7} 28 \xrightarrow{+8} 36 \xrightarrow{+9} 45 \xrightarrow{+10} 55$$
$$\xrightarrow{+11} 66 \xrightarrow{+12} 78 \xrightarrow{+13} 91 \xrightarrow{+14} 105$$

Logo, os números triangulares menores que 100, são: $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78$ e 91. Assim, temos 13 números triangulares menores do que 100.

2. Chamemos de n o número de livros que a bibliotecária vai colocar em cada estante. Então temos: $130 \div n =$ número de estantes para os livros de Matemática e $195 \div n =$ número de estantes para os livros de Português.

Isso mostra que n deve ser um divisor comum de 130 e 195, pois o número de estantes utilizadas é inteiro. Sabemos que quando aumentamos o denominador de uma fração, esta fração diminui (por exemplo: $\frac{27}{10}$ é menor do que $\frac{27}{8}$). Logo, quanto maior for o denominador n, menores serão as frações $\frac{130}{n}$ e $\frac{195}{n}$, o que significa que menor será o número de estantes utilizadas. Vemos assim que n deve ser o maior divisor comum (MDC) de 130 e 195. Como $130 = 2\times 5\times 13$ e $195 = 3\times 5\times 13$ segue que o MDC de 130 e 195 é $5\times 13 = 65$.

Logo, a bibliotecária vai colocar 65 livros em cada estante. Portanto, o número de estantes para os livros de Matemática é $130 \div 65 = 2$ e o número de estantes para os de Português é $195 \div 65 = 3$, o que dá um total de $2+3=5$ estantes.

3. Nosso problema aqui é achar o número de alunos da classe. O enunciado diz que $\frac{1}{6}$ dos alunos usam óculos, e destes $\frac{1}{3}$ são meninas, isto é $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{6}$ são meninas. Como

$$\underbrace{\text{alunos que usam óculos}}_{\frac{1}{6}} - \underbrace{\text{meninas que usam óculos}}_{\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}} \xrightarrow{\text{corresponde a}} \underbrace{\text{meninos que usam óculos}}_{4}$$

Como $\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}-\frac{1}{18}=\frac{3}{18}-\frac{1}{18}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$, concluímos que $\frac{1}{9}$ da classe consiste de meninos que usam óculos, que são em número de 4. Temos

$$\frac{1}{9}\text{ da classe} \xrightarrow{\text{corresponde a}} 4\text{ alunos}$$

$$\frac{9}{9}\text{ da classe} \xrightarrow{\text{corresponde a}} 4\times 9 = 36\text{ alunos}$$

Logo, o número de alunos na classe é 36.

4. Para facilitar nossas contas, é conveniente reduzir todas as frações que aparecem a um mesmo denominador. Como $0,4=\frac{4}{10}$ e $0,5=\frac{5}{10}$, podemos reescrever a tabela como ao lado, onde indicamos com letras, os números que devemos calcular.

a	c	6/10
b	5/10	d
4/10	5/10	e

O problema pede que a soma dos números em qualquer linha ou coluna e nas duas diagonais seja sempre a mesma. Olhando para a diagonal destacada no quadrado ao lado

a	c	6/10
b	5/10	d
4/10	5/10	e

vemos que esta soma é $\frac{4}{10}+\frac{5}{10}+\frac{6}{10}=\frac{15}{10}$. Da 3ª linha temos então $\frac{4}{10}+\frac{5}{10}+e=\frac{15}{10}$, donde $e=\frac{6}{10}$; e da 2ª coluna temos $\frac{5}{10}+\frac{5}{10}+c=\frac{15}{10}$, donde $c=\frac{5}{10}$. Colocando estes valores de c e e no quadrado, obtemos

a	5/10	6/10
b	5/10	d
4/10	5/10	6/10

A 1ª linha nos dá então $a+\frac{5}{10}+\frac{6}{10}=\frac{15}{10}$, donde $a=\frac{4}{10}$; e da 3ª coluna temos $\frac{6}{10}+d+\frac{6}{10}=\frac{15}{10}$, donde $d=\frac{3}{10}$. O quadrado então fica:

4/10	5/10	6/10
b	5/10	3/10
4/10	5/10	6/10

Do mesmo modo achamos $b=\frac{7}{10}$ e o quadrado está completo:

4/10	5/10	6/10
7/10	5/10	3/10
4/10	5/10	6/10

5. De acordo com a igualdade $(AB)^2 = CAB$, B é o último algarismo (o algarismo das unidades) de $(AB)^2$ e também o último algarismo de B^2. Logo B é um número entre 1 e 9 cujo quadrado também tem B como seu último algarismo. Logo, os valores possíveis para B são 1, 5 e 6**,** pois esses são os únicos algarismos (diferentes de zero) tais que cada um deles e seu respectivo quadrado têm o mesmo algarismo das unidades:

$$1^2 = 1 \text{ , } 5^2 = 25 \text{ } e \text{ } 6^2 = 36$$

CAB é um número de 3 algarismos, logo é menor que 1000. Por isso, A não pode ser maior que 3, porque qualquer número da forma $(4B)^2$ já é maior do que 1000. De fato, se A fosse maior que 3 então A seria no mínimo 4; então AB seria no mínimo 41, o que não pode acontecer pois $41^2 = 1681$ já é maior que 1000. Logo, os valores possíveis para A são $1, 2$ e 3.

Vamos analisar cada caso separadamente.

<u>**1º caso**</u>: $B = 1$.

- se $A = 1$ temos $11^2 = 121$, o que implica $CA1 = 121$, donde $A = 2$;
- se $A = 2$ temos $21^2 = 441$, o que implica $CA1 = 441$, donde $A = 4$,
- se $A = 3$ temos $31^2 = 961$, o que implica $CA1 = 961$, donde $A = 6$.

Em qualquer caso chegamos a uma contradição, logo o caso $B = 1$ está excluído.

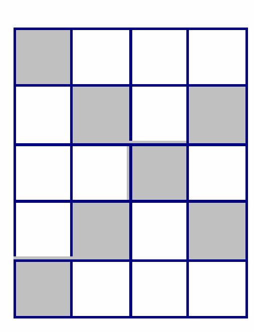
<u>**2º caso:**</u> $B = 5$

Nesse caso, $(AB)^2$ termina em 25; isto é $(AB)^2 = (A5)^2 = C25$. Temos então $CA5 = C25$, donde $A = 2$. Como $25^2 = 625$, concluímos que $C = 6$.

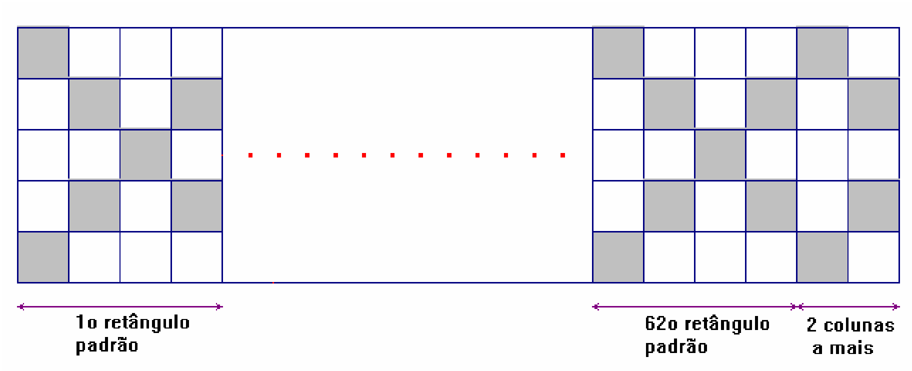
<u>**3º caso:**</u> $B = 6$

Aqui, $(AB)^2$ acaba em 36, isto é $(AB)^2 = (A6)^2 = C36$. Logo , $CA6 = C36$ donde $A = 3$ e segue que $AB = 36$. Como $36^2 = 1296$ é um número com quatro algarismos, chegamos a uma outra contradição. Logo excluímos a possibilidade $B = 6$.

Desse modo, a única possibilidade é $A = 2, B = 5$ e $C = 6$, onde temos $A + B + C = 13$.



6. Para pintar a faixa conforme o modelo, o retângulo padrão (aquele que se repete por toda a faixa) é o retângulo de 5 linhas e 4 colunas mostrado na figura ao lado; nele temos 7 quadradinhos pintados e 13 não pintados. Precisamos saber quantos retângulos padrão cabem na faixa. A faixa tem 250 colunas e cada retângulo padrão tem 4 colunas. Da divisão de 250 por 4 temos que $250 = 4 \times 62 + 2$, e concluímos que na faixa cabem 62 retângulos padrão, sobrando ainda duas colunas.



Nos 62 retângulos padrão temos $62 \times 13 = 806$ quadradinhos não pintados. Falta agora verificar quais os quadradinhos não pintados nas duas colunas finais. A figura mostra como são as duas colunas de acordo com o modelo. Nessas colunas temos 6 quadradinhos não pintados. Finalmente, o número de quadradinhos não pintados em toda a faixa é $806 + 6 = 812$.

7. O dia 1º de janeiro começa com 156 litros de água na cisterna, e a partir daí a cisterna recebe água da chuva e perde água para a rega das flores. Como no dia 8 não houve alteração na quantidade de água na cisterna, então o número de litros de água na cisterna no dia 8 é

156 + litros de água de chuva do dia 1 ao dia 7-litros de água para regar do dia 1 ao dia 7

O enunciado diz que a segunda parcela da expressão acima é a soma dos números da 3ª coluna, que é $2,5 + 0 + 5 + 0 + 3 + 0 + 4,5 = 15$, e a terceira parcela é a soma dos números da 2ª coluna da tabela, que é $6 + 9 + 0 + 4 + 9 + 0 + 11 = 39$. Logo, o número de litros na cisterna à meia noite do dia 8 é $156 + 15 - 39 = 132$.

1) Da igualdade $9\,174\,532 \times 13 = 119\,268\,916$ pode-se concluir que um dos números abaixo é divisível por 13. Qual é este número?

A) $119\,268\,903$ B) $119\,268\,907$ C) $119\,268\,911$ D) $119\,268\,913$ E) $119\,268\,923$

2) Arnaldo disse que um bilhão é o mesmo que um milhão de milhões. O Professor Piraldo o corrigiu e disse, corretamente, que um bilhão é o mesmo que mil milhões. Qual é a diferença entre o valor correto de um bilhão e a resposta de Arnaldo?

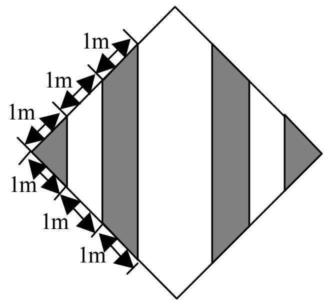
A) $1\,000$ B) $999\,000$ C) $1\,000\,000$ D) $999\,000\,000$ E) $999\,000\,000\,000$

3) Com a energia fornecida por um litro de mel, uma abelha consegue voar 7.000 quilômetros. Quantas abelhas conseguiriam voar 1 quilômetro, cada uma, com a energia fornecida por 10 litros de mel?

A) $7\,000$ B) $70\,000$ C) $700\,000$ D) $7\,000\,000$ E) $70\,000\,000$

4) Um agricultor esperava receber cerca de R$ $100.000,00$ pela venda de sua safra. Entretanto, a falta de chuva provocou uma perda da safra avaliada entre $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{4}$ do total previsto. Qual dos valores a seguir pode representar a perda do agricultor?

A) R$ $21.987,53$ B) R$ $34.900,00$ C) R$ $44.999,99$ D) R$ $51.987,53$ E) R$ $60.000,00$



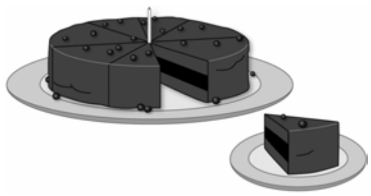
5) Uma placa decorativa consiste num quadrado branco de 4 metros de lado, pintado de forma simétrica com, partes em cinza, conforme desenho ao lado. Qual é a fração da área da placa que foi pintada?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{6}{13}$ E) $\frac{7}{11}$

6) Diamantino colocou em um recipiente três litros de água e um litro de refresco. O refresco é composto de 20% de suco de laranja e 80% de água. Depois de misturar tudo, que porcentagem do volume final representa o suco de laranja?

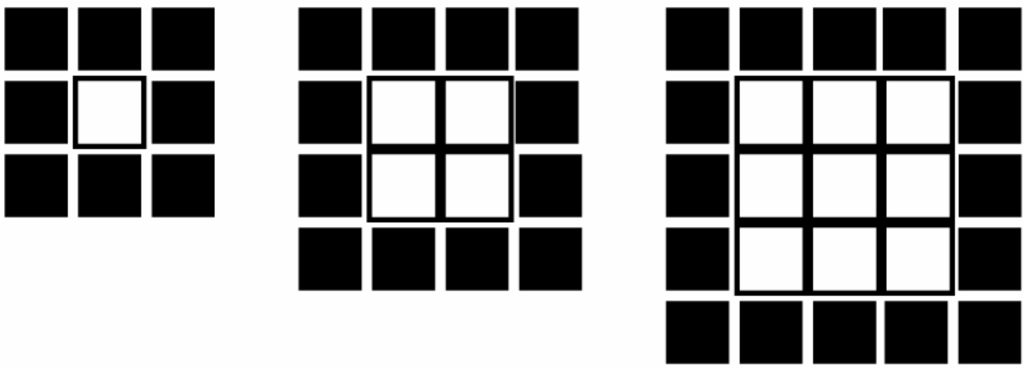
A) 5% B) 7% C) 8% D) 20% E) 60%

7) Nove amigos compraram 3 bolos, cada um deles cortado em oito fatias. Todos comeram bolo e não sobrou nenhum pedaço. Sabendo que cada um só comeu fatias inteiras do bolo, podemos ter certeza de que:



A) Alguém comeu quatro fatias.
B) Um deles comeu somente uma fatia.
C) Todos comeram duas fatias pelo menos.
D) Uns comeram duas fatias e os demais comeram três fatias.
E) Um deles comeu, no mínimo, três fatias.

8) Uma seqüência de mosaicos quadrados é construída com azulejos quadrados pretos e brancos, todos do mesmo tamanho, como se segue: o primeiro é formado por um azulejo branco cercado por azulejos pretos, o segundo de quatro azulejos brancos cercados por azulejos pretos; e assim sucessivamente, como indica a figura. Se numa seqüência de mosaicos formada de acordo com esta regra forem usados 80 azulejos pretos, quantos serão os azulejos brancos utilizados?



A) 55 B) 65 C) 75 D) 85 E) 100

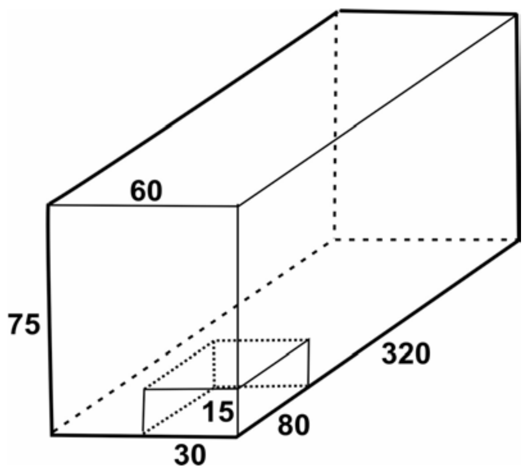
9) No último campeonato de futebol da escola do Marcelo participaram 6 equipes. Cada equipe disputou com cada uma das outras exatamente uma partida. Abaixo, a tabela de classificação do campeonato, onde:

Equipe	V	E	D	GP	GC
A	4	1	0	6	2
B	2	1	2	6	6
C	0	3	2	2	6
D	1	1	y	3	6
E	0	1	4	1	5
F	x	1	0	z	3

- V é o número de vitórias de uma equipe
- E é o número de empates
- D é o número de derrotas
- GP é o número de gols feitos por um time
- GC é o número de gols sofridos

a) Quantas partidas foram disputadas?
b) Determine a quantidade de vitórias da equipe F, a quantidade de derrotas da equipe D e a quantidade de gols feitos pela equipe F, representados por x, y e z na tabela.

10) Um bloco retangular de madeira tem $320\,cm$ de comprimento, $60\,cm$ de largura e $75\,cm$ de altura. O bloco é cortado várias vezes, com cortes paralelos às suas faces, de modo a subdividi-lo em blocos também retangulares de $80\,cm$ de comprimento por $30\,cm$ de largura por $15\,cm$ de altura.



a) Quantas peças foram obtidas?
b) Um metro cúbico dessa madeira pesa aproximadamente 900 quilogramas. Qual é o peso de cada uma dessas peças?

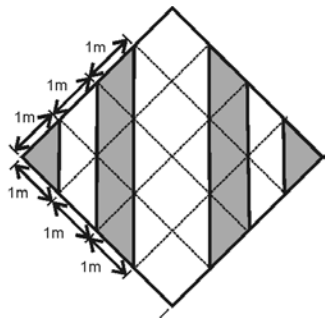
1. **(A)** Como $119\,268\,916$ é divisível por 13, já que $9\,174\,532\times 13 = 119\,268\,916$,podemos concluir que os números divisíveis por 13 são aqueles obtidos somando-se ou subtraindo-se múltiplos de 13 ao número $119\,268\,916$. Dentre os números apresentados, o número $119\,268\,916-13=119\,268\,903$ é o único divisível por 13.

2. **(E)** Arnaldo disse que 1 bilhão = $1\,000\,000\times 1\,000\,000=1\,000\,000\,000\,000=10^{12}$. O Professor Piraldo corrigiu-o, dizendo que 1 bilhão = $1\,000\times 1\,000\,000 = 1\,000\,000\,000=10^{9}$. A diferença é: $10^{12}-10^{9} = 10^{9}(10^{3}-1) = 999\times 10^{9} = 999\,000\,000\,000$

3. **(B)** A energia gasta por uma abelha para voar 7.000 quilômetros é a mesma que 7.000 abelhas gastam para voar 1 quilômetro cada . Como o número de litros de mel foi multiplicado por 10, temos energia suficiente para que 10 vezes este número de abelhas voem 1 quilômetro cada, ou seja, 70.000 abelhas. Note que poderíamos ter também 7.000 abelhas voando 10 quilômetros cada, entre outras alternativas.

4. **(A)** Como $\frac{1}{5}$ de $100\,000 = \frac{100\,000}{5} = 20000$ e $\frac{1}{4}$ de $100\,000 = \frac{100\,000}{4} = 25000$, concluímos que a perda da safra está avaliada entre R\$ $20.000,00$ e R\$ $25.000,00$ .Logo, um possível valor para a perda é R\$ $21.987,53$.

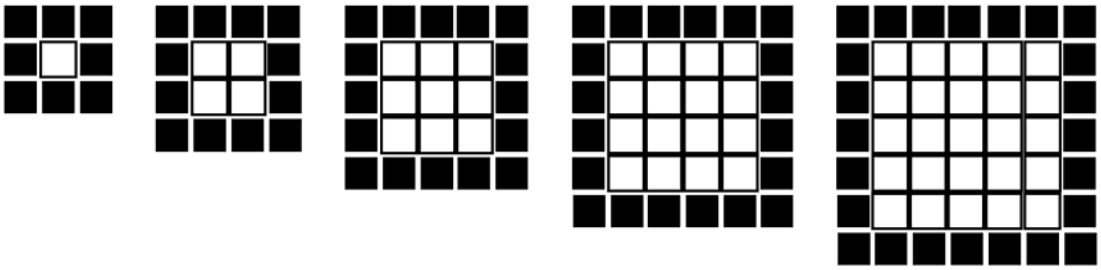
5. **(C)** Traçando paralelas aos lados, podemos dividir a placa em quadrados de 1 metro de lado, conforme indicado na figura. Então, a área pintada é igual a 12 metades desses quadrados, ou, equivalentemente, 6 desses quadrados. Como a placa total tem 16 desses quadrados, concluímos que a fração da área pintada em relação à área da placa é $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.



6. **(A)** O refresco é composto de $20\,\%$ de um litro = $0,2$ litros de suco e $80\,\%$ de um litro = $0,8$ litros de água. Logo, a mistura final tem $0,2$ litros de suco e $3+0,8=3,8$ litros de água. A porcentagem de suco em relação ao volume da mistura é então $\frac{\text{volume de suco}}{\text{volume total}} = \frac{0,2}{4} = \frac{2}{40} = 0,05 = 5\%$.

7. **(E)** Temos um total de $8\times 3 = 24$ fatias de bolo que foram comidas. Como todos comeram bolo, inicialmente cada um dos 9 amigos comeu uma fatia. Sobraram ainda $24-9=15$ fatias para serem comidas por 9 pessoas. Nesta situação, obrigatoriamente uma certa pessoa X deve ter comido pelo menos 2 dessas 15 fatias. Caso contrário, isto é, se todas as 9 pessoas tivessem comido menos do que 2 fatias significaria que poderíamos escrever o número 15 como uma soma de 9 parcelas cada uma delas sendo 0 (os que não comeram das 15 fatias) ou 1 (os que comeram 1 fatia das 15), o que claramente não é possível. Como esta pessoa X já havia comido inicialmente 1 fatia, concluímos que ela comeu no mínimo 3 fatias.

8. **(A)** No primeiro mosaico, temos $3+3+1+1=8$ azulejos pretos; no segundo, temos $4+4+2+2=12$; no terceiro, temos $5+5+3+3=16$; não é difícil perceber (e verificar) que os próximos mosaicos têm 20 e 24 azulejos pretos. Como $8+12+16+20+24=80$, é possível construir exatamente 5 mosaicos. Finalmente, o número total de azulejos brancos nesta seqüência de cinco mosaicos é: $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=1+4+9+16+25=55$.

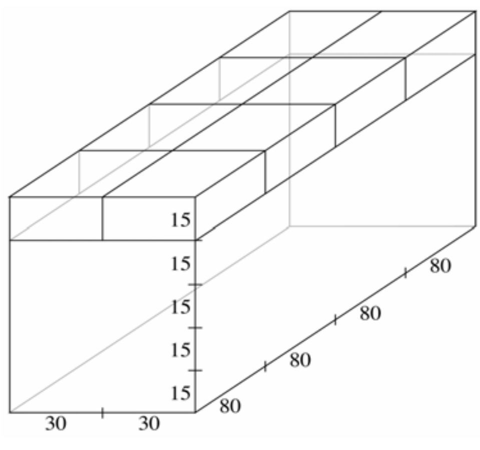


9. a) Podemos contar, por listagem, quantas foram as partidas: *A´B, A´C, A´D, A´E, A´F, B´C, B´D, B´E, A´F, C´D, C´E, C´F, D´E, D´F* e *E´F*, num total de 15 partidas.
Por outro lado, podemos contar de um modo mais geral, como se segue. Como cada equipe jogou com todas as outras, segue que cada equipe jogou 5 partidas. Parece então que o número total de partidas foi de $5 \text{ partidas por equipe} \times 6 \text{ equipes} = 30 \text{ partidas}$. No entanto, nesta contagem cada partida foi contada duas vezes; por exemplo, o jogo entre os times *A* e *B* foi contado como $A\times B$ e como $B\times A$. Logo, o número correto de partidas jogadas é $\frac{30}{2}=15$.

b) Como vimos no item (a), cada time jogou 5 partidas. Desse modo, a soma do número de vitórias, empates e derrotas de um mesmo time deve ser igual a 5; por exemplo, para o time *A*, observamos na tabela $4 \text{ vitórias} + 1 \text{ empate} + 0 \text{ derrotas} = 5 \text{ partidas}$. Aplicando este raciocínio ao time *F*, temos $x+1+0=5$, donde $x=4$. Do mesmo modo, para a equipe *D* temos $1+1+y=5$, donde $y=3$. Notamos agora que em um campeonato de futebol o número de gols feitos é igual ao número de gols sofridos. Logo $\underbrace{6+6+2+3+1+z}_{\text{Gols feitos}} = \underbrace{2+6+6+6+5+3}_{\text{Gols sofridos}}$, donde $18+z=28$, ou seja, $z=10$.

10. a) As dimensões do bloco maior são $320\times 60\times 75$ e as dos blocos menores $80\times 30\times 15$. Logo, no bloco maior o comprimento foi dividido por $320\div 80=4$, a largura foi dividida $60\div 30=2$ e a altura foi dividida por $75\div 15=5$. Portanto teremos um total de $4\times 2\times 5=40$ peças distribuídas em cinco camadas de oito peças cada, conforme ilustrado no desenho ao lado.

b) O volume de um bloco retangular é dado por comprimento × largura × altura. Logo, o volume de cada um dos blocos menores é $80\times 30\times 15=36000\,cm^3$. O enunciado do problema nos dá o peso de um metro cúbico de madeira; para saber o peso de um dos blocos pequenos devemos primeiro saber seu volume em metros cúbicos, ou seja, fazer a conversão de $36000\,cm^3$ para m^3. Como $1cm^3=10^{-6}m^3=0{,}000001m^3$, para fazer esta conversão basta deslocar a vírgula 6 casas para a esquerda; obtemos então $36000\,cm^3=0{,}036\,m^3$. Logo o peso de um bloco pequeno é $0{,}036\times 900=32{,}4$ quilogramas.

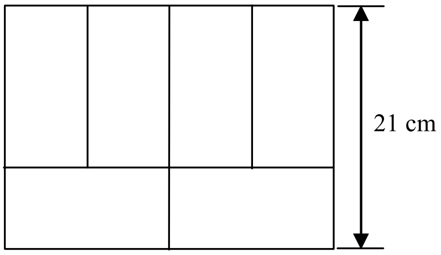


1) Uma turma da escola fez uma eleição para eleger seu representante. Três candidatos concorreram à eleição: João, Rosa e Marcos. João teve $\frac{2}{7}$ dos votos, Rosa teve $\frac{3}{5}$ dos votos. Quem ganhou a eleição?

2) Qual é o valor de $2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 - 4^4$?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 4^2 E) 4^4

3) Com seis retângulos idênticos formamos um retângulo maior com um dos lados medindo 21 cm, como na figura. Qual é a área do retângulo maior?

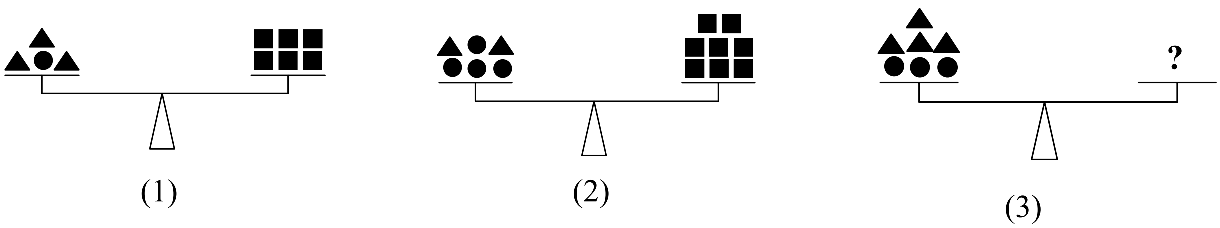


A) $210 cm^2$ B) $280 cm^2$ C) $430 cm^2$ D) $504 cm^2$ E) $588 cm^2$

4) Três anos atrás, a população de Pirajussaraí era igual à população que Tucupira tem hoje. De lá para cá, a população de Pirajussaraí não mudou, mas a população de Tucupira cresceu 50%. Hoje a soma das populações das duas cidades é de 9000 habitantes. Há três anos, qual era a soma destas duas populações?

A) 3 600 B) 4 500 C) 5 000 D) 7 200 E) 7 500

5) As balanças (1) e (2) da figura abaixo estão em equilíbrio. Sabe-se que todos os triângulos têm o mesmo peso; todos os quadrados também têm o mesmo peso, assim como os círculos. Quantos quadrados devem ser colocados no prato direito da balança (3) para que ela também fique em equilíbrio?



A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

6) Em um ano, no máximo quantos meses têm cinco domingos?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

7) Uma calculadora possui duas teclas especiais:

- a tecla A que duplica o número que aparece no visor
- a tecla B que acrescenta uma unidade ao número que aparece no visor.

Por exemplo, se o número 45 estiver inicialmente no visor e a tecla B for apertada, o visor mostrará o número 46. Se, em seguida, apertarmos a tecla A, o visor mostrará o número 92. Nesse exemplo, apertamos ao todo 2 vezes as teclas A e B: uma vez a tecla B, e depois uma vez a tecla A, para, a partir de 45, chegarmos ao 92.

Suponha que o número no visor seja 1.

a) Indique uma maneira de obter o número 10 apertando um total de 4 vezes as teclas A e B.

b) Indique uma maneira de obter o número 15 apertando um total de 6 vezes as teclas A e B.

c) Indique uma maneira de obter o número 100 apertando um total de 8 vezes as teclas A e B.

1. João recebeu: $\frac{2}{7}$ do total de votos; Rosa recebeu: $\frac{3}{5}$ do total de votos e Marcos recebeu: $1-\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{5}\right)=1-\frac{31}{35}=\frac{4}{35}$ do total de votos. O vencedor foi aquele que obteve a maior fração dos votos. Para comparar essas frações igualamos seus denominadores: $\frac{2}{7}=\frac{10}{35}$ e $\frac{3}{5}=\frac{21}{35}$. Daí segue que $\underbrace{\frac{4}{35}}_{\text{Marcos}} < \underbrace{\frac{2}{7}}_{\text{João}} < \underbrace{\frac{3}{5}}_{\text{Rosa}}$, e portanto, Rosa venceu a eleição.

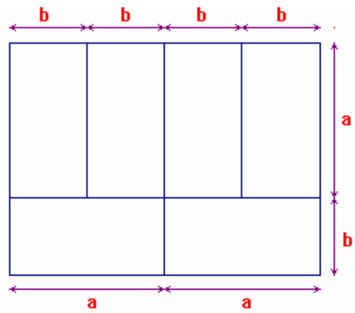
Comentário: É muito interessante notar que a resposta não depende do número de alunos da turma.

2. **(A) Solução 1:** Temos: $2^6+2^6+2^6+2^6-4^4=4\times 2^6-4^4=4\times(2^2)^3-4^4=4\times 4^3-4^4=4^4-4^4=0$

Solução 2: Temos: $2^6+2^6+2^6+2^6-4^4=4\times 2^6-4^4=4(2^6-\underbrace{4^3}_{(2^2)^3=2^6})=4\left[2^6-2^6\right]=0$

Solução 3: Temos: $2^6+2^6+2^6+2^6-4^4=4\times 2^6-4^4=2^2\times 2^6-\left(2^2\right)^4=2^8-2^8=0$

3. **(E)** A partir da figura, vemos que o comprimento a dos retângulos menores é o dobro da sua largura b, isto é, $a=2b$. Temos então $a+b=2b+b=3b=21$, ou seja, $b=7cm$ e $a=14cm$. Portanto, o comprimento do retângulo maior é $4b=28$ e sua área é $21\times 28=588cm^2$.



4. **(D) Solução 1:** Seja p a população de Tucupira há três anos. Como esta população cresceu de 50 %, atualmente Tucupira tem $p+50\%$ de p habitantes, ou seja $p+\frac{50}{100}p=p+0,5p=1,5p$ habitantes. Como a população de Pirajussaraí não cresceu nesses 3 anos e há 3 anos era igual à de Tucupira, podemos concluir que a população atual de Pirajussaraí é p. Hoje, a soma das populações das duas cidades é 9000; logo, $p+1,5p=9000$, donde $p=\frac{9000}{2,5}=3600$. Portanto, a soma das duas populações, há 3 anos, era de $3600\times 2=7200$ habitantes.

Solução 2: De 2003 a 2006 a população de Tucupira cresceu 50%, logo em 2006 esta população corresponde a 150% da população em 2003. Já a população de Pirajussaraí não cresceu nesses 3 anos e em 2003 era igual à de Tucupira. Temos então:

$$\underbrace{\text{População de Tucupira em 2006}}_{\substack{\text{corresponde a 150\% da}\\ \text{população de Tucupira em 2003}}} + \underbrace{\text{População de Pirajussaraí em 2006}}_{\substack{\text{corresponde a 100\% da}\\ \text{população de Tucupira em 2003}}} = 9000$$

Logo, podemos concluir que em 2006 a soma das populações das duas cidades corresponde a 250 % da população de Tucupira em 2003, como essa soma é 9000 temos:

$$250\%\text{ da população de Tucupira em }2003 \longrightarrow 9000$$

$$50\%\text{ da população de Tucupira em }2003 \longrightarrow 9000 \div 5 = 1\,800$$

$$100\%\text{ da população de Tucupira em }2003 \longrightarrow 1800 \times 2 = 3600$$

Portanto, a soma das duas populações há 3 anos era de $3600 \times 2 = 7\,200$ habitantes.

5. **(D)** Na primeira balança temos 3▲+1●= 6■; na segunda temos 2▲+4● = 8■, o que é equivalente a 1▲+2● = 4■. Logo (3▲+1●) + (1▲+2●) = 6■ + 4■, ou seja, 4▲+3●= 10■. Logo será necessário colocar 10 quadrados no prato direito da balança (3) para que ela fique em equilíbrio.

6. **(C)** Um ano normal tem 365 dias e o ano bissexto 366. Da divisão de 365 por 7, obtemos $365 = 52 \times 7 + 1$ e da divisão de 366 por 7 obtemos $366 = 52 \times 7 + 2$. Logo:

ano normal = 52 semanas + 1 dia
ano bissexto = 52 semanas + 2 dias

Portanto, um ano normal ou bissexto tem no mínimo 52 domingos e no máximo 53 domingos (1 domingo para cada uma das 52 semanas e talvez outro domingo para os 1 ou 2 dias que completam o ano).
Cada um dos doze meses do ano tem no mínimo 4 domingos. Logo, cada ano tem no mínimo $12 \times 4 = 48$ domingos.

(i) Num ano de 52 domingos, como cada mês tem no mínimo 4 domingos, sobram ainda $52 - 48 = 4$ domingos . Cada um desses ficará num mês diferente, porque nenhum mês tem 6 domingos. Temos então 4 meses com 5 domingos.

(ii) Analogamente, num ano com 53 domingos restaram 5 domingos, que ficarão um em cada mês diferente. Portanto teremos 5 meses com 5 domingos

7. Com o número 1 no visor devemos aplicar sucessivamente as operações das teclas A e B para obter o número desejado.

(a) $1 \xrightarrow{A} 2 \xrightarrow{A} 4 \xrightarrow{B} 5 \xrightarrow{A} 10$ ou $1 \xrightarrow{B} 2 \xrightarrow{A} 4 \xrightarrow{B} 5 \xrightarrow{A} 10$

(b) $1 \xrightarrow{A} 2 \xrightarrow{B} 3 \xrightarrow{A} 6 \xrightarrow{B} 7 \xrightarrow{A} 14 \xrightarrow{B} 15$ ou $1 \xrightarrow{B} 2 \xrightarrow{B} 3 \xrightarrow{A} 6 \xrightarrow{B} 7 \xrightarrow{A} 14 \xrightarrow{B} 15$

(c) $1 \xrightarrow{A} 2 \xrightarrow{B} 3 \xrightarrow{A} 6 \xrightarrow{A} 12 \xrightarrow{A} 24 \xrightarrow{B} 25 \xrightarrow{A} 50 \xrightarrow{A} 100$ ou $1 \xrightarrow{B} 2 \xrightarrow{B} 3 \xrightarrow{A} 6 \xrightarrow{A} 12 \xrightarrow{A} 24 \xrightarrow{B} 25 \xrightarrow{A} 50 \xrightarrow{A} 100$

1) A metade do número $2^{12}+3\times 2^{10}$ é:

A) $2^6+3\times 2^5$ B) $2^6+3\times 2^{10}$ C) $2^{11}+3\times 2^5$ D) $2^{11}\times 7$ E) $2^9\times 7$

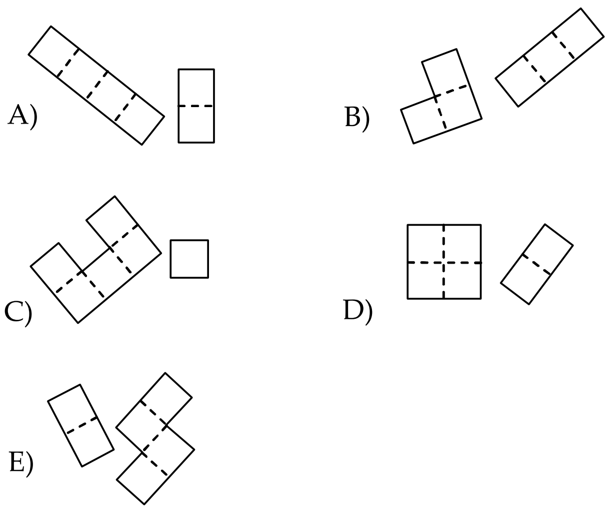
2) Neste momento são 6 horas e 27 minutos da tarde. Qual era o horário 2880717 minutos mais cedo?

A) $6\text{h e }22\text{min}$ B) $6\text{h e }24\text{min}$ C) $6\text{h e }27\text{min}$ D) $6\text{h e }30\text{min}$ E) $6\text{h e }32\text{min}$

3) Os alunos de uma escola participaram de uma excursão, para a qual dois ônibus foram contratados. Quando os ônibus chegaram, 57 alunos entraram no primeiro ônibus e apenas 31, no segundo. Quantos alunos devem passar do primeiro para o segundo ônibus para que a mesma quantidade de alunos seja transportada nos dois ônibus?

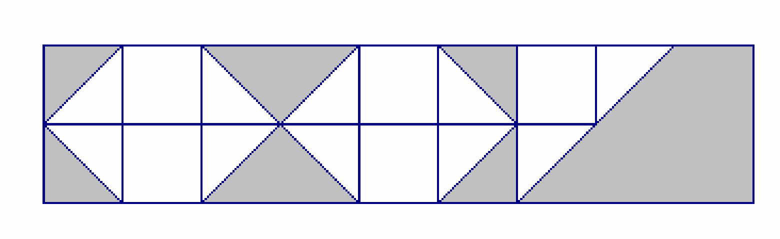
A) 8 B) 13 C) 16 D) 26 E) 31

4) Em qual das alternativas abaixo aparecem dois pedaços de papelão com os quais pode-se construir um cubo, dobrando pelas linhas tracejadas e colando pelas linhas contínuas?



5) O algarismo das unidades do número $1\times 3\times 5\times \ldots \times 97\times 99$ é:

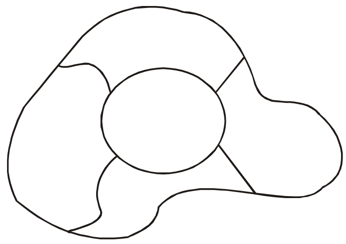
A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9



6) A figura mostra um retângulo formado por 18 quadrados iguais com algumas partes sombreadas. Qual fração da área do retângulo é sombreada?

A) $\frac{7}{18}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{1}{2}$

7) O desenho ao lado mostra o mapa de um país (imaginário) constituído por cinco estados. Deseja-se colorir esse mapa com as cores verde, azul e amarela, de modo que dois estados vizinhos não possuam a mesma cor. De quantas maneiras diferentes o mapa pode ser pintado?



A) 12 B) 6 C) 10 D) 24 E) 120

8) As nove casas de um tabuleiro 3×3 devem ser pintadas de forma que em cada coluna, cada linha e cada uma das duas diagonais não hajam duas casas de mesma cor. Qual é o menor número de cores necessárias para isso?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

9) Considere um número escrito na forma $X,Y,$ onde X e Y são algarismos diferentes de 0. Determine esse número sabendo que ele é igual a $\frac{3}{10}(X+Y)$.

10) Em um mesmo lado de uma rua serão construídas 6 casas vizinhas. As casas podem ser de tijolo ou de madeira, mas como medida de segurança contra incêndio, duas casas de madeira não podem ser vizinhas. De quantas maneiras se pode planejar a construção dessas casas?

1. **(E)** Antes de dividir a expressão por 2, colocamos 2^{10} em evidência: $2^{12}+3\times 2^{10}=2^{10}(2^2+3\times 1)=2^{10}\times 7$. Logo: $\frac{2^{12}+3\times 2^{10}}{2}=\frac{2^{10}\times 7}{2}=2^9\times 7$.

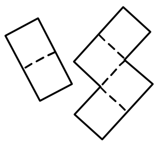
2. **(D)** Dividindo 2880717 por 60, obtemos $2880717=48011\times 60+57$. Isso significa que $2880717\text{ min}=48011\text{ h}+57\text{ min}$. Dividindo 48011 por 24, obtemos $48011=2000\times 24+11$. Podemos então escrever:

$$2880717\text{ min} = \underbrace{48000\text{ h}}_{2000\text{dias}} + 11\text{ h} + 57\text{ min}$$

Os 2000 dias não interferem no horário que estamos procurando. Como 6 horas e 27 minutos da tarde são exatamente 18 horas e 27 minutos, a resposta é $18\text{h }27\text{min - }11\text{h }57\text{min} = 17\text{h }87\text{min - }11\text{h }57\text{min} = 6\text{h }30\text{min}$.

3. **(B)** O número total de alunos nos dois ônibus é $57+31=88$ e $\frac{88}{2}=44$. Para que cada ônibus tenha o mesmo número de alunos, devem então passar $57 - 44 = 13$ alunos do primeiro para o segundo ônibus.

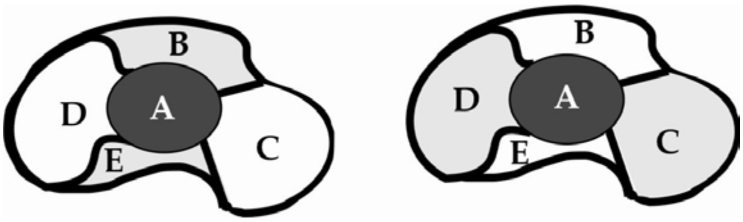
4. **(E)** Com as peças abaixo.



5. **(C)** O último algarismo de um múltiplo de 5 é 0 ou 5; os que terminam em 0 são pares e os que terminam em 5 são ímpares. Como $1\times 3\times 5\times\ldots\times 97\times 99$ é múltiplo de 5 e, sendo um produto de números ímpares, também é ímpar; segue que o seu algarismo das unidades é 5.

6. **(B)** A parte sombreada consiste de 10 metades de quadrados mais 3 quadrados inteiros, o que equivale a $\frac{10}{2}+3=5+3=8$ quadrados inteiros. Logo, a fração que representa a parte sombreada é $\frac{\text{área sombreada}}{\text{área total}}=\frac{\text{área de 8 quadrados}}{\text{área de 18 quadrados}}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$

7. **(B)** O estado A pode ser pintado de 3 formas: verde, azul ou amarelo. Para qualquer estado vizinho, por exemplo, o estado B, temos duas possibilidades e os demais estados têm suas cores determinadas (1 possibilidade). Logo, podemos colorir o mapa de $3 \times 2 = 6$ formas. Abaixo ilustramos duas destas maneiras de pintar o mapa; em ambas o estado A tem a mesma cor.



8. **(C)** Para satisfazer as condições do problema, as cinco casas marcadas com * devem ter cores diferentes.

*		*
	*	
*		*

Por isso, precisaremos, no mínimo, de 5 cores distintas. Chamemos de $1, 2, 3, 4$ e 5 as cinco cores distintas que usaremos para colorir essas 5 casas, e vamos determinar como podemos escolher as cores para as 4 casas restantes para satisfazer as condições pedidas.

1		4
	3	
2		5

→

1	2	4
4	3	1
2	4	5

Logo, podemos colorir as 4 casas restantes sem utilizar mais cores. Assim, bastam 5 cores. Outros exemplos de colorações são:

2		3
	1	
5		4

2	4	3
4	1	2
5	2	4

1		2
	4	
3		5

→

1	3	2
2	4	1
3	2	5

1		5
	2	
4		3

→

1	3	5
3	2	4
4	1	2

9. Temos $X,Y = X + \frac{Y}{10} = \frac{10X+Y}{10}$, o enunciado nos diz que $\frac{10X+Y}{10} = \frac{3}{10}(X+Y)$. Logo $10X + Y = 3X + 3Y$, ou seja, $7X = 2Y$. Concluímos que $2Y$ é múltiplo de 7, e como Y é um número inteiro entre 1 e 9, só temos a possibilidade $Y = 7$, donde $X = 2$. Assim, o número é 2,7.

10. Como as casas são vizinhas, podemos pensar nelas como uma fila de casas com 6 posições.Vamos dividir a contagem em casos, de acordo com o número de casas de madeira que podem ser construídas.

a) Nenhuma casa de madeira: aqui há apenas uma maneira de construir as casas, ou seja, todas de tijolo.

b) Uma casa de madeira: aqui temos 6 maneiras de construir as casas, pois a casa de madeira pode ser qualquer uma delas, sendo as outras de tijolo.

c) Duas casas de madeira: as casas de madeira podem ocupar as seguintes posições: 1ª e 3ª, 1ª e 4ª, 1ª e 5ª, 1ª e 6ª, 2ª e 4ª, 2ª e 5ª, 2ª e 6ª, 3ª e 5ª, 3ª e 6ª ou 4ª e 6ª. Temos aqui 10 maneiras.

d) 3 casas de madeira: as casas de madeira podem ocupar as seguintes posições: 1ª, 3ª e 5ª; 1ª, 3ª e 6ª; 1ª,4ª e 6ª; 2ª, 4ª e 6ª. Temos aqui 4maneiras nototal.

e) 4 ou mais casas de madeira: impossível, pois é fácil ver neste caso que sempre teremos duas casas de madeira juntas.

Dessa forma, há 1 + 6 + 10 + 4 = 21 maneiras de se planejar a construção.

1) Em 1998, a população do Canadá era de 30,3 milhões. Qual das opções abaixo representa a população do Canadá em 1998?

A) 30 300 000 B) 303 000 000 C) 30 300 D) 303 000 E) 30 300 000 000

2) Uma certa máquina é capaz de produzir 8 réguas em cada minuto. Quantas réguas esta máquina consegue produzir em 15 minutos?

A) 104 B) 110 C) 112 D) 128 E) 120

3) Luíza, Maria, Antônio e Júlio são irmãos. Dois deles têm a mesma altura. Sabe-se que:

- Luíza é maior que Antônio
- Maria é menor que Luíza
- Antônio é maior do que Júlio
- Júlio é menor do que Maria.

Quais deles têm a mesma altura?

A) Maria e Júlio B) Júlio e Luíza C) Antônio e Luíza
D) Antônio e Júlio E) Antônio e Maria

4) O algarismo das unidades do número $1 \times 3 \times 5 \times 79 \times 97 \times 113$ é:

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

Utilize as informações abaixo para resolver as duas próximas questões:

A tabela ao lado mostra o desempenho das seleções do grupo A da Copa do Mundo de 2002:

Seleção	**Jogos**	**V**	**E**	**D**	**GM**	**GS**	**P**
Dinamarca	3	2	1	0	5	2	7
Senegal	3	1	2	0	5	4	**?**
Uruguai	3	0	2	1	4	**?**	2
França	3	0	1	2	0	3	1

Legenda:
V - vitórias, E - empates, D - derrotas, GM - Gols Marcados, GS - Gols Sofridos, P - Pontos.

Numa partida de futebol, a equipe vencedora ganha 3 pontos, em caso de empate as duas ganham 1 ponto e a perdedora não ganha nem perde pontos.

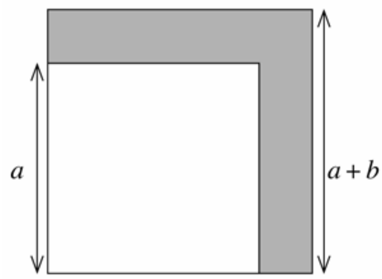
5) Quantos pontos obteve a seleção do Senegal?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

6) Quantos gols sofreu a seleção do Uruguai?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

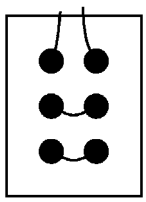
7) Na figura abaixo temos dois quadrados. O maior tem lado $a + b$ e o menor lado a.



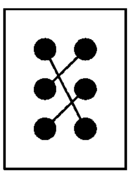
Qual é a área da região em cinza?

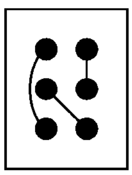
A) b B) $a + b$ C) $a^2 + 2ab$ D) b^2 E) $2ab + b^2$

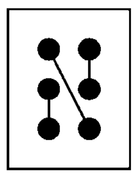
8) Passa-se um barbante através dos seis furos de uma cartolina. A frente da cartolina, com o barbante, é mostrada na figura.

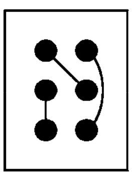


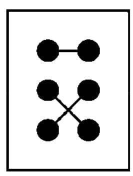
Qual das figuras abaixo **não** pode ser o verso da cartolina?

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

(e) 

9) Adriano, Bruno, César e Daniel são quatro bons amigos. Daniel não tinha dinheiro, mas os outros tinham. Adriano deu a Daniel um quinto do seu dinheiro, Bruno deu um quarto do seu dinheiro e César deu um terço do seu dinheiro. Cada um deu a Daniel a mesma quantia. A quantia que Daniel possui agora representa que fração da quantia total que seus três amigos juntos possuíam inicialmente?

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

10) O quadrado abaixo é chamado *quadrado mágico,* porque a soma dos números de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal é sempre a mesma. Neste caso essa soma é 15.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Complete os cinco números que faltam no quadrado abaixo para que ele seja um quadrado mágico.

-12		- 4
	0	
4		

1. **(A)** Temos que $1 \text{ milhão} = 1000\,000$. Logo, $30,3 \text{ milhões} = 30,3 \times 1000\,000 = 30\,300\,000$

2. **(E)** Se a máquina produz 8 réguas em 1 minuto, em 8 minutos ela produzirá $8 \times 15 = 120$ réguas.

3. **(E) Solução 1:** Usaremos a notação $a < b$ que significa que a é menor do que b, ou equivalentemente, b é maior do que a. Assim, $a<b<c$ significa que a é menor do que b e b é menor do que c.
Para simplificar, vamos denotar a altura de cada um dos irmãos pela letra inicial de seu nome.
Do enunciado temos:

(i) L maior que A ou, equivalentemente, A menor que L (A< L)
(ii) M menor que L (M<L)
(iii) A maior que J ou, equivalentemente, J menor que A (J<A)
(iv) J menor que M (J<M)

De (i) e (iii) segue que: J < A < L. Portanto, os irmãos de mesma altura não estão entre Júlio, Antônio e Luíza.
De (ii) e (iv) segue que: J < M < L. Portanto, os irmãos de mesma altura não estão entre Júlio, Maria e Luíza.
Logo, a única opção é que Antônio e Maria tenham a mesma altura.

Solução 2: Pelo enunciado, as opções A, C e D não ocorrem. Como Luíza é maior do que Antônio e Antônio é maior do que Júlio, temos que Luíza é maior do que Júlia. Logo, a opção correta é (E).

4. **(C)** Como um dos fatores é 5, **o produto é um múltiplo de 5.** Os múltiplos de 5 são aqueles cujo algarismo das unidades é 0 ou 5. Além disso**,** todos os fatores são números ímpares, então **o produto é um número ímpar.** Logo, o seu algarismo das unidades tem que ser 5.

5. **(C)** Segundo as condições da copa, uma vitória vale 3 pontos, um empate vale 1 ponto e quem sofre uma derrota não pontua. Como Senegal teve uma vitória e dois empates, ele somou: $1 \times 3 + 2 \times 1 = 5$ pontos.

6. **(D)** Observe que num campeonato, o número total de gols marcados é o mesmo que o total de gols sofridos. Denotando por x o número de gols que sofreu a seleção do Uruguai temos:

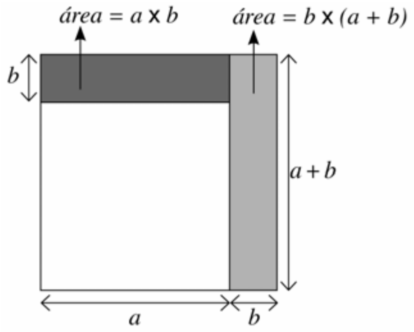
$$5+5+4+0=2+4+x+3 \Rightarrow 14=9+x$$

Daí obtemos $x=5$.

7. **(E) Solução 1** – Usaremos que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Lembre que a área de um quadrado de lado l é l^2. Note que a área da região cinza é a diferença entre as áreas do maior e do menor quadrado. O lado do maior é $a+b$, portanto sua área é $(a+b)^2$. Já o lado do menor é a, logo sua área é a^2. Concluímos que a área da região cinza é: $(a+b)^2 - a^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 = 2ab + b^2$.

Solução 2 - Lembre que a área de um retângulo é o produto da largura pelo comprimento.

Podemos dividir a região cinza em dois retângulos, um da largura b e comprimento a, e o outro de largura b e comprimento $a+b$, como mostra a figura. A área em cinza é a soma das áreas desses dois retângulos, ou seja:



$a \times b + b \times (a+b) = ab + ab + b^2 = 2ab + b^2$.

Portanto, a área solicitada é $2ab + b^2$.

Solução 3 – A região cinza é formada por 2 retângulos de dimensões $a \times b$ e um quadrado de lado b. Logo a sua área é: $2 \times ab + b^2$.

8. **(E)** Observando a frente da cartolina, verificamos que o barbante entra e sai pelos furos da primeira linha. Na opção (e) o verso mostra estes dois furos como consecutivos ao percorrer o barbante, o que não é possível.

9. **(B)** Suponha que Daniel tenha recebido x reais de cada um de seus amigos. Então, Adriano tinha, inicialmente, $5x$ reais, Bruno tinha $4x$ reais e César tinha $3x$ reais. Segue que o total de dinheiro dos três no início era de $5x + 4x + 3x = 12x$ reais. Como cada um de seus três amigos lhe deu x reais, Daniel tem agora $3x$ reais, o que representa a quarta parte de $12x$. Logo, ele possui agora $\frac{1}{4}$ da quantia que seus três amigos juntos possuíam inicialmente.

10. Como a soma dos números de uma diagonal é $4 + 0 + (-4) = 0$, este deve ser o valor da soma dos números de cada linha coluna e diagonal.

Assim, obtemos de imediato os números que faltam nas casas em cinza no primeiro tabuleiro: 16, 8 e 12, pois $(-12) + 16 + (-4) = 0$ (na primeira linha), $(-12) + 8 + 4 = 0$ (na primeira coluna) e $(-12) + 0 + (12) = 0$ (na diagonal).

-12		- 4
	0	
4		

→

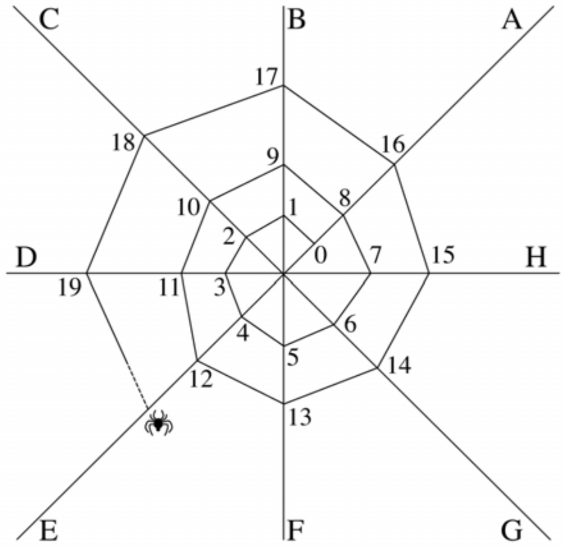
-12	*16*	- 4
8	0	
4		*12*

→

-12	*16*	- 4
8	0	-8
4	-16	*12*

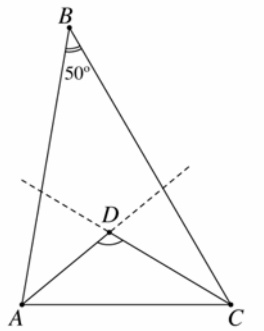
Agora, o número que falta na segunda linha do segundo tabuleiro é (-8), porque $8 + 0 + (-8) = 0$. Para a terceira linha, obtemos (-16), pois $4 + (-16) + 12 = 0$.

1) A, B, C, D, E, F, G e H são os fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme mostra a figura. A aranha continua seu trabalho. Sobre qual fio de apoio estará o número 118 ?



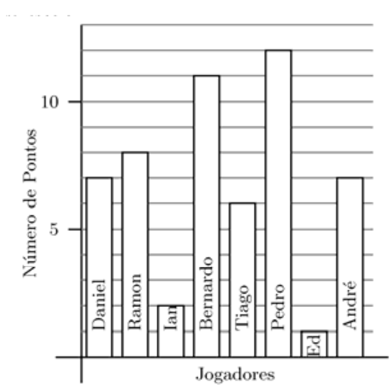
A) B B) D C) E D) G E) H

2) Na figura temos $\hat{B} = 50^\circ$, AD e CD são as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ respectivamente.



Qual a medida do ângulo $A\hat{D}C$?

A) 90° B) 100° C) 115° D) 122.5° E) 125°



3) O gráfico mostra o número de pontos que cada jogador da seleção de basquete da escola marcou no último jogo.
O número total de pontos marcados pela equipe foi:

A) 54 B) 8 C) 12 D) 58 E) 46

4) Geni é cliente de um companhia telefônica que oferece o seguinte plano:

- tarifa mensal fixa de R\$ $18,00$
- gratuidade em 10 horas de ligações por mês
- R\$ $0,03$ por cada minuto que exceder às 10 horas.

Em janeiro, Geni usou seu telefone por 15 horas e 17 minutos, e em fevereiro por 9 horas e 55 minutos. Qual a despesa de Geni com telefone nesses dois meses?

A) R\$ $45,51$ B) R\$ $131,10$ C) R\$ $455,10$ D) R\$ $13,11$ E) R\$ $4,55$

5) Veja as promoções de dois supermercados:

Supermercado A	**Supermercado B**
6 latas de 3 litros do sorvete QUENTE	Sorvete QUENTE – lata de 3 litros
R\$ $24,00$	4 latas - só R\$ $14,00$

Joana quer comprar 12 latas de sorvete para a festa de seu aniversário. Em qual supermercado ela deve comprar?

A) No A, pois economizará R\$ $7,00$ em relação ao B.
B) No A, pois economizará R\$ $6,00$ em relação ao B.
C) No B, pois economizará R\$ $8,00$ em relação ao A.
D) No B, pois economizará R\$ $6,00$ em relação ao A.
E) Tanto faz, porque o preço é o mesmo nos dois supermercados.

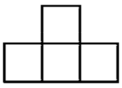
6) Paulo quer comprar um sorvete com 4 bolas em uma sorveteria que dispõe de três sabores: açaí, baunilha e cajá. De quantos modos diferentes ele pode fazer a compra?

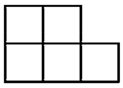
A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

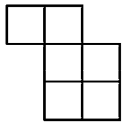
7) A prefeitura de uma certa cidade fez uma campanha que permite trocar 4 garrafas de 1litro vazias por uma garrafa de 1 litro cheia de leite. Até quantos litros de leite pode obter uma pessoa que possua 43 dessas garrafas vazias fazendo trocas sucessivas?

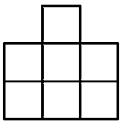
A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

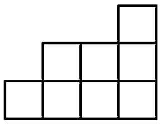
8) Pedro montou um quadrado com quatro das cinco peças abaixo. Qual é a peça que ele não usou?

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

(e) 

9) Uma linha de ônibus possui 12 paradas numa rua em linha reta. A distância entre duas paradas consecutivas é sempre a mesma. Sabe-se que a distância entre a terceira e a sexta paradas é 3300 metros. Qual é a distância entre a primeira e a última parada?

A) $8,4\,km$ B) $12,1\,km$ C) $9,9\,km$ D) $13,2\,km$ E) $9,075\,km$

10) Sete equipes, divididas em dois grupos, participaram do torneio de futebol do meu bairro.

O grupo 1 foi formado pelas equipes Avaqui, Botágua e Corinense.
O grupo 2 foi formado pelas equipes Dinossauros, Esquisitos, Flurinthians e Guaraná.

Na primeira rodada do torneio, cada equipe enfrentou cada uma das equipes <u>do seu grupo</u> exatamente uma vez.

Na segunda rodada do torneio, cada equipe enfrentou cada uma das equipes do <u>outro grupo</u> exatamente uma vez.

(a) Quantas partidas foram disputadas na primeira rodada no grupo 1?
(b) Quantas partidas foram disputadas na primeira rodada no grupo 2?
(c) Quantas partidas foram disputadas na segunda rodada?

1. **(D)** Observe que são 8 fios de apoio que a aranha utiliza, numerados a partir do fio A iniciando com 0. Logo:

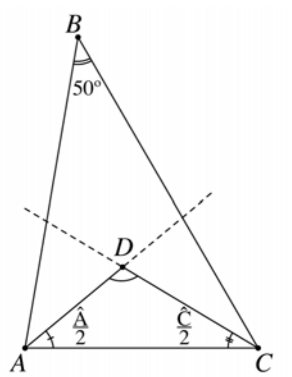
- sobre o fio A aparecem os $\text{múltiplos de } 8$
- sobre o fio B aparecem os $(\text{múltiplos de } 8)+1$
- sobre o fio C aparecem os $(\text{múltiplos de } 8)+2$
- sobre o fio D aparecem os $(\text{múltiplos de } 8)+3$
- sobre o fio E aparecem os $(\text{múltiplos de } 8)+4$
- sobre o fio F aparecem os $(\text{múltiplos de } 8)+5$
- sobre o fio G aparecem os $(\text{múltiplos de } 8)+6$
- sobre o fio H aparecem os $(\text{múltiplos de } 8)+7$

Na divisão de 118 por 8 encontramos resto 6, o que significa que $118=(\text{múltiplo de } 8)+6$. Portanto, 118 está sobre o fio G.

2. **(C)** Nesta questão, usaremos o seguinte importante teorema da Geometria Plana:
Teorema: *A soma dos ângulos internos de um triângulo é* 180^o.

Do teorema acima temos $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^o$, e como $\hat{B}=50^o$, segue que

$$\hat{A}+50^o+\hat{C}=180^o \Rightarrow \hat{A}+\hat{C}=130^o.$$



Aplicando agora o teorema ao triângulo ADC, obtemos:

$$\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}+A\hat{D}C=180^o$$

Como $\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}=\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}=\frac{130^\circ}{2}=65^\circ$, concluímos da igualdade acima que $A\hat{D}C=180^o - 65^o=115^o$.

3. **(A)** Analisando o gráfico, verificamos que os jogadores marcaram as seguintes quantidades de pontos: Daniel 7, Ramon 8, Ian 2, Bernardo 11, Tiago 6, Pedro 12, Ed 1 e André 7.

Total: 54 pontos.

4. **(A)** Vejamos a despesa em janeiro. Como 10 horas são gratuitas e Geni usou seu telefone por 15 horas e 17 minutos, ela deve pagar o custo de apenas 5 horas e 17 minutos mais a tarifa fixa mensal de 18 reais. Como o preço é dado em minutos, vamos reduzir a minutos o tempo a pagar. Sabemos que 1 hora = 60 minutos, portanto $5\,\text{horas} = 5 \times 60 = 300\,\text{minutos}$. Logo, $5\,\text{h}\,17\,\text{m} = 300 + 17 = 317\,\text{m}$. Portanto, a conta telefônica de Geni em janeiro foi:

$$18 + 317 \times 0,03 = 18 + 9,51 = 27,51 \text{ reais.}$$

Em fevereiro, Geni usou seu telefone menos do que 10 horas, portanto neste mês ela só precisa pagar a tarifa fixa mensal de 18 reais. Logo, a despesa de Geni com telefone nesses dois meses foi:

$$27,51 + 18 = 45,51 \text{ reais.}$$

5. **(D)** Se comprar no supermercado A, Joana gastará $2 \times \text{R\$}24,00 = \text{R\$}48,00.$

Se comprar no supermercado B, ela gastará $3 \times \text{R\$}14,00 = \text{R\$}42,00.$

6. **(D)** Vamos denotar cada sabor de sorvete pela sua letra inicial:
$a \to$ açaí, $b \to$ baunilha, $c \to$ cajá

Para enumerar todas as possibilidades de compra do sorvete com quatro bolas, devemos considerar os seguintes casos:

- 4 bolas do mesmo sabor (1ª coluna ao lado);
- 3 bolas do mesmo sabor e 1 de sabor diferente (2ª coluna ao lado);
- 2 bolas de um mesmo sabor e 2 de outro sabor (3ª coluna ao lado);
- 2 bolas de um mesmo sabor e as outras 2 dos outros dois sabores (4ª coluna ao lado).

aaaa	*aaab*	*aabb*	*aabc*
bbbb	*aaac*	*aacc*	*bbac*
cccc		*bbcc*	*ccab*
	bbba		
	bbbc		
	ccca		
	cccb		

Obtemos assim 15 modos de fazer a compra do sorvete.

7. **(D)** Ele separa 40 garrafas vazias e as troca por 10 garrafas de 1 litro cheias de leite. Esvaziadas as 10 garrafas, ele pode juntá-las com as 3 vazias que restaram e trocá-las por 3 garrafas cheias, sobrando ainda 1 garrafa vazia. Esvaziando as 3 cheias e juntando com a garrafa vazia, ele ainda pode obter em troca mais uma garrafa cheia. Ao todo, ele pode obter, por sucessivas trocas, $10 + 3 + 1 = 14$ garrafas cheias de leite, todas elas a partir das 43 vazias que ele possuía.

8. **(B)**

Solução 1 - Contando o total de quadrados nas peças.

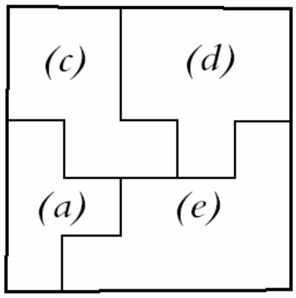
Para que seja possível montar o quadrado, o número total de quadradinhos deve ser um quadrado perfeito (Um número é um *quadrado perfeito* se ele é igual ao quadrado de um número inteiro. Por exemplo, $1, 9$ e 16 são quadrados perfeitos pois $1 = 1^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$.).

Contando o total de quadradinhos apresentados nas cinco opções de resposta, obtemos: $4+5+6+7+8=30$.

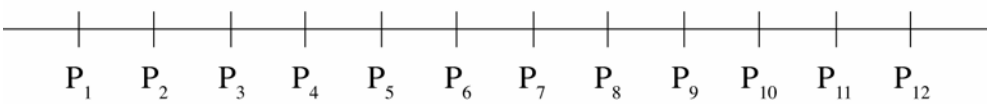
Portanto, devemos eliminar uma peça de modo que o total de quadradinhos resultante seja um quadrado perfeito. A única possibilidade é a (b). De fato, eliminando (b), a soma fica sendo 25 que é um quadrado perfeito, pois $25 = 5^2$.

Solução 2 - Tentando montar o quadrado com 4 das cinco peças.

Neste caso, conseguimos montar um quadrado com as peças *a*, *c*, *d* e *e*, como na figura:



9. **(B)**



Como a distância entre a 3ª e a 6ª paradas é $3300\,m$, então a distância entre duas paradas consecutivas é $3300 \div 3 = 1100\,m$.

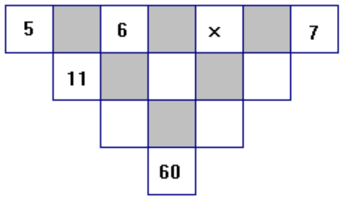
Portanto, a distância entre a primeira e a última paradas é $1100\,m \times 11 = 12100\,m$. Como as opções da resposta são dadas em quilômetro, devemos reduzir $12100\,m$ a quilômetro. Como $1\,km = 1000\,m$, temos $12100\,m = 12{,}1\,km$.

10. **(a)** Foram disputadas 3 partidas que são: $A \times B$, $B \times C$, $C \times A$.

(b) Foram disputadas 6 partidas que são: $D \times E$, $D \times F$, $D \times G$, $E \times F$, $E \times G$, $F \times G$

(c) Na segunda rodada, cada equipe do grupo 1 joga 4 partidas; uma com cada equipe do grupo 2. Como o grupo 1 tem 3 equipes, o total de partidas será $3 \times 4 = 12$.

1) Os quadrados brancos sem números da figura ao lado devem ser preenchidos com números de modo que cada número, a partir da segunda linha, seja igual à soma dos dois números vizinhos da linha imediatamente superior. Por exemplo, o número da primeira casa da segunda linha é 11, porque $11 = 5 + 6$. Qual o número que vai aparecer no quadrado indicado com x?

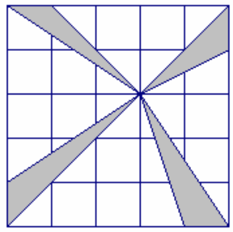


A) 4 B) 6 C) 9 D) 15 E) 10

2) Uma bola de futebol é feita com 32 peças de couro. Dessas peças 12 são pentágonos regulares idênticos e as outras 20 são hexágonos, também regulares e idênticos. Os lados dos pentágonos são iguais aos lados dos hexágonos. Para unir dois lados de duas dessas peças é necessária uma costura. Quantas são as costuras necessárias para fazer uma bola?

A) 60 B) 64 C) 90 D) 120 E) 180

3) A figura ao lado mostra uma grade formada por quadrados de lado $1cm$. Qual é a razão entre a área sombreada e a área não sombreada?



A) $1/4$ B) $1/5$ C) $1/6$
D) $2/5$ E) $2/7$

4)Em um quente dia de verão, 64 crianças comeram, cada uma, um sorvete pela manhã e outro à tarde. Os sorvetes eram de 4 sabores: abacaxi, banana, chocolate e doce de leite. A tabela abaixo mostra quantas crianças consumiram um destes sabores pela manhã e outro à tarde; por exemplo, o número 7 na tabela indica que 7 crianças tomaram sorvete de banana pela manhã e de chocolate à tarde.

		TARDE			
		Abacaxi	Banana	Chocolate	Doce de leite
MANHÃ	Abacaxi	1	8	0	3
	Banana	6	2	7	5
	Chocolate	3	3	0	5
	Doce de Leite	2	9	9	1

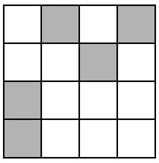
Quantas crianças tomaram sorvetes de sabores diferentes neste dia?

A) 58 B) 59 C) 60 D) 61 E) 62

5) Camila e Lara têm, cada uma, um tabuleiro 4×4, inicialmente ambos em branco. Com estes tabuleiros elas fazem uma brincadeira do seguinte modo:

- Camila, escondida de Lara, pinta algumas casas de seu tabuleiro, de preto;
- Ainda em seu tabuleiro, Camila escreve em cada casa o número de casas vizinhas que estão pintadas de preto (duas casas distintas são vizinhas se possuem um lado ou um vértice em comum);
- Camila copia os números escritos em seu tabuleiro no tabuleiro de Lara;
- Lara deve adivinhar, a partir dos números escritos em seu tabuleiro, quantas são as casas pretas do tabuleiro de Camila.

Por exemplo, se Camila pintou seu tabuleiro assim



então ela vai colocar os números no tabuleiro de Lara do seguinte modo:

1	1	3	1
2	3	2	2
1	3	1	1
1	2	0	0

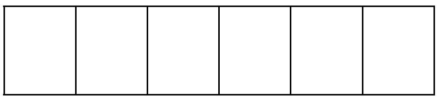
Se o tabuleiro de Lara tem os números

1	2	1	1
0	2	1	2
2	3	3	1
1	0	2	1

quantas foram as casas que Camila pintou?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

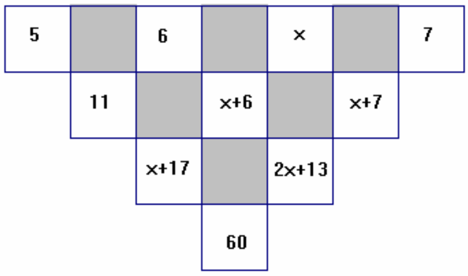
6) Larissa e Jorge estão jogando com cartões numerados de 1 a 6 que devem ser colocados nas casas do tabuleiro abaixo de modo a formar um número de seis algarismos.



Jorge coloca o primeiro cartão e a seguir as jogadas são alternadas entre os dois. O objetivo de Larissa é obter o maior número possível e o de Jorge é obter o menor número possível. Larissa tem os cartões com os algarismos 1, 3 e 5 e Jorge tem os cartões com os algarismos 2, 4 e 6. Se os dois jogadores forem espertos, qual o número que aparecerá ao final do jogo?

A) 254361 B) 253416 C) 251634 D) 256134 E) 251346

1. **(E)** Preenchendo o tabuleiro de acordo com as regras do problema:



segue que $60 = (x+17)+(2x+13) = 3x+30$, donde $x = 10$.

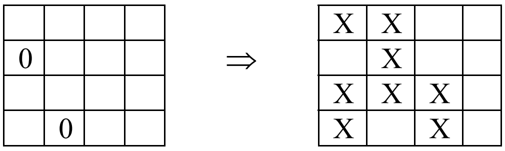
2. **(C)** Se somarmos os números de lados de todos os polígonos (20 hexágonos e 12 pentágonos) que compõem a superfície da bola, obteremos um valor que é duas vezes o número de costuras, pois cada costura é lado comum de exatamente dois polígonos. Assim, temos que $2\times$ (número de costuras) $= 12\times 5 + 20\times 6 = 180$, donde o número de costuras é 90.

3. **(A)** A grade é um quadrado de lado igual a $5cm$, logo sua área é igual a $25cm^2$. A parte sombreada da grade é formada por quatro triângulos, sendo que dois deles têm base $1cm$ e altura $2cm$ e os outros dois têm base $1cm$ e altura $3cm$. Logo a área sombreada é igual a $2\times\frac{1\times 2}{2}+2\times\frac{1\times 3}{2} = 5cm^2$ e a área não sombreada é igual a $25-5 = 20cm^2$. Assim, a razão pedida é $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.

4. **(C)** Vamos primeiro analisar a informação contida na diagonal da tabela indicada pelos números dentro dos quadradinhos.

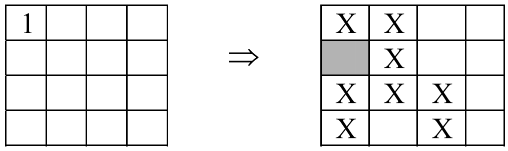
		TARDE			
		Abacaxi	Banana	Chocolate	Doce de leite
MANHÃ	Abacaxi	$\boxed{1}$	8	0	3
	Banana	6	$\boxed{2}$	7	5
	Chocolate	3	3	$\boxed{0}$	5
	Doce de Leite	2	9	9	$\boxed{1}$

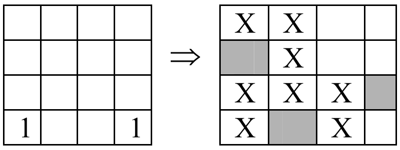
Esses números indicam quantos foram as crianças que tomaram sorvetes com o mesmo sabor pela manhã e pela tarde: 1 tomou sorvetes de abacaxi, 2 de banana, 0 de chocolate e 1 de doce de leite. Todos os outros estudantes comeram sorvetes de sabores diferentes pela manhã e à tarde; estes são em número de $64-(1+2+0+1) = 60$.



5. **(B)** Notamos primeiro que se uma casa tem o algarismo 0, então nenhuma das casas vizinhas pode estar pintada. Logo as casas marcadas com um X na figura ao lado não foram pintadas:

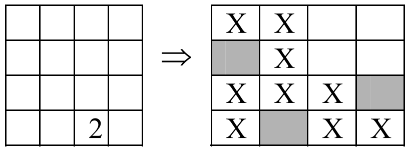
Consideremos agora a casa do canto superior direito, na qual aparece o número 1. Ela tem 3 vizinhas, e já sabemos que duas delas não foram pintadas; logo, a vizinha que sobra (a casa imediatamente abaixo) foi pintada.

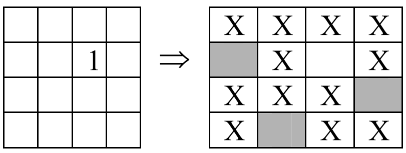




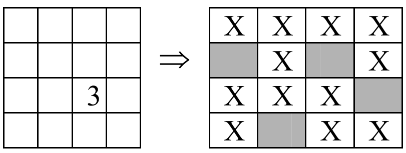
Podemos aplicar o mesmo argumento às casas do canto inferior esquerdo e do canto inferior direito.

Olhamos agora para o 2 na última linha. Como esta casa já tem duas vizinhas pintadas, todas suas outras vizinhas não foram pintadas:





Argumento idêntico se aplica à casa da segunda linha e terceira coluna, pois nela aparece um 1 e já temos uma de suas vizinhas pintadas. Logo, as suas outras 3 vizinhas não foram pintadas



Finalmente, usamos o 3 que aparece na casa da terceira linha e terceira coluna; esta casa já tem 2 vizinhas pintadas, logo deve haver mais uma de suas vizinhas pintada. Esta vizinha só pode ser a casa em branco na figura acima, e podemos completar a tabela:

Concluímos que o número de casas pintadas é 4.

6. **(B)** A formação de um número de 6 algarismos é ilustrada a seguir.

centena de milhar	dezena de milhar	unidade de milhar	centena	dezena	unidade

Para se obter o menor número possível, os menores algarismos devem estar o mais à esquerda possível (na casa do milhar); e para se obter o maior número possível os maiores algarismos devem também estar o mais à esquerda possível (na casa do milhar).

<u>Jorge joga primeiro</u>: Para obter o menor número possível, ele coloca o menor algarismo que ele possui, que é o 2, na casa das centenas de milhar. Se ele não fizesse isso, Larissa colocaria seu 5 nesta casa na próxima jogada, obtendo assim um número maior.

2	dezena de milhar	unidade de milhar	centena	dezena	unidade

<u>Agora é a vez de Larissa</u>: Para obter o maior número possível, ela coloca o maior algarismo que ela possui, que é o 5, na casa das dezenas de milhar, pois a casa das centenas de milhar já está ocupada.

2	5	unidade de milhar	centena	dezena	unidade

Jorge tem agora os algarismos 4 e 6, e Larissa 1 e 3. Logo, os algarismos de Larissa são menores dos que os de Jorge, o que determina a estratégia de Jorge : ele deve tentar colocar seus algarismos o mais à direita possível, com o 6 à direita do 4. Por sua vez, Larissa deve tentar colocar seus algarismos o mais à esquerda possível, com o 3 à esquerda do 1. Jorge então coloca o 6 na casa das unidades.

<u>Jorge joga:</u> Ele coloca o algarismo 6 na casadas unidades.

2	5	unidade de milhar	centena	dezena	6

<u>Larissa joga:</u> Ela coloca seu 1 na casa das dezenas.

2	5	unidade de milhar	centena	1	6

Agora Jorge tem apenas o algarismo 4 e Larissa o 3. Ele então coloca o 4 na casa das centenas, e Larissa coloca o 3 na casa das unidades de milhar, acabando assim o jogo.

2	5	3	4	1	6

Logo, o número final obtido se os dois jogadores forem espertos é 253416.

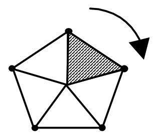
1) Uma professora tem 237 balas para dar a seus 31 alunos. Qual é o número mínimo de balas a mais que ela precisa conseguir para que todos os alunos recebam a mesma quantidade de balas, sem sobrar nenhuma?

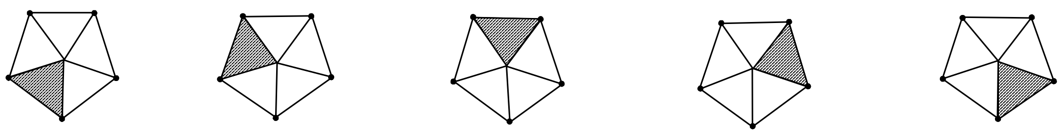
A) 11 B) 20 C) 21 D) 31 E) 41

2) Um artesão começa a trabalhar às 8 h e produz 6 braceletes a cada vinte minutos; já seu auxiliar começa a trabalhar uma hora depois e produz 8 braceletes do mesmo tipo a cada meia hora. O artesão pára de trabalhar às 12 h, mas avisa ao seu auxiliar que este deverá continuar trabalhando até produzir o mesmo que ele. A que horas o auxiliar irá parar?

A) 12 h B) 12 h 30 min C) 13 h D) 13 h 30 min E) 14h 30 min

3) Se girarmos o pentágono regular, ao lado, de um ângulo de 252°, em torno do seu centro, no sentido horário, qual figura será obtida?
Observação: Sentido horário é o sentido em que giram os ponteiros do relógio; no caso ele está indicado pela seta no desenho.





A) B) C) D) E)

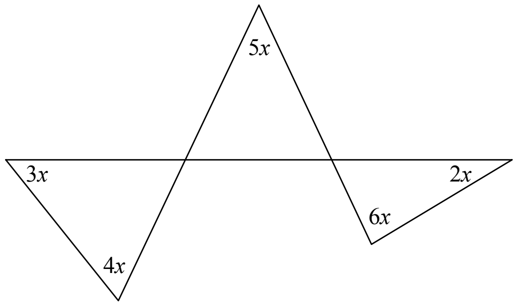
4) O perímetro de um retângulo é 100 cm e a diagonal mede x cm. Qual é a área do retângulo em função de x?

A) $625-x^2$ B) $625-\frac{x^2}{2}$ C) $1250-\frac{x^2}{2}$ D) $250-\frac{x^2}{2}$ E) $2500-\frac{x^2}{2}$

5) Se $x+y=8$ e $xy=15$, qual é o valor de $x^2+6xy+y^2$?

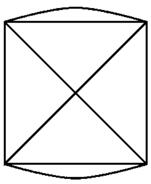
A) 64 B) 109 C) 120 D) 124 E) 154

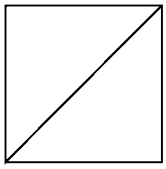
6) Na figura estão indicadas em graus as medidas de alguns ângulos em função de x. Quanto vale x?

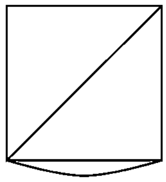


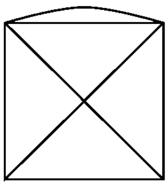
A) 6° B) 12° C) 18°
D) 20° E) 24°

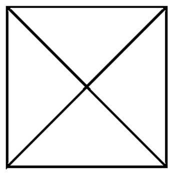
7) Qual dos seguintes desenhos **não pode ser feito** sem tirar o lápis do papel e passando apenas uma vez por cada linha?

A) 

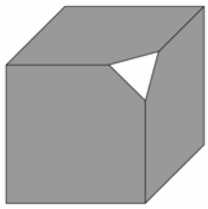
B) 

C) 

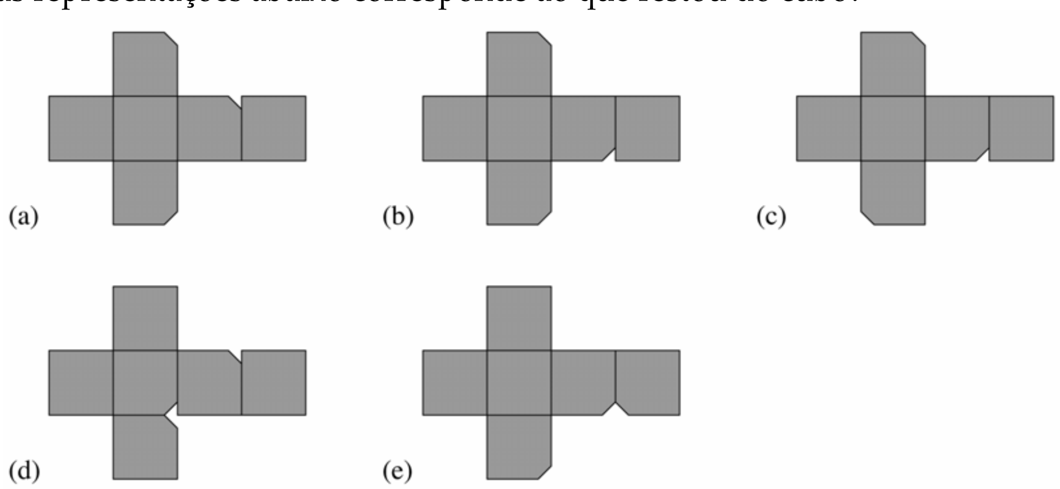
D) 

E) 

8)Cortamos um canto de um cubo, como mostrado na seguinte figura.



Qual das representações abaixo corresponde ao que restou do cubo?



9)Você já viu *um truque numérico*? Aqui vão os passos de um truque numérico:

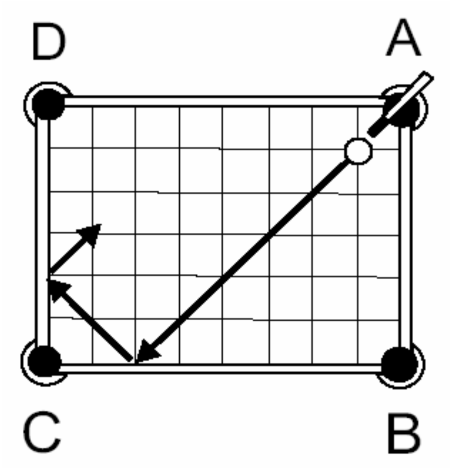
(I) Escolha um número qualquer.
(II) Multiplique-o por 6.
(III) Do resultado subtraia 21.
(IV) Divida agora este novo resultado por 3.
(V) Deste último resultado subtraia o dobro do número que você escolheu.

(a) Experimente fazer esses cinco passos três vezes, iniciando cada vez com um número diferente. Qual foi o resultado de seu experimento?

(b) A seguir, usando a letra x para representar o número que você pensou, mostre por que os resultados do item (a) não são apenas uma coincidência, mas sim um fato matemático.

10)Na figura abaixo vemos uma mesa de sinuca quadriculada e parte da trajetória de uma bola, tacada a partir de um canto da mesa, de modo que, sempre, ao bater em uma das bordas da mesa, segue seu movimento formando ângulos de 45° com a borda.

(a) Em qual das quatro caçapas a bola cairá?
(b) Quantas vezes a bola baterá nas bordas da mesa antes de cair na caçapa?
(c) A bola atravessará a diagonal de quantos desse quadrados durante sua trajetória?

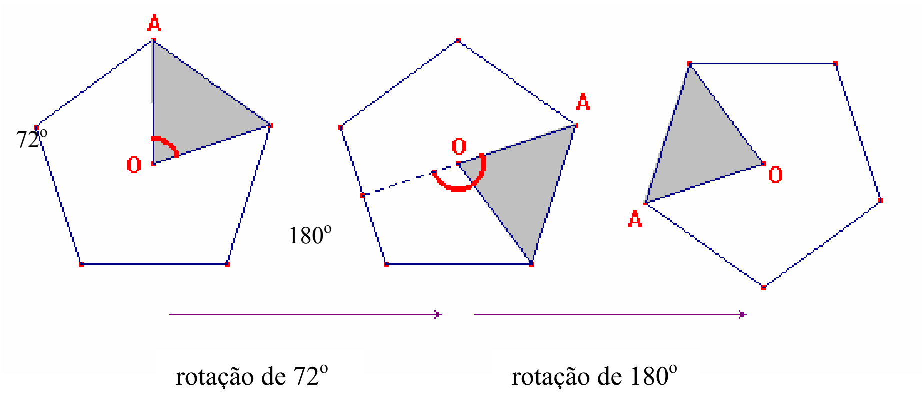


1. **(A)** O algoritmo de divisão de Euclides nos dá $237 = 7\times 31+20$; logo 237 não é divisível por 31. Isso quer dizer que a professora realmente vai ter que comprar mais balas para que todos os alunos recebam o mesmo número de balas. De acordo com o enunciado, devemos então adicionar à expressão $7\times 31+20$ o menor inteiro positivo x tal que $7\times 31+20+x$ seja múltiplo de 31. Como $x = 31-20 = 11$, basta que a professora compre 11 balas.

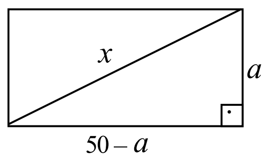
2.**(D)** O artesão produz 6 braceletes a cada 20 minutos. Como $1 \text{ hora} = 60 \text{ minutos} = 3 \times 20 \text{ minutos}$, o artesão produz $6\times 3 = 18$ braceletes em 1 hora. Como ele trabalhou $12\,\text{horas} - 8\,\text{horas} = 4\,\text{horas}$, o número de braceletes feitos pelo artesão é $18\times 4 = 72$.

O auxiliar produz 8 braceletes a cada meia-hora, portanto em 1 hora ele produz 16 braceletes. Para produzir 72 braceletes ele precisará de $\frac{72}{16} = 4{,}5$ horas $=$ 4 horas e 30 minutos. Como ele inicia seu trabalho às 9 horas, ele terminará seu trabalho às $9 \text{ horas} + 4 \text{ horas} + 30 \text{ minutos} = \ 13 \text{ horas e } 30 \text{ minutos}$.

3. **(B)** O pentágono tem 5 lados, logo seu ângulo central é $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Como $252^\circ = 72^\circ + 180^\circ$, podemos pensar na rotação de 252° como uma rotação de 72° seguida de outra de 180°, conforme ilustrado na figura abaixo, onde O é o centro do polígono.



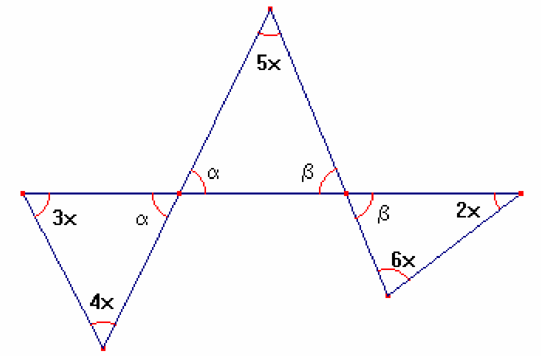
4. **(C)** **Solução 1:** Como o perímetro do retângulo é 100, seu semi-perímetro é 50. Como o semi-perímetro de um retângulo é a soma do comprimento com a largura, concluímos que esses são da forma a e $50-a$. A área de um retângulo é o produto do comprimento pela largura. No nosso caso, esta área é $(50-a).a = 50a - a^2$ .Pelo teorema de Pitágoras, temos $x^2 = (50-a)^2 + a^2$, ou seja, $x^2 = 2500 - 100a + 2a^2 = 2500 - 2(50a - a^2)$. Logo $50a - a^2 = \frac{1}{2}(2500 - x^2)$ e obtemos a expressão da área do retângulo em função de x.



Solução 2: Área do retângulo de medidas a e b é $A = ab$. Como $a+b = 50$, temos $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 50^2$. Pelo Teorema de Pitágoras, $x^2 = a^2 + b^2$, assim, $x^2 + 2A = 2500$

5. **(D)** Usando a identidade $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$, temos

$$x^2+6xy+y^2 = (x^2+2xy+y^2)+4xy = (x+y)^2+4xy = 8^2+4\times 15 = 124$$



6. **(C)** Completamos a figura marcando os ângulos α e β, lembrando que ângulos opostos pelo vértice são iguais. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, podemos escrever as três igualdades abaixo, uma para cada um dos triângulos da figura:

$$\alpha + 7x = 180^o$$
$$\beta + 8x = 180^o$$
$$\alpha + \beta + 5x = 180^o$$

Logo,

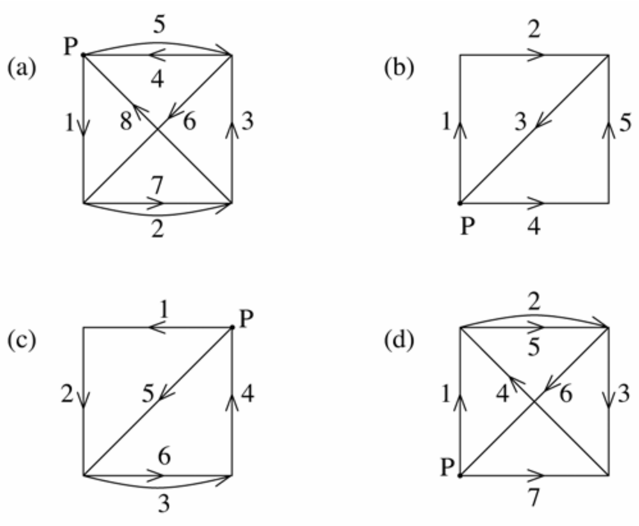
$$(\alpha+7x)+(\beta+8x)-(\alpha+\beta+5x) = 180^o + 180^o - 180^o = 180^o$$

e como

$$(\alpha+7x)+(\beta+8x)-(\alpha+\beta+5x) = \alpha+7x+\beta+8x-\alpha-\beta-5x = 10x$$

segue que $10x = 180^o$, donde $x = 18^o$

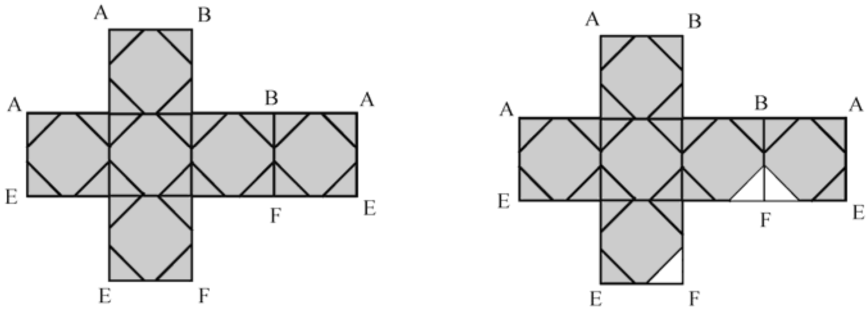
7. **(E)**



Observe nas ilustrações (a), (b), (c) e (d) que iniciando o desenho no ponto P e seguindo as setas de acordo com a ordem numérica, é possível completar cada desenho sem tirar o lápis do papel.

Já o desenho da opção (e) não pode ser construído sem tirar o lápis do papel. De fato, excetuando-se o vértice de início do traçado e o vértice de finalização, os demais vértices do desenho devem possuir obrigatoriamente um número par de linhas chegando até eles, pois a cada vez que se chega a um desses vértices por uma linha, deixa-se esse mesmo vértice por outra linha. No caso da letra (e), os quatro vértices externos possuem três linhas chegando a cada um deles, logo é impossível fazer tal traçado.

8. **(E)** Cortando um canto do cubo, eliminamos um de seus vértices. Como cada vértice se liga a três arestas do cubo, uma representação do cubo cortado deve mostrar três cortes ao redor de um mesmo vértice.



9. **(a)** Vamos fazer o experimento com os números 0, 5 e – 4.

$$0 \xrightarrow[\times 6]{} 0 \xrightarrow[-21]{} -21 \xrightarrow[\div 3]{} -7 \xrightarrow[-(0 \times 2) = 0]{} -7$$

$$5 \xrightarrow[\times 6]{} 30 \xrightarrow[-21]{} 9 \xrightarrow[\div 3]{} 3 \xrightarrow[-(5 \times 2) = -10]{} -7$$

$$-4 \xrightarrow[\times 6]{} -24 \xrightarrow[-21]{} -45 \xrightarrow[\div 3]{} -15 \xrightarrow[-(-4 \times 2) = +8]{} -7$$

O resultado final é sempre -7.

(b) É razoável conjeturar então que para qualquer número escolhido o resultado final deste procedimento será sempre –7. Seja x o número inicial. Temos então as operações:

$$x \xrightarrow[\times 6]{} 6x \xrightarrow[-21]{} 6x-21 \xrightarrow[\div 3]{} \frac{6x-21}{3} \xrightarrow[-2x]{} 2x-7-2x=-7$$

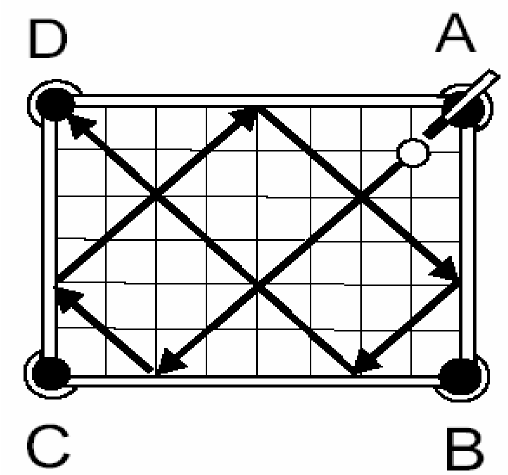
Portanto, o resultado será -7 qualquer que seja o número inicialmente escolhido.

10. A bola muda a direção de sua trajetória cada vez que bate na borda da mesa. Como a trajetória faz sempre um ângulo de 45° com a borda, a bola seguirá sempre as diagonais dos quadrados que ela cruza.

a) Traçando esta trajetória, concluímos que a bola cairá na caçapa D;

b) A bola baterá 5 vezes na borda da mesa;

c)Contando quantos são os quadradinhos atravessados, descobrimos que ela atravessará 23 quadradinhos.



1) Se m e n são inteiros maiores do que zero com $m < n$, definimos $m \nabla n$ como a soma dos inteiros entre m e n, incluindo m e n. Por exemplo, $5 \nabla 8 = 5 + 6 + 7 + 8 = 26$.

Então o valor de $\frac{22\nabla 26}{4\nabla 6}$ é:

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

2) O preço de uma corrida de táxi é R$ 2,50 fixos ("bandeirada"), mais R$ 0,10 por cada 100 metros rodados. Tenho apenas R$ 10,00 no bolso. Logo, tenho dinheiro para uma corrida de até:

A) $2{,}5\,km$ B) $5{,}0\,km$ C) $7{,}5\,km$ D) $10{,}0\,km$ E) $12{,}5\,km$

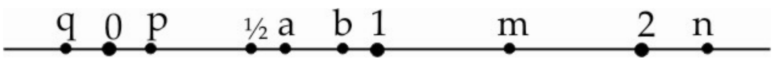
3) Quantos números entre 1 e 601 são múltiplos de 3 ou múltiplos de 4?

A) 100 B) 150 C) 250 D) 300 E) 430

4) Se x, y e z são números inteiros positivos tais que $xyz = 240$, $xy + z = 46$ *e* $x + yz = 64$, qual é o valor de $x + y + z$?

A) 19 B) 20 C) 21 D) 24 E) 36

5) Na reta abaixo estão representados os cinco números **a, b, m, n, p** e **q**



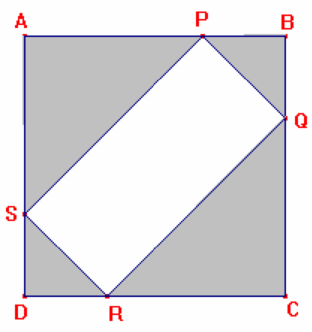
Então os números que melhor representam $a+b$, $a-b$ e ab são, respectivamente,

(A) m, p e q (B) m, q e p (C) n, q e p (D) n, p e q (E) q, m e p

6) Numa corrida de carros, um piloto percorreu três trechos: um de $240\,km$, um de $300\,km$ e um de $400\,km$. O piloto sabe que as velocidades médias nesses trechos foram $40\,km/h$, $75\,km/h$ e $80\,km/h$, mas não se lembra qual dessas velocidades corresponde a cada um desses trechos.. Podemos garantir que o tempo total em horas gasto pelo piloto para percorrer os três trechos foi:

A) menor ou igual a 13 horas
B) maior ou igual a 13 horas e menor ou igual a 16 horas
C) maior ou igual a 16 horas e menor ou igual a 17 horas
D) maior ou igual a 15 horas e menor ou igual a 18 horas
E) maior ou igual a 18 horas

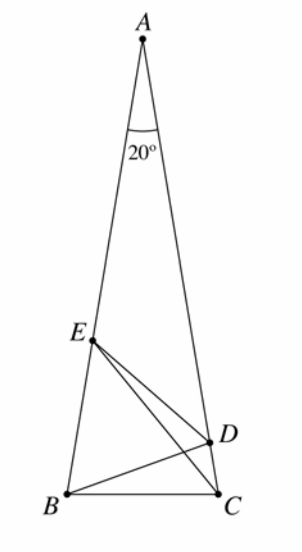
7) Do quadrado $ABCD$ foram cortados os triângulos isósceles sombreados, como na figura, restando o retângulo $PQRS$. A área total do que foi cortada é de $200m^2$. Qual é o comprimento de PR?



(A) $\sqrt{200}m$ (B) $20m$ (C) $\sqrt{800}m$ (D) $25m$ (E) $88m$

8) Na figura o triângulo ABC é isósceles, $B\hat{A}C = 20^\circ$ e $BC = BD = BE$.

Determine a medida do ângulo $B\hat{D}E$.



9) São dadas 4 moedas aparentemente iguais, das quais 3 são verdadeiras e por isso têm o mesmo peso; uma é falsa e por isso tem peso diferente. Não se sabe se a moeda falsa é mais leve ou mais pesada que as demais. Mostre que é possível determinar a moeda diferente empregando somente duas pesagens em uma balança de pratos. *Observação*: Neste tipo de balança podemos comparar os pesos colocados nos dois pratos, ou seja, a balança pode ficar equilibrada ou pender para o lado mais pesado.

1. **(C)** De acordo com a definição de ∇, temos $\dfrac{22\nabla 26}{4\nabla 6}=\dfrac{22+23+24+25+26}{4+5+6}=\dfrac{120}{15}=8$.

2. **(C)** Como a bandeirada é fixa, temos $10{,}00-2{,}50=7{,}50$ reais a serem gastos apenas com os metros rodados. Cada trecho de 100 metros rodado custa R$ 0,10, então com R$ 7,50 posso fazer uma corrida de $\dfrac{7{,}50}{0{,}10}=\dfrac{750}{10}=75$ trechos de 100 metros cada um, ou seja $75\times 100=7500$ metros. Como 1 quilômetro tem 1000 metros, segue que com R$ $10{,}00$ posso pagar uma corrida de até $7500\,\text{metros}=\dfrac{7500}{1000}\,\text{quilômetros}=7{,}5\,\text{quilômetros}$.

3. **(D)** Para achar o número de múltiplos de 3 compreendidos de 1 a 601, basta usar o algoritmo da divisão e escrever $601=200\times 3+1$. Isso mostra que $3\times \underset{\uparrow}{1}$, $3\times \underset{\uparrow}{2}$, $\ldots$, $3\times \underset{\uparrow}{200}$ são os múltiplos de 3 de 1 a 601, ou seja, temos 200 destes múltiplos. Do mesmo modo vemos que existem 150 múltiplos de 4 de 1 a 601.
Nesse total $\underbrace{200}_{\substack{\text{múltiplos}\\ \text{de } 3}}+\underbrace{150}_{\substack{\text{múltiplos}\\ \text{de } 4}}=350$, alguns números aparecem contados duas vezes, pois são múltiplos de 3 e de 4 ao mesmo tempo. Por exemplo: $12, 36$ e 60 foram incluídos nos 200 múltiplos de 3 e também nos 150 múltiplos de 4. Lembre que os múltiplos de 3 e de 4 são também múltiplos de 12. O mesmo argumento usado acima mostra que temos 50 múltiplos de 12 de 1 a 601. Logo o número de múltiplos de 3 ou 4 de 1 a 601 é $350-50=300$.

4. **(B) Solução 1:** De $xyz=240$ segue que $xy=\dfrac{240}{z}$; substituindo em $xy+z=46$ obtemos $\dfrac{240}{z}+z=46$, ou seja, $z^2-46z+240=0$. As raízes desta equação são números cuja soma é 46 e cujo produto é 240, ou seja, as raízes são 6 e 40. Logo, $z=6$ ou $z=40\,(\text{I})$. Do mesmo modo, a substituição de $yz=\dfrac{240}{x}$ em $x+yz=64$ nos leva a $x=4$ ou $x=60\,(\text{II})$. De $xyz=240$, segue que $y=\dfrac{240}{xz}$. Como y é um número inteiro, então xz é um divisor de 240. Segue de (I) e (II) que as possibilidades para xz são:

$$\underbrace{4}_{x}\times\underbrace{6}_{z}=24\ ,\ \underbrace{4}_{x}\times\underbrace{40}_{z}=160\ ,\ \underbrace{60}_{x}\times\underbrace{6}_{z}=360\ ,\ \underbrace{60}_{x}\times\underbrace{40}_{z}=2400$$

Vemos que só podemos ter $x=4$ e $z=6$, pois em qualquer outro caso o produto xz não é um divisor de 240. Segue que $y=\dfrac{240}{xz}=\dfrac{240}{4\times 6}=10$, donde $x+y+z=4+10+6=20$.

Solução 2: Somando $xy+z=46$ e $x+yz=64$, obtemos:

$$xy+z+x+yz=(x+z)+y(x+z)=(x+z)(y+1)=110 \text{ (I)}$$

e vemos que $y+1$ é um divisor de 110. Logo, temos as possibilidades $y+1=1,2,5,10,11,22,55$ e 110, ou seja, $y=0,1,4,9,10,21,54$ e 109. Por outro lado, y é um divisor de 240 porque $xyz=240$, além disso y é positivo, que nos deixa com as possibilidades e $y=1,4$ e 10.

Se $y=1$ então $\begin{cases}(x+z)(y+1)=110 \Rightarrow x+z=55\\ xy+z=46 \Rightarrow x+z=46\end{cases}$; o que não é possível. Logo $y\neq 1$.

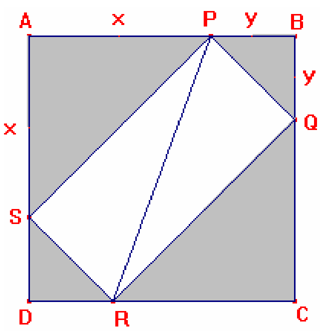
Se $y=4$ então $\begin{cases}(x+z)(y+1)=110 \Rightarrow x+z=22\\ xyz=240 \Rightarrow xz=60\end{cases}$, e podemos verificar (por exemplo, com uma lista de divisores de 60 ou então resolvendo a equação $w^2-22w+60=0$) que não há valores inteiros positivos de x e z que verifiquem estas duas condições. Logo $y\neq 4$.

Se $y=10$ então $\begin{cases}(x+z)(y+1)=110 \Rightarrow x+z=10\\ xyz=240 \Rightarrow xz=24\end{cases}$, donde concluímos que $x=4$ e $z=6$. Finalmente, temos $x+y+z=4+10+6=20$.

5. **(B)** Notamos que a e b são números maiores que 1/2 e menores que 1. Logo $a+b$ é um número maior que 1 e menor que 2; assim, $a+b$ só pode ser representado por m. Como $a<b$, segue que $a-b$ é negativo e portanto só pode ser representado por q. Quanto ao produto ab, notamos primeiro que como a e b são positivos, seu produto é positivo. Por outro lado, temos $b<1$ e $a>0$, donde $ab<a$.Logo o único número que pode representar ab é p.

6. **(D)** O menor tempo de percurso é obtido quando se percorre o maior trecho com a maior velocidade e o menor trecho com a menor velocidade. Já o maior tempo é obtido quando se percorre o maior trecho com a menor velocidade e o menor trecho com a maior velocidade. Assim, o tempo total gasto pelo piloto nos três trechos é no mínimo $\frac{240}{40}+\frac{300}{75}+\frac{400}{80}=15$ horas e no máximo $\frac{240}{80}+\frac{300}{75}+\frac{400}{40}=17$ horas.

7. **(B)** Primeiro notamos que os triângulos *APS* e *CQR* são congruentes, pois têm os três ângulos iguais (um deles é reto) e também um de seus lados *(PS = QR)*. Do mesmo modo os triângulos *BPQ* e *DRS* também são congruentes. Sejam $AP=x$ e $BP=y$; então a área do triângulo *APS* é $\frac{1}{2}x^2$ e a do triângulo *BPQ* é $\frac{1}{2}y^2$. Logo a área cortada foi de $2\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2\right)=x^2+y^2$, e concluímos que $x^2+y^2=200$.



Agora notamos que *PR* é a hipotenusa do triângulo retângulo *PSR*; para calcular *PR* basta saber o comprimento dos catetos *PS* e *RS*. Mas *PS* é a hipotenusa do triângulo retângulo *APS*; do teorema de Pitágoras segue que $PS^2=AS^2+AP^2=x^2+x^2=2x^2$; do mesmo modo obtemos $RS^2=2y^2$. Logo $PR^2=PS^2+RS^2=2x^2+2y^2=2(x^2+y^2)=2\times 200=400$, ou seja, $PR=\sqrt{400}=20\,m$.

8. Lembramos que um triângulo isósceles é caracterizado tanto por ter dois lados iguais como por ter dois ângulos iguais.
A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Como $\hat{A} = 20^o$ e $\hat{B} = \hat{C}$, segue que $180^o = 20^o + \hat{B} + \hat{C} = 20^o + 2\hat{B}$. Logo, $\hat{B} = \hat{C} = 80^o$.

Pelo enunciado temos $BC = BD$, donde o triângulo *BDC* é também isósceles de base *CD*. Então, $C\hat{D}B = \hat{C}$ e portanto $C\hat{D}B = 80^o$. Considerando a soma dos ângulos internos do triângulo *BCD*, temos $C\hat{B}D + C\hat{D}B + \hat{C} = 180^o$. Substituindo os valores acima, temos $C\hat{B}D + 80^o + 80^o = 180^o$.Concluímos que $C\hat{B}D = 20^o$, e segue então que $D\hat{B}E = \hat{B} - 20^o = 80^o - 20 = 60^o$.

O triângulo *BDE* também é isósceles, pois $BD = BE$. Logo $B\hat{D}E = B\hat{E}D$. Como $B\hat{D}E + B\hat{E}D + 60^o = 180^o$, concluímos que $B\hat{D}E = 60^o$.

9. Sejam *A*, *B*, *C* e *D* as quatro moedas. Comparamos as moedas *A* e *B* na balança, colocando uma em cada prato. Dois casos podem ocorrer: a balança fica em equilíbrio ou a balança não fica em equilíbrio. Vamos analisar separadamente cada caso.

1º Caso: A balança fica equilibrada. Podemos concluir que *A* e *B* têm o mesmo peso, e logo são verdadeiras. Vamos então comparar *A* com *C*. Para isso, mantemos *A* na balança e colocamos *C* no lugar de *B*. Se houver equilíbrio novamente, é porque *A* e *C* têm o mesmo peso e logo são verdadeiras. Portanto, *A*, *B* e *C* são verdadeiras, e a única opção é que *D* seja falsa. Se não houver equilíbrio, *C* será a moeda falsa.

2º Caso: A balança não fica equilibrada. Logo uma das duas moedas, *A* ou *B* será falsa. Substituímos *A* por *C* na balança. Se houver equilíbrio, *A* será a moeda falsa. Se não houver equilíbrio, a moeda falsa será *B*.

Observe que nos dois casos só utilizamos a balança duas vezes.

1)Determine o valor de $123456123456 \div 1000001 =$.

2)Toda vez que Joãozinho vai ao cinema, ele toma 2 refrigerantes. Ele gastou toda a sua mesada de R\$ $50,00$ indo ao cinema 6 vezes e tomando um total de 20 refrigerantes, incluindo os que ele tomou quando foi ao cinema. Se Joãozinho tivesse tomado só um refrigerante cada vez que foi ao cinema, com essa economia ele poderia ter ido ao cinema mais uma vez, tomando um refrigerante também nessa ocasião. A respeito do preço do ingresso no cinema e preço do refrigerante, podemos afirmar que:

A) o preço do ingresso é o triplo do preço do refrigerante.
B) o preço do ingresso é o quádruplo do preço do refrigerante.
C) o preço do ingresso é o quíntuplo do preço do refrigerante.
D) o ingresso é R\$ $6,00$ mais caro que o refrigerante.
E) o ingresso é R\$ $5,00$ mais caro que o refrigerante

3)O quociente de 50^{50} por 25^{25} é igual a :

A) 25^{25} B) 10^{25} C) 100^{25} D) 2^{25} E) 2×25^{25}

4)Você possui apenas palitos com $6cm$ e $7cm$ de comprimento. O número mínimo de palitos que você precisa para cobrir com esses palitos um segmento de reta com 2 metros é:

A) 29 B) 30 C) 31 D) 32 E) 33

5)A maior raiz da equação $(x-37)^2 - 169 = 0$ é:

A) 39 B) 43 C) 47 D) 50 E) 53

6)Uma certa máquina tem um visor, onde aparece um número inteiro x, e duas teclas A e B. Quando se aperta a tecla A o número do visor é substituído por 2x + 1. Quando se aperta a tecla B o número do visor é substituído por 3x – 1.
Se no visor está o número 5, o maior número de dois algarismos que se pode obter apertando alguma seqüência das teclas A e B é:

A) 85 B) 87 C) 92 D) 95 E) 96

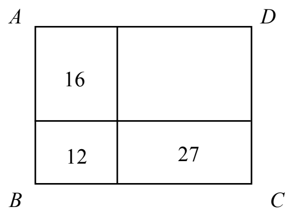
7)Em um quadrado mágico, a soma dos 3 números de cada linha, coluna ou diagonal é sempre a mesma. A seguir temos um quadrado mágico, parcialmente preenchido.

1	14	x
26		13

Qual é o valor de x?

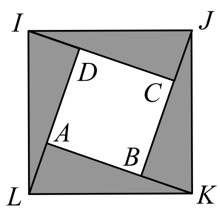
A) 20 B) 22 C) 23 D) 25 E) 27

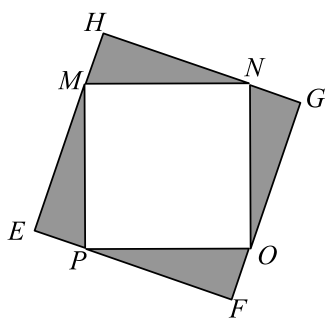
8)Um retângulo *ABCD* está dividido em quatro retângulos menores. As áreas de três deles estão indicadas na figura abaixo. Qual é a área do retângulo *ABCD*?



A) 80 B) 84 C) 86 D) 88 E) 91

9) Quatro peças iguais, em forma de triângulo retângulo, foram dispostas de dois modos diferentes, como mostram as figuras abaixo.





Os quadrados *ABCD* e *EFGH* têm lados respectivamente iguais a 3 cm e 9 cm. Determine a medida do lado do quadrado *IJKL*.

1. É claro que com números tão grandes, a questão não pretende que se efetue a divisão. Para resolvê-la vamos usar alguns truques aritméticos:

$$123456123456 = 123456000000 + 123456 = 123456 \times 1000000 + 123456 =$$
$$= 123456 \times (1000000 + 1) = 123456 \times 1000001$$

Logo, $123456123456 \div 1000001 = 123456$.

2. **(C)** A economia teria sido equivalente a 6 refrigerantes, permitindo a Joãozinho mais um cinema e mais um refrigerante. Logo o ingresso do cinema é 5 vezes o valor do refrigerante.

3. **(C) Solução 1**: $\dfrac{50^{50}}{25^{25}} = \dfrac{(2\times 5^2)^{50}}{(5^2)^{25}} = \dfrac{2^{50}\times 5^{100}}{5^{50}} = 2^{50}\times 5^{50} = (2^2\times 5^2)^{25} = 100^{25}$

Solução 2: $\dfrac{50^{50}}{25^{25}} = \dfrac{(2\times 25)^{50}}{25^{25}} = \dfrac{2^{50}\times 25^{50}}{25^{25}} = 2^{25}\times 2^{25}\times 25^{25} = 100^{25}$

4. **(A)** A quantidade utilizada de palitos é mínima quando o número de palitos de 7 cm utilizado é o maior possível. Dividindo 200 por 7 obtemos $200 = 28\times 7 + 4$. Como $200 = 26\times 7 + 18 = 26\times 7 + 3\times 6$, usando 26 palitos de 7 cm e 3 palitos de 6cm obtemos o que queríamos. Logo, o número mínimo de palitos é 26+3=29.

Comentário: Observe que a solução equivale a encontrar números inteiros x e y tais que. $200 = \underbrace{7y}_{\text{múltiplo de 7}} + \underbrace{6x}_{\text{múltiplo de 6}}$ *e* y seja o maior possível, onde y = número de palitos de *7cm* e x = número de palitos de 6*cm*.

5. **(D)**

Solução 1: Usando a fatoração $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

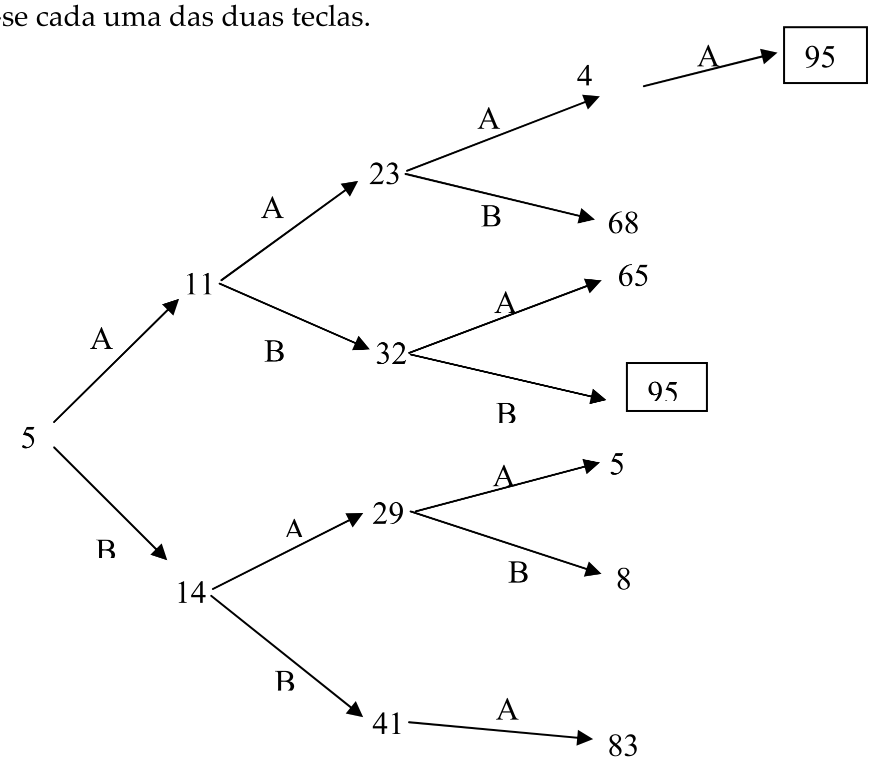
$(x-37)^2 - 13^2 = 0 \Leftrightarrow (x-37-13)(x-37+13) = 0 \Leftrightarrow (x-50)(x-24) = 0$.

Logo, as raízes são 24 e 50.

Solução 2: Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados:

$(x-37)^2 = 13^2 \Leftrightarrow x - 37 = 13$ ou $x - 37 = -13$. Assim, $x = 50$ ou $x = 24$.

6. **(D)** O diagrama a seguir mostra os resultados que podem ser obtidos a partir do número 5 apertando-se cada uma das duas teclas.

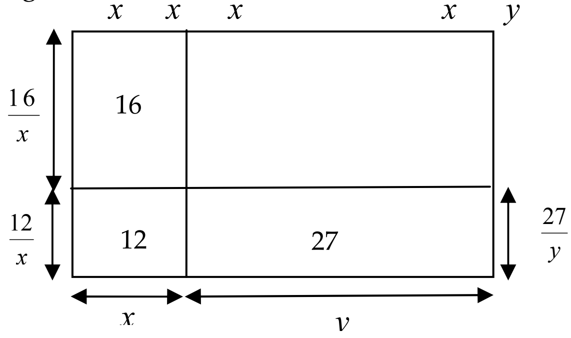


7. **(E)** Seja y um dos números do quadrado mágico, conforme a figura. De acordo com a regra de quadrado mágico temos $\underbrace{26+14+y}_{\substack{\text{soma dos números}\\ \text{da diagonal que contém } y}} = \underbrace{y+x+13}_{\substack{\text{soma dos números}\\ \text{da coluna que contém } y}}$. Segue que $26+14 = x+13$, donde $x = 27$.

		y
1	14	**x**
26		13

8. **(E) Solução 1:** Sejam x e y lados dos retângulos de áreas 12 e 27 respectivamente como indicado na figura. Logo, os outros lados desses retângulos são 12/x (retângulo de área 12), 16/x (retângulo de área 16) e 27/y (retângulo de área 27), como indicado na figura. Assim, o comprimento do retângulo ABCD é x+y e sua largura $\frac{16}{x}+\frac{12}{x}=\frac{28}{x}$. Claramente $\frac{12}{x}=\frac{27}{y}$.

Temos: $\frac{12}{x}=\frac{27}{y} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{27}{12} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{9}{4}$



A área de um retângulo é o produto do comprimento pela largura. Logo, a área de ABCD é $A=(x+y)\times\frac{28}{x}=28+\frac{28y}{x}=28+28\frac{y}{x}$. Logo, $A=28+28\times\frac{9}{4}=28+7\times 9=91$.

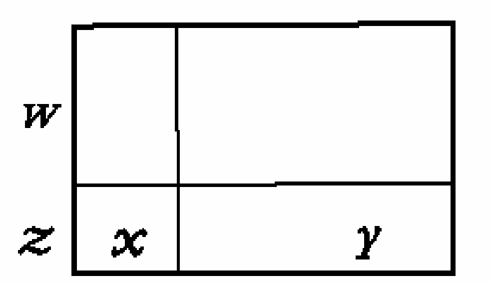
Solução 2: $xz = 12$

$yz = 27$

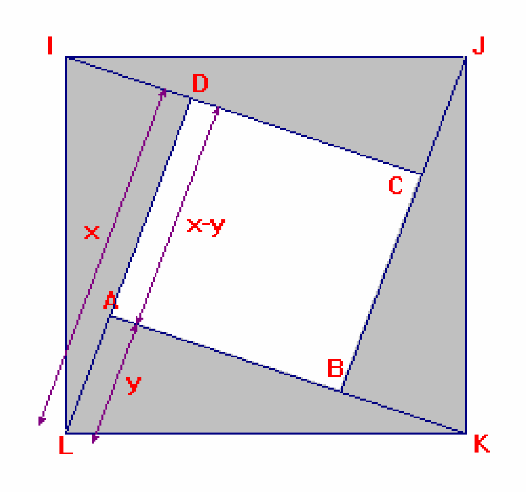
$xw = 16$

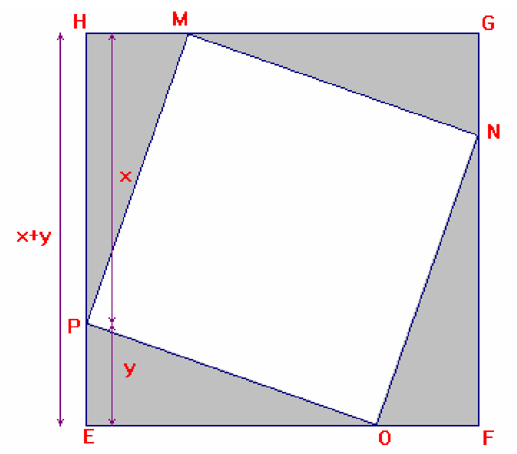
$xyzw = 27 \times 16$

$$yw = \frac{27 \times 16}{xz} = \frac{27 \times 16}{12} = 91$$



9. **Solução 1**: Sejam x e y o maior e o menor catetos, respectivamente, do triângulo retângulo. Como o lado do quadrado $ABCD$ mede $3cm$, temos $x - y = 3$. Por outro lado, como o lado de $EFGH$ mede $9cm$, temos $x + y = 9$. Resolvendo o sistema, encontramos $x = 6$ e $y = 3$. Logo, o lado do quadrado *IJKL*, que é a hipotenusa do triângulo retângulo, mede $\sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\,cm$.



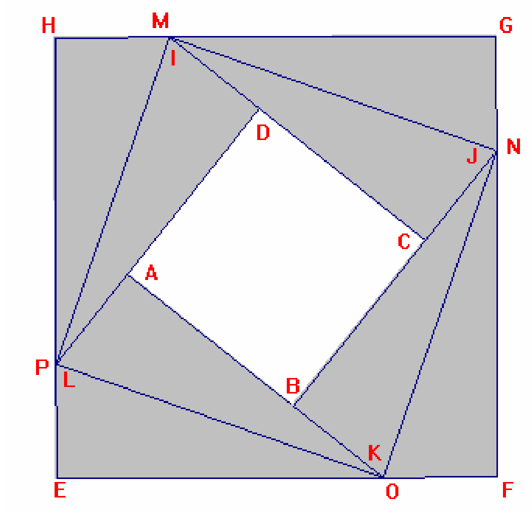


Solução 2: Os quadrados *IJKL* e *MNOP* têm como lados as hipotenusas dos triângulos retângulos dados, logo têm a mesma área. Superpondo-se as duas figuras e fazendo esses dois quadrados coincidirem, encontramos 8 triângulos e concluímos que

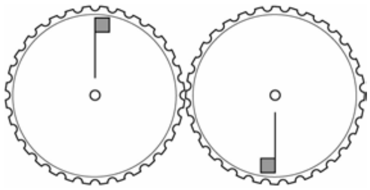
$8 \times \text{área do triângulo} = \text{área de } EFGH - \text{área de } ABCD = 9^2 - 3^2 = 72\ cm^2$. Logo a área de cada triângulo é 9 cm^2. Da figura temos

$$\text{área de } IJKL = 4 \times \text{área do triângulo} + \text{área de } ABCD = 4 \times 9 + 9 = 45.$$

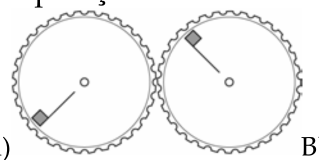
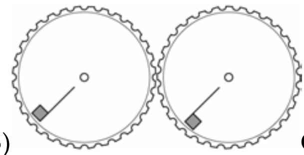
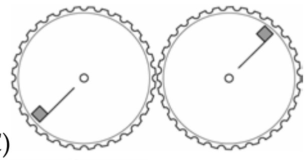
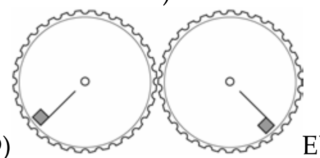
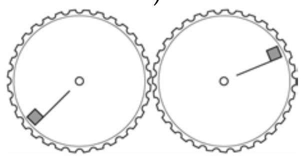
Logo, o lado do quadrado IJKL é $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ cm.



1) Juliano encaixou duas rodas dentadas iguais, cada uma com uma bandeirinha igual desenhada, como mostra a figura ao lado.



Então ele girou a roda da esquerda um pouco. Qual das alternativas abaixo pode representar a posição final das rodas?

A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

2) Quantas frações da forma $\frac{n}{n+1}$ são menores do que $\frac{7}{9}$, sabendo que n é um número inteiro positivo?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3) Numa certa povoação africana vivem 800 mulheres. Delas, 3% usam apenas um brinco; das restantes, metade usa dois brincos e a outra metade, nenhum. Qual o número total de brincos usados por todas as mulheres?

A) 776 B) 788 C) 800 D) 812 E) 824

4) Ana, Bento e Lucas participam de um concurso que consta de 20 perguntas com a seguinte regra:

- cada resposta certa ganha 5 pontos,
- cada resposta errada perde 3 pontos,
- cada resposta em branco perde 2 pontos.

	Número de respostas certas	Número de respostas erradas	Número de respostas em branco
Ana	12	4	4
Bento	13	7	0
Lucas	12	3	5

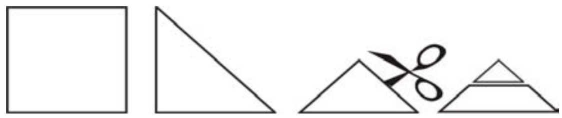
Veja os resultados na tabela a seguir:
Escrevendo os nomes dos três em ordem decrescente de classificação no concurso, encontramos:

A) Ana, Bento, Lucas B) Lucas, Bento, Ana C) Ana, Lucas, Bento
D) Lucas, Ana , Bento E) Bento, Lucas, Ana

5) Uma cerca de arame reta tem 12 postes igualmente espaçados. A distância entre o terceiro e o sexto poste é de 3,3 *m*. Qual é a distância entre o primeiro e o último poste?

A) $8,4\,m$ B) $12,1\,m$ C) $9,9\,m$ D) $13,2\,m$ E) $9,075\,m$

6) Uma folha quadrada foi dobrada duas vezes ao longo de suas diagonais conforme ilustração ao lado, obtendo-se um triângulo.



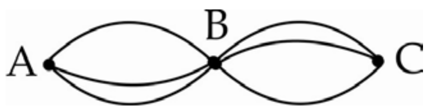
Foi feito um corte reto na folha dobrada, paralelo ao lado maior desse triângulo, passando pelos pontos médios dos outros lados, e desdobrou-se a folha. A área do buraco na folha corresponde a qual fração da área da folha original ?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{4}$

7) Qual é o menor número inteiro positivo N tal que $\frac{N}{3}$, $\frac{N}{4}$, $\frac{N}{5}$, $\frac{N}{6}$ e $\frac{N}{7}$ são números inteiros?

A) 420 B) 350 C) 210 D) 300 E) 280

8) Uma formiguinha vai caminhar de A até C passando por B, podendo passar apenas uma vez por esses pontos e pelos caminhos indicados na figura.



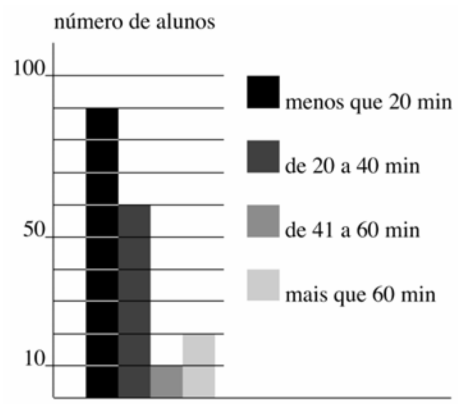
Qual o número de maneiras diferentes que ela pode escolher para ir de A até C ?

A) 3 B) 5 C) 7 D) 8 E) 9

9) Dados a e b números reais seja $a \diamond b = a^2 - ab + b^2$. Quanto vale $1 \diamond 0$?

A) 1 B) 0 C) 2 D) -2 E) -1

10) O diagrama de barras mostra a distribuição dos alunos de uma escola de acordo com o tempo que gastam no trajeto de casa para a escola. As frações de minuto não foram consideradas; assim, se um aluno gasta 40 minutos e 15 segundos neste trajeto, considera-se que o tempo gasto é de 40 minutos.



Responda as perguntas seguintes justificando sua resposta.

(a) Quantos alunos gastam menos de 20 minutos para chegar à escola?
(b) Quantos alunos têm esta escola?
(c) Quantos alunos gastam mais do que 40 minutos para chegar à escola?
(d) É verdade que a maioria dos alunos gasta mais de 20 minutos no trajeto à escola?

1. **(A)** Os dois discos giram em sentidos opostos; quando um gira no sentido horário, o outro gira no sentido anti-horário. Considerando que a engrenagem da esquerda girou um ângulo x em um sentido, a engrenagem da direita girou o mesmo ângulo x no sentido oposto, e portanto a bandeirinha ficou na posição mostrada na alternativa (A).

2. **(C)** **Solução 1 -** As frações da forma $\frac{n}{n+1}$, com n inteiro positivo são:

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{n=1} \quad ; \quad \underbrace{\frac{2}{3}}_{n=2} \quad ; \quad \underbrace{\frac{3}{4}}_{n=3} \quad ; \quad \underbrace{\frac{4}{5}}_{n=4} \quad ; \quad \underbrace{\frac{5}{6}}_{n=5} \ldots$$

Observe que esta seqüência de frações é crescente, isto é: $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \ldots$

Para comparar cada uma dessas frações com 7/9 precisamos igualar os denominadores. Temos:

$$\frac{1}{2} = \frac{9}{18} < \frac{14}{18} = \frac{7}{9} \quad ; \quad \frac{2}{3} = \frac{6}{9} < \frac{7}{9} \quad ; \quad \frac{3}{4} = \frac{27}{36} < \frac{28}{36} = \frac{7}{9} \quad ; \quad \frac{4}{5} = \frac{36}{45} > \frac{35}{45} = \frac{7}{9} .$$

Logo, 4/5 é maior do que 7/9, e como a seqüência é crescente, a partir de 4/5 todas as frações desta seqüência são maiores do que 7/9. Assim, as frações da forma $\frac{n}{n+1}$ menores do que $\frac{7}{9}$ são $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$. Portanto, a resposta é 3.

Solução 2 – Transformando em números decimais temos: 7/9= $0,777\ldots$ e 1/2=0,5 ; 2/3= $0,666\ldots$; 3/4=0,75 ; 4/5=0,8 ; 5/6= $0,8333\ldots$
Logo, a seqüência é crescente e apenas 1/2=0,5 ; 2/3= $0,666\ldots$; 3/4=0,75 são menores do que 7/9= $0,777\ldots$

Solução 3 - Se $\frac{n}{n+1} < \frac{7}{9}$, então $\frac{n}{n+1} - \frac{7}{9} < 0 \Rightarrow \frac{9n - 7(n+1)}{9(n+1)} = \frac{2n-7}{9(n+1)} < 0$. Como $9(n+1) > 0$, devemos ter $2n - 7 < 0$, isto é $n < \frac{7}{2} = 3,5$. Logo, $n = 1, 2, 3$ e portanto, as fraçoes são $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

3. **(C)** **Solução 1 -** Do enunciado temos que o número de mulheres que usam apenas um brinco é $0,03 \times 800 = 24$. Restam $800 - 24 = 776$, das quais 388 usam dois brincos e 388 não usam brincos. Logo, o número total de brincos usados por todas as mulheres é: $24 + 388 \times 2 = 800$.

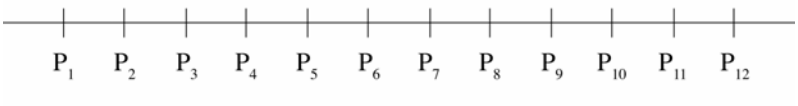
Solução 2 - Se cada mulher com dois brincos der um dos seus a uma das que não têm brincos, todas as 800 mulheres ficarão com um único brinco. Logo, o número de brincos é igual ao de mulheres, ou seja, 800.

4. **(E)** O número de pontos de cada um deles é:

Ana: $5\times 12+(-3)\times 4+(-2)\times 4=60-12-8=40$
Bento: $5\times 13+(-3)\times 7+(-2)\times 0=65-21=44$
Lucas: $5\times 12+(-3)\times 3+(-2)\times 5=60-9-10=41$

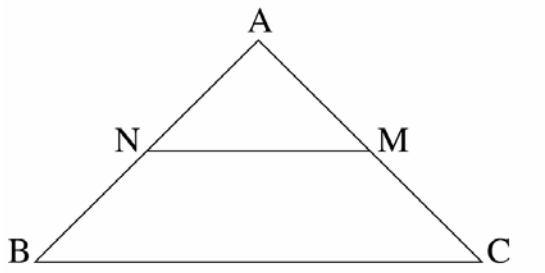
Logo, Bento foi o mais bem classificado, seguido de Lucas e depois de Ana.

5. **(B)** A distância entre dois postes consecutivos é $\frac{3,3m}{3}=1,1m$, donde a distância entre o primeiro e o último poste é $11\times 1,1m=12,1m$

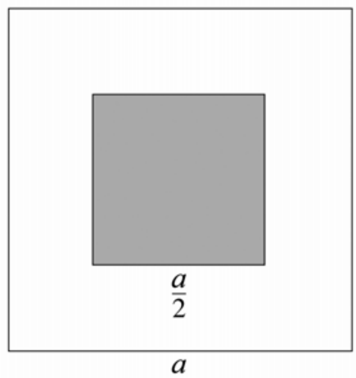


6. **(E)** Denotemos por a o lado do quadrado que é dobrado.

Solução 1 - Na figura abaixo mostra o triângulo obtido após dobrar o quadrado ao longo das duas diagonais. Temos $BC=a$, o lado da folha quadrada original. Como o corte é feito pela base média MN do triângulo, temos: $MN=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}$. Desdobrando-se a folha, vemos que o buraco é um quadrado de lado MN. A área do quadrado inicial é a^2 e a do quadrado retirado é $\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$. Logo, o buraco tem um quarto da área do quadrado original.



Solução 2 - O corte é realizado pela base média do triângulo, retirando um triângulo pequeno semelhante ao original com razão de semelhança $\frac{1}{2}$; deste modo, o triângulo retirado tem um quarto da área do triângulo original. Abrindo a folha, vemos essa situação reproduzida quatro vezes, donde o buraco tem um quarto da área do quadrado original.



7. **(A)** Para que $\frac{N}{3}$, $\frac{N}{4}$, $\frac{N}{5}$, $\frac{N}{6}$ e $\frac{N}{7}$ sejam números inteiros, N deve ser múltiplo comum de 3 , 4 , 5 , 6 e 7. Como queremos o menor N possível, ele deve ser o menor múltiplo comum de 3, 4 , 5, 6 e 7. Sendo o MMC entre 3 , 4, 5, 6 e 7 igual a 420, temos N=420.

8. **(E)** Para cada um dos 3 caminhos para ir de A até B, existem 3 opções para ir de B a C. Logo, há um total de $3 \times 3 = 9$ possibilidades. Mas geralmente, se fossem m os caminhos de A até B e n os de B até C, então o número de caminhos que nossa formiguinha poderia tomar de A até C seria $m \times n$; esta afirmativa é um caso particular do *Princípio multiplicativo.*

9. **(A)** Fazendo $a=1$ e $b=0$ em $a \diamond b = a^2 - ab + b^2$ obtemos: $1 \diamond 0 = 1^2 - 1 \times 0 + 0^2 = 1$.

10. Conforme o enunciado, os alunos foram divididos em 4 grupos distintos. Cada uma das quatro barras do diagrama representa apenas um desses grupos.

(a) Os alunos que gastam menos de 20 minutos em seu trajeto de casa para a escola estão representados pela barra mais alta, que atinge a marca 90. Logo, 90 alunos gastam menos de 20 minutos para chegar à escola.

(b) Como já dito acima, cada barra representa um grupo diferente de alunos. Logo, o total de alunos na escola é a soma dos números representados pelas quatro barras; isto é: $90+60+10+20=180$ alunos.

(c) Os alunos que gastam mais de 40 minutos são aqueles que estão em dois grupos: os que gastam de 41 a 60 minutos e os que gastam mais do que 60 minutos. No diagrama, esses grupos estão representados por duas barras; uma atinge a marca 10 e a outra, a marca 20, respectivamente. Logo, o total de alunos que gastam mais do que 40 minutos para chegar à escola é de $10+20=30$.

(d) Do item anterior, sabe-se que 30 alunos gastam mais do que 40 minutos para chegar à escola. Do diagrama, observa-se que 60 alunos gastam de 20 a 40 minutos. Portanto, temos *no máximo* $30+60=90$ alunos que gastam mais do que 20 minutos para chegar à escola. Como a escola tem 180 alunos, concluímos que a resposta para esta pergunta é não.

1) Uma cidade ainda não tem iluminação elétrica e todos usam velas à noite. Na casa de João, usa-se uma vela por noite, sem queimá-la totalmente. Com os tocos de quatro destas velas, é possível fazer uma nova vela. Durante quantas noites João poderá iluminar sua casa com 43 velas?

A) 43 B) 53 C) 56 D) 57 E) 60

2) Uma fábrica embala 8 latas de palmito em caixas de papelão cúbicas de $20\,cm$ de lado. Estas caixas são colocadas, sem deixar espaços vazios, em caixotes de madeira de $80\,cm$ de largura por $120\,cm$ de comprimento por $60\,cm$ de altura. Qual o número máximo de latas de palmito em cada caixote?

A) 576 B) 4608 C) 2304 D) 720 E) 144

3) Um atleta corre $5000\,m$ por semana em uma quadra de esportes, que tem uma pista curta e outra longa. Em uma semana ele treinou seis dias, sendo que a cada dia correu uma vez na pista longa e duas na pista curta. Na semana seguinte ele treinou sete dias, sendo que a cada dia correu uma vez em cada pista. Podemos então afirmar que:

A) a pista longa é três vezes maior que a curta.
B) a pista longa é quatro vezes maior que a curta.
C) a pista longa é cinco vezes maior que a curta.
D) a pista longa é $600\,m$ mais longa que a curta.
E) a pista longa é $500\,m$ mais longa que a curta.

4) O limite de peso que um caminhão pode transportar corresponde a 50 sacos de areia ou 400 tijolos. Se este caminhão já contém 32 sacos de areia, quantos tijolos, no máximo, ele ainda pode carregar?

A) 132 B) 144 C) 146 D) 148 E) 152

5) Sabendo-se que $0,333... = \frac{1}{3}$, qual é a fração irredutível equivalente a $0,1333\ldots$?

A) $\frac{1}{13}$ B) $\frac{1}{15}$ C) $\frac{1}{30}$ D) $\frac{2}{15}$ E) $\frac{1333}{10000}$

6) André treina para a maratona dando voltas em torno de uma pista circular de raio $100\,m$. Para percorrer aproximadamente $42\,km$, o número de voltas que André precisa dar está entre:

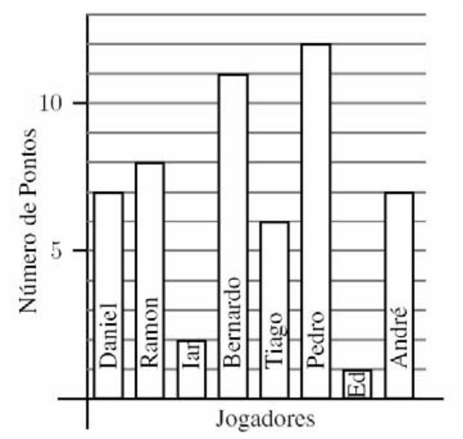
A) 1 e 10 B) 10 e 50 C) 50 e 100 D) 100 e 500 E) 500 e 1000

7) Se 3 e $\frac{1}{3}$ são as raízes da equação $ax^2 - 6x + c = 0$, qual o valor de $a + c$?

A) 1 B) 0 C) $-\frac{9}{5}$ D) $\frac{18}{5}$ E) -5

8) Os vértices de um cubo são numerados com os números de $1 \text{ a } 8$, de tal modo que uma das faces tem os vértices $\{1, 2, 6, 7\}$ e as outras cinco têm vértices {1, 4, 6, 8}, {1, 2, 5, 8}, {2, 3, 5, 7}, {3, 4, 6, 7} e {3, 4, 5, 8}. Qual o número do vértice que está mais distante daquele de número 6?

A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7



9) O gráfico ao lado mostra o número de pontos que os oito jogadores de basquete do time da escola marcaram no último jogo.

Qual o número total de pontos marcados pelo time?

A) 54 B) 48 C) 12

D) 58 E) 46

10) No último campeonato de futebol do bairro em que moro participaram 6 equipes. Cada equipe disputou com cada uma das outras exatamente uma partida. Abaixo, a tabela de classificação do campeonato, onde

- V é o número de vitórias de uma equipe
- E o número de empates
- D o número de derrotas
- GP é o número de gols feitos por um time
- GC é o número de gols sofridos

Equipe	V	E	D	GP	GC
A	4	1	0	6	2
B	2	1	2	6	6
C	0	3	2	2	6
D	1	1	y	3	6
E	0	1	4	1	5
F	x	1	0	z	3

a) Quantas partidas foram disputadas?

b) A tabela está incompleta. Determine a quantidade de vitórias da equipe *F*, a quantidade de derrotas da equipe *D* e a quantidade de gols feitos pela equipe *F*, representados por x, y e z na tabela.

1. **(D)** De 43 velas obtém-se 43 tocos. Como $43=4\times10+3$, com esses 43 tocos se pode fazer 10 velas e guardar 3 tocos. Dessas 10 velas, obtemos 10 tocos que, com os 3 que sobraram, dão 13. Sendo $13=4\times3+1$, fazemos então 3 velas com 12 tocos, sobrando 1 toco. Depois de usar estas 3 velas, teremos um total de 4 tocos, que nos dá 1 vela extra. No total, obtemos $43+10+3+1=57$.

2. **(A)** Em cada caixote de madeira de dimensões $a\times b\times c$ cabem, empilhados regularmente, $\frac{a}{l}\times\frac{b}{l}\times\frac{c}{l}$ cubos de lado l. No nosso caso, $a=60$, $b=80$, $c=120$ e $l=20$. Como 60, 80 e 120 são múltiplos de 20, podemos encher o caixote sem deixar espaços com $\frac{60}{20}\times\frac{80}{20}\times\frac{120}{20}=72$ caixas de papelão cúbicas de $20\,cm$ de cada lado. Logo, em cada caixote cabem $72\times8=576$ latas de palmito.

3. **(C)** **Solução 1 -** Denotemos por x e y os comprimentos das pistas longa e curta, respectivamente.
Numa semana, ele corre $6(x+2y)$ e na outra $7(x+y)$. Como, em cada semana, ele corre os mesmos 5000 metros, temos: $6(x+2y)=7(x+y)$.

Segue que $6x+12y=7x+7y$, e portanto, $5y=x$.
Assim, o comprimento da pista longa é cinco vezes o da pista curta.

Solução 2 - Na semana em que Joãozinho treinou sete dias, ele correu uma pista longa a mais e cinco pistas curtas a menos do que a semana em que ele treinou apenas seis dias. Como a distância corrida foi a mesma nas duas semanas, concluímos que o comprimento da pista longa é igual ao comprimento de cinco pistas curtas.

4. **(B)** O enunciado mostra que o peso de 1 saco de areia é o mesmo que o de 8 tijolos. Se no caminhão já há 32 sacos de areia, ele pode carregar ainda 18 sacos, o que equivale $18\times8=144$ tijolos.

5. **(D)** **Solução 1 –** Usando o dado da questão temos:
$$0{,}1333\ldots=\frac{1{,}333\ldots}{10}=\frac{1+0{,}333\ldots}{10}=\frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{10}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{15}.$$

Solução 2 – Usando a regra que fornece a geratriz de uma dízima periódica, temos:
$$0{,}1333\ldots=\frac{13-1}{90}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}.$$

6. **(C)** O comprimento de uma circunferência de raio r é $2\pi r$. Assim, em cada volta, André percorre $2\pi\times100m$=200πm. Logo, o número de voltas que André precisa dar é $\frac{42000}{200\pi}=\frac{210}{\pi}$.
Podemos agora finalizar o problema de duas maneiras:
1ª) A aproximação de π té a segunda casa decimal é 3,14. Daí, $\frac{210}{\pi}\approx\frac{210}{3{,}14}\approx66{,}878\approx66{,}88$. Como $66{,}88$ está entre 50 e 100, a opção correta é C.

2ª) Como $3<\pi<4$ segue que $\frac{1}{\pi}<\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}<\frac{1}{\pi}$. Multiplicando ambos os lados dessas desigualdades por 210 obtemos:

$$\frac{210}{\pi}<\frac{210}{3}=70 \text{ e } \frac{210}{4}<\frac{210}{\pi}.$$

Como $\frac{210}{4}=52,5$, concluímos que André deve dar entre 53 e 70 voltas na pista para percorrer $42000\,m$.

7. **(D)** **Solução 1 –** Como 3 e 1/3 são raízes da equação $ax^2-6x+c=0$ temos:

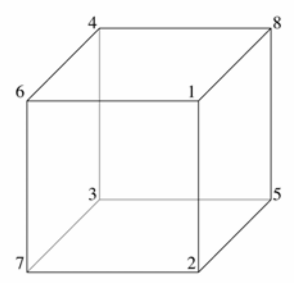
$9a-18+c=0 \Rightarrow 9a+c=18$ e $\frac{a}{9}-2+c=0 \Rightarrow \frac{a}{9}+c=2$.

Resolvendo o sistema

$\begin{cases} 9a+c=18 \\ \frac{a}{9}+c=2 \end{cases}$ obtemos $a=c=\frac{9}{5}$. Logo, $a+c=\frac{18}{5}$.

Solução 2 – Numa equação do 2º grau $ax^2+bx+c=0$, a soma das raízes é $-\frac{b}{a}$ e o produto $\frac{c}{a}$. Logo: $3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}=\frac{6}{a} \Rightarrow a=\frac{9}{5}$ e $3\times\frac{1}{3}=1=\frac{c}{a} \Rightarrow a=c$. Assim, $a+c=2\times\frac{9}{5}=\frac{18}{5}$.

8. **(D)** **Solução 1 –** Desenhando o cubo e numerando seus vértices de acordo com o enunciado da questão, obtemos a figura abaixo, onde podemos ver que o vértice 5 é o mais distante do vértice 6.



Solução 2 – O vértice 6 está nas faces {1, 2, 6, 7}, {1, 4, 6, 8} e {3, 4, 6, 7}. Como nestas faces não aparece o 5, segue que este é o vértice diagonalmente oposto ao 6, ou seja, o 5 é o vértice mais distante do 6.

9. **(B)** Basta ler no gráfico o número de pontos de cada aluno e somar para obter o total: $7+8+2+11+12+1+7=48$

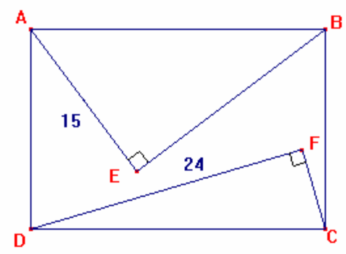
10. **a)** Cada uma das 6 equipes joga 5 partidas. Portanto, o número de partidas foi de $\frac{6\times5}{2}=15$.

Outra maneira de contar: Podemos formar grupos de duas letras e contar o número de grupos: *AB, AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF, EF* – o número de partidas é 15.

b) Para cada time, a soma do número de vitórias, empates e derrotas é igual a 5. Assim, temos $1+1+y=5$, ou seja, $y=3$. Temos, também, $x+1+0=5$, isto é, $x=4$. O número total de gols feitos é igual ao número total de gols sofridos. Assim, $z+18=28$, ou seja, $z=10$.

Resumindo: O número de derrotas do time D é 3, o número de vitórias da equipe F é 4 e o número de gols sofridos pela equipe F é 10.

1) Na figura ao lado $ABCD$ é um retângulo e ABE e CDF são triângulos retângulos. A área do triângulo ABE é $150cm^2$ e os segmentos AE e DF medem, respectivamente, $15\,cm$ e $24cm$. Qual o comprimento do segmento CF?

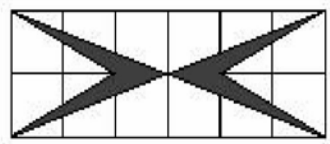


2) Usando apenas os dígitos $1, 2, 3, 4$ e 5, Peri construiu uma seqüência da seguinte forma: um 1, dois 2, três 3, quatro 4, cinco 5, seis 1, sete 2 e assim por diante; abaixo vemos os primeiros termos desta seqüência:

1, 2, 2, 3, 3 ,3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, ...

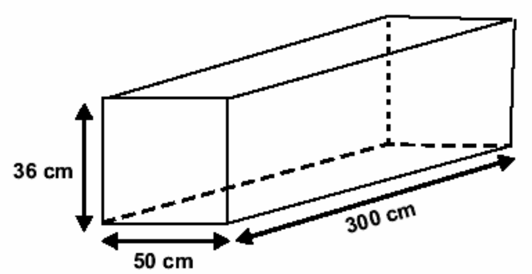
Qual é o 100° termo dessa seqüência?

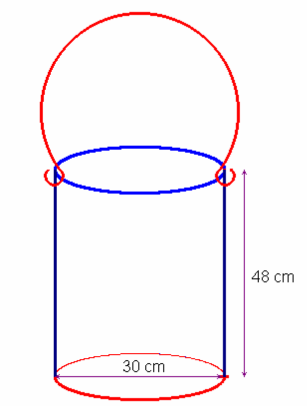
3) A figura ao lado foi montada com 12 azulejos quadrados de lados iguais a $10cm$. Qual é a área da região hachurada?



4) Capitu tem cem cartões numerados de 1 a 100 . Todos os cartões têm uma face amarela e a outra vermelha, e o número de cada cartão está escrito em ambas as faces. Os cartões foram colocados sobre uma mesa, todos com a face vermelha voltada para cima. Capitu virou todos os cartões de número par e depois todos os cartões de número múltiplo de 3, colocando-os com a face amarela voltada para cima. Quantos cartões ficaram com a face vermelha para cima ?

5) Para encher de água um tanque em forma de um bloco retangular de $300cm$ de comprimento, $50cm$ de largura e $36cm$ de altura, um homem utiliza um balde cilíndrico, de $30cm$ de diâmetro em sua base e $48cm$ de altura, para pegar água numa fonte. Cada vez que ele vai à fonte, ele enche $\frac{4}{5}$ do balde e no caminho derrama $10\,\%$ do seu conteúdo. Estando o tanque inicialmente vazio, quantas viagens à fonte o homem terá que fazer para que a água no tanque chegue a $\frac{3}{4}$ de sua altura?





1. O segmento *CF*, que queremos calcular, é um cateto do triângulo retângulo *CDF*. O teorema de Pitágoras, aplicado a este triângulo, diz que $CD^2 = CF^2 + FD^2 = CF^2 + 24^2$ e daí tiramos $CF^2 = CD^2 - 24^2$. Ou seja, para achar *CF* basta conhecer *CD*. Como os lados opostos de um retângulo (e, mais geralmente, de um paralelogramo) são iguais, temos $CD = AB$, e nosso objetivo passa a ser o cálculo de *AB*.

Para isso, olhemos para o triângulo *ABE*; sua área é $\dfrac{AE \times BE}{2} = \dfrac{15 \times BE}{2} = 150$, donde tiramos $BE = 20$. O teorema de Pitágoras aplicado a este triângulo nos dá $AB^2 = AE^2 + BE^2 = 15^2 + 20^2 = 625 = 25^2$, donde $AB = 25$.

Logo $CD = AB = 25$ e, de acordo com nossa observação anterior, temos $CF^2 = CD^2 - 24^2 = 25^2 - 24^2 = (25+24)(25-24) = 49$. Obtemos então $CF = 7$.

Notamos que a solução independe da medida dos lados *AD* e *BE*.

2. Agrupamos a seqüência em blocos numerados consecutivamente, cada bloco formado pelos termos iguais consecutivos, como mostrado a seguir.

$$\underbrace{1}_{bloco\,1},\ \underbrace{2,2}_{bloco\,2},\ \underbrace{3,3,3}_{bloco\,3},\ \underbrace{4,4,4,4}_{bloco\,4},\ \underbrace{5,5,5,5,5}_{bloco\,5},\ \underbrace{1,1,1,1,1,1}_{bloco\,6},\ \underbrace{2,2,2,2,2,2,2}_{bloco\,7},\ \underbrace{3,3,3,3,3,3,3,3}_{bloco\,8},\ \ldots\ldots,\ \underbrace{k,k,k,k,k,\ldots,k}_{\substack{bloco\ \ n\\ k\in\{1,2,3,4,5\}}}$$

Observe que a numeração de cada bloco coincide com o número de termos que ele contém: o bloco 1 tem 1 termo, o bloco 2 tem 2 termos, o bloco 3 tem 3 termos,…, o bloco n tem n termos. A posição na seqüência do último termo de cada bloco é obtida somando todos os números de 1 até o número atribuído ao bloco. Por exemplo:

- o último 3 do bloco 8 é o 36° termo da seqüência porque $1+2+3+4+5+6+7+8=36$.
- o último 1 do bloco 11 é o 66° termo da seqüência porque $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=66$.

Em geral, o último elemento do bloco n está na posição $1+2+3+\ldots+n$. Para calcular o valor desta soma, lembramos que $1,2,3,\ldots,n$ é uma progressão aritmética de razão 1, termo inicial $a_1 = 1$ e n-ésimo termo $a_n = n$; a soma de seus n primeiros termos é

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\underbrace{1}_{bloco\,1},\ \underbrace{2,2}_{bloco\,2},\ \underbrace{3,3,3}_{bloco\,3},\ \underbrace{4,4,4,4}_{bloco\,4},\ \underbrace{5,5,5,5,5}_{bloco\,5},\ \underbrace{1,1,1,1,1,1}_{bloco\,6},\ \underbrace{2,2,2,2,2,2,2}_{bloco\,7},\ \underbrace{3,3,3,3,3,3,3,\overset{\overset{36^{o}}{\downarrow}}{3}}_{bloco\,8},\ \underbrace{4,4,4,4,4,4,4,4,4}_{bloco\,9},$$

$$\underbrace{5,5,5,5,5,5,5,5,5,5}_{bloco\,10},\ \underbrace{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,\overset{\overset{66^{o}}{\downarrow}}{1}}_{bloco\,11},\ \underbrace{2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2}_{bloco\,12},\ \ldots\ldots,\ \underbrace{k,k,k,k,\ldots,\overset{\overset{\frac{n(n+1)}{2}^{o}}{\downarrow}}{k}}_{bloco\,n}$$

Precisamos agora descobrir em qual bloco se encontra o 100° termo da seqüência. Suponhamos que ele esteja no bloco *n*; então sua posição é no máximo a do último termo deste bloco. Como ele não está no bloco $n+1$, concluímos que *n* é o menor inteiro tal que

$$100 \leq \frac{n(n+1)}{2}.$$

ou seja

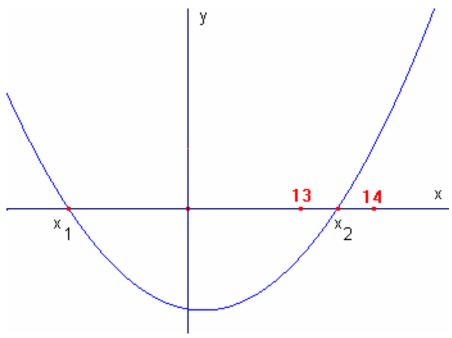
$$200 \leq n(n+1)$$

Para determinar o valor de n devemos resolver essa inequação e escolher entre suas soluções o menor número inteiro. Como a expressão é bastante simples, é mais fácil resolvê-la por tentativas. Fazendo isso, vemos que $n=14$; de fato, $13\times(13+1)=182<200$ e $14\times(14+1)=210>200$.

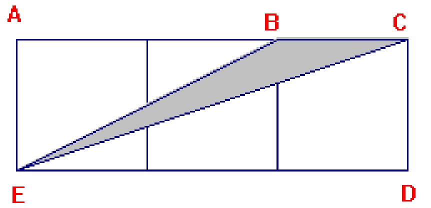
Logo o 100° termo da seqüência está no bloco 14. Os números que aparecem nos blocos se repetem de 5 em 5 blocos na ordem $1, 2, 3, 4, 5$. Como $14=5\times2+4$, o bloco 14 é formado pelo número 4. Assim, o 100° termo da seqüência é 4.

<u>Comentário:</u> A resolução acima da inequação $200 \leq n(n+1)$ apesar de correta, não serviria se o problema pedisse, por exemplo, para determinar o 10.000º termo da seqüência. Neste caso, teríamos que lidar com a inequação $20.000 \leq n(n+1)$, e é claro que achar sua menor solução inteira por tentativas não funciona (a não ser com muita, muita sorte!). Por isso vamos resolvê-la como seria feito para um caso qualquer.

Primeiro escrevemos $200 \leq n(n+1)$ como $n^2+n-200 \geq 0$, o que nos leva ao estudo de sinal da função quadrática $f(x)=x^2+x-200$. As raízes de $f(x)$ são $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{1+800}}{2}$, que é negativa, e $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{1+800}}{2}$, que é aproximadamente $13{,}6$. O gráfico de $f(x)$ está ilustrado na figura ao lado. Como $f(x)\geq 0$ para $x \leq x_1$ e $x \geq x_2$, segue que o n que estamos procurando é o menor inteiro que é maior ou igual a x_2, ou seja, $n=14$.



Agora, se quiséssemos determinar o 10.000° termo da seqüência repetindo procedimento acima, encontraríamos $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{1+80000}}{2}$, que é aproximadamente $140{,}9$. Logo $n=141$ e o 10.000° termo da seqüência está no 141° bloco. Como $141=28\times5+1$ segue que o 10.000° termo é 1.



3.A figura dada pode ser decomposta em quatro figuras iguais à figura ao lado. Para calcular a área do triângulo escolhemos como base o lado *BC*; a altura correspondente é então *AE*. Como os azulejos são quadrados de lado 10 cm, segue que $AE = BC = 10cm$, e a área do triângulo *BCE* é $\frac{base \times altura}{2} = \frac{10 \times 10}{2} = 50$ cm². Logo, a área da região hachurada é $4 \times 50 = 200cm^2$.

4. **Solução 1:** Capitu virou, em primeiro lugar, os 50 cartões pares; após isto, ficaram então na mesa os 50 cartões pares com a face amarela para cima e os 50 cartões ímpares com a face vermelha para cima. Ao virar agora os múltiplos de 3, ela virou apenas os múltiplos de 3 ímpares, que são $3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93$ e 99. Assim, temos 17 múltiplos de 3 que são ímpares. Logo, Capitu virou para cima a face amarela de $50 + 17 = 67$ cartões. Sobraram com a face vermelha para cima $100 - 67 = 33$ cartões.

Comentário: Nesta solução, para determinar quantos são os múltiplos de 3 ímpares menores do que 100 é suficiente escrever esses múltiplos e contá-los. No entanto, se Capitu tivesse 1000 cartões (ou mais) esse procedimento seria bastante trabalhoso. Mas, nesse caso podemos proceder de modo mais geral. Notamos que os múltiplos ímpares de 3 de 1 a 1000 formam uma progressão aritmética com primeiro termo $a_1 = 3$, razão $r = 6$ e o último termo $a_n = 999$. Para determinar n usamos a fórmula $a_n = a_1 + (n-1)r$, que no nosso caso é $999 = 3 + (n-1) \times 6$. Concluímos que $n = 167$, ou seja, temos 167 múltiplos ímpares de 3 menores do que 1000.

Solução 2: Capitu virou, em primeiro lugar, os 50 cartões pares; após isto, ficaram então na mesa os 50 cartões pares com a face amarela para cima e os 50 cartões ímpares com a face vermelha para cima. Ao virar então os cartões múltiplos de 3, Capitu fez o seguinte:

- *Entre os cartões pares*: Ela virou os que eram também múltiplos de 3. Um número que é múltiplo de 2 e de 3 também é múltiplo de 6. Como $100 = 16 \times 6 + 4$, concluímos que Capitu virou 16 cartões entre os cartões pares. Estes cartões voltaram a ficar com a face vermelha para cima, ficando os outros 34 com a face amarela para cima.
- *Entre os cartões ímpares*: Como $100 = 33 \times 3 + 1$, segue que o número total de cartões (pares e ímpares) múltiplos de 3 é 33. Como vimos acima, entre estes cartões 16 são pares, logo 17 são ímpares. Assim, Capitu virou 17 cartões ímpares, e estes cartões passaram a ter a face amarela para cima, enquanto que os outros 33 continuaram com a face vermelha para cima.

5. Nesta solução todas as medidas de volume são dadas em cm³.

O volume *V* do balde é dado pela fórmula habitual do volume de um cilindro, ou seja, $V = \acute{a}rea\ da\ base \times altura$. A base do balde é um círculo de diâmetro 30cm; seu raio é então $r = 15cm$ cm e sua área é $\pi r^2 = 225\pi cm^2$. Logo $V = 48 \times 225\pi = 10.800\pi$. A cada viagem, o volume de água que o homem coloca no balde é $\frac{4}{5}$ de *V*, e deste volume ele perde 10%.

Logo, resta no balde 90% de $\frac{4}{5}$ de *V*, isto é, $\frac{9}{10}\times\frac{4}{5}V=\frac{18}{25}V=0,72V=0,72\times 10800\pi=7776\pi$; esta é quantidade de água que ele coloca no tanque em cada viagem, que denotaremos por *B*.

O volume de $\frac{3}{4}$ do tanque é $T=\frac{3}{4}\times 300\times 36\times 50=405.000$. Logo, o número de baldes necessários para atingir esse volume é $\frac{405000}{B}=\frac{405000}{7776\pi}=\frac{625}{12\pi}$. Usando a aproximação 3,14 para o número π temos $\frac{625}{12\pi}\approx\frac{625}{12\times 3,14}\approx 16,587$. Logo o homem necessitará 16 baldes mais 0,587 de um balde. Concluímos que o homem deverá fazer 17 viagens.

Comentário: Usamos acima uma aproximação para o valor de π; é importante entender o que isto quer dizer. Como sabemos, π é um número irracional, e sua expansão decimal é infinita e não periódica. O valor aproximado de π com 31 casas decimais é $\pi\approx 3{,}1415926535897932384626433832795$ (o símbolo ≈ quer dizer "aproximadamente"). Por quê então não usar $\pi\approx 3{,}142$ ou $\pi\approx 3{,}1416$ para resolver nosso problema, em vez de $\pi\approx 3{,}14$? Para discutir isto, vamos a um exemplo.

Suponhamos que você tem um balde cilíndrico com raio da base 1m e altura 1m, e uma caixa de água de volume de exatamente 3,141 m³. O balde deve ser enchido em uma fonte. Quantas viagens à fonte serão necessárias para encher a caixa, supondo que o volume de água de cada balde é integralmente transferido para a caixa?

Usando a aproximação $\pi\approx 3{,}14$ obtemos 3,14 m³ para o volume do balde. Como $\frac{\text{volume do tanque}}{\text{volume do balde}}\approx\frac{3,141}{3,14}$ é maior que 1 (e, é claro, menor que 2), concluímos que serão necessárias duas viagens à fonte para encher a caixa de água.

Vamos agora usar a aproximação $\pi=3{,}1416$. Aqui calculamos o volume do balde e obtemos 3,1415 m³. Então $\frac{\text{volume do tanque}}{\text{volume do balde}}\approx\frac{3,141}{3,1416}$ é menor que 1, e concluímos agora que basta uma viagem à fonte para encher o balde, resultado diferente do anterior!

Deve ficar claro com este exemplo que a escolha inicial de uma aproximação pode influenciar fortemente o resultado final. Nesse caso dizemos que as condições do problema são sensíveis à aproximação. No nosso problema original (problema 5) , os dados iniciais não eram sensíveis à aproximação usada para π. Pode-se verificar isto imediatamente repetindo a solução com $\pi \approx 3{,}142$ ou $\pi \approx 3{,}1416$; em qualquer caso, obtem-se o resultado de 17 viagens.

Em geral, os problemas deste tipo propostos em livros nos ensinos fundamental e médio são enunciados de modo pouco sensível à aproximação. Isto justifica parcialmente o uso de "$\pi = 3{,}14$" e de, por exemplo, "$\sqrt{2} = 1{,}41$" (curiosidade: $\sqrt{2} \approx 1{,}4142135623730950488016887242097$).

Notamos também que poucas casas decimais facilitam as contas, em particular quando não se usam máquinas de calcular. Seria impossível, na prática, trabalhar manualmente com aproximação de 31 casas que demos para π no início desta conversa.

O tratamento de problemas de aproximação é feito através de desigualdades; infelizmente, tempo e espaço não permitem que abordemos este tópico com mais detalhes no momento, mas esperamos ter despertado sua curiosidade para o assunto.

1)Qual é o maior fator primo de 2006?

2)Entre 1986 e 1989, a moeda do nosso país era o cruzado (Cz$). De lá para cá, tivemos o cruzado novo, o cruzeiro, o cruzeiro novo e, hoje, temos o real. Para comparar valores do tempo do cruzado e de hoje, os economistas calcularam que 1 real equivale a $2.750.000.000$ cruzados.
Imagine que a moeda não tivesse mudado e que João, que ganha hoje 640 reais por mês, tivesse que receber seu salário em notas de 1 cruzado cada uma. Se uma pilha de 100 notas de 1 cruzado tem $1{,}5\,cm$ de altura, qual seria a altura do salário do João?

A) $26{,}4\,km$ B) $264\,km$ C) $26\,400\,km$ D) $264\,000\,km$ E) $2\,640\,000\,km$

3)Há 1002 balas de banana e 1002 balas de maçã numa caixa. Lara tira, sem olhar o sabor, duas balas da caixa. Se q é a probabilidade das duas balas serem de sabores diferentes e p é a probabilidade das duas balas serem do mesmo sabor, qual o valor de $q-p$?

A) 0 B) 1/2004 C) 1/2003 D) 2/2003 E) 1/1001

4)Um ponto P está no centro de um quadrado com $10\,cm$ de lado. Quantos pontos da borda do quadrado estão a uma distância de $6\,cm$ de P ?

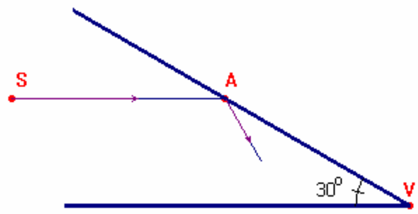
A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

5) Se $2\left(2^{2x}\right)=4^x+64$, então x é igual a:

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

6)Dois espelhos formam um ângulo de 30º no ponto V. Um raio de luz parte de um ponto S paralelamente a um dos espelhos e é refletido pelo outro espelho no ponto A, como mostra a figura. Depois de uma certa quantidade de reflexões, o raio retorna a S.

Se AS e AV têm ambos 1 metro, qual o comprimento em metros do trajeto percorrido pelo raio de luz?



A) 2 B) $2+\sqrt{3}$ C) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ D) $\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$ E) $5\sqrt{3}$

1. A decomposição de 2006 em fatores primos é $2006 = 2 \times 17 \times 59$. Logo, o maior fator primo de 2006 é 59.

2. **(D)** O enunciado diz que 1 real = 275×10^7 cruzados. O salário de João é 640 reais, o que é equivalente a $640 \times 275 \times 10^7 = 176.000 \times 10^7 = 176 \times 10^{10}$ cruzados. O número de pilhas de 100 notas que se podem fazer com este número de notas de 1 cruzado é $\frac{176 \times 10^{10}}{10^2} = 176 \times 10^8$. Como cada uma destas pilhas tem altura 1,5 cm, a altura de todas elas é $1,5 \times 176 \times 10^8 = 264 \times 10^8$ cm.

Lembramos agora que $1km = 1000m = 10^3 m$ e $1m = 100cm = 10^2 cm$, donde $1km = 10^3 \times 10^2 = 10^5 cm$. Logo uma pilha de 264×10^8 cm tem $\frac{264 \times 10^8}{10^5} = 264 \times 10^3 = 264.000 km$ de altura.

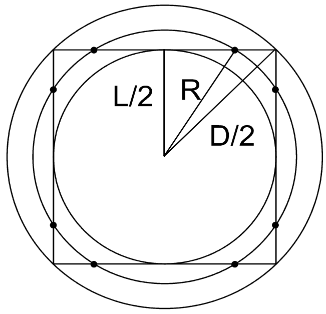
3. **(C)** A primeira bala pode ser de qualquer sabor; para fixar idéias suponhamos que seja de banana. Depois que esta bala é retirada sobram $1002 + 1001$ balas na caixa – no nosso caso 1002 de maçã e 1001 de banana.

A probabilidade q de que a segunda bala seja diferente (no nosso exemplo, de maçã) é $q = \frac{1002}{2003}$

A probabilidade p de que a segunda bala seja igual (no nosso exemplo, de banana) é $p = \frac{1001}{2003}$

A diferença *q-p* é, portanto, $q - p = \frac{1002}{2003} - \frac{1001}{2003} = \frac{1}{2003}$.

4. **(E)** Os pontos que estão a $6cm$ de distância do ponto P formam uma circunferência de centro P e raio R=$6cm$ .Se D denota a diagonal do quadrado, do teorema de Pitágoras temos $D = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{2 \times 10^2} = 10\sqrt{2}$



A circunferência de raio L/2=5 tangencia o quadrado em 4 pontos.
A circunferência de raio D/2 toca o quadrado em 4 pontos (os vértices do quadrado).
Temos: $L = 10$; $R = 6$ e $D = 10\sqrt{2}$, logo $\underbrace{5}_{L/2} < \underbrace{6}_{R} < \underbrace{5\sqrt{2}}_{D/2}$. (Observe que $1,2 < \sqrt{2}$ logo, $5 \times 1,2 < 5 \times \sqrt{2}$ e portanto, $6 < 5\sqrt{2}$)
Assim, a circunferência de raio R=6 está "entre"as duas circunferências de raios 5 e $5\sqrt{2}$.
Logo, ela corta o quadrado em 8 pontos.

5. **(E) Solução 1:** Notamos que os termos do lado direito da equação dada podem ser escritos como potências de 2; de fato, $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$ e $64 = 2^6$. Desse modo, a equação se torna $2(2^{2x}) = 2^{2x} + 2^3$. Temos então $2(2^{2x}) - 2^{2x} = 2^6$, donde $2^{2x}(2-1) = 2^6$, ou seja $2^{2x} = 2^6$. Logo $2x = 6$ e segue que $x = 3$.

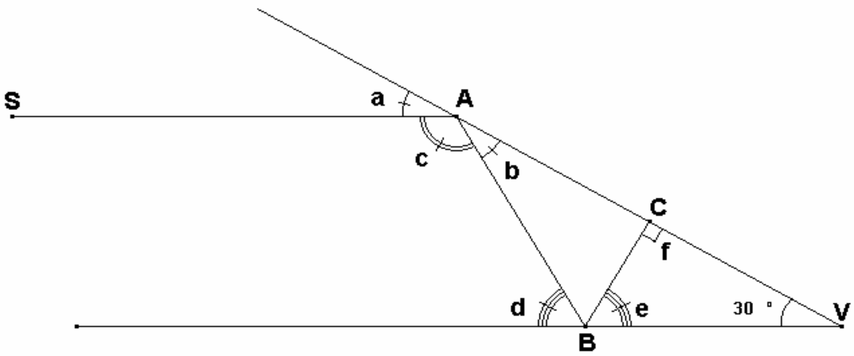
Solução 2: $2\left(4^x\right) = 4^x + 4^3 \Rightarrow 4^x = 4^3 \Rightarrow x = 3$

6. **(B)** Vamos acompanhar o trajeto do raio de luz a partir do ponto S. Para isso, lembramos a propriedade básica da reflexão de um raio de luz em um espelho: o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência. Por exemplo, na figura ao lado, os ângulos a e b são iguais, bem como d e e. Notamos que temos na figura as paralelas *AS* e *BV* cortadas pela transversal *AB*, daí segue que:

- a= 30º = b,
- $a+b+c=180^o$, donde c=120º.
- $c+d=180^o$, donde d=60º=e.

Como a soma dos ângulos internos do triângulo *BCV* é 180º, segue que f=90º. Isso quer dizer que o nosso raio de luz, ao atingir *C*, será refletido sobre si mesmo e fará então o caminho inverso.

$C \to B \to A \to S$. Desse modo, o trajeto completo do raio será $S \to A \to B \to C \to B \to A \to S$.



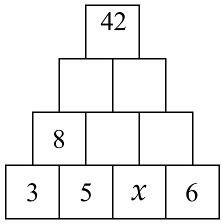
Desse modo, o comprimento do trajeto do raio até retornar a *S* é duas vezes a soma dos comprimentos dos segmentos *AS*, *AB* e *BC*. O enunciado nos diz que $AS=1m$. Falta calcular *AB* e *BC*. Para isso, olhamos para o triângulo *ABC*. Ele é um triângulo retângulo com ângulos de 30º e 60º. Sabemos que em um tal triângulo o cateto oposto ao ângulo de 30º tem comprimento igual à metade do comprimento da hipotenusa (exercício) no nosso caso, temos $BC=\frac{1}{2}AB$.

Notamos agora que os triângulos *ABC* e *VBC* são congruentes, pois são triângulos retângulos (f=90º) com ângulos iguais (b=30º) e um cateto comum (*BC*), o que nos mostra que $AC=\frac{1}{2}m$. Pondo $AB=x$ temos $BC=\frac{1}{2}x$, e o teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo *ABC* nos dá $x^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}x\right)^2$; simplificando, obtemos $\frac{3}{4}x^2=\frac{1}{4}$, donde $x=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Desse modo, temos o comprimento do trajeto do raio de luz:

$$2(SA+AB+BC)=2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\left(2+\sqrt{3}\right)cm$$

1) Determine o valor de $(666\,666\,666)^2 - (333\,333\,333)^2$.

2) Na figura, o número 8 foi obtido somando-se os dois números diretamente abaixo de sua casa. Fazendo-se o mesmo para preencher as casas em branco, obtém-se o 42 na casa indicada. Qual é o valor de x?



A) 7 B) 3 C) 5 D) 4 E) 6

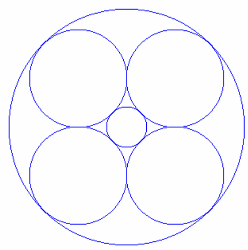
3) Seja $n = 9867$. Se você calculasse $n^3 - n^2$, encontraria um número cujo algarismo das unidades é:

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

4) O gráfico da parábola $y = x^2 - 5x + 9$ é rodado de $180°$ em torno da origem. Qual é a equação da nova parábola?

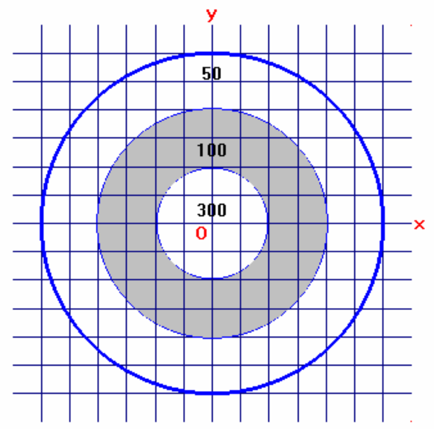
A) $y = x^2 + 5x + 9$ B) $y = x^2 - 5x - 9$ C) $y = -x^2 + 5x - 9$ D) $y = -x^2 - 5x + 9$ E) $y = -x^2 - 5x - 9$

5) A figura mostra a marca de uma empresa, formada por dois círculos concêntricos e outros quatro círculos de mesmo raio, cada um deles tangente a dois dos outros e aos dois círculos concêntricos. O raio do círculo menor mede 1 cm. Qual é, em centímetros, o raio do círculo maior?



6) Um padeiro quer gastar toda sua farinha para fazer pães. Trabalhando sozinho, ele conseguiria acabar com a farinha em 6 horas; com um ajudante, o mesmo poderia ser feito em 2 horas. O padeiro começou a trabalhar sozinho; depois de algum tempo, cansado, ele chamou seu ajudante e assim, após 150 minutos a farinha acabou. Quanto tempo o padeiro trabalhou sozinho?

7) Manoel testou sua pontaria lançando cinco flechas no alvo reticulado de quadrados de comprimento $1\,cm$, ilustrado na figura. Uma flecha que acerta dentro do círculo menor conta 300 pontos; na região sombreada conta 100 pontos, entre a região sombreada e o círculo maior conta 50 pontos e fora do círculo maior não conta nada. As flechas de Manoel acertaram os pontos $A = (1,-1)$, $B = \left(\frac{5}{2}, 1\right)$, $C = (1,-4)$, $D = (-4,-4)$ e $E = (6,5)$.



(a) Marque na figura os pontos onde Manoel acertou suas flechas.
(b) Quantas flechas ele acertou no interior do menor círculo?
(c) Quantos pontos Manoel fez no total?

8) A festa de aniversário de André tem menos do que 120 convidados. Para o jantar, ele pode dividir os convidados em mesas completas de 6 pessoas ou em mesas completas de 7 pessoas. Nos dois casos são necessárias mais do que 10 mesas e todos os convidados ficam em alguma mesa. Quantos são os convidados?

9) (a) Calcule o número de diagonais do prisma hexagonal reto representado na figura 1.

(b) Calcule o número de diagonais do prisma representado na figura 2.

Este poliedro é muito utilizado na fabricação de dados, e é obtido realizando-se oito cortes em um cubo, cada corte próximo a um dos seus 8 vértices (isso "arredonda" o dado e facilita a sua rolagem).

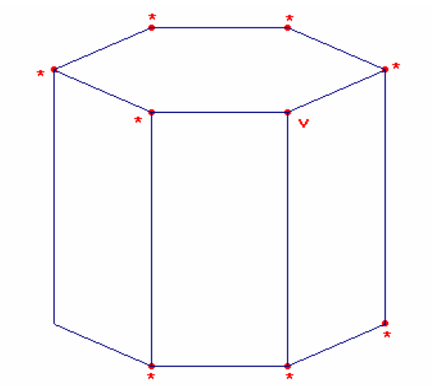


Figura 1

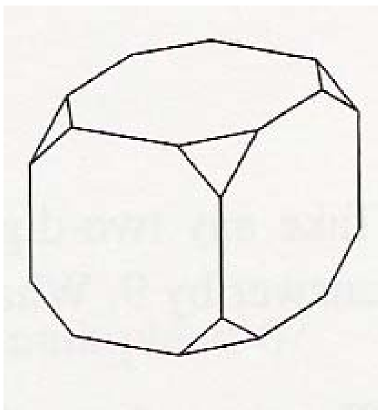


Figura 2

1. Usando a fatoração $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, obtemos :

$$
\begin{aligned}
666.666.666^2 - 333.333.333^2 &= (666.666.666 - 333.333.333)(666.666.666 + 333.333.333) \\
&= 333.333.333 \times 999.999.999 \\
&= 333.333.333 \times (1.000.000000 - 1) \\
&= 333.333.333.000.000.000 - 333.333.333 \\
&= 333.333.332.666.666.667
\end{aligned}
$$

2. **(E)** Usando a regra dada no enunciado, preenchemos as casas vazias a partir da segunda linha a contar de baixo, obtemos:

	42		
	$13+x$	$11+2x$	
8	$5+x$	$x+6$	
3	5	x	6

Logo, $(13 + x) + (11 + 2x) = 42$. Assim, $24 + 3x = 42$. Donde $x = 6$.

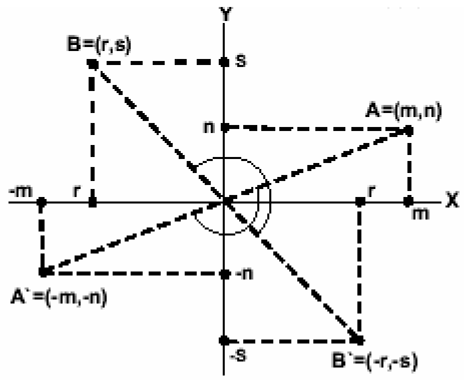
3. **(C) Solução 1:** O algarismo final de 9867^3 é o mesmo que o de $7^3 = 343$, isto é, 3; o algarismo final de 9867^2 é o mesmo que o de $7^2 = 49$, isto é, 9. Se de um número terminado em 3 subtraímos outro terminado em 9, o algarismo final do resultado é 4.

Comentário: Observe que:

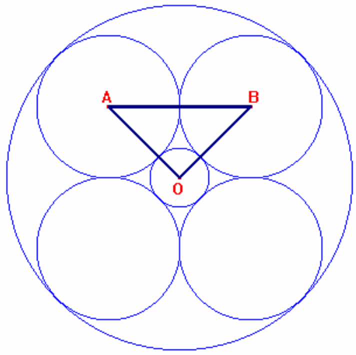
algarismo das unidades de $(9867^3 - 9867^2)$ = algarismo das unidades de $(7^3 - 7^2)$

Solução 2: $n^3 - n^2 = n^2(n-1)$. Assim, $n^2 = (9867)^2$ termina em 9 e $n - 1 = 9866$ em 6. Como, $9 \times 6 = 54$, o algarismo final do resultado é 4.

4. **(E)** Uma rotação de 180º também é conhecida como *meia-volta*. Neste problema, temos uma meia-volta em torno da origem. O desenho ao lado ilustra o que esta meia-volta faz com as coordenadas dos pontos do plano. Por exemplo, o ponto *A′* é o resultado da meia-volta aplicada ao ponto *A*; em outras palavras, *A′* é onde o ponto *A* vai parar após a meia-volta. Do mesmo modo, *B′* é onde *B* vai parar após a meia volta. É fácil ver que na passagem de *A* para *A′* as coordenadas trocam de sinal. Deste modo, vemos que uma meia-volta em torno da origem leva um ponto qualquer (x, y) no ponto $(-x, -y)$.



Temos: (a, b) pertence à nova parábola $\Leftrightarrow$ $(-a, -b)$ pertence à parábola $y = x^2 - 5x + 9 \Leftrightarrow -b = a^2 + 5a + 9 \Leftrightarrow b = -a^2 - 5a - 9$. Logo a equação da nova parábola é $y = -x^2 - 5x - 9$.

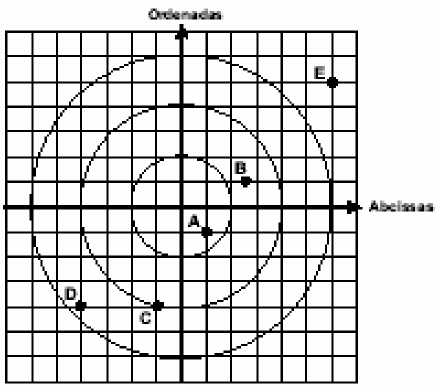


5. Seja r o raio das quatro circunferências iguais. Ligando os centros A e B de duas destas circunferências ao centro O das circunferências concêntricas, obtemos o triângulo OAB como na figura ao lado. Lembrando que a reta que une os centros de duas circunferências tangentes passa pelo ponto de tangência, vemos que $OA = OB = 1 + r$ e $AB = 2r$. Lembrando também, que o triângulo OAB é retângulo em O, o teorema de Pitágoras nos diz então que $(2r)^2 = (1+r)^2 + (1+r)^2$, ou seja, $4r^2 = 2r^2 + 4r + 2$. Logo $r^2 - 2r - 1 = 0$; daqui tiramos $r = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Como $1 - \sqrt{2}$ é negativo, descartamos esta raiz e obtemos $r = 1 + \sqrt{2}$. Segue que o raio da circunferência maior é $1 + 2r = 3 + 2\sqrt{2}$.

6. **(D)** Seja x a quantidade de farinha, em quilos, de que o padeiro dispõe. Trabalhando sozinho, ele usaria $\dfrac{x}{6}$ quilos de farinha em 1 hora; trabalhando com seu ajudante, eles usariam $\dfrac{x}{2}$ quilos de farinha em 1 hora. Seja t o tempo, em horas, que o padeiro trabalhou sozinho. Como a farinha acaba em 150 minutos (2 horas e 30 minutos = $2,5$ horas), o tempo que ele trabalhou com seu ajudante foi $2,5 - t$ horas. Logo, a quantidade gasta de farinha durante o tempo que o padeiro trabalhou sozinho é $\dfrac{x}{6} \times t$, e a quantidade gasta durante o tempo que o padeiro trabalhou com seu ajudante é $\dfrac{x}{2} \times (2,5 - t)$. Como

$$\underbrace{\begin{matrix}\text{quantidade total}\\ \text{de farinha}\end{matrix}}_{x} = \underbrace{\begin{matrix}\text{quantidade farinha gasta pelo}\\ \text{padeiro trabalhando sozinho}\end{matrix}}_{\frac{x}{6}\times t} + \underbrace{\begin{matrix}\text{quantidade farinha gasta}\\ \text{pelo padeiro trabalhando}\\ \text{com o ajudante}\end{matrix}}_{\frac{x}{2}(2,5-t)}$$

temos $x = \dfrac{x}{6}t + \dfrac{x}{2}(2,5 - t)$. A quantidade de farinha que o padeiro tinha inicialmente era não nula, isto é $x \neq 0$. Logo, podemos dividir ambos os membros por x e encontramos $1 = \dfrac{t}{6} + \dfrac{2,5 - t}{2}$, portanto, $t = 0,75 \text{ horas} = 0,75 \times 60 \text{ minutos} = 45 \text{ minutos}$.



7. **(a)** Marcamos os pontos, conforme mostra a figura:

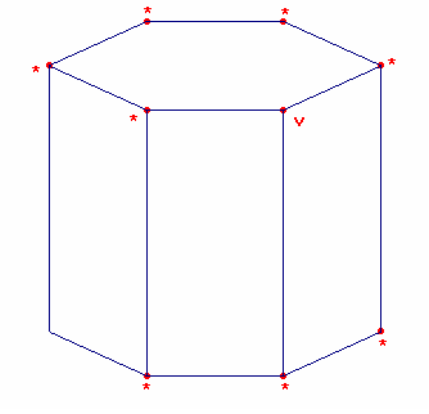
(b) No círculo menor temos apenas o ponto A. Portanto, Manoel acertou apenas uma vez neste círculo, o que lhe dá 300 pontos.

(c) Para calcular o total de pontos, observe que no ponto B ele ganha 100 pontos, no C ganha 50 pontos e no D ganha 50 pontos. Já no ponto no E, ele não ganha pontos, porque este está fora do alvo. Logo, o número total de pontos foi de $300 + 100 + 50 + 50 = 500$ pontos.

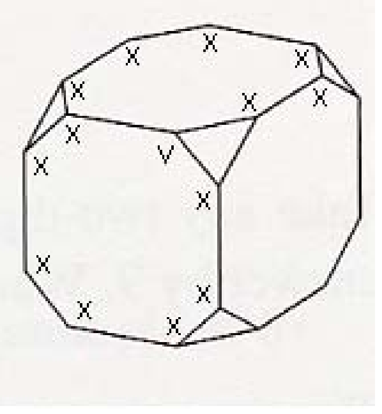
8. Como podemos repartir o total de convidados em mesas de 6 ou 7, o número de convidados é um múltiplo de 6 e de 7. Como o menor múltiplo comum de 6 e 7 é 42, podemos ter $42, 84, 126, \ldots$ convidados. Como são menos do que 120 convidados, só podemos ter 42 ou 84 convidados. Por outro lado, como são necessárias mais do que 10 mesas, temos mais do que 60 convidados. Logo, descartamos o 42, e o número de convidados só pode ser 84.

9. Em um poliedro qualquer, dois vértices distintos determinam uma diagonal se eles estiverem em faces distintas.

(a) No caso do prisma hexagonal, vemos na figura que o vértice v não forma uma diagonal com os vértices marcados com *; levando o próprio v em conta, vemos que v não forma uma diagonal com exatamente 9 vértices. Como o prisma tem 12 vértices, segue que v forma uma diagonal com exatamente $12-9=3$ vértices. O mesmo raciocínio vale para qualquer vértice, e concluímos que de cada vértice do prisma partem exatamente 3 diagonais. Como a diagonal que parte de um vértice v para o vértice w é a mesma que parte de w para v, segue que o número de diagonais é $\frac{12\times 3}{2}=18$



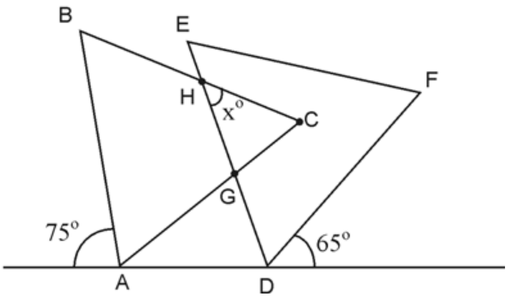
(b) Seja V um vértice do poliedro. Observando a figura vemos que V não forma uma diagonal com exatamente 14 vértices: 13 marcados com X e mais o próprio V. Como o poliedro tem 24 vértices no total, sobram $24-14=10$ vértices com os quais V forma uma diagonal. Logo, o número de diagonais deste poliedro é $\frac{24\times 10}{2}=120$.



1) Uma loja de sabonetes realiza uma promoção com o anúncio *"Compre um e leve outro pela metade do preço"*. Outra promoção que a loja poderia fazer oferecendo o mesmo desconto percentual é:

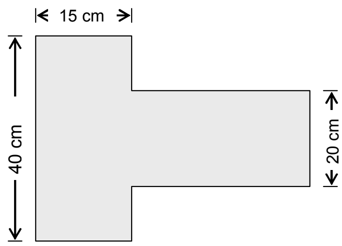
A) *"Leve dois e pague um"*
B) *"Leve três e pague um"*
C) *"Leve três e pague dois"*
D) *"Leve quatro e pague três"*
E) *"Leve cinco e pague quatro"*

2) Na figura, os dois triângulos ABC e FDE são eqüiláteros. Qual é o valor do ângulo x?



A) 30° B) 40° C) 50° D) 60° E) 70°

3) O desenho mostra um pedaço de papelão que será dobrado e colado ao longo das bordas para formar uma caixa retangular. Os ângulos nos cantos do papelão são todos retos. Qual será o volume da caixa em cm^3?



A) 1 500 B) 3 000 C) 4 500 D) 6 000 E) 12 000

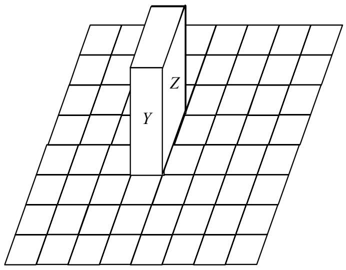
4) Numa seqüência, cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos imediatamente anteriores, o segundo termo é 1 e o quinto termo é 2005. Qual é o sexto termo?

A) 3 002 B) 3 008 C) 3 010 D) 4 002 E) 5 004

5) Quantos números entre 10 e $13\,000$, quando lidos da esquerda para a direita, são formados por algarismos consecutivos e em ordem crescente? Por exemplo, 456 é um desses números, mas $7\,890$ não é.

A) 10 B) 13 C) 18 D) 22 E) 25

6) Num bloco de $1cm \times 2cm \times 3m$,marcamos três faces com as letras X, Y e Z como na figura. O bloco é colocado sobre um tabuleiro de $8cm \times 8cm$ com a face X virada para baixo (em contato com o tabuleiro) conforme mostra a figura. Giramos o bloco de 90^o em torno de uma de suas arestas de modo que a face Y fique virada para baixo (isto é, totalmente em contato com o tabuleiro). Em seguida, giramos novamente o bloco de 90° em torno de uma de suas arestas, mas desta vez de modo que a face Z fique virada para baixo. Giramos o bloco mais três vezes de 90° em torno de uma de suas arestas, fazendo com que as faces X, Y e Z fiquem viradas para baixo, nessa ordem. Quantos quadradinhos diferentes do tabuleiro estiveram em contato com o bloco?



A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

7) A função f é dada pela tabela a seguir.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	1	3	5	2

Por exemplo, $f(2) = 1$ e $f(4) = 5$. Quanto vale $\underbrace{f(f(f(f(\ldots\ldots f}_{2004\ vezes}(4)\ldots\ldots))))$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8) Esmeralda escreveu em ordem crescente todos os números de 1 a 999, sem separá-los, formando o número mostrado a seguir: 12345678910111213… 997998999. Nesse número, quantas vezes aparece o agrupamento “21”, nesta ordem?

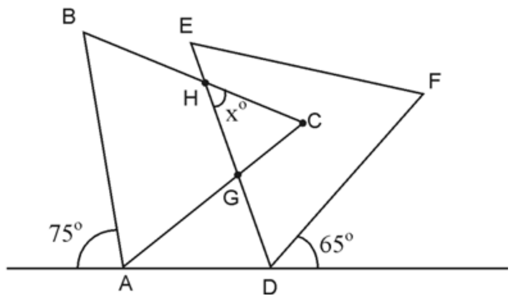
1. **(D)** Pela promoção, quem levar 2 unidades paga pelo preço de $1,5$ unidade, logo quem levar 4 unidades paga pelo preço de 3 unidades, ou seja, leva quatro e paga três.

2. **(B)** Como ABC e DEF são triângulos eqüiláteros, cada um de seus ângulos internos mede 60°. No triângulo AGD temos

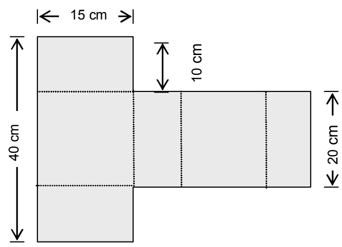
$$G\hat{A}D = 180^{\circ} - 75^{\circ} - 60^{\circ} = 45^{\circ} \text{ e}$$

$$G\hat{D}A = 180^{\circ} - 65^{\circ} - 60^{\circ} = 55^{\circ}$$

Portanto, $A\hat{G}D = 180^{\circ} - 45^{\circ} - 55^{\circ} = 80^{\circ}$ .Logo no triângulo CGH temos $x + 80^{\circ} + 60^{\circ} = 180^{\circ}$, donde $x = 40^{\circ}$.



3. **(B)** A figura mostra as dobras que serão feitas para montar a caixa. A caixa terá dimensões $20cm$ de largura, $15cm$ de comprimento e $10cm$ de altura. Logo, seu volume será igual a $20 \times 15 \times 10 = 3000\,cm^3$.



4. **(B)** Seja x o primeiro termo. Como o segundo termo é 1 e, a partir do terceiro, cada termo é a soma dos dois anteriores, temos:

- terceiro termo: $1 + x$;
- quarto termo: $1 + (1 + x) = 2 + x$;
- quinto termo: $(1 + x) + (2 + x) = 3 + 2x$;
- sexto termo: $(2 + x) + (3 + 2x) = 5 + 3x$.

Como o quinto termo é 2005, temos $3 + 2x = 2005$, donde $x = 1001$; logo o sexto termo é $5 + 3 \times 1001 = 3008$.

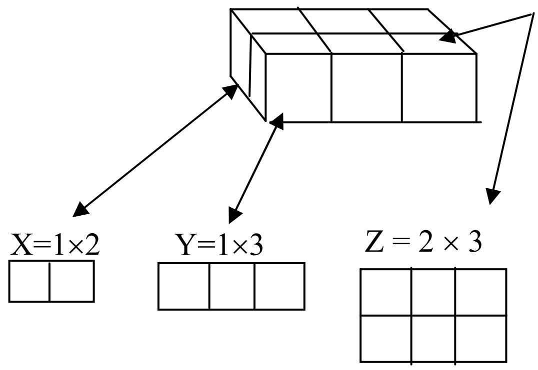
5. **(D)** Os números em questão são:

- com 2 algarismos: $12, 23, 34, 45, \ldots, 89$ (8 números),
- com 3 algarismos: $123, 234, 345, \ldots, 789$ (7 números),
- com 4 algarismos: $1234, 2345, \ldots, 6789$ (6 números)

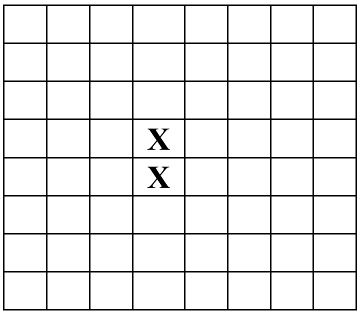
e, por fim,

- com 5 algarismos: 12345, um total de $8+7+6+1=22$ números.

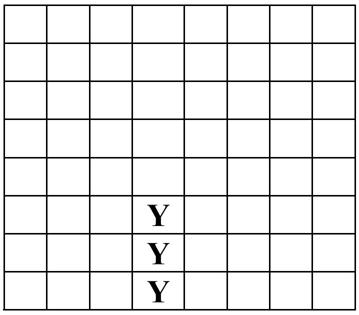
6. **(B)** Note que giramos o bloco 5 vezes. Indicaremos os movimentos feitos pelo bloco e as faces que entram em contato com os quadradinhos em cada etapa.
De acordo com a figura dada, podemos concluir que as dimensões das faces X, Y e Z são:



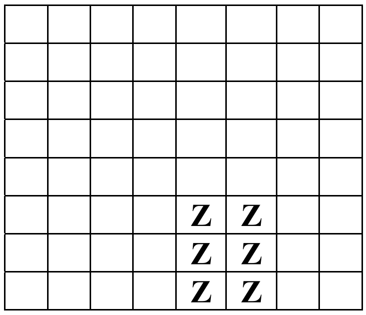
As figuras a seguir mostram os quadradinhos do tabuleiro que ficam em contato com cada um das 3 faces do bloco desde a posição inicial até a final, após a última rotação.



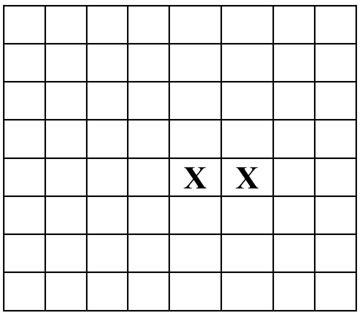
Posição inicial



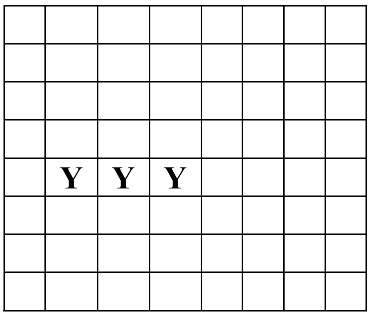
1ª Rotação



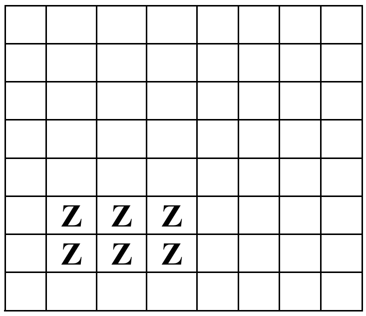
2ª Rotação



3ª Rotação



4ª Rotação



5ª Rotação

Alguns quadradinhos entram em contato com as faces mais de uma vez, como mostra a figura a seguir, que mostra todos os quadradinhos que tiveram contato com as faces do bloco desde a posição inicial até a última rotação:

			X				
	Y	**Y**	**X/Y**	**X**	**X**		
	Z	**Z**	**Y/Z**	**Z**	**Z**		
	Z	**Z**	**Y/Z**	**Z**	**Z**		
			Y	**Z**	**Z**		

Contando nesta última figura, vemos que o bloco esteve em contato com 19 quadradinhos do tabuleiro.

7. **(D)** Da tabela temos: Daí segue:

$$f(4)=5 \quad , \quad f(\underbrace{f(4)}_{5})=f(5)=2 \quad , \quad f(f(\underbrace{f(4)}_{5}))=f(\underbrace{f(5)}_{2})=f(2)=1 \quad e$$

$f(f(f(\underbrace{f(4)}_{5})))=f(f(\underbrace{f(5)}_{2}))=f(\underbrace{f(2)}_{1})=f(1)=4$ Logo, $\underbrace{f(f(f(f(4)}_{4 vezes}=4$.

Como 2004 é múltiplo de 4, segue que $\underbrace{f(f(f(f(\ldots\ldots f}_{2004\ vezes}(4)\ldots\ldots))))=4$. O diagrama a seguir

ilustra esta afirmação.

A seqüência a seguir ilustra esta composição.

$$\underbrace{4\xrightarrow{f}5\xrightarrow{f}2\xrightarrow{f}1\xrightarrow{f}4}_{4 vezes}\underbrace{\xrightarrow{f}5\xrightarrow{f}2\xrightarrow{f}1\xrightarrow{f}4}_{8 vezes}\underbrace{\xrightarrow{f}5\xrightarrow{f}2\xrightarrow{f}1\xrightarrow{f}4}_{12 vezes}\rightarrow\ldots\ldots\underbrace{\xrightarrow{f}5\xrightarrow{f}2\xrightarrow{f}1\xrightarrow{f}4}_{2004 vezes}$$

8. Vamos primeiro listar os números que têm o agrupamento 21 no meio de sua representação decimal:

21, 121, 221,…,921 → 10 números
210, 211,…,219 → 10 números

Temos também que contar os agrupamentos 21 obtidos a partir de um par de números consecutivos tal que o primeiro termina com 2 e o segundo começa com 1, que são os seguintes 11 casos:

12-13, 102-103, 112-113, 122-123, 132-133, 142-143, 152-153, 162-163, 172-173, 182-183, 192-193

Temos então um total de $11+20=31$ números.

1) Qual é o maior dos números?

(A) $1000+0,01$ (B) $1000\times 0,01$ (C) $1000/0,01$ (D) $0,01/1000$ (E) $1000-0,01$

2) Qual o maior número de 6 algarismos que se pode encontrar suprimindo-se 9 algarismos do número 778157260669103 sem mudar a ordem dos algarismos?

(A) 778152 (B) 781569 (C) 879103 (D) 986103 (E) 987776

3) Se n é um número natural e $\frac{n}{24}$ é um número entre $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{4}$, então n é igual a:

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

4) Correndo com velocidade de $10\,km/h$, João completa uma certa distância em 6 minutos. A qual velocidade ele pode completar a mesma distância em 8 minutos?

(A) $7,5\,km/h$ (B) $7,75\,km/h$ (C) $8\,km/h$ (D) $8,25\,km/h$ (E) $8,5\,km/h$

5) As vizinhas Elza, Sueli, Patrícia, Heloísa e Cláudia chegam juntas do trabalho e começam a subir as escadas do prédio de 5 andares onde moram. Cada uma mora num andar diferente. Heloísa chega a seu andar depois de Elza, mas antes de Cláudia. Quando Sueli chega ao seu andar, Heloísa ainda tem 2 andares para subir, e o mesmo ocorre a Patrícia quando Elza chega ao seu andar. Sueli não mora no 1º andar. Em qual andar mora cada uma delas?

1.**(C)** Temos: $1000+0,01=1000,01$; $1000\times 0,01=1000\times\dfrac{1}{100}=10$;

$\dfrac{1000}{0,01}=\dfrac{1000}{\dfrac{1}{100}}=1000\times 100=100000$; $\dfrac{0,01}{1000}$ é o inverso de $\dfrac{1000}{0,01}$, logo, de (C) temos que

$\dfrac{1000}{0,01}=\dfrac{1}{100000}=0,00001$. Agora, $1000-0,01$ é menor do que 1000 (não é preciso efetuar o cálculo para obter esta conclusão). Portanto, o maior número é $\dfrac{1000}{0,01}$.

2. **(C) Solução 1**. Para que seja o maior possível, o número deve começar com o maior algarismo. Para termos 6 algarismos sem mudar a ordem, o maior é 8 depois 7, faltam agora 4 algarismos para completar o número, escolhemos 9103. Logo, o número é 879103 (~~77~~ 8 ~~15~~7~~26066~~ 9103)

Solução 2. As opções D e E não servem, pois a ordem foi alterada, já nas opções A, B e C, não. O maior número entre as opções A, B e C é C.

3. **(A)** Como $\dfrac{1}{6}=\dfrac{4}{24}$ e $\dfrac{1}{4}=\dfrac{6}{24}$, então n só pode ser igual a 5.

4. **(A) Solução** 1:

6 minutos é $1/10$ da hora, logo a distância corrida em 6 minutos é $10:10=1km$. Como, espaço = velocidade x tempo, temos $1km=v\times 8\min \Rightarrow v=1km/8\min$ (onde v é a velocidade). Logo, João corre $1km$ em 8 minutos, precisamos determinar essa velocidade em horas.

$$8\min \xrightarrow{\text{corresponde a}} 1km$$
$$4\min \xrightarrow{\text{corresponde a}} 0,5km$$
$$60\min \xrightarrow{\text{corresponde a}} 0,5\times 15km=7,5km$$

Logo, a velocidade é $7,5\,km/h$.

Solução 2: Podemos usar diretamente a seguinte Regra de Três:

$$\begin{array}{ccc} \text{Velocidade} & & \text{Tempo} \\ \text{em } km/h & & \text{em } horas \\ 10 & \longrightarrow & \dfrac{6}{60} \\ x & \longrightarrow & \dfrac{8}{60} \end{array}$$

Velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais (aumentando a velocidade diminui o tempo), logo:

$$\frac{x}{10} = \frac{\frac{6}{60}}{\frac{8}{60}} = \frac{6}{8} \Rightarrow x = \frac{60}{8} = \frac{15}{2} = 7,5km/h.$$

5. Vejamos as informações dadas no enunciado:

"*Heloísa chega a seu andar depois de Elza, mas antes de Cláudia*".

$\Rightarrow$ Heloísa mora acima de Elza e abaixo de Cláudia.

"*Quando Sueli chega ao seu andar, Heloísa ainda tem 2 andares para subir, e o mesmo ocorre a Patrícia quando Elza chega ao seu andar*".

$\Rightarrow$ Heloísa mora dois andares acima de Sueli e Patrícia dois andares acima de Elza.

<table>
<tr><td rowspan="5">Sueli não mora no 1º andar e Heloísa mora 2 andares acima de Sueli, logo temos as seguintes possibilidades ao lado.</td><td>1º andar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2º andar</td><td>Sueli</td><td></td></tr>
<tr><td>3º andar</td><td></td><td>Sueli</td></tr>
<tr><td>4º andar</td><td>Heloísa</td><td></td></tr>
<tr><td>5º andar</td><td></td><td>Heloísa</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Como Cláudia mora acima de Heloísa, então Heloísa não pode morar no último andar que é o 5º andar. Logo, Sueli mora no 2º andar, Heloísa no 4º e Cláudia só pode morar no 5º.</td><td>1º andar</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>2º andar</td><td colspan="2">Sueli</td></tr>
<tr><td>3º andar</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>4º andar</td><td colspan="2">Heloísa</td></tr>
<tr><td>5º andar</td><td colspan="2">Cláudia</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Finalmente, Patrícia mora dois andares acima de Elza, logo Elza mora no 1º andar e Patrícia no 4º andar.</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>1º andar</td><td colspan="2">Elza</td></tr>
<tr><td>2º andar</td><td colspan="2">Sueli</td></tr>
<tr><td>3º andar</td><td colspan="2">Patrícia</td></tr>
<tr><td>4º andar</td><td colspan="2">Heloísa</td></tr>
<tr><td>5º andar</td><td colspan="2">Cláudia</td></tr>
</table>

1) $9^{20}+9^{20}+9^{20}$ é igual a:

(A) 9^{20} (B) 3^{66} (C) 9^{23} (D) 3^{41} (E) 3^{23}

2) Miguel escolheu um número de 3 algarismos e outro de 2 algarismos. Qual é a soma desses números se a sua diferença é 989?

(A) 1000 (B) 1001 (C) 1009 (D) 1010 (E) 2005

3) Qual é o menor número natural n para o qual 10^n-1 é múltiplo de 37?

(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

4) Num certo país com 14 milhões de habitantes, $0{,}15$ % da população contraiu uma certa gripe. Quantos habitantes não contraíram a gripe?

(A) 13 979 000 (B) 1 397 900 (C) 139 790 (D) 13 979 (E) 139 790 000

5) ***O Código Secreto.*** O código secreto de um grupo de alunos é um número de 3 algarismos distintos diferentes de 0. Descubra o código com as seguintes informações:

1	**2**	**3**	Nenhum algarismo correto
4	**5**	**6**	Um só algarismo correto na posição certa
6	**1**	**2**	Um só algarismo correto, mas na posição errada
5	**4**	**7**	Um só algarismo correto, mas na posição errada
8	**4**	**3**	Um só algarismo correto na posição certa

(A) 137 (B) 876 (C) 768 (D) 678 (E) 576

1. **(D)** $9^{20}+9^{20}+9^{20}=3\times 9^{20}=3\times (3^2)^{20}=3\times 3^{40}=3^{41}$.

2. **(C)** Como a diferença é 989 e o menor número tem 2 algarismos (logo, é maior do que 9), o número de 3 algarismos tem que ser maior do que $989+9=998$, logo a única opção é 999.

$$\underbrace{\_\,\_\,\_}_{\substack{\text{maior que}\\ 989+9}} - \underbrace{\_\,\_}_{\text{maior que } 9} = 989$$

Logo, o número de 2 algarismos é 10, e a soma dos dois é $999+10=1009$.

3. **(D)** Observe que 10^n-1 é um número que tem todos os seus algarismos iguais a 9. Os menores múltiplos de 37 terminados em 9 são:
$37\times 7=259$, $37\times 17=629$, $37\times 27=999$. Como $999=10^3-1$, segue que $n=3$.

4. **(A)** Os que não contraíram a gripe representam $100\%-0{,}15\%=99{,}85\%$ da população.
Temos: $99{,}85\%$ de 14 milhões $=\dfrac{99{,}85}{100}\times 14\,000\,000=\dfrac{9\,985}{10\,000}\times 14\,000\,000=9\,985\times 1400=13\,979\,000$

5. **(B)** O código pode ser formado com os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9.

Da 1^{a} informação temos que $1, 2$ e 3 não fazem parte do código. Da 3^{a} informação, concluímos que 6 faz parte do código, e sua posição é _6_ ou _ _ 6.

1	2	3
4	5	**6**
6	1	2
5	4	7
8	4	3

Da 2^{a} informação segue que 4 e 5 não fazem parte do código e a posição do 6 no código é _ _ 6. Da última informação tem só que o código é da forma 8_6. Com a 4^{a} informação completamos o código: 876.

1	2	3
4	5	**6**
6	1	2
5	4	7
8	4	3

1) $2-2\{2-2[2-2(4-2)]\}$ é igual a:

(A) 0 (B) 2 (C) -2 (D) 4 (E) -10

2) Escrevendo as frações em ordem crescente $\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{2}{5}$, encontramos:

(A) $\frac{2}{5}<\frac{3}{5}<\frac{4}{6}<\frac{4}{5}<\frac{6}{5}<\frac{4}{3}$ (B) $\frac{4}{3}<\frac{4}{6}<\frac{2}{5}<\frac{3}{5}<\frac{4}{5}<\frac{6}{5}$ (C) $\frac{2}{5}<\frac{3}{5}<\frac{4}{5}<\frac{4}{6}<\frac{4}{3}<\frac{6}{5}$

(D) $\frac{2}{5}<\frac{3}{5}<\frac{4}{5}<\frac{4}{6}<\frac{6}{5}<\frac{4}{3}$ (E) $\frac{2}{5}<\frac{3}{5}<\frac{4}{5}<\frac{4}{3}<\frac{4}{6}<\frac{6}{5}$

3) Quantos números maiores que 200 podem ser escritos, usando-se apenas os algarismos 1, 3 e 5?

(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 15 (E) 18

4) Uma maratona de $52\,km$ começou às $11:30$ horas e o vencedor terminou às $12:45$ horas do mesmo dia. Qual foi a velocidade média do vencedor em km/hora?

(A) 35 (B) 38 (C) 39,5 (D) 41,6 (E) 52

5) Cinco alunas escreveram cada uma um número num papel, os números só podiam ser 1 ou 2 ou 4. Qual pode ser o produto dos cinco números escritos?

(A) 100 (B) 120 (C) 256 (D) 768 (E) 2048

1. **(E)** As ordens de prioridade para resolver uma expressão são:

$$\underbrace{\textit{parênteses}}_{1^{\text{o}}} \rightarrow \underbrace{\textit{colchete}}_{2^{\text{o}}} \rightarrow \underbrace{\textit{chaves}}_{3^{\text{o}}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\text{multiplicações e divisões}}_{1^{\text{o}}} \rightarrow \underbrace{\text{somas e subtrações}}_{2^{\text{o}}}$$

Temos:

$$2-2\left\{2-2\left[2-2(\underbrace{4-2}_{2})\right]\right\}=2-2\left\{2-2\left[2-\underbrace{2\times 2}_{4}\right]\right\}=2-2\left\{2-2\left[\underbrace{2-4}_{-2}\right]\right\}=$$

$$=2-2\left\{2-\underbrace{2\times(-2)}_{-4}\right\}=2-2\{2-(-4)\}=2-2\left\{\underbrace{2+4}_{6}\right\}=2-\underbrace{2\times 6}_{12}=2-12=-10$$

2. **(A) Solução 1**: Temos: $\frac{4}{6}<\frac{4}{5}<\frac{4}{3}$ (frações de mesmo numerador, a menor é a que tem o maior denominador) e $\frac{2}{5}<\frac{3}{5}<\frac{4}{5}<\frac{6}{5}$ (frações de mesmo denominador, a menor é a que tem o menor numerador). As duas maiores são $\frac{4}{3}$ e $\frac{6}{5}$ por serem as únicas maiores do que 1 (numerador maior do que denominador). Temos $\frac{4}{3}=\frac{20}{15}$ e $\frac{6}{5}=\frac{18}{15} \Rightarrow \frac{6}{5}<\frac{4}{3}$ e logo: $\frac{2}{5}<\frac{3}{5}<\frac{4}{5}<\frac{6}{5}<\frac{4}{3}$. Falta apenas "encaixar" 4/6=2/3. Note que $\frac{2}{5}<\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ e $\frac{4}{6}<\frac{4}{5}$. Como, $\frac{3}{5}=\frac{9}{15}$ e $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$, segue que $\frac{3}{5}<\frac{4}{6}$
Finalmente, temos: $\frac{2}{5}<\frac{3}{5}<\frac{4}{6}<\frac{4}{5}<\frac{6}{5}<\frac{4}{3}$.

Solução 2: Escrevendo as frações na forma decimal, obtemos:

$$\frac{4}{3}=1,333\ldots\ ;\ \frac{4}{5}=0,8\,;\ \frac{4}{6}=0,666\ldots;\ \frac{3}{5}=0,6\,;\ \frac{6}{5}=1,2\,;\ \frac{2}{5}=0,4.$$

Logo: $\underbrace{0,4}_{\frac{2}{5}}<\underbrace{0,6}_{\frac{3}{5}}<\underbrace{0,666\ldots}_{\frac{4}{6}}<\underbrace{0,8}_{\frac{4}{5}}<\underbrace{1,2}_{\frac{6}{5}}<\underbrace{1,333\ldots}_{\frac{4}{3}}$

Solução 3: Escrevendo as frações com o mesmo denominador comum, temos: $\frac{4}{3}=\frac{40}{30};\frac{4}{5}=\frac{24}{30};\frac{4}{6}=\frac{20}{30};\frac{3}{5}=\frac{18}{30};\frac{6}{5}=\frac{36}{30};\frac{2}{5}=\frac{12}{30}$. Assim, $\frac{2}{5}<\frac{3}{5}<\frac{4}{6}<\frac{4}{5}<\frac{6}{5}<\frac{4}{3}$. (frações de mesmo denominador, a menor é a que tem o menor numerador).

3. **(E)** Por serem maiores que 200, o algarimo das centenas só pode ser 3 ou 5. Os números são:

- Começando com $3: \begin{cases} \text{sem repetir algarismos: 315 e 351} \\ \text{repetindo algarismos: 311, 313, 331, 335, 353, 333, 355.} \end{cases}$

Nesse caso, temos 9 números.

- Começando com 5: basta trocar o 3 com o 5 nos números acima. Logo, teremos 9 números.

Assim, temos $\boxed{18}$ números que satisfazem as condições do problema.

4. **(D)** O tempo que o vencedor gastou foi: $12\text{h } 45\text{min} - 11\text{h } 30\text{mim} = 1\text{h } 15 \text{ min} = 1\ 1/4\text{h} = 5/4\text{h}$.
Logo, a velocidade média em km/hora é:

$$\frac{\text{espaço percorrido em } km}{\text{tempo gasto em horas}} = \frac{52}{\frac{5}{4}} = 52 \times \frac{4}{5} = 41{,}6 km/h.$$

5. **(C)** Se todos as alunas escreveram o número 1, o produto seria 1 que não está entre as opções. Logo, 2 ou 4 são fatores do produto, por isso o produto tem que ser uma potência de 2. O maior produto possível é obtido no caso em que todas as 5 alunas escreveram o número 4, e o produto seria $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 2^{10} = 1024$. Logo, podemos eliminar 2048. Agora temos:

- 100 e 120 são divisíveis por 5, logo não são potências de 2;
- 768 é divisível por 3 $(7+6+8=21)$, logo não é potência de 2.

A única resposta possível é $256 = 2^8$. Seria, por exemplo o caso em que duas alunas escreveram o número 2 e três escreveram o número $4: 256 = 2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 4$.

1) O produto $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$ é :

(A) $\frac{119}{120}$ (B) $\frac{5}{7}$ (C) $2\frac{43}{60}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{120}$

2) A soma de dois números naturais é 11. Qual o maior produto possível que se pode obter com esses números?

(A) 30 (B) 22 (C) 66 (D) 24 (E) 28

3) Se m é um número natural, tal que $3^m = 81$, então m^3 é igual a:

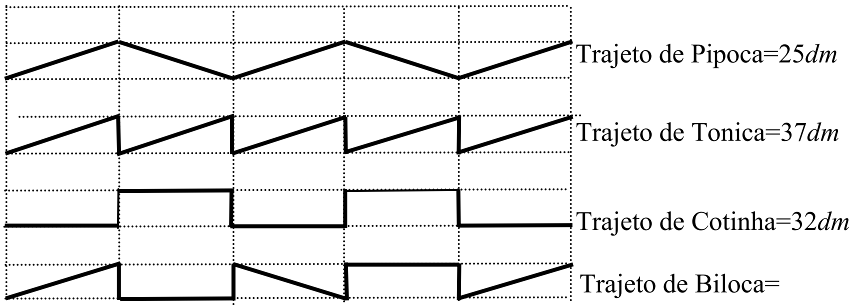
(A) 81^3 (B) 3^{81} (C) 64 (D) 24 (E) 48

4) Se $a-1=b+2=c-3=d+4$, então qual o maior dentre os números *a, b, c* e *d*?

(A) a (B) b (C) c (D) d (E)todos são iguais.

5) Quatro formigas atravessam uma sala coberta de lajotas retangulares todas iguais. O trajeto de cada formiga é mostrado na figura em negrito. Qual o comprimento do trajeto percorrido por Biloca?

(A) $30\,dm$
(B) $35\,dm$
(C) $43\,dm$
(D) $55\,dm$
(E) $48\,dm$



6) Célia quer trocar com Guilherme figurinhas de um álbum sobre animais brasileiros. Celina quer trocar 4 figurinhas de borboleta, 5 de tubarão, 3 de cobra, 6 de periquito e 6 de macaco. Todas as figurinhas de Guilherme são de aranha. Eles sabem que:

(a) 1 figurinha de borboleta vale 3 figurinhas de tubarão
(b) 1 figurinha de cobra vale 3 figurinhas de periquito
(c) 1 figurinha de macaco vale 4 figurinhas de aranha
(d) 1 figurinha de periquito vale 3 figurinhas de aranha
(e) 1 figurinha de tubarão vale 2 figurinhas de periquito

Quantas figurinhas Célia receberá se ela trocar todas que quiser?

1. **(D)** $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$.

2. **(A)** Examinemos os produtos dos números naturais cuja soma é 11:

$11=1+10$ e $1\times 10=10$

$11=2+9$ e $2\times 9=18$

$11=3+8$ e $3\times 8=24$

$11=4+7$ e $4\times 7=28$

$11=5+6$ e $5\times 6=\boxed{30}$

3. **(C)** Temos $3^m=81=3^4$; donde $m=4$. Logo, $m^3=4^3=4\times 4\times 4=64$.

4. **(C)** Somando 3 a todos os membros obtemos:
$a-1+3=b+2+3=c-3+3=d+4+3 \Rightarrow a+2=b+5=c=d+7$, o que mostra que c é o maior.

5. **(B)** O trajeto de Biloca é: 3 diagonais $+\,4$ larguras $+\,2$ comprimentos.
Pipoca percorre 5 diagonais, logo o comprimento de 1 diagonal é $25\div 5=5\,dm$.
Tonica percorre 5 diagonais mais 4 larguras da lajota,ou seja: $\underbrace{5\text{ diagonais}}_{25}+4\text{ larguras}=37$, donde $4\text{ larguras}=37-25=12\,dm$.
Cotinha percorre $5\text{ comprimentos}+\underbrace{4\text{ larguras}}_{12}=32\Rightarrow 1\text{comprimento}=20\div 5=4\ dm.$
Finalmente, Biloca percorre:
$\underbrace{3\text{diagonais}}_{3\times 5}+\underbrace{4\text{larguras}}_{12}+\underbrace{2\text{comprimentos}}_{2\times 4}=15+12+8=35\,dm.$ Observe que o comprimento de 1 largura é $12\div 4=3\,dm$.

6. A *"moeda de troca"* de Guilherme são figurinhas de aranha, logo vamos calcular o *"valor-aranha"* de cada tipo de figurinha usando as informações (a), (b), (c), (d) e (e).

$4\text{ borboleta}\underset{(a)}{=}\underbrace{12}_{4\times 3}\text{ tubarão}\underset{(e)}{=}\underbrace{24}_{12\times 2}\text{ periquito}\underset{(d)}{=}\underbrace{72}_{24\times 3}\text{ aranha}$

$5\text{ tubarão}\underset{(e)}{=}\underbrace{10}_{5\times 2}\text{ periquito}\underset{(d)}{=}\underbrace{30}_{10\times 3}\text{ aranha}$

$3\text{ cobra}\underset{(b)}{=}\underbrace{9}_{3\times 3}\text{ periquito}\underset{(d)}{=}\underbrace{27}_{9\times 3}\text{aranha}$

$6\text{ periquito}\underset{(d)}{=}\underbrace{18}_{6\times 3}\text{ aranha}$

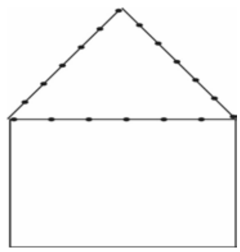
$6\text{ macaco}\underset{(c)}{=}\underbrace{24}_{6\times 4}\text{ aranha}$

Logo, ela receberá $72+30+27+18+24=171$ figurinhas de aranha.

1) O valor de $\dfrac{10+20+30+40}{10}+\dfrac{10}{10+20+30+40}$ é:

(A) 1 (B) 20 (C) 30 (D) $10,1$ (E) $1,01$

2) A figura ao lado é formada por um triângulo e um retângulo usando-se 60 palitos iguais. Para cada lado do triângulo são necessários 6 palitos. Se cada palito tem $5\,cm$ de comprimento, qual é a área do retângulo da figura?

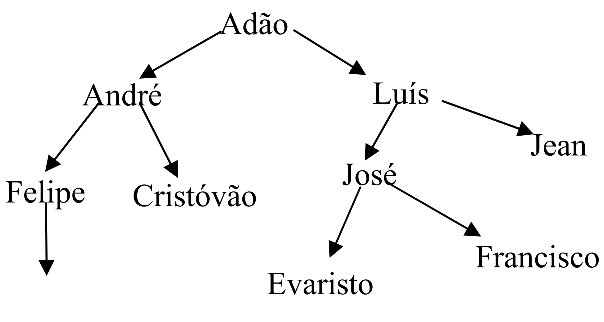


(A) $120cm^2$ (B) $540cm^2$ (C) $1350cm^2$ (D) $2700cm^2$ (E) $5400cm^2$

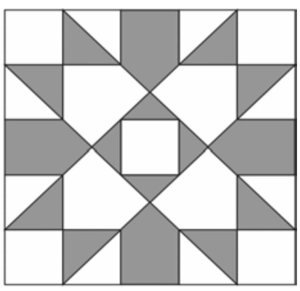
3) ***O incêndio e o bombeiro*** – Uma casa pega fogo. Um bombeiro se mantém no degrau do meio de uma escada jogando água sobre o incêndio. As chamas diminuem e ele sobe 5 degraus. O vento sopra e o bombeiro desce 7 degraus. Um pouco depois ele sobe 8 degraus e fica lá até que o incêndio acabe. Em seguida, ele sobe os últimos 7 degraus e entra na casa. Quantos degraus tem a escada do bombeiro?

(A) 25 (B) 26 (C) 27 (D) 28 (E) 29

4) A figura mostra a árvore geneológica de uma família. Cada flexa vai do pai em direção ao seu filho. Quem é o irmão do pai do irmão do pai de Evaristo?



(A) Francisco
(B) José
(C) André
(D)Felipe
(E) Simão



5) Uma colcha quadrada em branco e cinza é feita com quadrados e triângulos retângulos isósceles. A parte em cinza representa que percentagem da colcha?

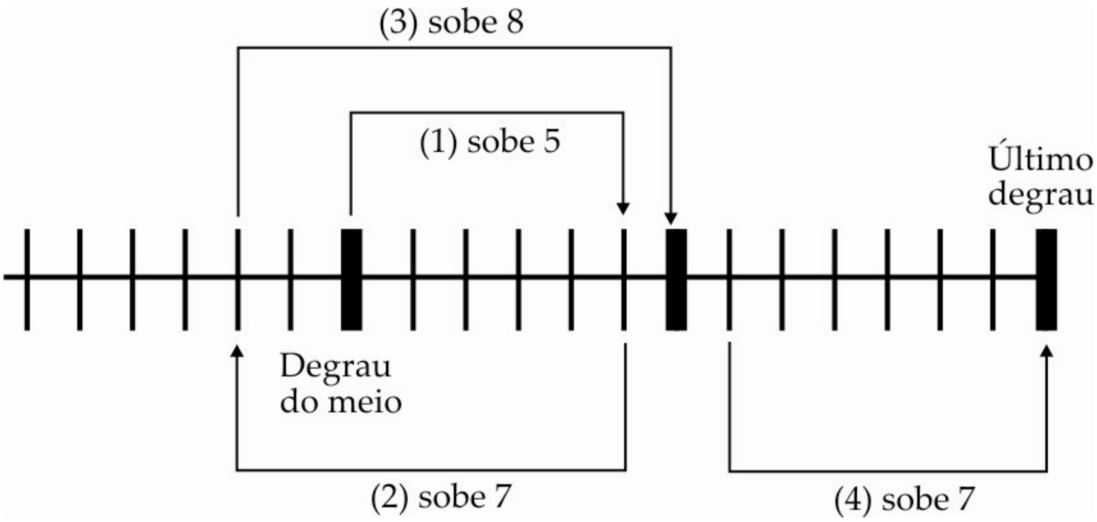
(A) 36% (B) 40% (C) 45% (D) 50% (E) 60%

1. **(D)** Solução: $\dfrac{10+20+30+40}{10}+\dfrac{10}{10+20+30+40}=\dfrac{100}{10}+\dfrac{10}{100}=10+0{,}1=10{,}1.$

2. **(D)** Para o triângulo foram usados $6\times 3=18$ palitos, sobrando então $60-18=42$ palitos para formar os 3 lados do retângulo. Da figura, temos que a largura do retângulo é formada por 6 palitos, logo o comprimento é formado por $\dfrac{42-6}{2}=18$ palitos. Como cada palito tem $5\,cm$ de comprimento, a área do retângulo é dada por $\underbrace{6\times 5}_{\text{largura}}\times\underbrace{18\times 5}_{\text{comprimento}}=30\times 90=2700\,cm^2$

3. **(C)** O sobe-desce do bombeiro a partir do degrau do meio até chegar ao último degrau é o seguinte:

$\overbrace{+5}^{\text{sobe}}\ \underbrace{-7}_{\text{desce}}\ \overbrace{+8}^{\text{sobe}}\ \overbrace{+7}^{\text{sobe}}$, logo o bombeiro sobe $8+5=13$ degraus acima do degrau do meio, chegando assim, ao último degrau da escada. Logo, a escada tem 13 degraus acima do degrau do meio, e portanto, 13 degraus abaixo do degrau do meio. Portanto, a escada tem $13+1+13=27$ degraus. Veja um esquema da movimentação do bombeiro.



4. **(C)** Na figura vemos que o pai de Evaristo é José. O irmão de José é Jean. O pai de Jean é Luís. O irmão de Luís é André.

$$\text{irmão do } \underbrace{\text{pai de Evaristo}}_{\text{José}} = \text{irmão de José} = \text{Jean}$$

$$\text{pai do } \underbrace{\text{irmão do } \underbrace{\text{pai de Evaristo}}_{\text{José}}}_{\text{Jean}} = \text{pai de Jean} = \text{Luís}$$

$$\text{irmão do } \underbrace{\text{pai do } \underbrace{\text{irmão do } \underbrace{\text{pai de Evaristo}}_{\text{José}}}_{\text{Jean}}}_{\text{Luís}} = \text{irmão de Luís} = \text{André}$$

5. **(B)** A colcha é formada de $5 \times 5 = 25$ quadradinhos. Os quadradinhos são todos iguais. Já os triângulos, temos de dois tipos: tipo I que corresponde a meio quadrado e tipo II que corresponde a $1/4$ de um quadradinho. A parte em cinza é composta de 8 triângulos do tipo I, 8 triângulos do tipo II e 4 quadrados, ou seja:

$$\underbrace{8 \text{ triângulos tipo I}}_{4 \text{ quadrados}} + \underbrace{8 \text{ triângulos tipo II}}_{2 \text{ quadrados}} + 4 \text{ quadrados} = 10 \text{ quadrados}.$$

Logo, a fração correspondente a parte cinza é $\frac{10}{25} = \frac{40}{100} = 40\%$.

1) Qual das igualdades está correta?

(i) $3\times10^6+5\times10^2=8\times10^8$
(ii) $2^3+2^{-3}=2^0$
(iii) $5\times8+7=75$
(iv) $5+5\div5=2$

(A) (i) (B)(ii) (C) (iii) (D)(iv) (E) nenhuma

2) Se *a, b* e *c* são números naturais tais que $3a=4b=7c$, então o menor valor de $a+b+c$ é:

(A) 84 (B) 36 (C) 61 (D) 56 (E) 42

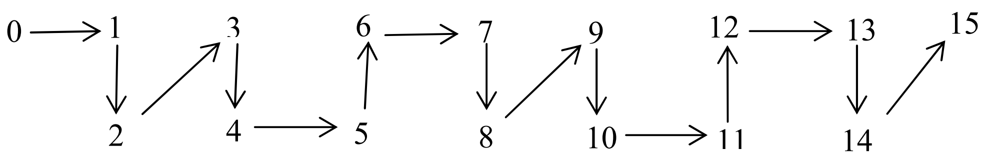
3) Um número é um *quadrado perfeito* se é igual a um número inteiro elevado ao quadrado. Por exemplo, são quadrados perfeitos:. $25=5^2$, $49=7^2$ e $125=25^2$. Qual o menor número que devemos multiplicar 120 para obter um quadrado perfeito?

(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 30 (E) 35

4) A máquina que registra o número de visitantes de um Museu marca 1879564. Note que esse número tem todos os algarismos distintos. Qual o menor número de visitantes que são necessários para que a máquina registre um número que também tenha todos os seus algarismos distintos?

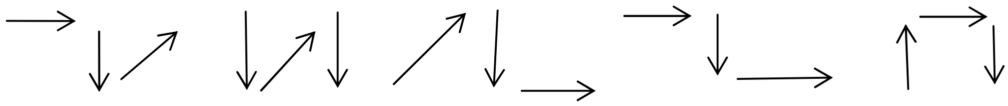
(A) 35 (B) 36 (C) 38 (D) 47 (E) 52

5) Os números de 0 a 2000 foram ligados por flexas como mostra a figura:



e assim por diante.

Qual é a sucessão de flexas que liga o número1997 ao número 2000?



(A) (B) (C) (D) (E)

1. **(E)** Nenhuma igualdade está correta.

(i) Errada: $3\times10^6+5\times10^2=3000000+500=30000500\neq 8\times10^8$

(ii) Errada: $2^3+2^{-3}=2^3+\dfrac{1}{2^3}=8+\dfrac{1}{8}\neq 1=2^0$

(iii) Errada: $\underbrace{5\times8+7}_{\substack{\text{multiplicação}\\ \text{antes da}\\ \text{soma}}}=40+7=47\neq 75$

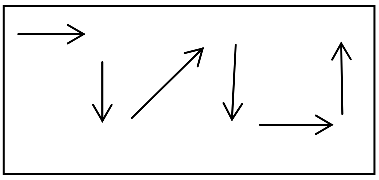
(iv) Errada: $\underbrace{5+5\div5}_{\substack{\text{divisão}\\ \text{antes da}\\ \text{soma}}}=5+1=6\neq 2$

2. **(C)** Como *a, b* e *c* são números naturais, segue que $3a$ é múltiplo de 3, $4b$ múltiplo de 4 e $7c$ múltiplo de 7. Como $3, 4$ e 7 são primos entre si (pois possuem 1 como divisor comum), o menor múltiplo comum de $3, 4$ e 7 é $3\times4\times7=84$. Portanto:
$3a=84\Rightarrow a=28$; $4b=84\Rightarrow b=21$; $7c=84\Rightarrow c=12$. Logo, o menor valor para $a+b+c$ é $28+21+12=61$.

3. **(D)** Fatorando 120, obtemos: $120=2^3\times3\times5$. Para obter um quadrado perfeito todos os expoentes dessa decomposição devem ser pares, logo basta multiplicar 120 por $2\times3\times5=30$. De fato, temos:
$120\times30=2^3\times3\times5\times2\times3\times5=2^4\times3^2\times5^2=(2^2\times3\times5)^2=60^2$

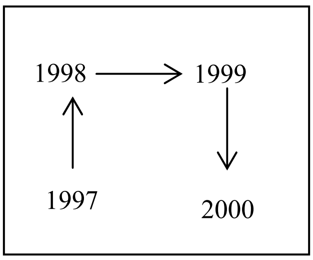
4. **(C)** Observe que os únicos algarismos que não aparecem no número 1879564 são $0, 2$ e 3. O próximo número com todos os algarismos distintos ocorrerá quando mudar o algarismo das centenas, e tivermos $18796\_\,\_$. Logo, o menor número será 1879602, e faltam ainda $1879602\text{-}1879564=38$ visitantes.

5. **(E)** O caminho-padrão é aquele que se repete, no caso é:



Esse caminho é formado de 6 flexas e começa sempre nos múltiplos de 6: $0, 6, 12$, etc. Vamos averiguar qual a posição de 1997 em relação ao múltiplo de 6 mais próximo. Dividindo 1997 por 6, obtemos $1997=\underbrace{6\times332}_{\substack{\text{corresponde a 332}\\ \text{caminhos-padrão}}}+\underbrace{5}_{\text{resto}}$. Portanto, 1998 é o múltiplo de 6 mais próximo de 1997.

Logo, 1998 ocupa a 1ª posição no caminho-padrão, então, a situação é a seguinte:



1) Qual é o maior dos números?

(A) $2\times0\times2006$ (B) $2\times0+6$ (C) $2+0\times2006$ (D) $2\times(0+6)$ (E) $2006\times0+0\times6$

2) O símbolo $\odot$ representa uma operação especial com números. Veja alguns exemplos $2\odot4=10$, $3\odot8=27$, $4\odot27=112$, $5\odot1=10$. Quanto vale $4\odot(8\odot7)$?

(A) 19 (B) 39 (C) 120 (D) 240 (E) 260

3) Se dois lados de um triângulo medem $5\,cm$ e $7\,cm$, então o terceiro lado não pode medir:

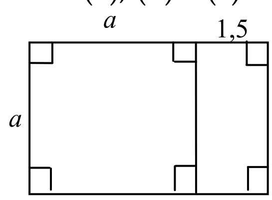
(A) $11\,cm$ (B) $10\,cm$ (C) $6\,cm$ (D) $3\,cm$ (E) $1\,cm$

4) Se $\frac{*}{24}-\frac{3}{8}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$, então $*$ é igual a:

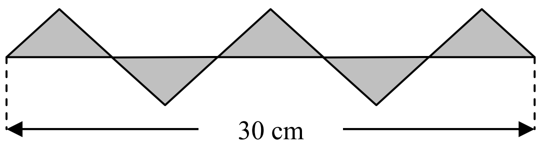
(A) 20 (B) 21 (C) 23 (D) 25 (E) 29

5) O que representam as expressões (a), (b) e (c) na figura ao lado?

(a) $a^2+1,5a$
(b) $4a+3$
(c) $a(1,5+a)$



6)A figura é composta de triângulos retângulos isósceles todos iguais. Qual é a área em cm^2 da parte sombreada?



(A) 20 (B) 25 (C) 35 (D) 45 (E) 50

1. **(D)** Lembre que se num produto um dos fatores é zero, então o produto também é zero. Temos: $2\times 0\times 2006=0$; $2\times 0+6=0+6=6$; $2+0\times 2006=2+0=2$; $2\times(0+6)=2\times 6=12$ e $2006\times 0+0\times 6=0+0=0$. Logo, o maior é $2\times(0+6)$.

2. **(E)** Temos que descobrir qual é a regra dessa operação. Note que $2\odot 4=10=2\times 4+2$, $3\odot 8=27=3\times 8+3$, $4\odot 27=112=4\times 27+4$, $5\odot 1=10=5\times 1+5$ Podemos concluir que a regra que define a operação $\odot$ é $a\odot b=a\times b+a$. Assim, temos: $4\odot(8\odot 7)=4\odot(8\times 7+8)=4\odot 64=4\times 64+4=260$.

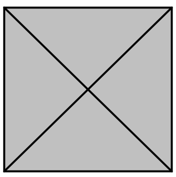
3. **(E)** Lembre que num triângulo a soma de dois lados quaisquer tem que ser maior que o terceiro lado. Como $1+5$ **não é maior** do que 7, o terceiro lado não pode ser 1.

4. **(E)** $\frac{*}{24}-\frac{3}{8}-\frac{2}{3}=\frac{*}{24}-\left(\frac{3}{8}+\frac{2}{3}\right)=\frac{*}{24}-\left(\frac{3}{8}+\frac{2}{3}\right)=\frac{*}{24}-\frac{25}{24}=\frac{*-25}{24}$.

Logo,

$\frac{*-25}{24}=\frac{1}{6}=\frac{4}{24}$, donde $*-25=4\Rightarrow *=29$.

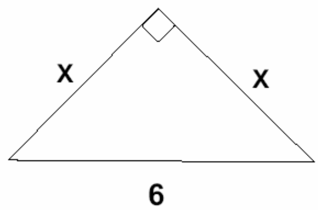
5. Note que a figura é um retângulo formado por quadrado de lado a e um retângulo de lados $1,5$ e a.
(a) a^2 = área do quadrado e $1,5a$ = área do retângulo. Logo $a^2+1,5a$ representa a somas dessas duas áreas, e portanto a área total da figura.
(b) $4a+3=3a+1,5+a+1,5$ é o perímetro da figura.
(c) A figura é um retângulo de largura a e comprimento $a+1,5$, logo $a(1,5+a)$ é a área total da figura.



6 cm

6. **(D) Solução 1:** O comprimento da hipotenusa de cada um dos 5 triângulos é $30\div 5=6cm$. O quadrado formado por 4 desses triângulos tem lado igual a $6\,cm$, logo sua área é $36\,cm^2$. Logo, cada um dos triângulos tem $36:4=9\,cm^2$ de área. Portanto, a área da parte sombreada é $9\times 5=45cm^2$

Solução 2: Pelo Teorema de Pitágoras, temos $36=2x^2\rightarrow x^2=18$. A área da parte sombreada é $5\times\frac{x^2}{2}=5\times\frac{18}{2}=45cm^2$.



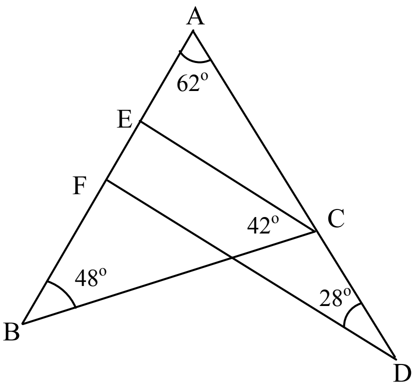
1) Se eu der duas barras de chocolate para Tião, ele me empresta sua bicicleta por 3 horas. Se eu lhe der 12 bombons, ele me empresta a bicicleta por 2 horas. Amanhã, eu lhe darei uma barra de chocolate e 3 bombons. Por quantas horas ele me emprestará a bicicleta?

(A) $1/2$ (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

2) $2-2\left\{2-2\left[2-2(4-2)\right]\right\}$ é igual a:

(A) 0 (B) 2 (C) -2 (D) 4 (E) -10

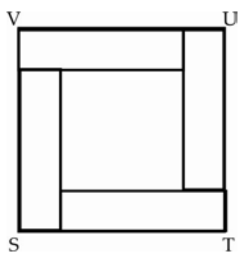
3) Na figura, as retas FD e EC são paralelas?



4) Se $x>5$, então qual dos números abaixo é o menor?

(A) $5/x$ (B) $5/(x+1)$ (C) $5/(x-1)$ (D) $x/5$ (E) $(x+1)/5$

5)O quadrado *STUV* é formado de um quadrado limitado por 4 retângulos iguais. O perímetro de cada retângulo é 40 *cm*. Qual é a área, em *cm*², do quadrado *STUV*?



(A) 400
(B) 200
(C) 160
(D) 100
(E) 80

6) a) Calcule as diferenças: $1-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$

b) Deduza de (a) o valor da soma: $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$

c) Calcule a soma: $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\cdots+\frac{1}{999000}$

1. **(C)**

$$\begin{cases} 2 \text{ barras} \xrightarrow{\text{corresponde}} 3 \text{ horas} \\ 12 \text{ bombons} \xrightarrow{\text{corresponde}} 2 \text{ horas} \end{cases} \quad \text{logo} \quad \begin{cases} 1 \text{ barra} \xrightarrow{\text{corresponde}} 1{,}5 \text{ horas} \\ 3 \text{ bombons} \xrightarrow{\text{corresponde}} 0{,}5 \text{ horas} \end{cases}$$

Logo, Tião me emprestará a bicicleta por $1{,}5 + 0{,}5 = 2$ horas

2. **(E)** As ordens de prioridade para resolver uma expressão são:

$$\underbrace{\textit{parênteses}}_{1^{o}} \rightarrow \underbrace{\textit{colchete}}_{2^{o}} \rightarrow \underbrace{\textit{chaves}}_{3^{o}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\text{multiplicações e divisões}}_{1^{o}} \rightarrow \underbrace{\text{somas e subtrações}}_{2^{o}}$$

Temos:

$$2-2\left\{2-2\left[2-2(\underbrace{4-2}_{2})\right]\right\} = 2-2\left\{2-2\left[2-\underbrace{2\times 2}_{4}\right]\right\} = 2-2\left\{2-2\left[\underbrace{2-4}_{-2}\right]\right\} =$$

$$= 2-2\left\{2-\underbrace{2\times(-2)}_{-4}\right\} = 2-2\{2-(-4)\} = 2-2\left\{\underbrace{2+4}_{6}\right\} = 2-\underbrace{2\times 6}_{12} = 2-12 = -10$$

3. No triângulo *BCE*, temos BÊC=180°-(42°+48°)=90°. No triângulo AFD, temos: $\widehat{AFD}$=180°-(28°+62°)=90°. Logo, as retas FD e EC são perpendiculares a AB, portanto, são paralelas.

4. **(B) Solução 1:** Como a questão tem uma única resposta, ela é válida para qualquer valor de x. Podemos então escolher um valor para x, por exemplo x=10 . Temos: $\frac{5}{x} = \frac{5}{10}$, $\frac{5}{x+1} = \frac{5}{11}$, $\frac{5}{x-1} = \frac{5}{9}$, $\frac{x}{5} = \frac{10}{5}$, $\frac{x+1}{5} = \frac{11}{5}$. Vemos que $x/5$ e $(x+1)/5$ são maiores que 1, logo estão excluídos porque as outras três opções são menores que 1. Como $5/10, 5/11$ e $5/9$ têm o mesmo numerador, o menor é o que tiver maior denominador, que é $5/11$, ou seja, $\frac{5}{x+1}$.

Solução 2 : Se x>5, então $\frac{5}{x}, \frac{5}{x+1}$ e $\frac{5}{x-1}$ são menores do 1 e $\frac{x}{5}$ e $\frac{x+1}{5}$ são maiores do que 1. Logo, as opções D e E estão excluídas. Como $\frac{5}{x}, \frac{5}{x+1}$ e $\frac{5}{x-1}$, têm o mesmo numerador, o menor é o que tem maior denominador, que é $\frac{5}{x+1}$.

5. **(A)**Denotemos por *C e L,* o comprimento e a largura respectivamente de cada um dos quatro retângulos. O perímetro de cada retângulo é $2(C+L)$. Então, $2\times(C+L) = 40 \Rightarrow C+L = 20$. Observe na figura que o lado do quadrado *STUV* é *C*+L, e portanto sua área é A=$(C+L)^2$=20^2=400 cm^2.

6. Solução:

a) $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$; $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}==\frac{1}{20}$; $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$

b) $\underbrace{\frac{1}{2}}_{1-\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{6}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}+\underbrace{\frac{1}{12}}_{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{20}}_{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}+\underbrace{\frac{1}{30}}_{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}=1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{5}}-\frac{1}{6}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

c) Note que os denominadores são produtos de números consecutivos , iniciando no 1:

$$\frac{1}{\underset{\substack{\downarrow\\1\times 2}}{2}}+\frac{1}{\underset{\substack{\downarrow\\2\times 3}}{6}}+\frac{1}{\underset{\substack{\downarrow\\3\times 4}}{12}}+\frac{1}{\underset{\substack{\downarrow\\4\times 5}}{20}}+\frac{1}{\underset{\substack{\downarrow\\5\times 6}}{30}}=1-\frac{1}{6}$$

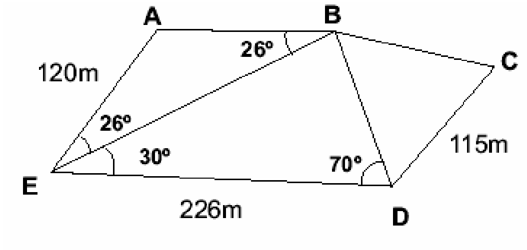
Mas, geralmente, usando a decomposição de cada parcela como no item (a) podemos provar que:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\frac{1}{6\times 7}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

Logo:

$$\frac{1}{\underset{\substack{\downarrow\\1\times 2}}{2}}+\frac{1}{\underset{\substack{\downarrow\\2\times 3}}{6}}+\frac{1}{\underset{\substack{\downarrow\\3\times 4}}{12}}+\frac{1}{\underset{\substack{\downarrow\\4\times 5}}{20}}+\frac{1}{\underset{\substack{\downarrow\\5\times 6}}{30}}+\frac{1}{\underset{\substack{\downarrow\\6\times 7}}{42}}+\cdots+\frac{1}{\underset{\substack{\downarrow\\999\times 1000}}{999\,000}}=1-\frac{1}{1000}=\frac{999}{1000}=0,999$$

1) Calcule os ângulos que não estão indicados e o perímetro da figura sabendo que BD=BC e $\widehat{DBC}=\widehat{BCD}$.



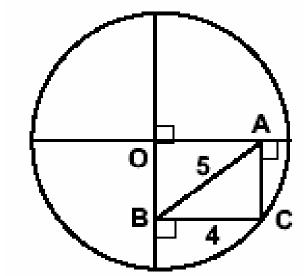
2) Quais os valores de x que satisfazem $\frac{1}{x-2} < 4$?

(A) $x < \frac{9}{4}$ (B) $x > 2$ (C) $2 < x < \frac{9}{4}$ (D) $x < -2$ (E) $x < 2$ ou $x > \frac{9}{4}$

3)Quantas soluções inteiras e positivas satisfazem a dupla inequação $2000 < \sqrt{n(n+1)} < 2005$?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

4) Na figura, O é o centro do círculo e AB= $5\,cm$. Qual é o diâmetro desse círculo?

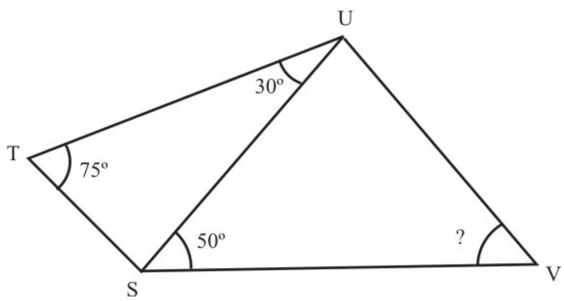


5) Se a, b e c são números naturais tais que $3a = 4b = 7c$, então o menor valor de $a+b+c$ é:

(A) 84 (B) 36 (C) 61 (D) 56 (E) 42

6) Na figura temos TU=SV. Quanto vale o ângulo $\widehat{SVU}$?

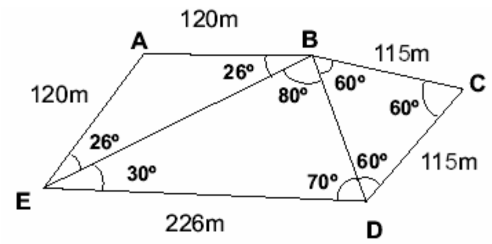
(A) 30° (B) 50° (C) 55°
(D) 65° (E) 70°



7) ***O café, o bolo e o gato*** – Dez minutos antes de colocar o bolo no forno, eu coloquei meu gato do lado de fora da casa. O bolo deve cozinhar por 35 minutos, então eu coloquei o despertador para tocar 35 minutos, após colocar o bolo no forno. Imediatamente fiz um café para mim, o que me tomou 6 minutos. Três minutos antes de acabar de beber o café o gato entrou em casa. Isso foi 5 minutos antes do despertador tocar. O telefone tocou no meio do tempo entre eu acabar de fazer o café e o gato entrar em casa. Falei ao telefone por 5 minutos e desliguei. Eram 3h59min da tarde.

(a) A que horas coloquei o gato fora de casa?
(b) Quantos minutos depois de colocar o gato fora de casa, o despertador tocou?
(c) Quanto tempo o gato estava fora de casa até o momento em que o telefone tocou?

1. O triângulo ABE é isósceles porque tem dois ângulos iguais. Logo os lados AE e AB são iguais, portanto AB=120m. O triângulo BCD também é isósceles porque tem dois lados iguais, BC=BD, logo $\widehat{BDC}=\widehat{BCD}$. Como, $\widehat{DBC}=\widehat{BCD}$ então os três ângulos do triângulo BCD são iguais, logo cada um vale $180^o \div 3 = 60^o$. Assim, ele é equilátero e temos BD=BC=CD=115m.



Assim, o perímetro da figura é: $120 \times 2 + 115 \times 2 + 226 = 696m$.

2. **(E)** $\dfrac{1}{x-2} < 4 \Rightarrow \dfrac{1}{x-2} - 4 < 0 \Rightarrow \dfrac{1-4(x-2)}{x-2} = \dfrac{9-4x}{x-2} < 0$

1^ocaso : $9-4x > 0$ e $x-2<0$:

$9-4x>0 \Rightarrow x<\dfrac{9}{4}$ e $x-2<0 \Rightarrow x<2.$

Como $2<\dfrac{9}{4}$ a solução são todos os números x menores que 2, isto é $x<2$.

2^ocaso : $9-4x<0$ e $x-2>0$:

$9-4x<0 \Rightarrow x>\dfrac{9}{4}$ e $x-2>0 \Rightarrow x>2$

Como $2<\dfrac{9}{4}$ a solução são todos os números x maiores que 9/4, isto é $x>\dfrac{9}{4}$.

Logo, a solução da inequação é $x<2$ ou $x>\dfrac{9}{4}$.

3. **(E)** Como os números que aparecem são todos positivos, podemos elevá-los ao quadrado mantendo os sinais, isto é: $2000^2 < n(n+1) < 2005^2$. Observe que n e $n+1$ são inteiros consecutivos. Logo, temos as seguintes opções:

$$2000^2 < 2000 \times 2001 < 2005^2$$
$$2000^2 < 2001 \times 2002 < 2005^2$$
$$2000^2 < 2002 \times 2003 < 2005^2$$
$$2000^2 < 2003 \times 2004 < 2005^2$$
$$2000^2 < 2004 \times 2005 < 2005^2$$

Logo, temos 5 possibilidades para n: 2000, 2001, 2002, 2003 e 2004 .

4. Observe que OC é um raio do círculo. Temos que OC=AB=5cm por serem as diagonais do retângulo OABC. Logo, o diâmetro é $10\ cm$.

5. **(C)**Como a, b e c são números naturais, segue que $3a$ é múltiplo de 3, $4b$ múltiplo de 4 e $7c$ múltiplo de 7. Como $3, 4$ e 7 são primos entre si (só possuem 1 como divisor comum), o menor múltiplo comum de $3, 4$ e 7 é $3\times4\times7=84$. Portanto:
$3a=84 \Rightarrow a=28$; $4b=84 \Rightarrow b=21$; $7c=84 \Rightarrow c=12$. Logo, o menor valor para $a+b+c$ é $28+21+12=61$.

6. **(D)** Lembre que a soma dos ângulos internos de um triangulo é 180°.
Do triângulo STU temos que $\widehat{TSU}$=180°- (75° + 30°)=75°. Logo, esse triângulo é isósceles (por ter dois ângulos iguais) e portanto TU=SU. Como TU=SV, segue que SU=SV. Portanto, o triângulo SUV também é isósceles, e portanto $\widehat{SVU}=\dfrac{180°-50°}{2}=65°$.

7. Vamos listar os eventos ocorridos e contar o tempo gasto em cada um. A primeira atividade foi colocar o gato fora da casa, logo nossa lista começa com essa atividade e o tempo é contado a partir dela.

Atividade	Tempo depois que o gato foi posto fora de casa
Gato fora de casa	0 minutos
Bolo no forno	10 minutos
Fazer o café	10+6=16 minutos
Despertador toca	35+10=45 minutos
Gato entra em casa	45-5=40 minutos
Acabar de tomar o café	40+3=43 minutos
Telefone toca	16+(40-16):2=28 minutos
Desligar o telefone	28+5 =33 minutos

Podemos agora dar as respostas.

(a) Às 3:59horas desliguei o telefone, o que ocorreu 33 minutos depois de colocar o gato fora de casa. Logo a resposta é 3:59-0:33=3:26.
(b) O despertador toca 45 minutos após colocar o gato for a de casa.
(c) 28 minutos

Podemos saber exatamente a hora de cada atividade; veja na tabela a seguir.

Atividade	Tempo depois que o gato foi posto fora de casa	Hora atual
Gato fora de casa	0 minutos	3:59-0:33=3:26
Bolo no forno	10 minutos	3:26+0:10=3:36
Fazer o café	10+6=16 minutos	3:26+0:16=3:42
Despertador toca	35+10=45 minutos	3:26+0:45=4:11
Gato entra em casa	45-5=40 minutos	3:26+0:40=4:06
Acabar de tomar o café	40+3=43 minutos	3:26+0:43=4:09
Telefone toca	16+(40-16):2=28 minutos	3:26+0:28=3:54
Desligar o telefone	28+5 =33 minutos	3:59

1) Se m é um número natural tal que $3^m = 81$, então m^3 é igual a:

(A) 36 (B) 40 (C) 64 (D) 99 (E) 100

2. Quais figuras estão corretas?

FIGURA I

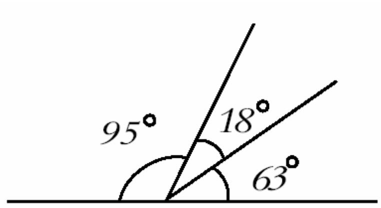


FIGURA II

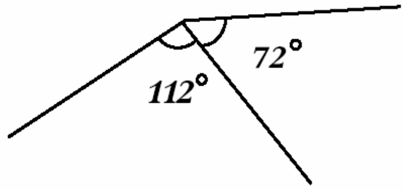
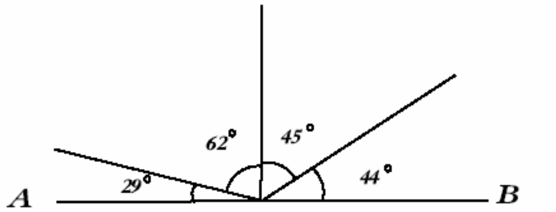


FIGURA III

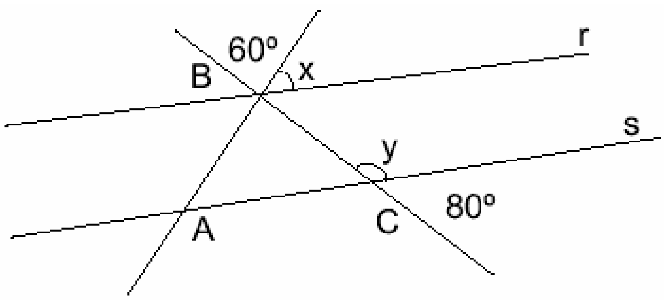


3) ***Sinal de um produto e sinal de um quociente:*** a, b, c e d são quatro números não nulos tais que os quocientes $\frac{a}{5}$, $\frac{-b}{7a}$, $\frac{11}{abc}$, $\frac{-18}{abcd}$ são positivos. Determine os sinais de a, b, c e d.

4) Quais dos números abaixo são negativos?

$10-3\sqrt{11}$; $3\sqrt{11}-10$; $18-5\sqrt{13}$; $51-10\sqrt{26}$; $10\sqrt{26}-51$.

5) As retas r e s são paralelas, encontre x e y:



Dia	Temperatura máxima em °C	Temperatura mínima em em °C
2ª-feira	7	-12
3ª-feira	0	-11
4ª-feira	-2	-15
5ª-feira	9	-8
6ª-feira	13	-7

6) A tabela mostra as temperaturas máximas e mínimas durante 5 dias seguidos em certa cidade. Em qual dia ocorreu o maior variação de temperatura?

1. **(C)**Temos $3^m = 81 = 3^4$; donde $m = 4$. Logo, $m^3 = 4^3 = 4\times4\times4 = 64$.

2. Na figura I, temos $63^o + 18^o + 95^o = 176^o$ que é menor do que 180^o; logo a figura está errada.

Na figura II, temos $112^o + 72^o = 184^o$ que é maior do que 180^o; logo a figura está errada.

Na figura III, temos $44^o + 45^o + 62^o + 29^o = 180^o$, e a figura está correta.

3. Solução.

- $\dfrac{a}{\underbrace{5}_{+}} > 0 \Rightarrow a > 0$
- Temos $a > 0 \Rightarrow 7a > 0$, logo: $\dfrac{-b}{\underbrace{7a}_{+}} > 0 \Rightarrow -b > 0 \Rightarrow b < 0$
- $\dfrac{\overbrace{11}^{+}}{abc} > 0 \Rightarrow abc > 0$. Como $a > 0$ e $b < 0$ segue que $c < 0$ $(\underbrace{a}_{+}\underbrace{b}_{-}\underbrace{c}_{-} > 0)$
- $\dfrac{\overbrace{-18}^{-}}{abcd} > 0 \Rightarrow abcd < 0$, como $abc > 0$ segue que $d < 0$.

4. Como $100 > 99$ então $\underbrace{\sqrt{100}}_{10} > \underbrace{\sqrt{99}}_{3\sqrt{11}}$. Logo, $10 - 3\sqrt{11} > 0$ e $3\sqrt{11} - 10 < 0$. Analogamente: $2601 > 2600 \Rightarrow \underbrace{\sqrt{2601}}_{51} > \underbrace{\sqrt{2600}}_{10\sqrt{26}}$.

Assim, $51 - 10\sqrt{26} > 0$ e $10\sqrt{26} - 51 < 0$.
Finalmente, $324 < 325 \Rightarrow \underbrace{\sqrt{324}}_{18} < \underbrace{\sqrt{325}}_{5\sqrt{13}} \Rightarrow 18 - 5\sqrt{13} < 0$. Os números negativos são $3\sqrt{11} - 10$, $10\sqrt{26} - 51$ e $18 - 5\sqrt{13}$.

5. Temos $80^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow y = 100^\circ$ .Como as retas r e s são paralelas, segue que, $60^o + x + 80^\circ = 180^o$, donde $x = 40^o$.

6. A variação de temperatura é a diferença entre a máxima e a mínima. Temos :

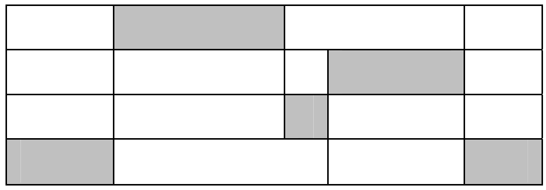
Dia	Temperatura máxima em °C	Temperatura mínima em em °C	Variação
2ª-feira	7	-12	7-(-12)=7+12=19
3ª-feira	0	-11	0-(-11)=0+11=11
4ª-feira	-2	-15	-2-(-15)=-2+15=13
5ª-feira	9	-8	9-(-8)=9+8=17
6ª-feira	13	-7	13-(-7)=13+7=20

Logo, a maior variação ocorreu na 6ª feira.

1) O número que fica entre 2/5 e 3/4 é

(A) 1/6 (B) 4/3 (C) 5/2 (D) 4/7 (E) 1/4

2) A figura mostra o retângulo maior dividido em 18 retângulos menores, todos com a mesma largura. Que fração do retângulo maior representa a parte em cinza?



3) Na lista de frações, no quadro ao lado, temos:

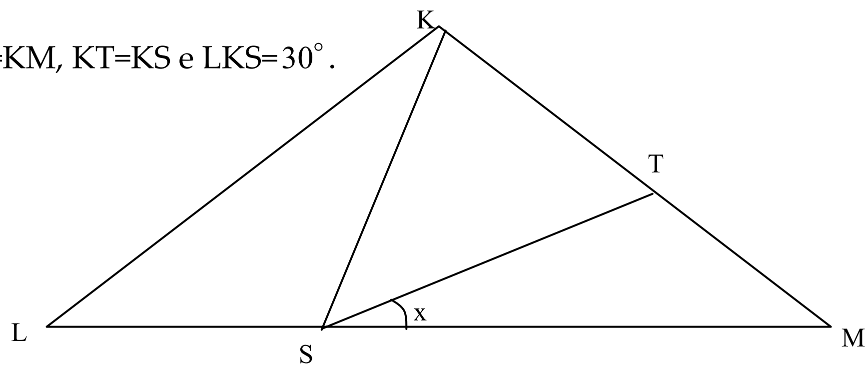
$\mathbf{\frac{5}{4}}$ $\mathbf{\frac{17}{6}}$ $\mathbf{\frac{-5}{4}}$ $\mathbf{\frac{10}{7}}$ $\mathbf{\frac{2}{3}}$
$\mathbf{\frac{14}{8}}$ $\mathbf{\frac{-1}{3}}$ $\mathbf{\frac{5}{3}}$ $\mathbf{\frac{-3}{2}}$

- 2 frações cuja soma é $\frac{5}{2}$
- 2 frações cuja diferença é $\frac{5}{2}$
- 2 frações cujo produto é $\frac{5}{2}$
- 2 frações cujo quociente é $\frac{5}{2}$

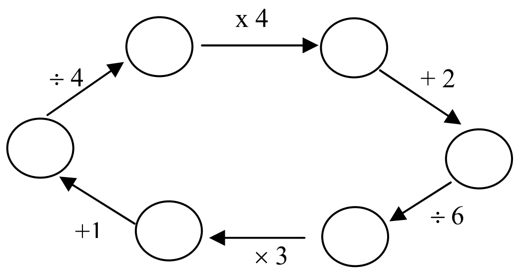
Encontre a fração que está sobrando.

4) No triângulo KLM temos KL=KM, KT=KS e LKS=30°.
O ângulo x é:

(A) 10°
(B) 15°
(C) 20°
(D) 25°
(E) 30°



5) Escreva dentro dos círculos os números inteiros que tornam correta a sucessão de operações.

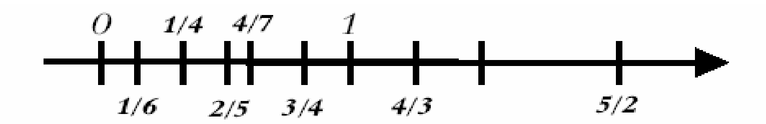


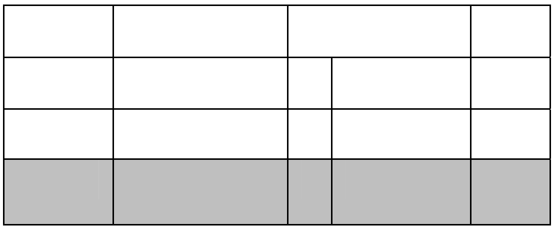
6) Iara possui R$ 50,00 para comprar copos que custam R$ 2,50 e pratos que custam R$ 7,00. Ela quer comprar no mínimo 4 pratos e 6 copos. O que ela pode comprar ?

1. **(D)** 2/5 e 3/4 são menores que 1 (numerador menor que denominador) ; por sua vez, 4/3 e 5/2 são maiores que 1 (numerador maior que denominador), logo (B) e (C) estão excluídas. Temos 1/6 menor do que 1/4 . Como 1/4=0,25 e 2/5=0,4 segue que:

$\frac{1}{6} < \underbrace{\frac{1}{4}}_{0,25} < \underbrace{\frac{2}{5}}_{0,4}$. Logo o único número entre 2/5 e 3/4 é 4/7.

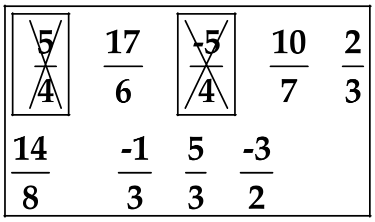
Um número x que "fica entre" 2/5 e 3/4 é um número maior do que 2/5 e menor do que 3/4 ou seja $\frac{2}{5} < x < \frac{3}{4}$



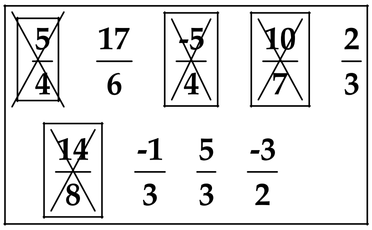


2. Observe na figura , a região em cinza tem a mesma área que a do enunciado. Como todos os retângulos têm a mesma largura, o retângulo maior está dividido em 4 partes iguais pelos segmentos paralelos ao seu comprimento . Logo, a região em cinza representa ¼ do retângulo maior.

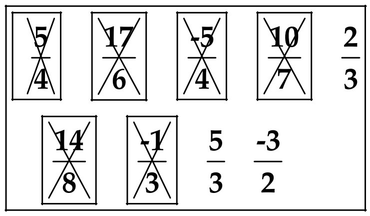
3. (a) 2 frações cuja diferença é $\frac{5}{2}$: $\frac{5}{4} - \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$



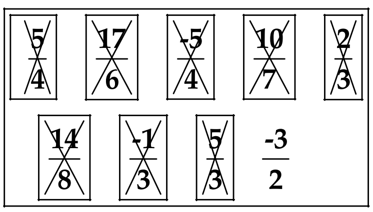
(b) 2 frações cujo produto é $\frac{5}{2}$: $\frac{10}{7} \times \frac{14}{8} = \frac{10}{7} \times \frac{7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$



(c) 2 frações cuja soma é $\frac{5}{2}$: $\frac{17}{6} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{17}{6} - \frac{1}{3} = \frac{17}{6} - \frac{2}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

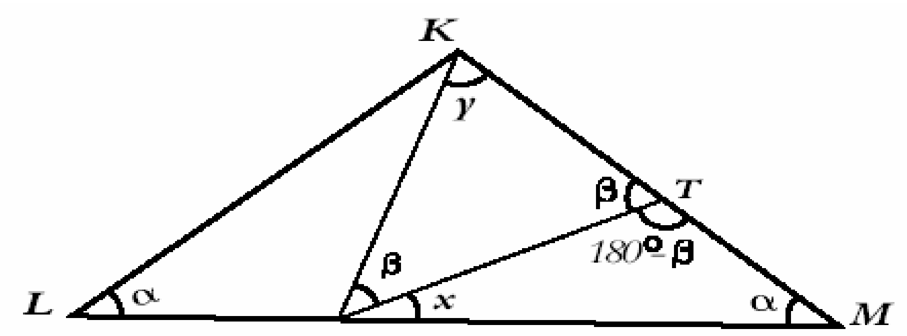


(d) 2 frações cujo quociente é $\frac{5}{2}$: $\frac{5}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.



Logo, o fração que está sobrando é –3/2.

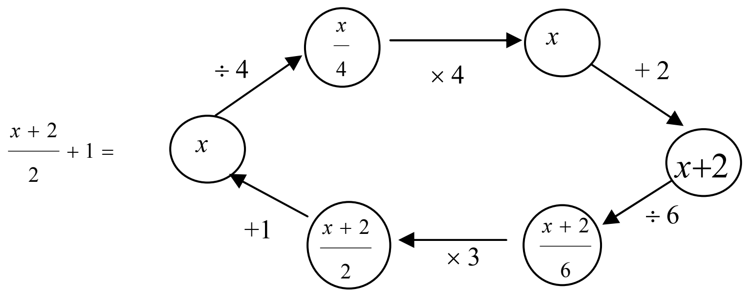
4. **(B)**



Sejam $\widehat{TSM} = x, \widehat{SKT} = y, \widehat{KLS} = \alpha, \widehat{KTS} = \beta$. O triângulo KLM é isósceles porque tem dois lados iguais; consequentemente seus ângulos da base são iguais, isto é: $\widehat{KLS} = \widehat{KMS} = \alpha$. Analogamente, o triângulo KST também é isósceles e portanto $\widehat{KST} = \widehat{KTS} = \beta$. Usaremos agora que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Acompanhe na figura:

- No triângulo STM temos: $x + \alpha + 180^o - \beta = 180^o \Rightarrow \quad x = \beta - \alpha$
- No triângulo KLM temos: $\alpha + \alpha + 30^o + y = 180^o \Rightarrow y = 150^o - 2\alpha$. Logo, $\beta + \beta + 150^o - 2\alpha = 180^o \Rightarrow \beta - \alpha = 15^o$. Portanto, $x = 15^o$.

5. Colocando x num dos círculos e aplicando a sucessão de operação obtemos $x = \dfrac{x+2}{2} + 1$, donde x=4.



6. Sejam c e p o número de copos e pratos que Iara pode comprar. Logo seu gasto é $2,5c + 7p$. Ela só tem R\$ $50,00$, logo $2,5c + 7p \le 50$ (I) Além disso, ela quer comprar no mínimo 4 pratos e 6 copos, logo $p \ge 4$ e $c \ge 6$ (II). Devemos encontrar dois números inteiros c e p (número de copos e pratos são números inteiros) que satisfaçam (I) e (II).

Se ela comprar 4 pratos sobram $50 - 4 \times 7 = 22$ reais para os copos. Como $22 = 8 \times 2,50 + 2$, ela podem comprar 8 copos (sobrando-lhe R\$ $2,00$).

Se ela comprar 5 pratos sobram $50 - 5 \times 7 = 15$ reais para os copos. Como $15 = 6 \times 2,50$, ela pode comprar 6 copos.

Se ela comprar 6 pratos sobram $50 - 6 \times 7 = 8$ reais para os copos, o que lhe permite comprar apenas 1 copo que não é o que ela quer.

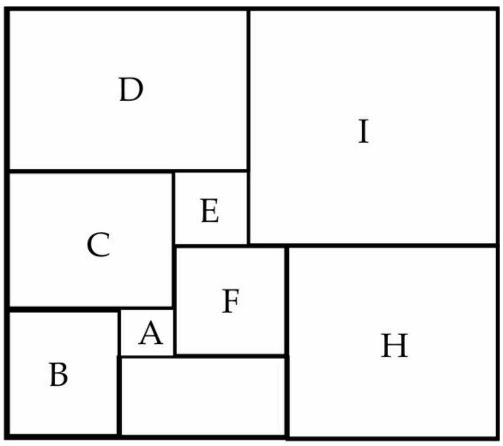
Logo, Iara pode comprar 4 pratos e 8 copos, ou 5 pratos e 6 copos.

1) Quantos são os números inteiros x tais que $-5 < x-1 \leq 5$?

(A) (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

2) Na figura mostra nove quadrados. A área do quadrado A é 1cm² e do quadrado B é 81cm². Qual a área do quadrado I em centímetros quadrados?

(A) 196
(B) 256
(C) 289
(D) 324
(E) 361



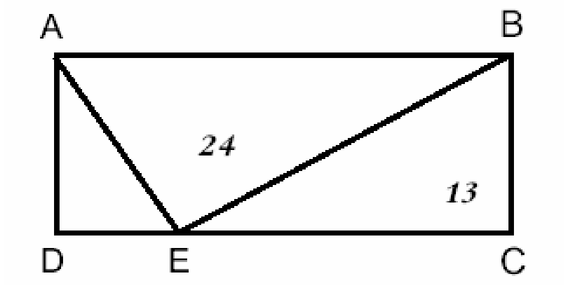
3) André, Bruno, Celina e Dalva ganharam juntos 21 medalhas num concurso. André foi o que mais ganhou medalhas, Bruno ganhou o dobro de Celina e Dalva 3 a mais que Bruno. Quantas medalhas cada um pode ter ganhado?

4) Célia quer trocar com Guilherme figurinhas de um álbum sobre animais brasileiros. Celina quer trocar figurinhas de 4 borboleta, 5 tubarão, 3 cobra, 3 periquito e 6 macaco. Todas as figurinhas de Guilherme são de aranha. Eles sabem que:

(i) 1 figurinha de borboleta vale 3 figurinhas de tubarão
(ii) 1 figurinha de cobra vale 3 figurinhas de periquito
(iii)1 figurinha de macaco vale 4 figurinhas de aranha
(iv) 1 figurinha de periquito vale 3 figurinhas de aranha
(v) 1 figurinha de tubarão vale 2 figurinhas de periquito

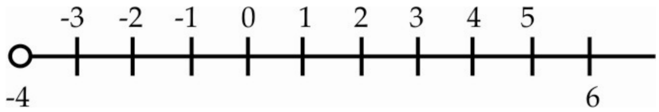
Quantas figurinhas Célia receberá se ela trocar todas que quiser?

5)Escreva numa linha os números de 1 a 15 de modo que a soma de dois números adjacentes nessa linha seja um quadrado perfeito.



6) Um retângulo está dividido em 3 regiões, duas delas com áreas $24\,cm^2$ e $13\,cm^2$ conforme indicado na figura. Qual é a área da outra região?

1. **(C)** Somando 1 a todos os membros das duas desigualdades temos
$-5+1<x-1+1\leq 5+1 \Rightarrow -4<x\leq 6$.
Os valores inteiros de x que satisfazem as duas desigualdades são: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.



2. **(D)** O lado de A é $\sqrt{1}=1cm$ e o de B é $\sqrt{81}=9cm$. Agora temos:

- Lado de G = lado de de B-lado de A=9-1=8cm
- Lado de C = lado de B+lado de A=1+9=10cm
- Lado de F = lado de G-Lado de A=8-1=7cm
- Lado de H=lado de G+lado de F=8+7=15cm
- Lado de B+lado de C=lado de G+lado de F+lado de E $\Rightarrow$ 9+10=8+7+lado de E. Logo, lado de E=4cm
- Lado de D=ladoC+lado de E=10+4=14cm
- Lado de I=lado de E+lado de D=18cm.

Finalmente, a área de I é $18^2=324cm^2$

3. Denotemos por A, B, C e D o número de medalhas ganhas por André, Bruno, Celina e Dalva respectivamente, então $A+B+C+D=21$. Agora, temos:

- "Bruno ganhou o dobro de Celina" $\Rightarrow B=2C$
- "Dalva 3 a mais que Bruno": $\Rightarrow D=B+3$

Daí obtemos $A+B+\frac{B}{2}+B+3=21 \Rightarrow 2A+5B=36$. Como A e B são números inteiros, temos as seguintes possibilidades para A e B:

A	B	2A + 5B
3	6	2×3+5×6=36
8	4	2×8+5×4=36
13	2	2×13+5×2=36
18	0	2×18+5×0=36

Como André foi o que mais recebeu medalhas, a solução A=3 e B=6 não serve. Agora usando as condições C=B/2 e D=B+3, obtemos as seguintes possibilidades de medalhas para cada um deles, mostradas no quadro ao lado.

André	Bruno	Celina	Dalva	Total
8	4	4:2=2	4+3=7	21
13	2	2:2=1	2+3=5	21
18	0	0:2=0	0+3=3	21

4. A *"moeda de troca"* de Guilherme são figurinhas de aranha, logo vamos calcular o *"valor-aranha"* de cada tipo de figurinha usando as informações (a), (b), (c), (d) e (e).

$$4 \text{ borboleta } \underset{(a)}{=} \underbrace{12}_{4\times 3} \text{tubarão } \underset{(e)}{=} \underbrace{24}_{12\times 24} \text{ periquito } \underset{(d)}{=} \underbrace{72}_{24\times 3} \text{ aranha}$$

$$5 \text{ tubarão } \underset{(e)}{=} \underbrace{10}_{5\times 2} \text{periquito } \underset{(d)}{=} \underbrace{30}_{10\times 3} \text{ aranha}$$

$$3 \text{ cobra } \underset{(b)}{=} \underbrace{9}_{3\times 3} \text{ periquito } \underset{(d)}{=} \underbrace{27}_{9\times 3} \text{aranha}$$

$$6 \text{ periquito } \underset{(d)}{=} \underbrace{18}_{6\times 3} \text{aranha}$$

$$6 \text{ macaco} \underset{(c)}{=} \underbrace{24}_{6\times 4} \text{aranha}$$

Logo, ela receberá $72+30+27+18+24=171$ figurinhas de aranha.

5. Primeiro verificamos quais os números que podem ser adjacentes.

Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Possíveis vizinhos	3	7	1	5	4	3	2	1	7	6	5	4	3	2	1
	8	14	6	12	11	10	9			15	14	13	12	11	10
	15		13												

Os algarismos 8 e o 9 só têm cada um apenas um possível vizinho, logo eles devem ser colocados no início e no fim da fila, seguidos de seus únicos vizinhos:

8	1	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	7	9

Sobram os números 2, 3, 4, 5, 6, 10,11 12, 13, 14 e 15. Na "tabela de vizinhos" vemos que ao lado do 7 só podemos colocar o 2 e ao lado do 2 o 14. Temos então:

8	1	?	?	?	?	?	?	?	?	?	14	2	7	9

Consultando a “tabela de vizinhos” e os números que sobram, chegamos à resposta. Veja a seguir a solução passo a passo.

Formação da linha em cada etapa																Sobram
8	1	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	7	9		2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15
8	1	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	2	7	9		3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15
8	1	?	?	?	?	?	?	?	?	?	14	2	7	9		3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 15
8	1	?	?	?	?	?	?	?	5	11	14	2	7	9		3, 4, 6, 10, 12, 13, 15
8	1	?	?	?	?	?	?	4	5	11	14	2	7	9		3, 6, 10, 12, 13, 15
8	1	?	?	?	?	?	12	4	5	11	14	2	7	9		3, 6, 10, 13, 15
8	1	?	?	?	?	13	12	4	5	11	14	2	7	9		3, 6, 10, 15
8	1	?	?	?	3	13	12	4	5	11	14	2	7	9		6, 10, 15
8	1	15	10	6	3	13	12	4	5	11	14	2	7	9		Resposta

6. Lembre que a área de um triângulo é $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$, onde a altura é relativa à base escolhida. No triângulo AEB temos base = AB=comprimento do retângulo e a altura relativa a essa base é BC= largura do retângulo. Logo, $\frac{AB \times BC}{2} = 24 \Rightarrow AB \times BC = 48$. Logo a área do retângulo é 48cm². Portanto, a área pedida é $48-(24+13)=48-37=11cm^2$.

NÍVEL 3
7ª Lista

1) Encontre o produto: $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{225}\right)$.

(A) $\dfrac{10}{125}$ (B) $\dfrac{5}{9}$ (C) $\dfrac{3}{5}$ (D) $\dfrac{8}{15}$ (E) $\dfrac{1}{120}$

2) Se dois lados de um triângulo medem $5\,cm$ e $7\,cm$, então o terceiro lado não pode medir:

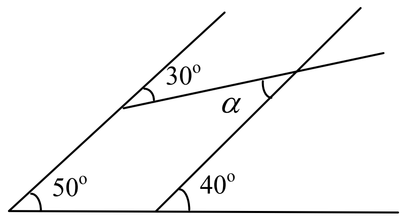
(A) $11\,cm$ (B) $10\,cm$ (C) $6\,cm$ (D) $3\,cm$ (E) $1\,cm$

3) Quais os valores de x que satisfazem $\dfrac{1}{x-2} < 4$?

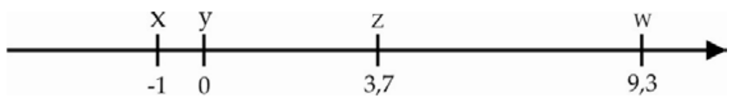
(A) $x > \dfrac{3}{4}$ (B) $x > 2$ (C) $\dfrac{3}{4} < x < 2$ (D) $x < 2$ (E) todos os valores de x.

4) Quanto mede o ângulo α da figura?

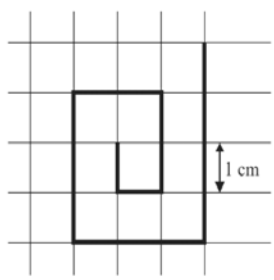
(A) 20° (B) 25° (C) 30° (D) 35° (E) 40°



5) Da figura, concluímos que $|z-x|+|w-x|$ é igual a :



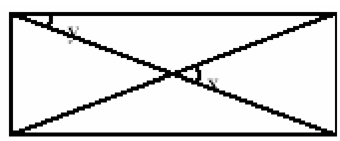
(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15



6) Artur quer desenhar uma "espiral" de 4 metros de comprimento formada de segmentos de reta. Ele já traçou 7 segmentos, como mostra a figura. Quantos segmentos ainda faltam traçar?

(A) 28 (B) 30 (C) 24 (D) 32 (E) 36

7) A figura mostra um retângulo e suas duas diagonais. Qual é a afirmativa correta a respeito dos ângulos x e y da figura?



(A) $x < y$ (B) $x = y$ (C) $2x = 3y$ (D) $x = 2y$ (E) $x = 3y$

1. **(D)** Cada um dos fatores é da forma "diferença de quadrados" isto é a^2-b^2, onde $a=1$

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{225}\right)=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{15^2}\right)$$

Usando a fatoração $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, obtemos:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{225}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{15}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\times\underbrace{\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}}_{1}\times\underbrace{\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}}_{1}\times\underbrace{\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}}_{1}\times\ldots\times\underbrace{\frac{15}{14}\times\frac{14}{15}}_{1}\times\frac{16}{15}=\frac{1}{2}\times\frac{16}{15}=\frac{8}{15}.$$

2. **(E)** Lembre que num triângulo a soma de dois lados quaisquer tem que ser maior que o terceiro lado. Como $1+5$ **não é maior** do que 7, o terceiro lado não pode ser 1.

3. **(C)** Temos: $\dfrac{1}{x-2}<4\Rightarrow\dfrac{1}{x-2}-4<0\Rightarrow\dfrac{1-4(x-2)}{x-2}<0\Rightarrow\dfrac{3-4x}{x-2}<0.$ Para que uma fração seja negativa, o numerador e o denominador têm que ter sinais trocados.

1º caso: $3-4x>0$ e $x-2<0$.

$3-4x>0\Rightarrow x<\dfrac{3}{4}$ e $x-2>0\Rightarrow x>2$, o que é impossível.

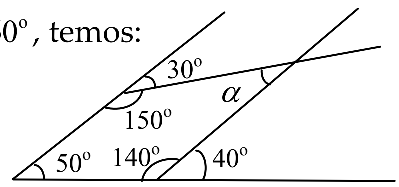
2º caso: $3-4x<0$ e $x-2>0$.

$3-4x<0\Rightarrow x>\dfrac{3}{4}$ e $x-2<0\Rightarrow x<2$. Logo, a resposta é $\dfrac{3}{4}<x<2$.

4. **(A)** Os ângulos internos do quadrilátero na figura são: $50^\circ, \alpha, \underbrace{180^\circ-40^\circ}_{140^\circ}$ e $\underbrace{180^\circ-30^\circ}_{150^\circ}$.

Como, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, temos:

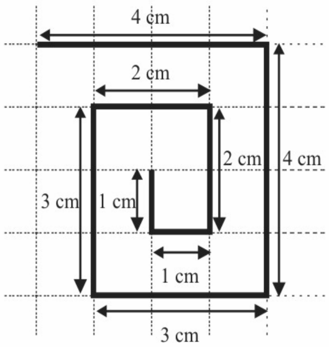
$$50^\circ+\alpha+140^\circ+150^\circ=360^\circ\Rightarrow\alpha=20^\circ$$

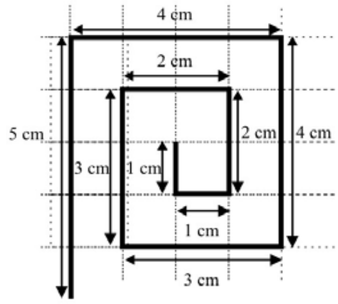


5. **(E)** Temos: $\underbrace{|z-x|}_{\text{distância de } x \text{ a } z}=3,7-(-1)=4,7$ e $\underbrace{|w-x|}_{\text{distância de } x \text{ a } w}=9,3-(-1)=10,3$.

Logo, $|z-x|+|w-x|=4,7+10,3=15$.

6. **(D)**A figura mostra que a "espiral" é formada de segmentos cujos comprimentos formam uma sequência finita da forma 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, …, *n, n* (se os dois últimos segmentos da espiral têm o mesmo comprimento) ou da forma 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, …, *n, n, n*+1 (se os dois últimos segmentos da espiral têm comprimentos diferentes). Como o comprimento total é $4\ m = 400\ cm$, devemos ter:





$$\begin{cases} 1+1+2+2+3+3+\ldots+n+n=400 \Rightarrow 2\times(1+2+3+\ldots+n)=400 \\ \text{ou} \\ 1+1+2+2+3+3+\ldots+n+n+n+1=400 \Rightarrow 2\times(1+2+3+\ldots+n)+n+1=400 \end{cases}$$

A soma dos n primeiros números naturais é $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, logo temos:

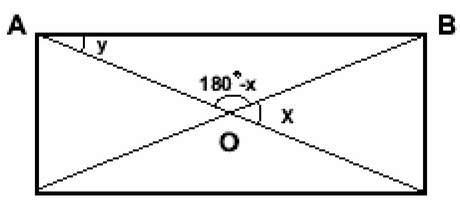
$$\begin{cases} 2\times\dfrac{n(n+1)}{2}=400 \Rightarrow n(n+1)=400 \\ \text{ou} \\ 2\times\dfrac{n(n+1)}{2}+n+1=400 \Rightarrow n(n+1)+n+1=400 \Rightarrow (n+1)^2=400 \end{cases}$$

Não existem dois números naturais consecutivos cujo produto seja 400, logo, a equação $n(n+1)=400$ não tem solução.De $(n+1)^2=400$ segue que $n+1=20$. Portanto, o último segmento da espiral tem $20\,cm$ e o penúltimo $19\,cm$. Os comprimentos dos segmentos da espiral formam a seqüência de números $1,1,2,2,3,3,4,4,\ldots,19,19,20$.
Portanto, são $19\times 2+1=39$ segmentos. Como 7 já foram traçados, faltam 32.

7. **(D)** Seja *O* o ponto de interseção das duas diagonais do retângulo. Então *AO*=*BO*, portanto o triângulo *AOB* é isósceles e logo $\widehat{OAB}=\widehat{OBA}=y$.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, no triângulo *AOB* temos:

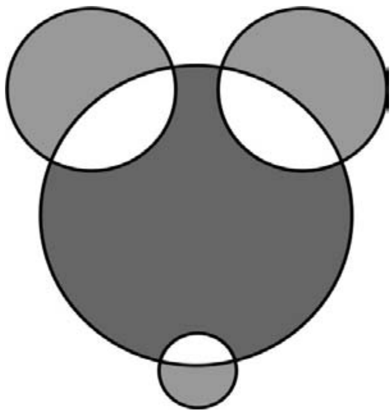
$2y+180^o-x=180^o \Rightarrow x=2y$.



1) Qual a menor das raízes da equação $2(x-3\sqrt{5})(x-5\sqrt{3})=0$?

2)Quantas soluções inteiras e positivas satisfazem a dupla inequação $2000<\sqrt{n(n+1)}<2005$?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5



3) Seja v a soma das áreas das regiões pertencentes unicamente aos três discos pequenos (em cinza claro), e seja w a área da região interior unicamente ao maior disco (em cinza escuro). Os diâmetros dos círculos são 6, 4, 4 e 2. Qual das igualdades abaixo é verdadeira?

(A) $3v=\pi w$ (B) $3v=2w$ (C) $v=w$

(D) $\pi v=3w$ (E) $\pi v=w$

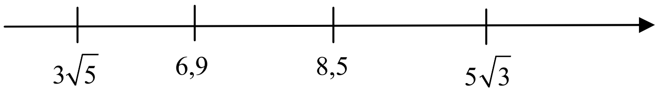
4) A menor raiz da equação $\dfrac{|x-1|}{x^2}=6$ é:

(A) $-\dfrac{1}{3}$ (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{1}{4}$ (E) $\dfrac{3}{2}$

5) Uma mesa quadrada tem 1 metro de lado. Qual o menor diâmetro de uma toalha redonda que cubra completamente o tambo da mesa?

(A) 1 (B) 1,5 (C) 2 (D) $\sqrt{2}$ (E) $\sqrt{3}$

1. **Solução 1:** A equação já é dada na forma fatorada $a(x-m)(x-n)=0$, logo as raízes são $m = 3\sqrt{5}$ e $n = 5\sqrt{3}$. Devemos decidir qual delas é a maior. Sabemos que $\sqrt{5} < 2{,}3$ e $1{,}7 < \sqrt{3}$, logo $3\sqrt{5} < 3 \times 2{,}3$ e $5 \times 1{,}7 < 5\sqrt{3} \Rightarrow 3\sqrt{5} < 6{,}9$ e $8{,}5 < 5\sqrt{3}$. Como $6{,}9$ é menor do que $8{,}5$, concluímos que $3\sqrt{5}$ é menor do que $5\sqrt{3}$.



Solução 2: Comparar $3\sqrt{5}$ e $5\sqrt{3}$ é o mesmo que comparar $\left(3\sqrt{5}\right)^2$ e $\left(5\sqrt{3}\right)^2$. Assim, $\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 9\times 5 = 45 < 75 = 25\times 3 = \left(5\sqrt{3}\right)^2$. Logo, $3\sqrt{5}$ é menor do que $5\sqrt{3}$.

2. **(E)**Como os números que aparecem são todos positivos, podemos elevá-los ao quadrado mantendo os sinais, isto é: $2000^2 < n(n+1) < 2005^2$. Observe que n e $n+1$ são inteiros consecutivos. Logo, temos as seguintes opções:

$$2000^2 < 2000 \times 2001 < 2005^2$$
$$2000^2 < 2001 \times 2002 < 2005^2$$
$$2000^2 < 2002 \times 2003 < 2005^2$$
$$2000^2 < 2003 \times 2004 < 2005^2$$
$$2000^2 < 2004 \times 2005 < 2005^2$$

Logo, temos 5 possibilidades para n: $2000, 2001, 2002, 2003$ e 2004.

3. **(C)** Os raios dos três discos menores são 1,2 e 2; e do disco maior 3.
Denotemos por b a área em branco, temos:

$$v = \underbrace{9\pi}_{\substack{\text{área do disco} \\ \text{de raio 3}}} - b \quad \text{e}$$

$w = 9\pi - b$. Logo, v=w.

4. **(B)** <u>1º caso</u>: $x \geq 1$

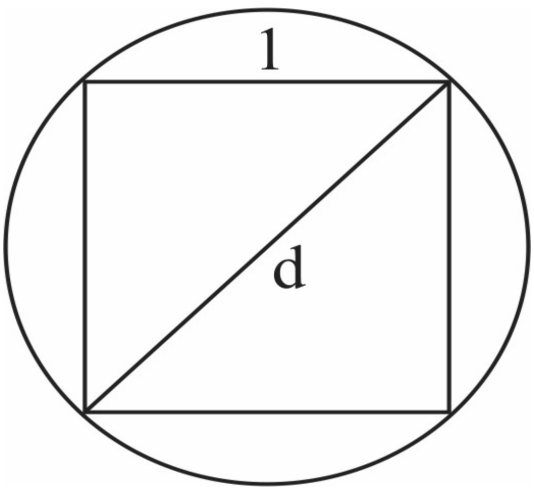
Nesse caso, $x-1 \geq 0$, donde $|x-1| = x-1$. A equação toma a forma $\frac{x-1}{x^2} = 6$ ou $6x^2 - x + 1 = 0$. Essa equação não tem raízes reais porque $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 6 \times 1 = 1 - 24$ é negativo.

<u>2º caso:</u> $x < 1$

Nesse caso, $x-1 < 0$, donde $|x-1| = -(x-1) = 1-x$. A equação toma a forma $\frac{1-x}{x^2} = 6$ ou $6x^2 + x - 1 = 0$. Resolvendo essa equação temos: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 6 \times (-1)}}{2 \times 6} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{3}$. Como essas duas raízes são menores que 1, elas são as raízes da equação do enunciado. A menor delas é $x = -\frac{1}{2}$.

5. **(D)** Para que a toalha cubra inteiramente a mesa e que tenha o menor diâmetro possível, o quadrado deve estar inscrito no círculo. A diagonal do quadrado é o diâmetro do círculo, logo pelo Teorema de Pitágoras, temos:

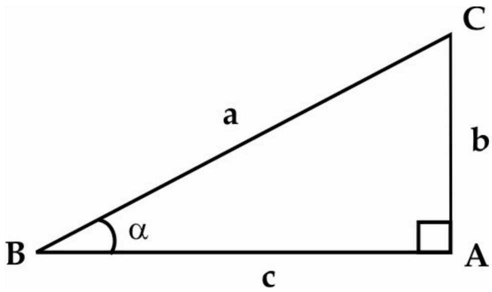
$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$



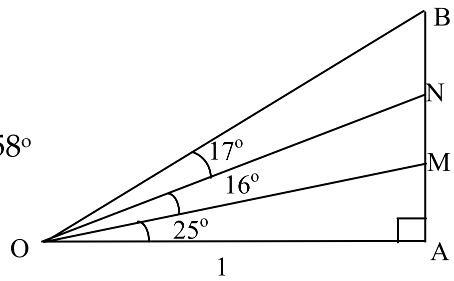
1) Os valores positivos de x para os quais $(x-1)(x-2)(x-3)<0$ formam o conjunto:

(1 , 3) (2 , 3)
(0 , 3)
$(0,1) \cup (2 , 3)$
(1 , 2)

2) Num triângulo retângulo, definimos o cosseno de seus ângulos agudos α por: $\cos\alpha = \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}$.



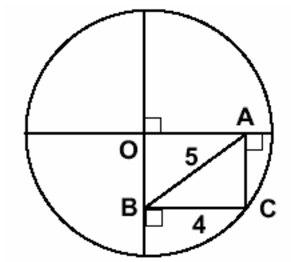
O triângulo retângulo da figura tem cateto OA=1. Escreva em ordem crescente os cossenos dos ângulos de 25º, 41º e 58º



3) Os ramais de uma central telefônica têm apenas 2 algarismos, de 00 a 99. Nem todos os ramais estão em uso. Trocando a ordem de dois algarismos de um ramal em uso, ou se obtém o mesmo número ou um número de um ramal que não está em uso. O maior número possível de ramais em uso é:

(A)Menos que 45 (B)45 (C)entre 45 e 55 (D) mais que 55 (E)55

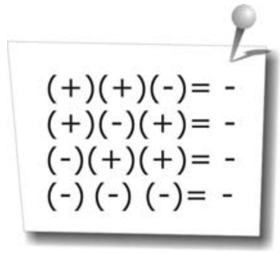
4) Um ônibus, um trem e um avião partem no mesmo horário da cidade A para a cidade B. Se eu tomar o ônibus cuja velocidade média é $100\ km/h$, chegarei à cidade B às 20 horas. Se eu tomar o trem, cuja velocidade média é $300\ km/h$, chegarei à cidade B às 14 horas. Qual será o horário de chegada do avião se sua velocidade média é de $900\ km/h$?



5) Na figura O é o centro do círculo e AB= $5\,cm$ Qual é o diâmetro desse círculo?

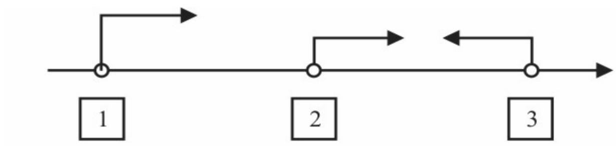
6) Iara possui R\$50,00 para comprar copos que custam R\$2,50 e pratos que custam R\$7,00. Ela quer comprar no mínimo 4 pratos e 6 copos. O que ela pode comprar ?

1. Para que um produto de três fatores seja negativo, devemos ter dois fatores positivos e um fator negativo, ou os três negativos.



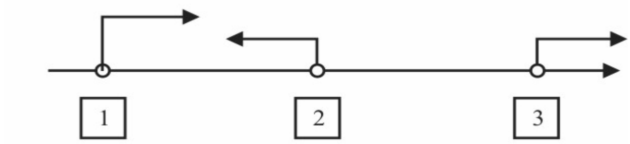
As possibilidades são:

1) $\underbrace{(x-1)}_{+}\underbrace{(x-2)}_{+}\underbrace{(x-3)}_{-} \Rightarrow x>1$, $x>2$ e $x<3$.



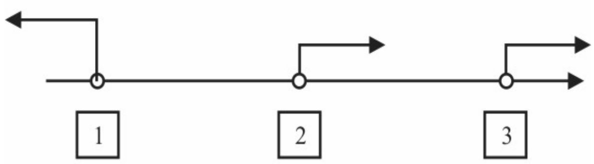
Nesse caso, a solução é $2<x<3$.

2) $\underbrace{(x-1)}_{+}\underbrace{(x-2)}_{-}\underbrace{(x-3)}_{+} \Rightarrow x>1$, $x<2$ e $x>3$.



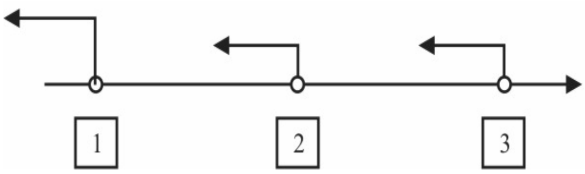
Nesse caso temos é $1<x<2$ e x>3, o que não é possível. Logo, esse caso não pode ocorrer.

3) $\underbrace{(x-1)}_{-}\underbrace{(x-2)}_{+}\underbrace{(x-3)}_{+} \Rightarrow x<1$, $x>2$ e $x>3$.



Nesse caso temos $x<1$, $x>2$ e $x>3$, o que não é possível.

4) $\underbrace{(x-1)}_{-}\underbrace{(x-2)}_{-}\underbrace{(x-3)}_{-} \Rightarrow x<1$, $x<2$ e $x<3$.



Nesse caso, a solução é x<1. Logo, a solução são todos os números reais x tais que x<1 ou 2<x<3; ou seja, a união de dois intervalos: $(0,1)\cup(2\,,3)$

2. De acordo com a definição de cosseno, temos: $\cos 25^o = \dfrac{1}{OM}$, $\cos 41^o = \dfrac{1}{ON}$ e $\cos 58^o = \dfrac{1}{OB}$.
Na figura, vemos que $OM < ON < OB$, logo $\cos 58^o < \cos 41^o < \cos 25^o$.

3. **(E)** Existem dois tipos de ramais:

(i) os dois algarismos são iguais $(00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, \text{ e } 99)$, esses são em número de 10

(ii) os dois algarismos são distintos, nesse caso temos $10 \times 9 = 90$ números, e metade deles podem ser usados.

Logo, temos no máximo $10 + 45 = 55$.

4. Seja d a distância entre as duas cidades e h o horário de partida comum do ônibus, do trem e do avião. Como, $\text{distância} = \text{velocidade} \times \text{tempo}$, temos:
$d = 100 \times (20 - h)$ e $d = 300 \times (14 - h)$. Logo, $100 \times (20 - h) = 300 \times (14 - h)$ donde $h = 11$. Portanto, a distância entre as duas cidades é $d = 100 \times (20 - 11) = 900 km$. Logo, o avião gasta 1 hora da cidade A à cidade B, e portanto ele chega às 12 horas.

5. Observe que OC é um raio do círculo. Temos que OC=AB=$5\ cm$ por serem as diagonais do retângulo OACB. Logo, o diâmetro é $10 cm$.

6. Sejam c e p o número de copos e pratos que Iara pode comprar. Logo seu gasto é $2{,}5c + 7p$. Ela só tem R\$ $50{,}00$, logo $2{,}5c + 7p \leq 50$ (I) Além disso, ela quer comprar no mínimo 4 pratos e 6 copos, logo $p \geq 4$ e $c \geq 6$ (II). Devemos encontrar dois números inteiros c e p (número de copos e pratos são números inteiros) que satisfaçam (I) e (II).

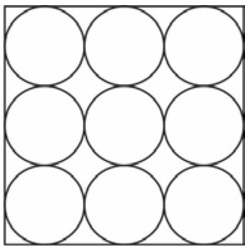
Se ela comprar 4 pratos sobram $50 - 4 \times 7 = 22$ reais para os copos. Como $22 = 8 \times 2{,}50 + 2$, ela pode comprar 8 copos (sobrando-lhe R\$ $2{,}00$).

Se ela comprar 5 pratos sobram $50 - 5 \times 7 = 15$ reais para os copos. Como $15 = 6 \times 2{,}50$, ela pode comprar 6 copos.

Se ela comprar 6 pratos sobram $50 - 6 \times 7 = 8$ reais para os copos, o que lhe permite compar apenas 1 copo que não é o que ela quer.

Logo, Iara pode comprar 4 pratos e 8 copos, ou 5 pratos e 6 copos.

1) Para fabricar 9 discos de papelão circulares para o Carnaval usam-se folhas quadradas de $10\,cm$ de lado como indicado na figura. Qual a área do papel não aproveitado?



(A) $25\ cm^2$
(B) $22{,}5cm^2$
(C) $21{,}5\ cm^2$
(D) $21\ cm^2$
(E) $22\ cm^2$

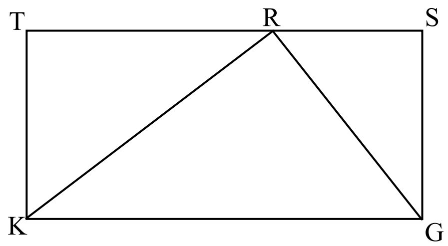
2) Determine quais afirmações são verdadeiras:

(A) $|-108|>100$ (B) $|5-13|=|5|-|13|$ (C) $|2-9|=9-2$
(D) $|a^2+5|=a^2+5$ (E) $|-6a|=6|a|$

3) Se $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=5$ então $\dfrac{x+y}{2y}$ é igual a:

(A) $5/2$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) $13y$ (D) $25y/2$ (E) 13

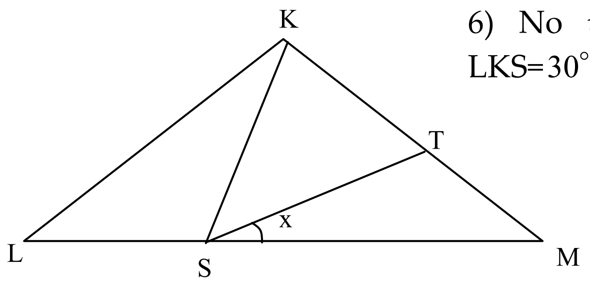
4) A figura mostra um retângulo KGST e um triângulo KGR. Os ângulos KRT e RGS são iguais. Se TR=6 e RS=2 qual é a área de KGR?



(A) 12 (B) 16 (C) $8\sqrt{2}$ (D) $8\sqrt{3}$ (E) 14

5) ***Sinal de um produto e sinal de um quociente:*** *a, b, c* e *d* são quatro números não nulos tais que os quocientes $\dfrac{a}{5}$, $\dfrac{-b}{7a}$, $\dfrac{11}{abc}$, $\dfrac{-18}{abcd}$ são positivos. Determine os sinais de *a, b, c* e *d*.

6) No triângulo KLM temos KL=KM, KT=KS e LKS=30°. Qual a medida do ângulo TSM?



(A) 10°
(B) 15°
(C) 20°
(D) 25°
(E) 30°

> **A área do círculo de raio r é πr^2**

1. Lembre que a área de um círculo é πr^2, onde r é o raio do círculo.
Se r é o raio dos círculos da figura, então a área pedida é:

$$\underbrace{\text{área do quadrado}}_{10\times 10=100} - \underbrace{\text{área dos 9 círculos}}_{9\times\pi r^2} = 100-9\times\pi\times\left(\frac{5}{3}\right)^2 = 100-25\pi$$

Usando a aproximação $\pi \approx 3{,}14$, obtemos $100-25\pi \approx 100-25\times 3{,}14 = 21{,}5cm^2$.

> $|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$

2. (A) $|-108| = 108 > 100$, verdadeira
(B) $|5-13| = |-8| = 8$ e $|5|-|13| = 1-13 = -8$, falsa.
(C) $|2-9| = -(2-9) = 9-2$ porque $2-9<0$, verdadeira.
(D) $|a^2+5| = a^2+5$ porque $a^2+5>0$ para qualquer valor de *a*, verdadeira.
(E) $|-6a| = |-6|\times|a| = 6|a|$, verdadeira.

3.**(E)** Elevando ao quadrado ambos os membros de $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = 5$, obtemos $\frac{x}{y} = 25$. Agora,

$$\frac{x+y}{2y} = \frac{1}{2}\times\frac{x+y}{y} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{y}\right) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{x}{y}+1\right) = \frac{1}{2}\times(25+1) = 13.$$

4.**(D)**Os triângulos TKR e GRS são proporcionais por serem triângulos retângulos com um ângulo agudo igual. Logo, temos: $\frac{RS}{TK} = \frac{GS}{TR}$. Como GS=TK segue que

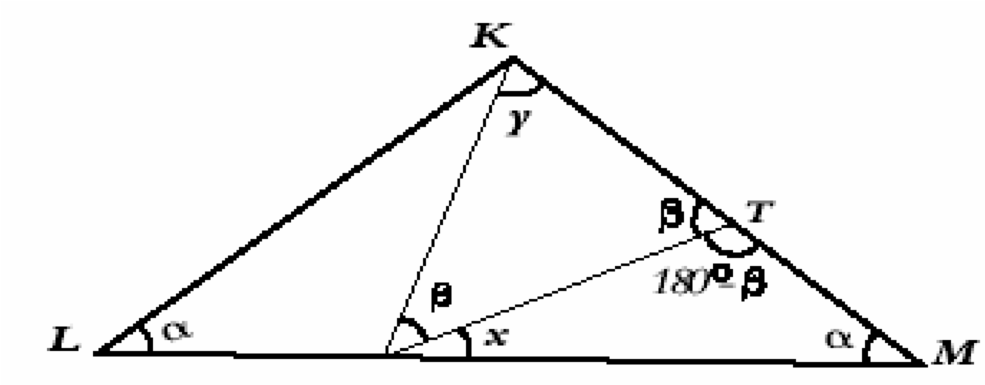
$TK^2 = RS\times TR = 2\times 6 = 12 \Rightarrow TK = 2\sqrt{3}$. A área do triângulo KGR vale

$$\frac{\overbrace{KG}^{\text{base}}\times\overbrace{TK}^{\text{altura}}}{2} = \frac{(TR+RS)\times 2\sqrt{3}}{2} = \frac{8\times 2\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$$

5. Solução:

- $\frac{a}{\underbrace{5}_{+}} > 0 \Rightarrow a > 0$
- Temos $a>0 \Rightarrow 7a>0$, logo: $\frac{-b}{\underbrace{7a}_{+}} > 0 \Rightarrow -b>0 \therefore b<0$
- $\frac{\overbrace{11}^{+}}{abc} > 0 \Rightarrow abc > 0$. Como $a>0$ e $b<0$ segue que $c<0$ $(\underbrace{a}_{+}\underbrace{b}_{-}\underbrace{c}_{-}>0)$
- $\frac{\overbrace{-18}^{-}}{abcd} > 0 \Rightarrow abcd < 0$, como $abc>0$ segue que $d<0$.

6. **(B)** Sejam $\widehat{TSM}=x, \widehat{SKT}=y, \widehat{KLS}=\alpha, \widehat{KTS}=\beta$. O triângulo KLM é isósceles porque tem dois lados iguais; consequentemente seus ângulos da base são iguais, isto é:$\widehat{KLS}=\widehat{KMS}=\alpha$. Analogamente, o triângulo KST também é isósceles e portanto $\widehat{KST}=\widehat{KTS}=\beta$. Usaremos agora que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Acompanhe na figura:



- No triângulo STM temos: $x+\alpha+180^o-\beta=180^o \Rightarrow \quad x=\beta-\alpha$
- No triângulo KLM temos: $\alpha+\alpha+30^o+y=180^o \Rightarrow y=150^o-2\alpha$.

Logo,

$\beta+\beta+150^o-2\alpha=180^o \Rightarrow \beta-\alpha=15^o$. Portanto, $x=15^o$.

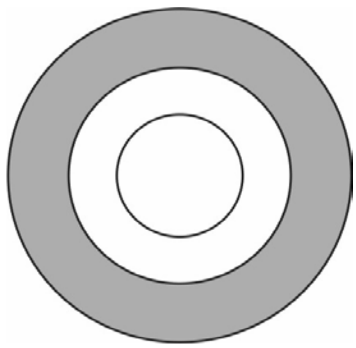
1) Quantos são os pares diferentes de inteiros positivos (*a, b*) tais que $a+b \leq 100$ e $\dfrac{a+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+b}=13$?

(A) 1 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 13

2) Se $x+|x|+y=5$ e $x+|y|-y=6$ então $x+y$ é:

(A) -1 (B) 11 (C) $9/5$ (D) 1 (E) -11

3) Na figura, os três círculos são concêntricos, e as áreas do menor círculo e do maior anel (em cinza) são iguais. O raio do menor círculo é $5\,cm$ e do maior $13\,cm$. Qual o raio do círculo intermediário?



(A) 12
(B) 11
(C) $10\sqrt{65}$
(D) $5\sqrt{3}$
(E) $12\sqrt{2}$

4) Encontre os algarismos que estão faltando sobre cada um dos traços:

(a) $\dfrac{126}{8\_}=\dfrac{21}{\_\,\_}$; (b) $\dfrac{\_\,\_8}{33\_}=\dfrac{4}{5}$

5) ***Uma a mais!*** Na lista de frações, no quadro ao lado, temos:

- 2 frações cuja soma é $\dfrac{5}{2}$
- 2 frações cuja diferença é $\dfrac{5}{2}$
- 2 frações cujo produto é $\dfrac{5}{2}$
- 2 frações cujo quociente é $\dfrac{5}{2}$

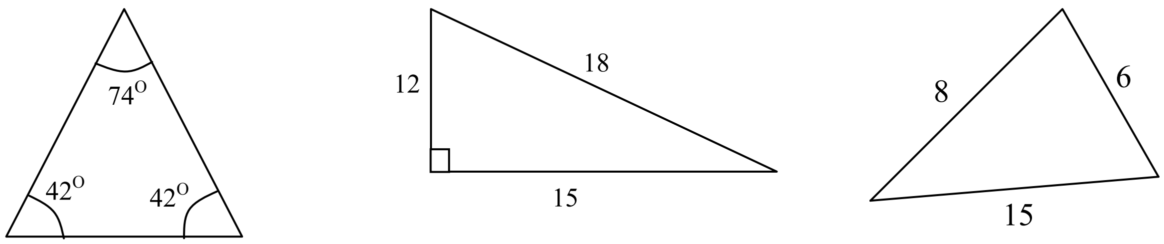
$$\frac{5}{4} \quad \frac{17}{6} \quad \frac{-5}{4} \quad \frac{10}{7} \quad \frac{2}{3}$$
$$\frac{14}{8} \quad \frac{-1}{3} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{-3}{2}$$

Encontre a fração que está sobrando.

6) ***O café, o bolo e o gato*** – Dez minutos antes de colocar o bolo no forno, eu coloquei meu gato do lado de fora da casa. O bolo deve cozinhar por 35 minutos, então eu coloquei o despertador para tocar 35 minutos, após colocar o bolo no forno. Imediatamente fiz um café para mim, o que me tomou 6 minutos. Três minutos antes de acabar de beber o café o gato entrou em casa. Isso foi 5 minutos antes do despertador tocar.O telefone tocou no meio do tempo entre eu acabar de fazer o café e o gato entrar em casa. Falei ao telefone por 5 minutos e desliguei. Eram 3h59min da tarde.

(a) A que horas coloquei o gato fora de casa?
(b) Quantos minutos depois de colocar o gato fora de casa, o despertador tocou?
Quanto tempo o gato estava fora de casa até o momento em que o telefone tocou?

7) Quais figuras estão corretas?



1. **(C)** Temos: $13=\dfrac{a+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}+b}=\dfrac{\dfrac{ab+1}{b}}{\dfrac{1+ab}{a}}=\dfrac{a}{b}$. Logo, a =13b e como $a+b\leq 100$ segue que $14b\leq 100\Rightarrow b\leq 7{,}14$. Como b é inteiro devemos ter $b\leq 7$. Logo os pares são em número de 7, a saber:

$(13\,,1)$, $(26\,,2)$, $(39\,,3)$, $(52\,,4)$, $(65\,,5)$, $(78\,,6)$, $(91\,,7)$

2. **(C)** ☛ Se $x<0$, então $|\,x\,|=-x$ e da 1ª equação temos $x+(-x)+y=5\Rightarrow y=5$. Substituindo esse valor na 2ª equação obtemos x=6 o que não é possível pois estamos supondo *x*<0. Logo, não há solução para $x<0$.
☛ Se $y\geq 0$, então |y|=y e da 2ª equação segue que x=6. Substituindo esse valor na 1ª equação encontramos y=-7, o que não é possível porque estamos supondo que y é positivo.
☛Concluímos que não há solução para $y\geq 0$ e $x<0$. Logo, $y<0$ e $x\geq 0$, e as equações são: $2x+y=5$ e $x-2y=6$. Resolvendo obtemos $x=\dfrac{16}{5}$ e $y=-\dfrac{7}{5}$. Portanto, $x+y=\dfrac{9}{5}$.

3. **(A)**A área do menor círculo é $5^2\pi=25\pi cm^2$ e do maior é $13^2\pi=169\pi cm^2$. Seja *r* o raio do círculo intermediário, então a área do maior anel é $169\pi-\pi r^2$. Logo, $169\pi-\pi r^2=25\pi\Rightarrow r^2=169-25=144$, donde $r=12cm$

4.(a) Observe que $126\div 6=21$, logo, o numerador 126 foi dividido por 6 para obter o numerador 21 da outra fração. Logo, o denominador $8\_$ também é divisível por 6. O único número da forma $8\_$ que é divisível por 6 é 84, e $84\div 6=18$. Podemos então completar as frações:

$$\frac{126}{8\underline{4}} \underset{\xrightarrow{\div 6}}{\overset{\xrightarrow{\div 6}}{=}} \frac{21}{\underline{1}8}$$

(b) Note que $33\_$ deve ser múltiplo de 5, logo só pode ser 330 ou 335. Temos

Como $\dfrac{4}{5}=0{,}8$, segue que $\dfrac{\_\_8}{330}=0{,}8$ ou $\dfrac{\_\_8}{335}=0{,}8$. Temos $330\times 0{,}8=264$ e $335\times 0{,}8=268$, segue que $-\,-$ 8=268 e 33_=335. Podemos completar as frações: $\dfrac{268}{335}=\dfrac{4}{5}$. Note que $\dfrac{268}{335}=\dfrac{268\div 67}{335\div 67}=\dfrac{4}{5}$.

5. (a) 2 frações cujo produto é $\frac{5}{2}$: $\frac{10}{7}\times\frac{14}{8}=\frac{10}{7}\times\frac{7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

$$\cancel{\frac{5}{4}} \quad \frac{17}{6} \quad \cancel{\frac{-5}{4}} \quad \frac{10}{7} \quad \frac{2}{3}$$
$$\frac{14}{8} \quad \frac{-1}{3} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{-3}{2}$$

(b) 2 frações cuja diferença é $\frac{5}{2}$: $\frac{5}{4}-\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{5}{4}+\frac{5}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

$$\cancel{\frac{5}{4}} \quad \frac{17}{6} \quad \cancel{\frac{-5}{4}} \quad \cancel{\frac{10}{7}} \quad \frac{2}{3}$$
$$\cancel{\frac{14}{8}} \quad \frac{-1}{3} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{-3}{2}$$

(c) 2 frações cuja soma é $\frac{5}{2}$: $\frac{17}{6}+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{17}{6}-\frac{1}{3}=\frac{17}{6}-\frac{2}{6}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$

$$\cancel{\frac{5}{4}} \quad \cancel{\frac{17}{6}} \quad \cancel{\frac{-5}{4}} \quad \cancel{\frac{10}{7}} \quad \frac{2}{3}$$
$$\cancel{\frac{14}{8}} \quad \cancel{\frac{-1}{3}} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{-3}{2}$$

(d) 2 frações cujo quociente é $\frac{5}{2}$: $\frac{5}{3}\div\frac{2}{3}=\frac{5}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$.

$$\cancel{\frac{5}{4}} \quad \cancel{\frac{17}{6}} \quad \cancel{\frac{-5}{4}} \quad \cancel{\frac{10}{7}} \quad \cancel{\frac{2}{3}}$$
$$\cancel{\frac{14}{8}} \quad \cancel{\frac{-1}{3}} \quad \cancel{\frac{5}{3}} \quad \frac{-3}{2}$$

Logo, a fração que está sobrando é –3/2.

6. Vamos listar os eventos ocorridos e contar o tempo gasto em cada um. A primeira atividade foi colocar o gato for a da casa, logo nossa lista começa com essa atividade e o tempo é contado a partir dela.

Atividade	Tempo depois que o gato foi posto fora de casa
Gato fora de casa	0 minutos
Bolo no forno	10 minutos
Fazer o café	10+6=16 minutos
Despertador toca	35+10=45 minutos
Gato entra em casa	45-5=40 minutos
Acabar de tomar o café	40+3=43 minutos
Telefone toca	16+(40-16):2=28 minutos
Desligar o telefone	28+5 =33 minutos

Podemos agora dar as respostas.

(a) Às 3:59horas desliguei o telefone, o que ocorreu 33 minutos depois de colocar o gato fora de casa. Logo a resposta é 3:59-0:33=3:26.
(b) O despertador toca 45 minutos após colocar o gato for a de casa.
(c) 28 minutos

Podemos saber exatamente a hora de cada atividade; veja na tabela a seguir.

Atividade	Tempo depois que o gato foi posto fora de casa	Hora atual
Gato fora de casa	0 minutos	3:59-0:33=3:26
Bolo no forno	10 minutos	3:26+0:10=3:36
Fazer o café	10+6=16 minutos	3:26+0:16=3:42
Despertador toca	35+10=45 minutos	3:26+0:45=4:11
Gato entra em casa	45-5=40 minutos	3:26+0:40=4:06
Acabar de tomar o café	40+3=43 minutos	3:26+0:43=4:09
Telefone toca	16+(40-16):2=28 minutos	3:26+0:28=3:54
Desligar o telefone	28+5 =33 minutos	3:59

7. Figura 1: Não está correta porque a soma dos ângulos internos não dá 180°

   Figura 2: Não está correta porque o comprimento dos lados não satisfaz o Teorema de Pitágoras, logo o triângulo não pode ser retângulo

   Figura 3: Não está correta porque um dos lados não é menor que a soma dos outro dois: $15 > 6 + 8$

1) Resolva a equação $\frac{|x-1|}{x^2}=6$.

2) Se um arco de 60º num círculo I tem o mesmo comprimento que um arco de 45º num círculo II, então a razão entre a área do círculo I com a do círculo II é:

(A)16/9 (B) 9/16 (C) 4/3 (D) 3/4 (E) 6/9

3) Se $x>0$, $y>0$, $x>y$ e $z\neq 0$, então a única opção errada é:

(A) $x+z>y+z$ (B) $x-z>y-z$ (C) $xz>yz$
(D) $\frac{x}{z^2}>\frac{y}{z^2}$ (E) $xz^2>yz^2$

4) Resolva geometricamente as equações:

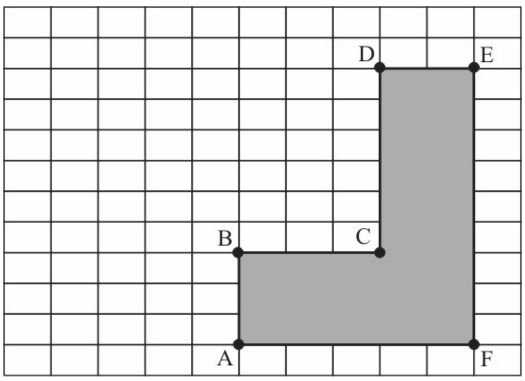
(a) $|x-5|=2$ (b) $|x+3|=1$
(c) $|3x-7|=9$ (d) $|x+2|=|x-5|$

5) A pista de um autódromo tem $20\,km$ de comprimento e forma circular. Os pontos marcados na pista são: A, que é o ponto de partida, B que dista $5\,km$ de A no sentido do percurso, C que dista $3\,km$ de B no sentido do percurso, D que dista $4\,km$ de C no sentido do percurso e E que dista $5\,km$ de D no sentido do percurso. Um carro que parte de A e pára após percorrer $367\,km$ estará mais próxima de qual dos 5 pontos?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

6) No diagrama ao lado, todos os quadradinhos têm $1\,cm$ de lado. Qual é o maior comprimento?

(A) AE
(B) $CD+CF$
(C) $AC+CF$
(D) FD
(E) $AC+CE$



7) Quantos dentre os números $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ satisfazem a desigualdade $-3x^2<-14$?

(A)1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

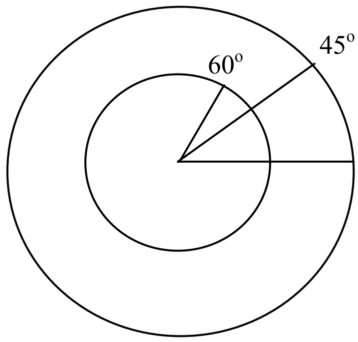
1. <u>1º caso</u>: $x \geq 1$

Nesse caso $x-1 \geq 0$, donde $|x-1| = x-1$. A equação toma a forma $\frac{x-1}{x^2} = 6$ ou $6x^2 - x + 1 = 0$. Esta equação não tem raízes reais porque $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 6 \times 1 = 1 - 24$ é negativo. Logo, não temos soluções maiores ou iguais a 1.

<u>2º caso</u>: $x < 1$

Nesse caso $x-1 < 0$, donde $|x-1| = -(x-1) = 1-x$. A equação toma a forma $\frac{1-x}{x^2} = 6$ ou $6x^2 + x - 1 = 0$. Resolvendo esta equação temos: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\times 6\times(-1)}}{2\times 6} = \frac{-1\pm\sqrt{25}}{12} = \frac{-1\pm 5}{12} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{3}$. Como essas duas raaízes são menores que 1, elas são as raízes da equação do enunciado.

2. **(B)** Como o arco de 60º do círculo I tem o mesmo comprimento que o arco de 45º no círculo II, concluímos que o raio do círculo I é menor que o do círculo II. Denotemos por r e R os raios dos círculos I e II respectivamente.



No círculo I o comprimento do arco de 60º, é igual a 1/6 de seu comprimento, ou seja $\frac{2\pi r}{6} = \frac{\pi r}{3}$.

Analogamente, no círculo II o comprimento do arco de 45º, é igual a 1/8 de seu comprimento, ou seja $\frac{2\pi R}{8} = \frac{\pi R}{4}$.

Logo, $\frac{\pi r}{3} = \frac{\pi R}{4} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{3}{4}$. Finalmente temos:

$$\frac{\text{área do círculo I}}{\text{área do círculo II}} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

3. Nessa questão usaremos as propriedades das desigualdades.
Podemos somar o mesmo número a ambos os membros de uma desigualdade sem alterar o sinal, temos: $x > y \Rightarrow \begin{cases} x + z > y + z \text{ (somando } z \text{ a ambos os membros)} \\ x - z > y - z \text{ (somando -}z\text{ a ambos os membros)} \end{cases} \Rightarrow$ (A) e (B) corretas

A opção (C) é falsa porque z pode ser negativo, por exemplo: x=5, y=3 e z=-2 temos:
5>3, no entanto $\underbrace{5\times(-2)}_{xz} = -10 < -6 = \underbrace{3\times(-2)}_{yz}$.

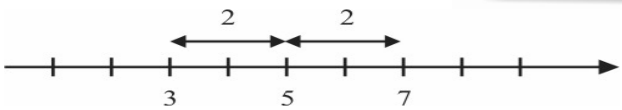
Como $z \neq 0$ então $z^2 > 0$ e $\frac{1}{z^2} > 0$, logo as opções (D) e (E) estão corretas porque foram obtidas multiplicando-se ambos os membros de $x > y$ por um número positivo; em (E) por z^2 e em (D) por $\frac{1}{z^2}$.

Interpretação geométrica de módulo:

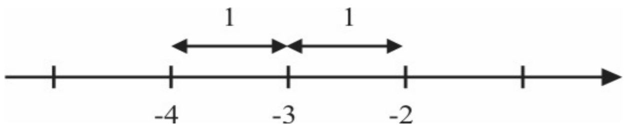
$|a - b|=$ distância entre a e b

4. Solução:

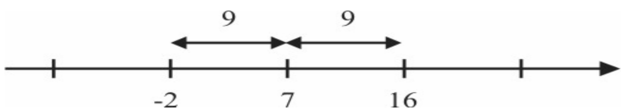
(a) $|x - 5| = 2 \Leftrightarrow$ números cuja distância ao 5 é 2.
Logo as raízes são 3 e 7.



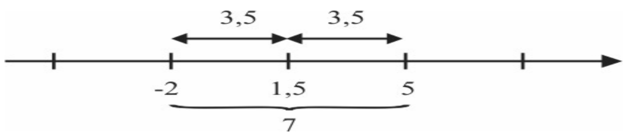
(b) $|x + 3| = 1 \Leftrightarrow$ números cuja distância ao -3 é 1.
Logo as raízes são -4 e -2.



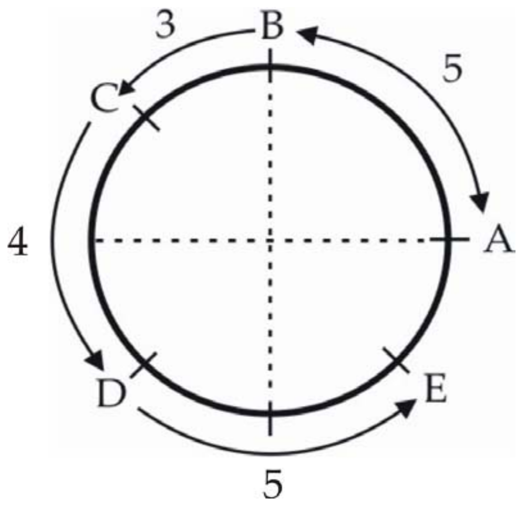
(c) Fazendo a mudança de variável $y = 3x$, a equação toma a forma $|y - 7| = 9 \Leftrightarrow$ números cuja distância ao 7 é 9.
Logo as raízes são $y = -2$ e $y = 16$.
Destrocando a variável temos $3x = -2$ e $3x = 16$, e obtemos as raízes da equação: $x = -\frac{2}{3}$ e $x = \frac{16}{3}$.



(d) As raízes da equação $|x + 2| = |x - 5|$ são os números equidistantes de -2 e de 5. Esses números só podem estar entre -2 e 5.
Logo, a solução é $x = 1,5$



5. **(C)** Vamos marcar os 4 pontos a partir de A.
Como o comprimento é de $20\,km$, o comprimento de cada um dos 4 quadrantes é $5\,km$. Podemos então marcar os pontos. Como $367 = 18 \times 20 + 7$, o carro deu 18 voltas completas e percorreu mais $7\,km$ a partir de A. Logo, ele passa $2\,km$ após B, o que significa que ele pára $1\,km$ de C. Portanto, C é o ponto mais próximo.



6. Note que :

- AE é a hipotenusa de um triângulo de catetos 5cm e 9 cm
- CF é a hipotenusa de um triângulo de catetos 2cm e 3 cm
- AC é a hipotenusa de um triângulo de catetos 3cm e 3 cm
- FD é a hipotenusa de um triângulo de catetos 2cm e 9 cm
- CE é a hipotenusa de um triângulo de catetos 2cm e 6 cm

Usando o Teorema de Pitágoras calculamos essas hipotenusas:

$$AE = \sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{106} \approx 10,3$$

$$CF = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3,6 \Rightarrow CD + CF \approx 5 + 3,6 = 8,6$$

$$AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} \approx 4,2 \Rightarrow AC + CF \approx 4,2 + 3,6 = 7,8$$

$$FD = \sqrt{2^2 + 9^2} = \sqrt{85} \approx 9,22$$

$$CE = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} \approx 6,3 \Rightarrow AC + CE \approx 4,2 + 6,3 = 10,5$$

Logo, o maior é *AC*+*CE*

7. **(D)** Se $-3x^2 < -14$ então $3x^2 > 14$ ou $x^2 > \dfrac{14}{3} = 4\dfrac{2}{3}$. Como estamos olhando apenas para valores inteiros de x, então x^2 também é inteiro. Sendo $x^2 > 4\dfrac{2}{3}$, concluímos que x^2 é no mínimo 5. Os números acima que satisfazem essa condição são $-5, -4, -3$ e 3. Logo a resposta é 4.

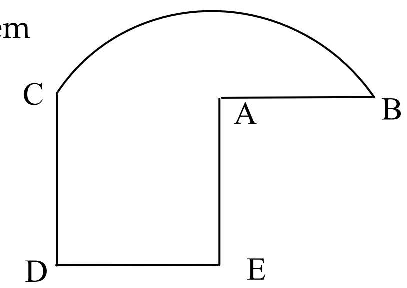
DESAFIOS

1. **(N2/N3)** Partindo do número 265863 e utilizando uma única vez cada uma das operações $+$; $-$; $\times$; $\div$, e também uma única vez os números $51, 221, 6817, 13259$, podemos obter vários números, por exemplo 54911:

$$265863 \xrightarrow{\div\, 221} 1203 \xrightarrow{\times\, 51} 61353 \xrightarrow{-13259} 48094 \xrightarrow{+6817} 54911$$

Encontre a cadeia que permite obter o menor número inteiro positivo.

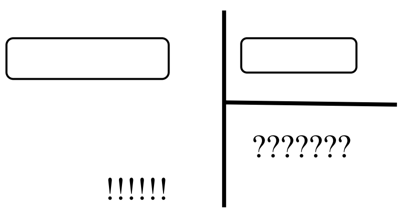
2. **(N2/N3)**Você sabe repartir a figura ao lado em duas partes idênticas (que possam ser superpostas)?AB=AE=ED=CD=CA



3.**(N1/N2/N3)** ***Cada um em seu Estado*** - Amélia, Bruno, Constância e Denise são 4 amigos que moram em Estados diferentes e se encontram sentados numa mesa quadrada, cada um ocupa um lado da mesa.

- À direita de Amélia está quem mora no Amazonas;
- Em frente à Constância está a pessoa que mora em São Paulo;
- Bruno e Denise estão um ao lado do outro;
- Uma mulher está à esquerda da pessoa que mora no Ceará.
- Um dos quatro mora na Bahia. Quem?

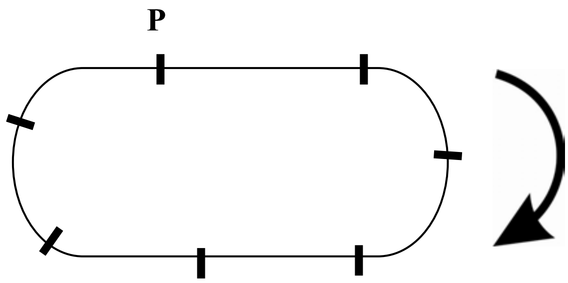
4. **(N1/N2)** ***Divisão-*** Numa divisão, aumentando o dividendo de 1989 e o divisor de 13, o quociente e o resto não se alteram. Qual é o quociente?



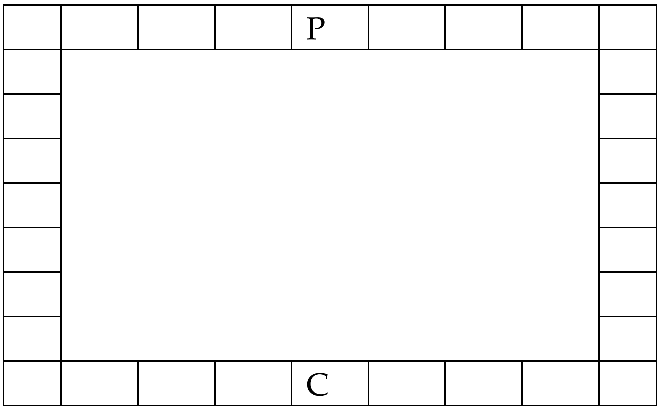
5. **(N1/N2)** ***Extra-terrestre*** – No planeta Staurus, os anos têm 228 dias (12 meses de 19 dias). Cada semana tem 8 dias: Zerum, Uni, Duodi, Trio, Quati, Quio, Seise e Sadi. Sybock nasceu num duodi que foi o primeiro dia do quarto mês. Que dia da semana ele festejará seu primeiro aniversário?

6. **(N1/N2)** ***Que família!*** Numa família cada menino tem o mesmo número de irmãos que de irmãs, e cada menina tem o dobro de irmãos que de irmãs. Qual é a composição dessa família?

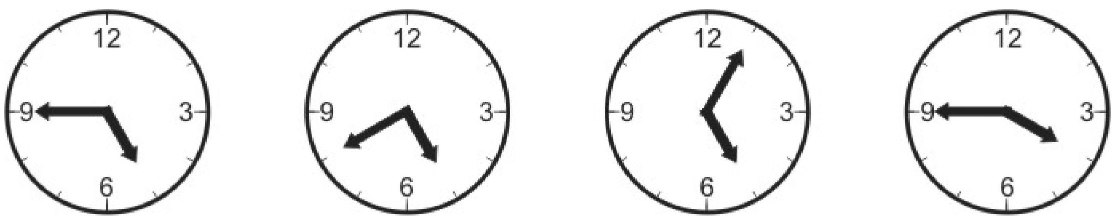
7. **(N1)** ***Siga a pista*** **-** Na pista de corrida ao lado, os 7 pontos de referência são marcados a cada $50\,m$. Os atletas devem fazer $2\,km$ no sentido indicado pela flexa. Eles partem do ponto P. Marque o ponto de chegada C.



8. **Cara ou Coroa** – Jerônimo joga no tabuleiro ao lado da seguinte maneira: Ele coloca uma peça na casa "PARTIDA" e ele move a peça da seguinte maneira: ele lança uma moeda, se der CARA ele avança duas casas, e se der COROA ele recua uma casa. Jerônimo lançou a moeda 20 vezes e conseguiu chegar na casa CHEGADA. Quantas vezes a moeda deu CARA?



9. **(N1)** ***Os relógios*** – Um só dos quatro relógios indica a hora correta. Um está 20 minutos adiantado, outro está 20 minutos atrasado, e o quarto está parado. Qual é a hora certa?



10. **(N1)** ***Contas do papagaio*** **-** Rosa tem um papagaio que faz contas de um modo estranho. Cada vez que Rosa diz dois números ele faz a mesma conta, veja:

- Se Rosa diz "4 e 2" o papagaio responde "9"
- Se Rosa diz "5 e 3" o papagaio responde "12"
- Se Rosa diz "3 e 5" o papagaio responde "14"
- Se Rosa diz "9 e 7" o papagaio responde "24"
- Se Rosa diz "0 e 0" o papagaio responde "1"

Se Rosa diz "1 e 8" o que responde o papagaio?

11. **(N1/N2)** ***As férias de Tomás*** **-** Durante suas férias, Tomás teve 11 dias com chuva. Durante esses 11 dias, se chovia pela manhã havia sol sem chuva à tarde, e se chovia à tarde, havia sol sem chuva pela manhã. No total, Tomás teve 9 manhãs e 12 tardes sem chuva. Quantos dias duraram as férias de Tomás?

12**. (N3)** ***Maratona de Matemática*** – Numa Maratona de Matemática, o número de questões é muito grande. O valor de cada questão é igual à sua posição na prova: 1 ponto para a questão 1, 2 pontos para a questão 2, 3 pontos para a questão 3, 4 pontos para a questão 4, …, 10 pontos para a questão 10, … e assim por diante. Joana totalizou 1991 pontos na prova, errando apenas uma questão e acertando todas as outras. Qual questão ela errou?Quantas questões tinha a prova?

13. **(N1)** – Escolhi quatro frações entre $1/2, 1/4, 1/6, 1/10$ e $1/12$ cuja soma é 1. Quais foram as frações que eu não escolhi?

14. Um jogo- Regras;

(i) Partindo da casa em cinza com o número 3 deve-se chegar à casa TOTAL deslocando-se somente por linhas ou colunas e calculando os pontos.

(ii) Quando nos deslocamos por uma linha só podemos adicionar, por exemplo passando da 3 para a –6 ao lado, obtemos 3+(-6)=-3 pontos

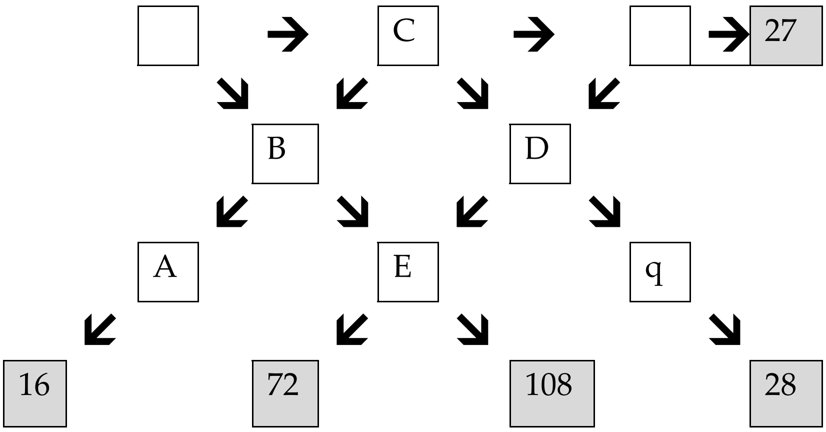
(iii) Quando nos deslocamos por uma coluna só podemos subtrair, por exemplo passando da 3 para a 5 abaixo, obtemos 3-5=-2 pontos.

(iv) Só é permitido passar uma vez por cada casa.

Qual o caminho que dá o maior total?

3	-6	9	-9
5	7	2	-1
-8	-3	-5	4
-4	1	6	8
0	-2	-7	TOTAL

15. **(N1/N2/N3)** ***Produtos em linha*** - Em cada uma das casas em branco do quadro abaixo escrevemos um algarismo dentre oito algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 de modo que os produtos efetuados em linha reta seguindo as flexas forneçam os valores indicados dentro dos casas em cinza. Em qual casa se encontra o número 2?



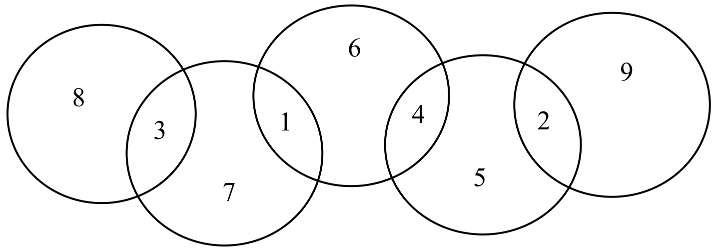
16. **(N2/N3)** ***Código Postal*** – Para fazer a separação em regiões da correspondência que deve ser entregue, um serviço postal indica sobre os envelopes um código postal com uma série de 5 grupos de bastões, que podem ser lidos por um leitor ótico. Os algarismos são codificados como a seguir:

0 ••|||	5 |•|•|
1 •|•||	6 |•||•
2 •||•|	7 ||••|
3 •|||•	8 ||•|•
4 |••||	9 |||••

A leitura se faz da direita para a esquerda, por exemplo o código postal 91720 se escreve como ••|||•||•|||••|•|•|||||••. Em detalhe: $\underbrace{\bullet\bullet|||}_{0}\underbrace{\bullet||\bullet|}_{2}\underbrace{||\bullet\bullet|}_{7}\underbrace{\bullet|\bullet||}_{1}\underbrace{|||\bullet\bullet}_{9}$

Note que a codificação de 94, $\underbrace{|\bullet\bullet||}_{4}\underbrace{|||\bullet\bullet}_{9}$, tem um eixo vertical de simetria. Encontre os códigos de $47000 \text{ a } 47999$, aqueles que apresentam um eixo vertical de simetria.

17**. (N1/N2/N3)** ***Anéis olímpicos*** – Os números de 1 a 9 foram colocados dentro de cinco anéis olímpicos de tal modo que dentro de cada anel a soma é 11.



Disponha os 9 números de outra maneira para que a soma dentro de cada anel seja a maior possível.

18. **(N2/N3)**Denise e Antônio jogam uma série de 8 jogos no qual o vencedor da primeira partida ganha 1 ponto, o da segunda 2 pontos, o da terceira 4 pontos, o da quarta 8 pontos e assim por diante, multiplicando por 2 o número de pontos de uma partida para a outra. No final, Denise ganhou 31 pontos a mais que Antônio e não houve empate em nenhuma das partidas. Quais partidas Denise ganhou?

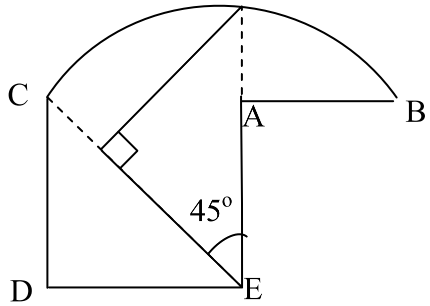
19. **(N1/N2)**Você sabe repartir um quadrado em 7 quadrados menores?

20.**(N1/N2/N3)** *Ilha misteriosa* -Numa misteriosa ilha havia 13 camaleões cinza, 15 camaleões marrons e 17 camaleões vermelhos. Quando dois camaleões de cores diferentes se encontram, os dois tomam a terceira cor. Por exemplo, se um cinza se encontra com um vermelho, então os dois ficam marrons. Por causa de uma tempestade, ocorreram 2 encontros cinza-vermelho, 3 encontros marrom-vermelho e 1 encontro cinza-vermelho, quantos camaleões de cada cor ficaram na ilha?

21. **(N3)*****Universo hostil -*** Num deserto há cobras, ratos e escorpiões. Cada manhã, cada cobra mata um rato. Cada meio-dia, cada escorpião mata uma cobra. Cada noite, cada rato mata um escorpião. Ao final de uma semana, à noite, só restava um rato. Quantos ratos havia na manhã no início da semana?

1. $265863 \xrightarrow{\div\ 6817} 39 \xrightarrow{+\ 221} 260 \xrightarrow{\times\ 51} 13260 \xrightarrow{-13259} 1$

2.



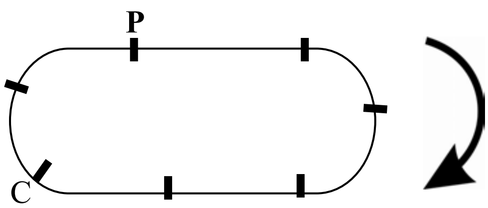
3. Bruno ou Amélia (O desafio tem duas soluções).

4. 153

5. Seise

6. 3 meninas e 4 meninos

7.



8. 12

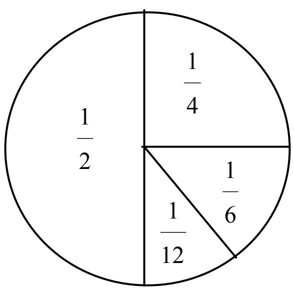
9. 17 h 05 min

10. 1

11. 16 dias

12. 25 e 63, respectivamente.

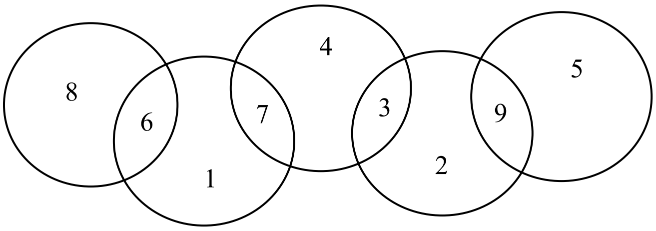
13.



15.casa B

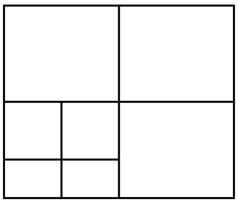
16. 47679 e 47779

17.



18. 1ª, 2ª, 3ª, 4ª e 8ª

19.



20. 16 cinzas, 18 marrons e 11 vermelhos

21. 1873